

Elettromagnetismo Avanzato

Dispense di: Daniele Fedeli^{*}; Fares Hasan[†]; Luca Milanese[‡]; Guglielmo Di Grazia [§]
Lezione tenuta da: Luca Milanese, Guglielmo Di Grazia

5 febbraio 2026

Sommario

Lo scopo della lezione di secondo livello è di mostrare le tecniche per affrontare problemi avanzati di elettromagnetismo. Nello specifico parleremo di leggi di Maxwell in forma differenziale, aspetti avanzati dell'elettrostatica (in particolare il metodo delle immagini), equazione di continuità, magnetismo, equazione d'onda e teoria della diffrazione.

^{*} daniele.fedeli@sns.it

[†] fares.hasan@sns.it

[‡] luca.milanese@sns.it

[§] guglielmo.digrazia@sns.it

— INDICE —

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Elettrostatica | 3 |
| 1.1 | Le leggi di Maxwell in elettrostatica | 3 |
| 1.1.1 | Esercizio svolto: potenziale su un tetraedro | 4 |
| 1.1.2 | Soluzione | 4 |
| 1.2 | Discontinuità del campo elettrico | 4 |
| 1.3 | Conduttori | 5 |
| 1.4 | Condensatori e capacità | 6 |
| 1.4.1 | Esercizio svolto: triangolo equilatero di conduttori | 7 |
| 1.4.2 | Soluzione | 7 |
| 1.5 | Richiamo sulle cariche immagine | 8 |
| 1.5.1 | Esempio: carica davanti alla sfera | 8 |
| 1.5.2 | Esercizio svolto: sistema di conduttori | 9 |
| 1.5.3 | Soluzione | 9 |
| 1.6 | Teorema di unicità | 9 |
| 1.7 | Riassunto della procedura per uso di cariche immagine | 11 |
| 1.8 | Dipoli elettrici | 11 |
| 1.8.1 | Esercizio svolto: carica sul piano | 12 |
| 1.8.2 | Soluzione | 12 |
| 1.8.3 | Esercizio svolto: sfere che si compenetrano | 14 |
| 1.8.4 | Soluzione | 14 |
| 2 | Corrente e magnetostatica | 15 |
| 2.0.1 | Esercizio svolto: particelle tra due griglie | 17 |
| 2.0.2 | Soluzione | 18 |
| 3 | Cenni all'elettrodinamica | 18 |
| 4 | Teoria della diffrazione | 20 |
| 4.1 | Il Setup | 20 |
| 4.2 | Caso $F \gg 1$: ottica geometrica | 21 |
| 4.3 | Fasori ed equazione d'onda | 22 |
| 4.4 | Integrale di Rayleigh-Sommerfeld | 23 |
| 4.5 | Caso $F \approx 1$: diffrazione di Fresnel | 24 |
| 4.6 | Caso $F \ll 1$: diffrazione di Fraunhofer | 24 |
| 4.6.1 | Apertura rettangolare | 25 |
| 4.6.2 | Multiple aperture molto piccole | 25 |
| 4.6.3 | Apertura circolare | 26 |
| 4.6.4 | Lente di Billet | 26 |
| | Esercizi | 28 |

SEZ. 1 — ELETTROSTATICA

1.1 Le leggi di Maxwell in elettrostatica

Iniziamo con un richiamo riassuntivo alle leggi dell'elettrostatica. Conosciamo la legge di Coulomb per la forza tra cariche, da essa definiamo il campo generato da una distribuzione di carica statica ρ in un punto \vec{r} dello spazio:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'.$$

Manipolando questa legge si riescono ad ottenere due fatti molto importanti. Il primo è il noto **teorema di Gauss**:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0},$$

che in forma locale diventa

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Il secondo afferma che la *circuitazione* del campo è sempre nulla:

$$\Gamma(\vec{E}, \gamma) = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0,$$

(dove Γ la circuitazione e γ una curva chiusa) o, equivalentemente, che il campo elettrico è *conservativo*, il che in forma locale¹ diventa

$$\text{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}.$$

Ricordando che un campo vettoriale conservativo può essere scritto come gradiente di una funzione “potenziale”, si definisce poi il potenziale elettrostatico in modo che $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Vale la pena di notare che tale equazione, da sola, determina V a meno di una costante additiva: tipicamente, si sceglie tale costante in modo che la funzione risultante sia “bella” (ad esempio, in molti casi, si può far in modo che, a grandi distanze, il potenziale tenda a zero, come siete abituati a vedere).

Possiamo esprimere quindi le due leggi in un'ulteriore forma compatta:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

La precedente equazione, che mette in relazione il potenziale elettrico con la densità di carica, è detta **equazione di Poisson**. Per avere una visione più chiara di ciò che stiamo facendo riportiamo l'equazione in coordinate cartesiane

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Per concludere questa sezione introduttiva vogliamo anche richiamare la validità del *principio di sovrapposizione lineare* in elettrostatica tramite un semplice esempio.

¹Attenzione! La freccia sempre valida è “conservativo implica rotore nullo”. Il viceversa è vero in un *dominio semplicemente connesso*, cioè senza buchi “inevitabili”. Ad esempio, come saprete (o vedrete più avanti), il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito percorso da una corrente costante non è conservativo: provate tuttavia a calcolarne il rotore! In tal caso il “buco inevitabile” è proprio la retta corrispondente al filo: se avete una curva chiusa attorno a tale linea, non potete deformarla in modo continuo a un punto senza che la curva passi attraverso la linea.

§ 1.1.1. **Esercizio svolto: potenziale su un tetraedro.** — È dato un tetraedro regolare di lato L vuoto all'interno. Le 4 facce sono tenute a potenziali costanti V_1, V_2, V_3, V_4 . Si determini il potenziale nel centro.

§ 1.1.2. **Soluzione.** — Si intuisce immediatamente che il potenziale al centro sarà la media aritmetica dei 4 potenziali sulle facce. Vorremmo sfruttare la simmetria del sistema e il principio di sovrapposizione lineare per mostrarlo. Osserviamo per esempio che se operiamo una rotazione che manda il tetraedro in sé stesso ma scambia i potenziali sulla facce allora il potenziale al centro deve rimanere invariato. Chiamiamo il potenziale al centro V_0 . Prendiamo ora tutte e 24 le possibili permutazioni dei potenziali sulle 4 facce (supponendo di averle numerate). Sovrapponiamo le 24 configurazioni risultanti e otteniamo che, per il principio di sovrapposizione lineare il potenziale al centro sarà $24V_0$. Osserviamo inoltre che su ogni faccia il potenziale sarà $6V_1 + 6V_2 + 6V_3 + 6V_4$. Abbiamo dunque un tetraedro che possiede lo stesso potenziale su tutte e 4 la facce. Non essendo presente carica all'interno del tetraedro la soluzione sarà campo nullo e potenziale costante su tutto il volume, da cui otteniamo che per il potenziale al centro vale

$$24V_0 = 6V_1 + 6V_2 + 6V_3 + 6V_4 \Rightarrow V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}.$$

Dunque tramite il principio di sovrapposizione lineare e le simmetrie siamo riusciti a confermare formalmente l'intuizione che il potenziale al centro sia la media dei potenziali sulla facce.

1.2 Discontinuità del campo elettrico

Vorremmo ora studiare e formalizzare le *discontinuità del campo elettrico* nei pressi di una densità di carica superficiale. In particolare vogliamo usare le leggi di Maxwell per determinare la discontinuità.

Supponiamo di avere una superficie generica con una densità superficiale² σ dipendente dalla posizione. Riduciamoci a osservare un piccolo intorno nei pressi di un punto della superficie in modo che la superficie appaia piatta e i due campi (separati dalla superficie) e la σ risultino uniformi. Utilizziamo ora il teorema di Gauss in un piccolo cilindretto di superficie S e altezza h con $h^2 \ll S$, allineato con la superficie. Definendo il versore normale alla superficie \hat{n} in modo che punti dallo spazio 1 allo spazio 2, troviamo che

$$\vec{E}_2 \cdot \hat{n} - \vec{E}_1 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

dove \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 sono i campi da un lato e dall'altro della superficie. Notiamo intanto che il verso dato al versore \hat{n} è l'unico che fa assumere alla formula il segno corretto. Abbiamo dunque valutato la discontinuità nella componente perpendicolare, vediamo ora cosa accade per la componente parallela alla superficie.

Restringiamoci ad una zona in cui la superficie è approssimativamente piatta e sia σ che \vec{E} sono localmente costanti e uniformi, rispettivamente dai due lati della superficie. Chiamiamo \vec{E}_1 ed \vec{E}_2 i campi nei due spazi. Costruiamo una spira rettangolare in modo che abbia due lati normali alla superficie e due lati paralleli. Supponiamo inoltre che i due lati paralleli siano immersi uno nel primo campo e l'altro nel secondo. Chiamiamo \vec{L} il vettore che individua i lati paralleli alla superficie. Abbiamo che la circuitazione sulla spira è uguale a

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{L} - \vec{E}_2 \cdot \vec{L} = 0.$$

poiché le componenti dei campi perpendicolari alla superficie hanno circuitazione complessiva nulla. Abbiamo dunque che

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{L} = \vec{E}_2 \cdot \vec{L}.$$

²il tutto "funziona" solo nei pressi di superfici abbastanza regolari, come però sono sempre le superfici nei problemi di elettrostatica - e non solo.

indipendentemente da \vec{L} , che è un generico vettore parallelo alla superficie. Da ciò discende facilmente che le componenti parallele alla superficie dei due campi sono uguali. Dunque, per riassumere, abbiamo che

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^\perp - \vec{E}_2^\perp &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \\ \vec{E}_1^\parallel &= \vec{E}_2^\parallel.\end{aligned}$$

Questi risultati, di estrema importanza e spesso utilizzato, discendono direttamente dalle leggi di Maxwell, e giocano spesso, nel determinare il campo elettrico in una data regione dello spazio, un ruolo analogo a quello delle condizioni iniziali nella risoluzione di un'equazione differenziale ordinaria: si chiamano, infatti, *condizioni al bordo*.

1.3 Conduttori

In questa sezione e nei relativi esercizi si farà riferimento a conduttori perfetti, dei quali si ricorda di seguito la definizione.

Il **conduttore perfetto** è un oggetto tridimensionale (però si possono dare definizioni analoghe per conduttori in $d = 1$ o $d = 2$) tale che, per ogni disposizione di cariche elettriche nello spazio esterno, la sua superficie risulta **equipotenziale** (a potenziale elettrico uniforme).

Tratteremo questo genere di oggetti in regime statico. Nella vita reale il conduttore è un oggetto dentro il quale le cariche elettriche sono libere di muoversi: queste cariche tenderanno spontaneamente a disporsi sulla superficie del conduttore e in condizioni di equilibrio si manterranno ferme. In questa condizione statica il campo elettrico superficiale non può altro che essere perpendicolare alla superficie stessa: se ci fosse un'eventuale componente del campo parallela alla superficie, questa agirebbe sulle cariche superficiali mettendole in moto e violando quindi la condizione di staticità; quindi, si ha:

$$\vec{E}_\parallel = \vec{0}.$$

Si suppone che le cariche superficiali siano vincolate a rimanere comunque “attaccate” al conduttore, quindi una componente perpendicolare non nulla del campo non avrebbe effetto su di esse. La componente parallela del campo elettrico risulta nulla, quindi il potenziale sulla superficie è costante.

Il valore di tale potenziale è determinato dalle condizioni statiche del sistema: ad esempio si può imporre la carica totale presente sul conduttore (in questo caso si dice che il conduttore è **isolato**), oppure imponendo dall'esterno che la superficie del conduttore sia a un certo potenziale V_0 rispetto alla terra. La “terra” denota l'infinito, per il quale convenzionalmente il potenziale elettrico è fissato a essere nullo come discusso sopra. Si consideri che, in quest'ultimo caso, la carica totale del conduttore non è fissata, per cui non è detto che sia isolato. In altre parole, i vincoli a cui il sistema è sottoposto sono il potenziale sulla superficie del conduttore e ovviamente la forma geometrica del conduttore stesso.

In realtà serve la condizione aggiuntiva che all'interno del conduttore non sia presente carica fissa (non libera di muoversi): questo vincolo fa sì che, se fossero presenti cariche libere all'interno, queste potrebbero solo depositarsi sulla superficie, per cui in condizioni statiche la carica interna è nulla. Più avanti si discuterà meglio questo aspetto. Il fatto che la carica interna sia nulla implica che il potenziale all'interno del conduttore sia uniforme e pari a V_0 (potenziale sulla superficie) per il teorema di unicità (che vedremo in seguito).

Osserviamo, per concludere, che è possibile determinare la componente perpendicolare del campo sulla superficie attraverso quanto visto sulla discontinuità. Sappiamo infatti che il campo all'interno del conduttore è nullo: dunque, appena all'esterno della sua superficie, si ha

$$E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

che quelli chiamati sopra $C_{12}, C_{13}, C_{21} \dots$ hanno tutti lo stesso valore in questa configurazione altamente simmetrica). Abbiamo allora, dal punto 1, le equazioni

$$\begin{cases} Q_1 = C_0 V + 2C_1 V', \\ 0 = C_0 V' + C_1 (V + V'). \end{cases}$$

dove V' è il valore comune del potenziale elettrico delle sfere 2 e 3 nella prima configurazione. Dal punto 2 invece abbiamo

$$\begin{cases} Q_1 = C_0 V_1 + C_1 (V + V_3), \\ Q_2 = C_0 V + C_1 (V_1 + V_3), \\ 0 = C_0 V_3 + C_1 (V + V_1). \end{cases}$$

dove V_1 e V_3 sono i potenziali delle relative sfere nella seconda configurazione. Da qui, volendo, sarebbe possibile risolvere il sistema di equazioni per ottenere l'espressione di $U = \frac{Q_1 V_1 + Q_2 V}{2}$ in termini dei dati forniti.

1.5 Richiamo sulle cariche immagine

Spesso ci si trova davanti a problemi di elettrostatica in cui viene assegnato un conduttore messo a un certo potenziale V_0 e si chiede di trovare il campo elettrico in un qualche punto dello spazio. Questa domanda può essere ricondotta a risolvere il potenziale in tutto lo spazio, poiché dal potenziale è facile calcolare il campo elettrico.

§ 1.5.1. **Esempio: carica davanti alla sfera.** — Prendiamo un esempio abbastanza classico e noto per introdurre questo metodo.

Consideriamo una *sfera conduttrice* di raggio a messa a terra. Davanti a essa è posta una carica puntiforme q a distanza $r > a$ dal centro della sfera. Si chiede di risolvere il potenziale nello spazio esterno alla sfera.

Le *condizioni al bordo* di questo particolare problema sono: il potenziale deve essere nullo all'infinito e sulla superficie della sfera.

È noto che la soluzione per questo problema si ottiene posizionando una **carica immagine** $q' = -\frac{a}{r}q$ all'interno della sfera a distanza $r' = \frac{a^2}{r}$ dal centro sulla congiungente del centro e la carica originale. In altre parole il potenziale nello spazio esterno alla sfera è quello generato dalla carica reale q e dalla carica immagine q' interna al conduttore.

Quest'ultima affermazione si può giustificare calcolando esattamente il campo prodotto dalle due cariche puntiformi e dimostrando che sulla superficie della sfera soltanto la componente perpendicolare risulta non nulla.

Un modo alternativo di derivare questo risultato può essere il seguente. Si faccia riferimento alla figura 1. Per simmetria cilindrica, possiamo limitarci a studiare il problema bidimensionale.

In particolare si vuole dedurre la posizione della carica immagine in modo tale che per ogni punto sulla circonferenza valga:

$$k \frac{q}{d} + k \frac{q'}{d'} = 0 \Rightarrow \frac{q}{q'} = -\frac{d}{d'},$$

con $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Questo implica che d e d' devono mantenere la stessa proporzionalità per ogni punto della circonferenza. Questo problema è risolto imponendo che il triangolo individuato dai lati $r' - a - d'$ sia simile al triangolo individuato dai lati $r - a - d$. In questo caso particolare l'ultima condizione è verificata se e solo se $r' = \frac{a^2}{r}$. Si noti che questo vincolo è verificato automaticamente per ogni punto sulla circonferenza. Avendo trovato r' ricaviamo che:

$$\begin{aligned} q' &= -q \frac{a}{r}, \\ r' &= \frac{a^2}{r}. \end{aligned}$$

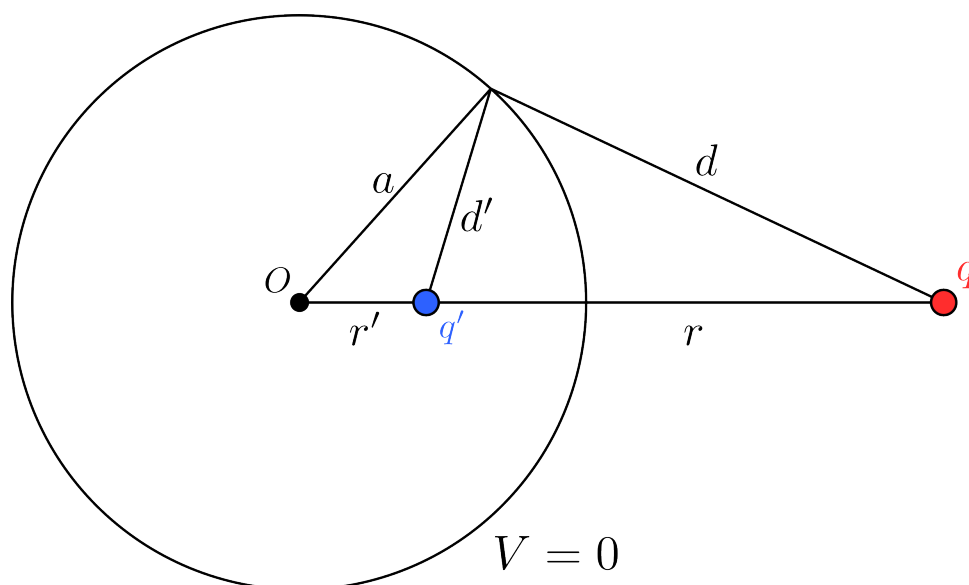


Figura 1: Cariche immagine per la sfera.

NOTA: in generale se si vogliono usare delle cariche immagini per risolvere un problema di conduttori, la regione di spazio (in cui si vuole risolvere il problema) contornata dal conduttore stesso e l'infinito *non* può contenere cariche immagine.

§ 1.5.2. **Esercizio svolto: sistema di conduttori.** — Si consideri un conduttore formato da un piano sopra il quale è innestata una superficie semisferica conduttrice di raggio a , come mostrato in figura 2. Il conduttore è messo a terra e davanti a esso è posta una carica puntiforme q_1 a distanza r_1 dal centro della sfera. Si trovi il potenziale in tutto lo spazio.

§ 1.5.3. **Soluzione.** — Per risolvere questo problema, utilizzeremo quanto appreso nella soluzione di quello precedente. Richiamiamo le *condizioni al bordo* del sistema: il potenziale deve essere nullo all'infinito e sulla superficie del conduttore.

Procediamo iterativamente: ignorando per il momento la superficie sferica, voglio posizionare una carica immagine che annulli il potenziale sul piano conduttore. La soluzione è posizionare una carica $q_2 = -q_1$ a distanza $r_2 = -r_1$ dal centro della sfera (potete convincervene notando che un piano è una sfera di raggio infinito).

Tornando a considerare la sfera, ci rendiamo conto che con una sola carica immagine abbiamo messo a zero il potenziale del piano, ma non quello della sfera. Avendo due cariche al di fuori della sfera è noto che, per sovrapposizione delle soluzioni, il modo per annullare il potenziale sulla sua superficie è porre altre due cariche immagini $q_3 = -\frac{a}{r_1}q_1$ e $q_4 = -\frac{a}{r_2}q_2$ all'interno della sfera a distanza rispettivamente $r_3 = \frac{a^2}{r_1}$ e $r_4 = \frac{a^2}{r_2}$. Notiamo che casualmente queste ultime due non modificano il potenziale sul piano perché sono poste specularmente l'una di fronte all'altra rispetto al piano stesso, quindi il problema è risolto da tre cariche immagini.

1.6 Teorema di unicità

Vorremmo ora accennare a un importante teorema dell'elettrostatica necessario per formalizzare alcune soluzioni. Vedremo solo l'enunciato senza la dimostrazione.

Prima di enunciare il teorema vorremmo capire meglio cosa vuol dire risolvere il *problema dell'elettrostatica*. In generale, ciò vuol dire trovare un potenziale $V(\vec{r})$ che rispetti determinate

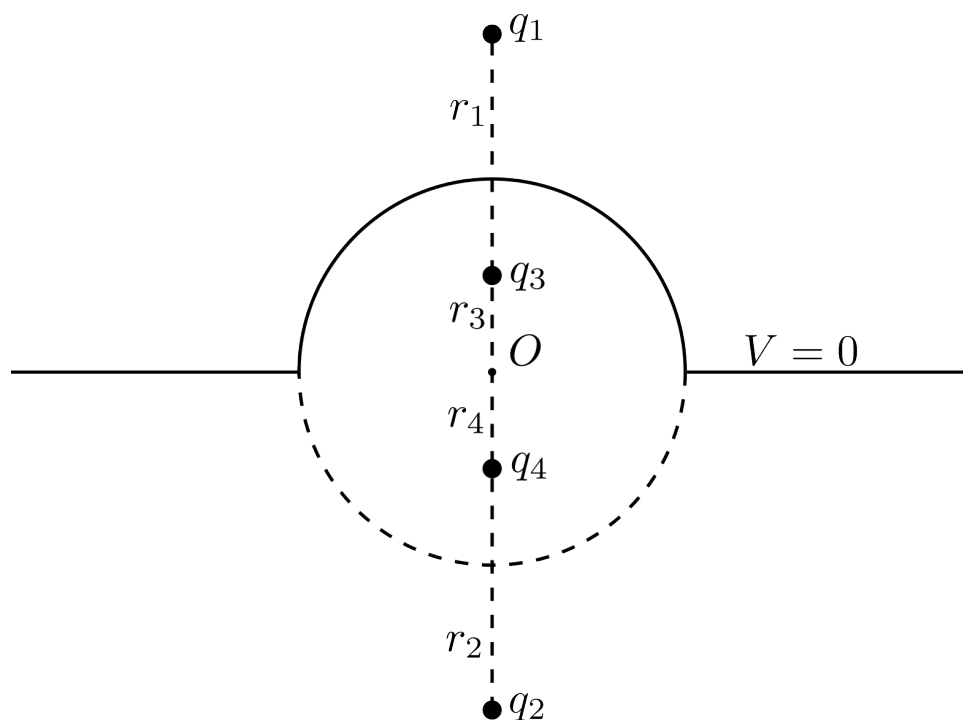


Figura 2: Cariche immagine per il sistema di conduttori.

condizioni. La prima è l'**equazione di Poisson**: nota $\rho(\vec{r})$, il potenziale deve soddisfare:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}.$$

La seconda è la **condizione al contorno**, cioè le informazioni note sul comportamento del potenziale sul bordo del dominio. Esistono due tipi di condizioni:

1. **condizioni di Dirichlet**: è noto il potenziale per ogni punto al bordo;
2. **condizioni di Neumann**: è nota la componente normale (al bordo) del gradiente su ogni punto del bordo.

Il **teorema di unicità** afferma che il gradiente è unico per tutte le possibili soluzioni. Dunque una volta trovato un potenziale risolvete esso determina *univocamente* il campo.

Proviamo a vedere una semplice applicazione che si riconduce a quanto detto sulla capacità dei conduttori. Supponiamo di avere un conduttore di forma generica su cui è depositata una carica Q_0 , vorremmo mostrare che è unico il modo in cui la carica si può disporre rispettando le leggi note sui conduttori. Proviamo a capire cosa si intende per problema dell'elettrostatica in questo caso.

Il dominio su cui vogliamo definire V è tutto lo spazio meno il conduttore, poiché nel conduttore il potenziale è banalmente costante. Sappiamo inoltre che, all'interno del dominio, $\rho = 0$ poiché non c'è carica nello spazio se non al contorno. Come condizioni al contorno abbiamo potenziale costante sul conduttore V_0 che potrebbe dipendere dalla configurazione delle cariche e potenziale all'infinito uguale a zero. Supponiamo ora di avere due differenti configurazioni con la stessa carica totale sul conduttore Q_0 ma che portano il potenziale sul conduttore a due diversi valori V_1 e V_2 . Osserviamo intanto che la carica totale non è una condizione al contorno che vogliamo considerare, vogliamo quindi lavorare solo con V_1 e V_2 . Supponiamo di aver trovato una soluzione $\tilde{V}_1(\vec{r})$ alla prima configurazione. Se ora prendiamo la funzione

$$\tilde{V}_2(\vec{r}) = \frac{V_2}{V_1} \tilde{V}_1(\vec{r}),$$

è evidente che questa rispetta le condizioni al contorno della seconda configurazione e ha, anch'essa, il laplaciano nullo in tutto il dominio. Quindi per il *teorema di unicità* possiamo dire che il campo delle due configurazioni è lo stesso a meno di un fattore $\frac{V_2}{V_1}$. Questo chiaramente è in conflitto con l'ipotesi che abbiano la stessa carica totale, dato che la carica totale è univocamente determinata dal campo (per il teorema di Gauss). Dunque $V_1 = V_2$.

Rimane da puntualizzare che non solo le due configurazioni portano il conduttore allo stesso potenziale, ma sono identiche. Infatti per il teorema di unicità il campo è univocamente determinato dal potenziale e dalla forma del conduttore, ed esso determina univocamente la densità superficiale di carica σ in ogni punto del conduttore (oltre che la carica totale come già detto).

Il teorema di unicità è molto spesso utilizzato senza essere esplicitamente richiamato, l'esempio più noto è sicuramente quello della tecnica delle cariche immagine. Nell'utilizzo delle cariche immagine si sostituisce a un determinato conduttore una configurazione di carica in modo che il potenziale generato risolva (nello spazio considerato) il problema dell'elettrostatica. La potenza del teorema di unicità risiede nel fatto che una volta trovata tale configurazione di carica sappiamo che il campo generato è l'unico che può risolvere tali condizioni. La questione può sembrare sottile ma è di estrema importanza.

1.7 Riassunto della procedura per uso di cariche immagine

In conclusione vorremmo riassumere cosa esattamente fare e a cosa stare attenti quando si usano cariche immagine per risolvere un problema.

Supponiamo che il problema abbia la seguente formulazione: sia dato un conduttore di qualche forma messo a potenziale V_0 (rispetto all'infinito) oppure con carica totale Q_0 , e nello spazio esterno al conduttore sia presente una densità di carica $\rho(\vec{r})$. Si trovi il potenziale e il campo in tutto lo spazio.

Iniziamo dicendo che per quanto dimostrato sulla capacità ci basterà risolvere il caso del conduttore a potenziale fissato. Se si vorrà risolvere quello a carica fissata basterà trovare la carica a potenziale fissato e poi riscalarlo tutto.

1. Pensiamo di poter risolvere il problema con la tecnica delle cariche immagine;
2. all'interno del conduttore il campo è nullo e il potenziale costante quindi vogliamo risolvere solo nello spazio esterno;
3. andiamo dunque alla ricerca di una configurazione di carica che abbia le seguenti caratteristiche fondamentali:
 - nello spazio in cui **non** è presente il conduttore la distribuzione di carica deve coincidere con quella data dal testo per rispettare l'equazione di Poisson;
 - sulla superficie del conduttore il potenziale deve essere costante e uguale a V_0 rispetto all'infinito;
 - eventualmente la condizione sopra si può sostituire con l'imporre che il campo sia sempre perpendicolare alla superficie del conduttore (e almeno un punto sia a V_0);
4. una volta trovata tale configurazione utilizziamo il teorema di unicità per affermare che la soluzione del problema è unica e **nello spazio fuori dal conduttore** coincide con quella data dalla distribuzione di carica trovata.

1.8 Dipoli elettrici

Il *dipolo fisico* è un sistema di cariche elettriche che è ottenibile agendo secondo il seguente limite. Si considerano due cariche puntiformi distanti tra loro d e aventi carica rispettivamente

$+q$ e $-q$ (con $q > 0$). Si indica con \vec{d} il vettore di modulo d che congiunge le due cariche partendo da quella negativa. Il dipolo ideale si ottiene considerando il limite per $d \rightarrow 0$, $\hat{d} = \text{const.}$ e $q \rightarrow \infty$, mantenendo costante il prodotto $q \cdot \vec{d}$. Fissiamo il valore di tale prodotto uguale a \vec{p} , unico parametro determinante le caratteristiche del dipolo ideale.

Più in generale, data una distribuzione di carica $\rho(\vec{r})$ nello spazio (che può essere sia continua che discreta), si può definire il suo *momento di dipolo elettrico* rispetto a un'origine O tramite la seguente espressione:

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r',$$

dove i vettori posizione sono presi rispetto all'origine O . Si può verificare facilmente che, nel caso in cui la carica totale della distribuzione sia nulla, allora l'espressione data non dipende dall'origine scelta: ciò giustifica la sua rilevanza in tali casi, ma è bene ricordare che questa quantità esiste in generale. Inoltre, vediamo facilmente come il dipolo fisico si ottenga come caso particolare della definizione data: se la carica $+q$ è posta in \vec{r}_+ , e la carica $-q$ è posta in \vec{r}_- , allora la formula ci dà

$$\vec{p} = q\vec{r}_+ + (-q)\vec{r}_- = q\vec{d},$$

dove $\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$ è lo stesso vettore sopra introdotto. Notiamo inoltre che la carica totale del dipolo fisico è nulla, infatti l'espressione trovata non dipende dal sistema di riferimento.

È interessante determinare il campo prodotto da tale oggetto partendo dalle due cariche iniziali e fare in seguito il limite di dipolo ideale. Per fare ciò, conviene partire dapprima dal potenziale elettrostatico. Se si svolge questo esercizio si trova che, se il dipolo \vec{p} è posto nell'origine del sistema di assi, il potenziale elettrostatico assume la seguente espressione (con $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$):

$$V(\vec{r}) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

In seguito, per il calcolo del campo elettrico prodotto da un dipolo ideale si può usare $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, oppure considerare sempre il campo prodotto dalle due cariche e svolgere il limite. Se si svolgono i calcoli si ottiene allora:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}.$$

Consigliamo di memorizzare questa formula, in quanto spesso può tornare molto utile in problemi di livello avanzato di elettrostatica, e la sua analoga forma magnetica (cioè riferita al momento di dipolo magnetico) è formalmente identica.

§ 1.8.1. Esercizio svolto: carica sul piano. — Una carica puntiforme q è posizionata a una distanza a davanti a un piano conduttore messo a terra. Si calcoli la carica totale presente sulla superficie del piano.

§ 1.8.2. Soluzione. — Intuitivamente ci si aspetta che la carica totale sul piano sia proprio la somma delle cariche immagini che usiamo per risolvere il problema dell'elettrostatica.

Diamo per assodato che la soluzione del potenziale corrisponda a posizionare una carica immagine $-q$ dentro il piano a una distanza a dalla superficie del conduttore, in modo che il segmento congiungente le due cariche sia normale alla superficie. Ovviamente questo problema si può risolvere con la "forza bruta", calcolando la densità di carica sul piano e poi integrando su tutta la superficie (consigliamo di fare il conto almeno una volta nella vita: mai avere paura di sporcarsi le mani coi calcoli!).

Ora vedremo invece la soluzione che utilizza il *teorema di Gauss*. Richiamo il teorema di Gauss in forma globale: data una superficie chiusa S vale che $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$, dove Q_{int} è la carica interna contenuta nella superficie. L'idea è scegliere la superficie in questione che contenga

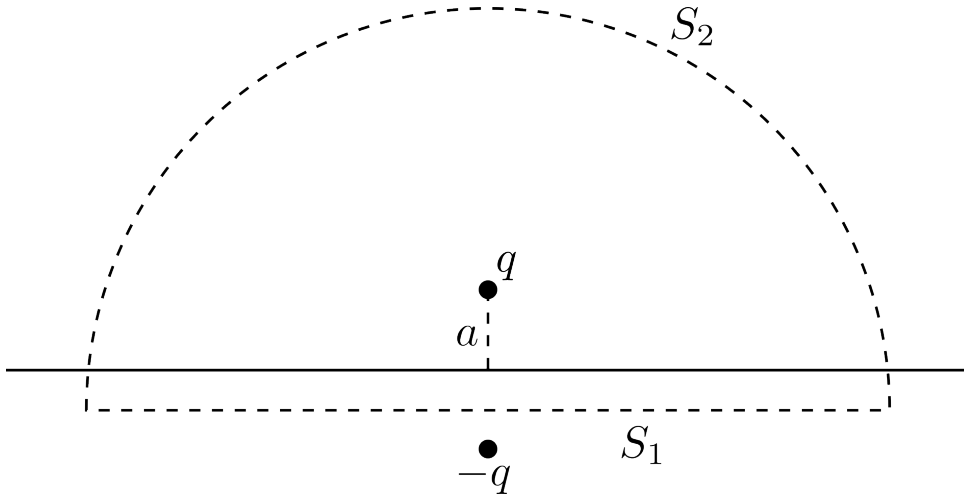


Figura 3: Carica sul piano.

il piano conduttore. La superficie più comoda è quella semisferica mostrata nella figura. Questa particolare superficie non contiene veramente tutto il piano, ma possiamo immaginare di mandare il raggio della semisfera all'infinito, e calcolare in quel limite la carica interna.

Applichiamo il teorema di Gauss: la superficie si divide in due parti. Su S_1 sappiamo che il flusso del campo elettrico è 0, poiché dentro un conduttore il campo elettrico è nullo.

Per calcolare il flusso del campo elettrico su S_2 serve un ragionamento più raffinato: immaginiamo di metterci molto lontano dall'origine del sistema, dove dovremo calcolare il campo elettrico. Fuori dal piano conduttore il campo elettrico è quello generato da due cariche puntiformi opposte distanti $2a$. Se siamo molto lontani il campo di queste tenderà sempre più al campo di un dipolo ideale $\vec{p} = 2aq\hat{z}$. Usiamo questa approssimazione: allora il flusso del campo elettrico sarà:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \cdot d\vec{A}.$$

Si vuole mostrare che questo integrale tende ad annullarsi nel limite in cui il raggio della semisfera tende a infinito.

Se prendiamo il modulo dell'integrale, valgono i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} & \left| \oint_S k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \cdot d\vec{A} \right| = \left| \oint_S k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \cdot \hat{n} R^2 \sin\theta d\theta d\phi \right| \leq \\ & \leq \int_S \left| k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \cdot \hat{n} \right| R^2 \sin\theta d\theta d\phi \leq \int_S k\alpha|\vec{p}| \frac{1}{R^3} R^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ & = k\alpha|\vec{p}| \frac{1}{R} \int_S \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi k\alpha|\vec{p}| \frac{1}{R} \longrightarrow 0 \quad \text{per } R \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

La seconda disuguaglianza raccoglie i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \cdot \hat{n} \right| \leq \left| \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \right| = \frac{|3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}|}{r^5} \leq \\ & \leq \frac{3|\vec{p} \cdot \vec{r}|\vec{r} + |r^2\vec{p}|}{r^5} \leq \frac{4|r^2\vec{p}|}{r^5} = \frac{4|\vec{p}|}{r^3} = \frac{\alpha|\vec{p}|}{R^3}; \quad \text{nel nostro caso } \alpha = 4. \end{aligned}$$

Quindi questo ci dice che la carica interna netta contenuta nella semisfera è nulla. Ma visto che questa contiene la carica puntiforme q , necessariamente la carica sulla superficie del piano vale $-q$.

§ 1.8.3. **Esercizio svolto: sfere che si compenetrano.** — Si considerino due sfere cariche con densità volumica uniforme ρ e $-\rho$ di raggio R , con i centri rispettivamente nei punti $(d, 0, 0)$ e $(-d, 0, 0)$, con $d < R$.

1. Si trovi il campo all'interno dell'intersezione tra le due sfere.
2. Nell'approssimazione in cui ρ tende a infinito ma il prodotto $2\rho d = P_0$ mantiene valore costante, si trovi il campo in tutto lo spazio e la densità superficiale di carica sulla sfera di raggio R centrata nell'origine.

§ 1.8.4. **Soluzione.** — Sappiamo che per una singola sfera uniformemente carica posta con centro nell'origine il campo vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} & \text{per } |\vec{r}| > R, \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} & \text{per } |\vec{r}| < R. \end{cases}$$

Chiamando $\vec{d} = (d, 0, 0)$, troviamo che il campo nell'intersezione delle due sfere vale

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} ((\vec{r} - \vec{d}) - (\vec{r} + \vec{d})) = -\frac{2\rho}{3\epsilon_0} \vec{d}.$$

Dunque il campo all'interno dell'intersezione è costante e diretto lungo l'asse x con modulo $\frac{2\rho d}{3\epsilon_0}$. Ci domandiamo ora cosa accade nel limite in cui ρ tende a infinito ma il prodotto $2\rho d = \vec{P}_0$ si mantiene costante. Osserviamo innanzitutto che le due sfere si sovrappongono totalmente, dunque il risultato finale sarà una distribuzione superficiale di carica sulla sfera centrata nell'origine. All'interno di tale sfera le due densità volumiche ρ e $-\rho$ si cancellano. Per determinare la densità superficiale di carica vogliamo descrivere il campo all'esterno della sfera. Dato che il campo all'esterno di una sfera uniformemente carica è uguale a quello di un'opportuna carica puntiforme posta nel centro, osserviamo che nel limite che stiamo facendo il campo esterno sarà proprio quello di un dipolo

$$\vec{p} = 2 \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \vec{d} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{P}_0.$$

Conoscendo ora il campo all'esterno e all'interno della sfera possiamo utilizzare le condizioni al bordo per il campo elettrico per determinare la densità di carica superficiale sulla sfera. Notiamo innanzitutto che il sistema ha simmetria azimutale lungo l'asse x , dunque la densità superficiale σ dipende solo da θ cioè l'angolo formato dal vettore posizione con l'asse x . Ricordando che il campo è:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}_0 & \text{per } |\vec{r}| < R, \\ \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{3(\vec{P}_0 \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}_0}{r^5} & \text{per } |\vec{r}| > R. \end{cases}$$

Troviamo dunque la discontinuità sulla sfera della componente radiale del campo. Otteniamo che:

$$\frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} = \frac{1}{3\epsilon_0} P_0 \cos \theta + \frac{2}{3\epsilon_0} P_0 \cos \theta,$$

$$\sigma(\theta) = P_0 \cos \theta.$$

Dunque abbiamo trovato il campo in tutto lo spazio e la distribuzione di carica superficiale. Per riassumere puntualizziamo un risultato importante. È possibile ottenere il campo esatto di un

dipolo distribuendo carica su un sfera, in particolare la distribuzione su un sfera per ottenere un dipolo di modulo P è proprio:

$$\sigma(\theta) = P_0 \cos \theta.$$

Il lettore è invitato a calcolare esplicitamente il momento di dipolo elettrico associato a tale distribuzione di carica eseguendo l'integrale di superficie e notando che l'espressione così riottenuta è proprio

$$\vec{p} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{P}_0.$$

SEZ. 2 — CORRENTE E MAGNETOSTATICA —

Gli unici oggetti che abbiamo trattato finora sono soltanto sistemi di cariche elettriche statiche che generano un campo elettrico. Ora è il momento di introdurre un nuovo oggetto fisico di estrema importanza: la **densità di corrente**, che generalizza il concetto di corrente elettrica.

Una corrente elettrica è uno spostamento di cariche attraverso lo spazio ed è descritta dal vettore **densità di corrente**:

$$\vec{J}(\vec{r}) \equiv \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}).$$

dove \vec{v} è la velocità a cui si muove la carica di densità $\rho(\vec{r})$. La più familiare corrente I attraverso una superficie S è il flusso di \vec{J} attraverso S :

$$I \equiv \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

A questo punto risulta naturale formulare una legge di **conservazione della carica**, la quale necessariamente deve essere sempre rispettata.

Questa legge impone che, per ogni intervallo di tempo, la quantità di carica uscente attraverso una data superficie chiusa sia l'opposto della variazione della carica nel volume racchiuso dalla superficie, ovvero $I_S dt = -dQ_{\text{int}}$; facendo tendere a zero l'intervallo di tempo si ha:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = 0.$$

Quest'ultima è la forma integrale dell'**equazione di continuità**. Questa compare in molte aree della fisica, e descrive in modo completo la variazione di quantità continue nello spazio in funzione del loro spostamento, in questo caso dato dal flusso di corrente. Questa equazione non compare fra le leggi di Maxwell solo perché, nella loro forma completa, queste la implicano.

Anche l'equazione di continuità ha una corrispondente formulazione locale, vale a dire:

$$\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Il lettore è invitato a dimostrare che questa formulazione locale implica la corrispondente formula integrale.

L'aver introdotto la corrente elettrica ci porta a parlare di campo magnetico, che rispetto al campo elettrico soddisfa leggi completamente diverse.

Sperimentalmente si verifica che a generare un *campo magnetico* sono proprio le correnti elettriche, come a generare il campo elettrico sono le cariche. Ora vediamo come le caratteristiche dei campi magnetici possono essere descritte dalle leggi di Maxwell.

Inizialmente tratteremo il caso della magnetostatica, in cui si suppone che tutte le quantità vettoriali e scalari siano indipendenti dal tempo.

Le leggi dell'elettromagnetismo sono spesso espresse nella forma delle leggi di Maxwell, che racchiudono in modo compatto e completo una descrizione dei fenomeni dell'elettrodinamica classica. In particolare i fenomeni magnetostatici possono essere descritti dalle equazioni:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (\text{assenza di monopoli})$$

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (\text{legge di Ampère})$$

dove nella prima equazione S è una qualsiasi superficie chiusa, e nella seconda equazione γ è una qualsiasi curva chiusa e S_γ una qualsiasi superficie con bordo γ .

La prima legge riflette l'assenza di cariche magnetiche libere (monopoli magnetici); le linee di campo prodotte dalle sorgenti di campo magnetico sono linee chiuse, quindi il loro flusso attraverso una superficie chiusa è nullo. Dal punto di vista sperimentale, non è mai stato confermato alcun rilevamento di monopoli magnetici, seppur la consistenza della teoria non esclude la loro presenza.

La seconda legge invece esprime la relazione fra le correnti e il campo magnetico; questa formulazione ha il vantaggio di facilitare, in casi di particolare simmetria, il calcolo del campo magnetico nello spazio, esattamente come la legge di Gauss per il campo elettrico agevola, rispetto alla legge di Coulomb, il calcolo di quest'ultimo in condizioni di alta simmetria. Inoltre questa formulazione permette di osservare una certa asimmetria fra i campi: il campo elettrico dipende dalla densità di carica tramite una relazione di flusso, mentre il campo magnetico dipende dalla densità di corrente tramite una relazione di circuitazione.

Per dare senso matematico alla seconda legge è necessario utilizzare la convenzione della mano destra: se i vettori tangenti la curva $d\vec{\ell}$ hanno il verso delle dita della mano destra e la superficie è posizionata (localmente) dal lato del palmo della mano, i vettori normali alla superficie $d\vec{S}$ hanno il verso del pollice. Questa convenzione, insieme a quella del flusso uscente da una superficie chiusa, è di gran lunga la più utilizzata nella letteratura (dato che evita in molte formule un segno meno).

È possibile dare una formulazione locale anche per le ultime equazioni che abbiamo scritto. In particolare esse diventano:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \end{cases}$$

Anche in questo caso il lettore è invitato a verificare che la formulazione locale implica la formulazione integrale.

La magnetostatica si propone di studiare situazioni *stazionarie* nelle correnti e nella densità di carica, in cui la carica netta contenuta in una qualsiasi regione di spazio rimane costante nel tempo. Dall'equazione di continuità otteniamo:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \text{o equivalentemente} \quad \operatorname{div} \vec{J} = 0.$$

Questo ha un'importante conseguenza: in magnetostatica è ben definito il **flusso di corrente concatenato** a una curva chiusa, ovvero per ogni superficie S_γ con bordo in una stessa curva chiusa γ il flusso di \vec{J} attraverso S_γ è sempre lo stesso, purché si usi la regola della mano destra per scegliere l'orientazione di S_γ .

Torniamo per un momento al caso di densità di carica non costante nel tempo e vediamo un'applicazione interessante dei concetti appena esposti.

Iniziamo intanto a dare la definizione di conduttore ohmico. Un **conduttore ohmico** è un materiale che soddisfa la seguente proprietà: la densità di corrente \vec{J} e il campo elettrico \vec{E} all'interno di esso soddisfano la relazione

$$\vec{J} = \sigma \vec{E},$$

dove σ è la *conducibilità* del materiale. Attenzione a non confonderla con la densità superficiale di carica: purtroppo il simbolo comunemente utilizzato è lo stesso. Questa legge descrive il comportamento dei metalli conduttori più comuni usati nei circuiti elettrici, almeno entro ragionevoli intervalli di temperatura e altri parametri fisici rilevanti. L'inverso della conducibilità

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

è la *resistività* del conduttore. Anche qui, occhio a non scambiarla per la densità volumica.

Adesso, con le conoscenze che abbiamo, vogliamo dedurre l'andamento temporale della carica libera all'interno di un conduttore ohmico. In particolare vogliamo trovare la dipendenza temporale della densità di carica $\rho(\vec{r}, t)$. Immaginiamo dunque di avere fissato al tempo $t = 0$ la densità di carica interna al conduttore $\rho(\vec{r}, 0)$. Tutto quello di cui abbiamo bisogno adesso sono la prima equazione di Maxwell e l'equazione di continuità, che riportiamo in seguito:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Essendo il conduttore ohmico sappiamo che $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. Dunque, se la conducibilità è uniforme nel materiale, le precedenti equazioni diventano:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \sigma \operatorname{div}(\vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Infine ricaviamo facilmente l'equazione per la densità di carica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 0.$$

La precedente equazione ammette come soluzione la funzione esponenziale decrescente, per cui:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, 0) e^{-\frac{t}{\tau}}, \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Questo fatto è estremamente interessante perché rappresenta quello che ci aspetteremmo intuitivamente da un conduttore: le cariche libere tendono a respingersi e andare verso i bordi lasciando l'interno del conduttore privo di carica. Perciò, possiamo dedurre che aspettando un tempo abbastanza lungo verrà realizzata la condizione di **conduttore perfetto**.

§ 2.0.1. Esercizio svolto: particelle tra due griglie. — Si consideri lo spazio compreso tra due griglie piane perpendicolari all'asse \hat{x} , poste rispettivamente a $x = 0$ e $x = L$, la prima mantenuta a potenziale $V = V_0 > 0$ e la seconda a potenziale $V = 0$. In regime stazionario, particelle di massa M e carica $Q > 0$ entrano in questa regione attraverso la griglia a $x = 0$ con velocità iniziale trascurabile e creano una densità di corrente J costante e uniforme (perché deve essere uniforme?) tra una griglia e l'altra, uscendo infine attraverso la griglia a $x = L$.

1. Indicando con $v(x)$ la velocità delle particelle e con $\rho(x)$ la densità di carica, si scriva l'equazione di Poisson per il potenziale $V(x)$ con $0 < x < L$.
2. La si risolva e si ricavi J in funzione di M , Q , L e V_0 nell'ipotesi che il campo elettrico vada a zero per $x \rightarrow 0^+$.

§ 2.0.2. **Soluzione.** — Iniziamo intanto osservando che, per ragioni di simmetria, il potenziale e tutte le altre grandezze fisiche possono dipendere solo dalla coordinata x . Inoltre tutte le particelle si spostano sotto la sola azione del campo elettrico che, essendo un vettore, può avere solo componente parallela all'asse x . Notiamo che attraverso la conservazione dell'energia possiamo legare $v(x)$ e $V(x)$, in particolare sappiamo che:

$$\frac{1}{2}Mv(x)^2 = Q(V_0 - V(x)).$$

Inoltre l'equazione di Poisson, poichè V dipende solo da x , sarà:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}.$$

Osserviamo che essendo J costante e uniforme in tutto lo spazio allora vale la relazione (direttamente in forma scalare):

$$v(x) = \frac{J}{Q\rho(x)}.$$

Dunque otteniamo dalle equazioni sopra le seguenti

$$V(x) = V_0 - \frac{Mv(x)^2}{2Q},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{J}{\varepsilon_0 v(x)Q}.$$

Eliminando $v(x)$, si trova un'equazione differenziale del secondo ordine per V :

$$V''(x) = -\frac{J}{Q\varepsilon_0} \sqrt{\frac{M}{2Q}} \frac{1}{\sqrt{V_0 - V(x)}}.$$

Quest'equazione può essere integrata per trovare $V(x)$: moltiplicando ambo i membri per $V'(x)$ e sfruttando la condizione $V'(0) = 0$ si trova, per integrazione,

$$V'(x) = -\sqrt{\frac{J}{Q\varepsilon_0} \sqrt{\frac{8M}{Q}} (V_0 - V(x))^{\frac{1}{4}}},$$

da cui, integrando nuovamente, si trova

$$V(x) = V_0 - x^{\frac{4}{3}} \left(\frac{81MV_0J^2}{32Q^3\varepsilon_0^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Infine, con la condizione di consistenza $V(L) = 0$, si trova

$$J = \frac{4\varepsilon_0}{9L^2} \sqrt{\frac{2V_0^3Q^3}{M}}.$$

SEZ. 3 — CENNI ALL'ELETTRODINAMICA —

Finora abbiamo parlato di elettrostatica e magnetostatica, cioè soltanto casi in cui le quantità vettoriali e scalari non dipendono esplicitamente dal tempo. Riportiamo le *equazioni di Maxwell statiche*:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \end{cases}$$

dove tutte le quantità vettoriali e scalari hanno soltanto dipendenza spaziale e non temporale. Inoltre abbiamo dedotto anche la legge di *conservazione della carica*:

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Ovviamente ci chiediamo come possano essere formulate delle leggi simili che valgano anche con la dipendenza temporale.

Ciò che venne verificato sperimentalmente è che le prime due leggi rimangono invariate, al contrario delle ultime due leggi che subiscono delle correzioni.

In particolare tutto cominciò dalle osservazioni sperimentali di Faraday, che analizzò il comportamento di circuiti posti in campi magnetici variabili nel tempo. Possiamo riassumere le sue osservazioni fondamentali mediante tre fenomeni empiricamente verificati:

1. **Circuito in movimento.** Spostando un circuito fuori da un campo magnetico, una corrente scorre nel filo.
2. **Magnete in movimento.** Spostando la sorgente del campo magnetico, nuovamente una corrente scorre nel filo.
3. **Variazione di intensità.** Facendo variare l'intensità del campo magnetico, anche questa volta una corrente scorre nel circuito.

Faraday interpretò la comparsa di una corrente come conseguenza della variazione del flusso del campo magnetico attraverso il circuito. Per formulare questa legge definiamo due grandezze fisiche: \mathcal{E} e $\Phi(\vec{B})$. Pensando il circuito come una curva chiusa γ tracciata nello spazio, la variazione di flusso magnetico induce un campo elettrico del quale possiamo definire la **forza elettromotrice** lungo γ come l'integrale su γ del campo elettrico indotto \vec{E}' :

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell},$$

e, detta S_{γ} una superficie che ha come bordo la curva γ che delinea il circuito, possiamo scrivere il flusso del campo magnetico come:

$$\Phi(\vec{B}) \equiv \oint_{S_{\gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

È importante chiarire subito che la scelta del sistema di riferimento non è indifferente: indicheremo con \vec{E}' il campo elettrico indotto dal campo magnetico *nel sistema di riferimento solidale al circuito*, mentre con \vec{B} il campo magnetico presente nel laboratorio. Le osservazioni di Faraday sono così espresse con la seguente legge:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}.$$

Nel segno del membro di destra è manifesta la **legge di Lenz**: la variazione di flusso del campo magnetico induce una corrente che genera un campo magnetico il cui flusso si oppone alla variazione originaria di flusso.

Scriviamo ora più esplicitamente questa legge, nei termini del campo elettrico indotto e del flusso del campo magnetico,

$$\oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \oint_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{A}. \quad (3.1)$$

Considerando il caso in cui il circuito γ rimane fisso, deduciamo la seguente formulazione differenziale:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Quindi, quando la dipendenza temporale non è banale, il campo elettrico **non** è più conservativo. Ciò vuol dire che non è più possibile definire un potenziale V tale che $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.

Anche la quarta legge di Maxwell necessita delle correzioni. Infatti notiamo che così come è scritta contraddice l'equazione di continuità: se facessimo la divergenza in ambo i membri, otterremmo che $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, che però vale solo se ρ non dipende dal tempo.

Un modo per correggere la quarta equazione è aggiungere un campo $\vec{C}(\vec{r}, t)$ che soddisfi la seguente proprietà:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \vec{C}, \\ \operatorname{div} \vec{C} &= \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

Tuttavia, ricordandoci della prima equazione di Maxwell che rimane comunque valida, è naturale supporre che $\vec{C} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, quindi la quarta equazione di Maxwell diventa:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Questa equazione è pure sperimentalmente ben verificata. Di seguito si riportano le nuove equazioni di Maxwell, valide in qualsiasi condizione statica o dinamica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array} \right.$$

SEZ. 4 — TEORIA DELLA DIFFRAZIONE

Le Equazioni di Maxwell permettono di prevedere esattamente, all'interno dell'elettromagnetismo classico, il comportamento di qualsiasi sistema di campi, cariche e correnti. Spesso, però, risolvere per intero le equazioni differenziali che ne risultano si rivela proibitivo e l'unico modo di ottenere previsioni concrete è tramite simulazioni numeriche. Per riuscire a comprendere meglio il comportamento della teoria è necessario introdurre delle approssimazioni, volte a capire quali fenomeni si presentino in determinati regimi. La teoria della diffrazione ha come obiettivo quello di studiare cosa accade alle onde elettromagnetiche in presenza di ostacoli riflettenti e/o assorbenti. Vedremo come, in vari regimi, essa si traduca nell'ottica geometrica o ondulatoria classica e come inquadrare il tutto in un contesto più generale.

4.1 Il Setup

La situazione tipica che ci proponiamo di studiare è quello in figura 4: un'onda elettromagnetica incide su un'ostacolo, tipicamente una parete piana con delle aperture, e viene rilevata su un'altra parete piana distante dalla precedente. Evidentemente, le scale di lunghezza rilevanti sono tre:

- la lunghezza d'onda della luce indicente λ ;
- la dimensione caratteristica delle aperture d ;

- la distanza tra l'ostacolo e il piano di osservazione D .

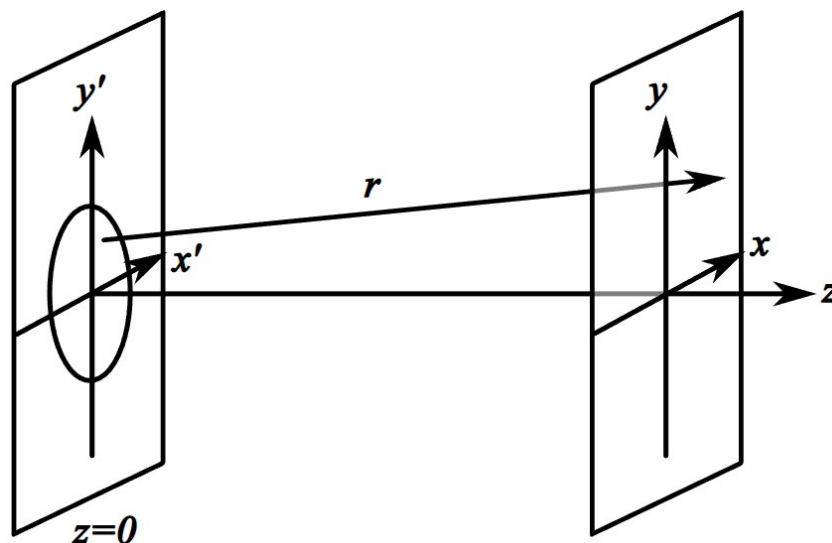


Figura 4: Setup tipico di un esperimento di diffrazione.

Il numero di Fresnel è una quantità adimensionale che permette di determinare il comportamento qualitativo del sistema, e distingue i diversi regimi l'uno dall'altro. È definito come

$$F = \frac{d^2}{D\lambda}.$$

Ci aspettiamo che per valori di F molto piccoli (i.e. aperture di dimensioni ridotte, lunghezza d'onda molto grande) si verifichino fenomeni di interferenza, mentre per valori di F molto grandi la natura ondulatoria della luce non sia rilevante. Non dimostreremo nel dettaglio queste affermazioni, ma le useremo come punto di partenza per studiare i fenomeni che appaiono al variare delle lunghezze rilevanti.

4.2 Caso $F \gg 1$: ottica geometrica

Nel limite in cui F è molto grande, la propagazione di un'onda luminosa nel vuoto diventa molto semplice da studiare: i fronti d'onda si propagano in linea retta, senza disperdersi, e si comportano a tutti gli effetti come dei raggi rettilinei. Ciò è dovuto al fatto che λ è spesso molto più piccola rispetto alle dimensioni del fascio luminoso: non appena ci si allontana dalla sua traiettoria, l'interferenza diventa rapidamente distruttiva su una scala di lunghezza $\approx \lambda \ll d$. In queste condizioni, quindi, possiamo applicare tutti i principi dell'ottica geometrica e l'unica difficoltà risiede nel capire il percorso dei raggi. Ciò (a frequenze non eccessivamente alte) continua a valere anche quando la luce si propaga in un mezzo con indice di rifrazione $n(\vec{r})$, ed è proprio quando $n \neq 1$ che si cominciano ad osservare fenomeni interessanti.

L'insieme di tecniche volte a capire il percorso di raggi in un mezzo con indice di rifrazione variabile è noto come *ray tracing*. Il principio fondamentale su cui si basano è il principio di Fermat, o del minimo cammino ottico: dati due punti a e b in un mezzo con indice di rifrazione $n(\vec{r})$, la traiettoria γ percorsa da un raggio di luce che si propaga da a a b è quella che minimizza la quantità

$$J[\gamma] = \int_{\gamma} n ds,$$

dove ds è l'elemento di curva di lunghezza infinitesima e J è detto cammino ottico.

Se si è intenzionati a calcolare esplicitamente la traiettoria del raggio, è necessario scegliere una parametrizzazione della curva. Il tempo di percorrenza potrebbe sembrare la scelta più naturale,

ma non è la più pratica: non appare mai nel principio di Fermat, né vi è alcun riferimento esplicito alla velocità di percorrenza. Inoltre, nel caso in cui questa non sia uniforme, trovare la distanza percorsa in funzione del tempo potrebbe rivelarsi complicato. Una scelta migliore è la lunghezza d'arco s : individuiamo ciascun punto tramite la sua distanza (lungo la curva) dal punto di partenza. La traiettoria sarà quindi indicata da $\vec{r}(s)$. L'equazione che la descrive, derivabile direttamente dal principio di Fermat, è detta **equazione iconale**:

$$\frac{d}{ds} \left(n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n(\vec{r}).$$

Essa è l'analogo ottico della seconda legge di Newton e generalizza la legge della rifrazione di Snell-Cartesio, che ne è diretta conseguenza.

4.3 Fasori ed equazione d'onda

Prima di addentrarci nell'ottica ondulatoria, dobbiamo familiarizzare con il suo formalismo. Studiare un'onda a frequenza ω significa avere a che fare con campi che hanno una dipendenza temporale $\propto \sin \omega t$, $\propto \cos \omega t$. Un modo molto elegante e pratico per maneggiare termini oscillanti è sostituire seni e coseni con esponenziali complessi, sfruttando

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t.$$

Introdurremo quindi dei campi elettromagnetici complessi $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ e $\vec{B}(\vec{r}, \omega)$, legati ai campi veri e propri da

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left[\vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right], \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \Re \left[\vec{B}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$$

e li useremo ogni volta avremo a che fare con un'onda a frequenza fissata. Questa procedura è del tutto analoga a quella utilizzata nello studio dei circuiti a corrente alternata (con l'introduzione dei fasori e delle impedenze complesse) ed è altrettanto efficace nel ridurre i conti: per esempio, tutte le derivate temporali diventano moltiplicazioni per ω , tramite la sostituzione

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega.$$

L'altro strumento necessario prima di proseguire è l'equazione d'onda. Essa descrive la propagazione di onde a velocità v , e nella sua forma unidimensionale è data da:

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi(x, t) = 0.$$

Tutti i fenomeni ondulatori in una dimensione, dalla propagazione di onde su una corda tesa alle vibrazioni longitudinali di una sbarra metallica, rispettano quest'equazione. Le sue soluzioni sono nella forma

$$\varphi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

per qualsiasi coppia di funzioni f, g sufficientemente regolari, corrispondenti a onde viaggianti verso destra e verso sinistra.

In più dimensioni la forma dell'equazione rimane praticamente invariata, con la sola aggiunta delle derivate rispetto alle altre coordinate spaziali. Noi siamo interessati al caso tridimensionale per onde a frequenza fissata ω : facendo la sostituzione indicata sopra, l'equazione risultante è:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varphi(\vec{r}, \omega) = 0.$$

Le soluzioni di quest'equazione possono essere molto complicate e non sono scrivibili con una formula chiusa generale come nel caso unidimensionale. C'è un tipo di soluzione, però, che

ammette una scrittura molto semplice e che ritroveremo più avanti: le onde sferiche. Fissato un punto \vec{r}_0 , siano

$$G_{\pm}(\vec{r}) = \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}.$$

Esse, quando moltiplicate per $e^{-i\omega t}$, descrivono onde sferiche propaganti rispettivamente da e verso \vec{r}_0 , e soddisfano l'equazione d'onda tridimensionale in tutto lo spazio (tranne in \vec{r}_0 , che fa da sorgente). I campi elettromagnetici irraggiati da una sorgente di dimensioni finite a grandi distanze sono proporzionali a G_+ , e vedremo come esse appaiano nella soluzione generale al problema della diffrazione.

Dalle Equazioni di Maxwell in forma differenziale si può dimostrare direttamente che i campi $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ nel vuoto soddisfano l'equazione d'onda tridimensionale.

4.4 Integrale di Rayleigh-Sommerfeld

Fino a questo momento non abbiamo ancora visto nessun metodo per calcolare esplicitamente i campi elettromagnetici di un'onda diffratta. Per studiare i fenomeni di interferenza che si manifestano quando $F \approx 1$, è necessaria una descrizione più dettagliata di quella dell'ottica geometrica, basata solo su raggi rettilinei e che non fa mai esplicito riferimento ai campi d'onda. Come in precedenza, il setup è semplice: un piano sottile, infinito e conduttore, occupa la regione $z = 0$. In esso sono state ricavate una o più aperture, indicate con S , e un'onda elettromagnetica a frequenza ω vi sta incidendo. Il punto di partenza è una formula *esatta*, nota come integrale di Rayleigh-Sommerfeld, che fornisce la soluzione per il campo elettrico (complesso) $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ nella regione $z > 0$ in funzione del suo valore in $z = 0$:

$$\vec{E}(x, y, z, \omega) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{z=0} \vec{E}(x, y, 0, \omega) \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) dx' dy',$$

dove $k = \frac{\omega}{c}$ è il numero d'onda, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ è la lunghezza d'onda e $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$. Non daremo una dimostrazione di questo risultato, ma possiamo intuire il significato dei vari termini che lo compongono:

- il termine $\frac{e^{ikr}}{r}$ non è altro che un'onda sferica uscente: ogni punto del piano fa da sorgente puntiforme di onde uscenti, con intensità proporzionale al valore del campo nel punto di emissione;
- il termine $\frac{z}{r}$ è il *fattore di obliquità*, dovuto all'inclinazione dei fronti d'onda rispetto al piano;
- il termine $-\frac{1}{ikr}$ è dovuto alla riflessione dell'onda sul piano, diventa rilevante solo a brevi distanze.

Questo sembra aver risolto il nostro problema: abbiamo una soluzione esatta alle equazioni di Maxwell nel vuoto, non resta altro che calcolare l'integrale e da esso trovare l'intensità della radiazione dovunque vogliamo. Tuttavia, c'è una sottigliezza a cui stare attenti: il campo $E(x, y, 0, \omega)$ che compare all'interno dell'integrale *non* è semplicemente il campo dell'onda in ingresso, ma è la somma tra esso e quello generato dalle correnti/cariche indotte sul piano, che non abbiamo modo di conoscere senza risolvere interamente le equazioni di Maxwell in tutto lo spazio! Per procedere oltre dobbiamo fare una prima approssimazione, nota come approssimazione di Kirchhoff: sostituiamo il campo elettrico all'interno dell'integrale con

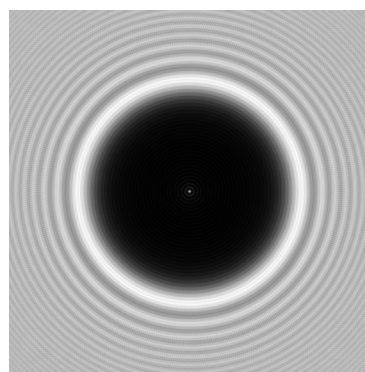
- il campo della sola onda incidente $E_0(x, y, 0, \omega)$, in corrispondenza dell'apertura;
- zero, al di fuori dell'apertura.

L'aver posto il campo a zero nei punti in cui è presente il materiale conduttore è necessario per tener conto del fatto che, al suo interno, i campi devono necessariamente annullarsi. La soluzione che otterremo non è esatta, ma funziona perfettamente se evitiamo di usarla per calcolare i campi troppo vicino all'apertura o ad angoli troppo grandi. L'espressione che useremo d'ora in poi è quindi:

$$\vec{E}(x, y, z, \omega) = \frac{z}{i\lambda} \iint_S \vec{E}_0(x, y, 0, \omega) \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) dx' dy'.$$

4.5 Caso $F \approx 1$: diffrazione di Fresnel

Il regime in cui $F \approx 1$ è notoriamente complicato, dal momento che non è possibile trascurare praticamente nessun termine nella formula integrale di sopra, e spesso si presta soltanto a simulazioni numeriche. È improbabile dover fare calcoli espliciti in una gara, ma riportiamo comunque una previsione qualitativa della teoria: la macchia di Arago. Facendo diffrangere un'onda da un'apertura circolare ci aspetteremmo di vedere una zona centrale luminosa, in corrispondenza dei punti direttamente di fronte al buco. Al contrario, nel regime di Fresnel si osserva una piccola macchia d'ombra esattamente al centro! Equivalentemente, facendo incidere un'onda su un ostacolo a forma di disco (complementare all'apertura circolare) si nota una piccola macchia luminosa proprio dove, secondo l'ottica geometrica, dovremmo vedere ombra totale.



4.6 Caso $F \ll 1$: diffrazione di Fraunhofer

I fenomeni ondulatori si manifestano soprattutto quando lo schermo di osservazione è posto ad una distanza D molto grande e la lunghezza d'onda non è eccessivamente piccola rispetto alla dimensione caratteristica dell'apertura: stiamo cioè studiando i campi a grandi distanze (zona di *far field*) e vale $F \ll 1$. Assumeremo anche, ovviamente, che la distanza di osservazione $R \geq D$ sia molto maggiore di λ . Possiamo quindi semplificare enormemente l'integrale di Rayleigh-Sommerfeld:

- visto che $d \ll D$, $\frac{z}{r^2} \approx \frac{D}{R^2}$, dove $R = \sqrt{D^2 + x^2 + y^2}$;
- il termine $-\frac{1}{ikr} \approx \frac{i\lambda}{2\pi D}$ è trascurabile, quindi $1 - \frac{1}{ikr} \approx 1$.

Il termine e^{ikr} è più difficile da gestire, visto che l'argomento dell'esponenziale può essere molto grande. Possiamo provare ad espanderlo in serie di Taylor: indichiamo il vettore posizione sul piano con

$$\vec{r}' = \hat{x}x' + \hat{y}y',$$

mentre il punto di osservazione è indicato con $\vec{R} = R\hat{n}$. Allora

$$r^2 = (\vec{R} - \vec{r}')^2 \implies r = \sqrt{R^2 + r'^2 - 2R\hat{n} \cdot \vec{r}'} \approx R - \hat{n} \cdot \vec{r}'.$$

Si può dunque portare il termine costante e^{ikR} fuori dall'integrale, ottenendo:

$$\vec{E}(x, y, D, \omega) = \frac{De^{ikR}}{i\lambda R^2} \iint_S \vec{E}_0(x', y', 0, \omega) e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{r}'} dx' dy'.$$

Solitamente si ha a che fare con onde ad intensità uniforme, ovvero \vec{E}_0 non dipende da x', y' . L'approssimazione di Kirchoff comincia a perdere validità quando l'angolo tra l'apertura e il punto di osservazione diventa troppo elevato, quindi assumeremo sempre $R \approx D$. Indicando con

I_0 l'intensità dell'onda diffratta in avanti, ovvero a $\hat{n} = \hat{z}$, dopo qualche manipolazione arriviamo a:

$$I(\hat{n}) = I_0 |f(\hat{n})|^2, \quad f(\hat{n}) = \frac{1}{S} \iint_S e^{-ik\hat{n}\cdot\vec{r}'} dx' dy'.$$

Questo significa che, per angoli sufficientemente piccoli e a distanze molto grandi, la diffrazione di onde elettromagnetiche può essere approssimata con semplice interferenza di onde piane. Applichiamo questo risultato a delle forme semplici come esempio.

§ 4.6.1. **Apertura rettangolare.** — Consideriamo un'onda piana con frequenza ω incidente perpendicolarmente ad un piano in cui è stata ricavata un'apertura rettangolare di lati $2a, 2b$. Poniamo l'origine degli assi al centro del rettangolo, con asse x parallelo al lato lungo $2a$, e poniamo

$$\hat{n} = z\cos\theta + \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi.$$

Calcoliamo $f(\hat{n})$:

$$\begin{aligned} f(\hat{n}) &= \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \exp[-ik(x\sin\theta\cos\phi + y\sin\theta\sin\phi)] dx dy \\ &= \frac{\sin(ka\sin\theta\cos\phi)}{ka\sin\theta\cos\phi} \frac{\sin(kb\sin\theta\sin\phi)}{kb\sin\theta\sin\phi}. \end{aligned}$$

Perciò $I(\theta, \phi) = I_0 \left| \frac{\sin(ka\sin\theta\cos\phi)}{ka\sin\theta\cos\phi} \frac{\sin(kb\sin\theta\sin\phi)}{kb\sin\theta\sin\phi} \right|^2 = I_0 \left| \frac{\sin(k_x a)}{k_x a} \frac{\sin(k_y b)}{k_y b} \right|^2$, dove abbiamo introdotto il vettore d'onda $\vec{k} = k\hat{n}$. I minimi di intensità si verificano in corrispondenza delle direzioni per cui

$$k_x a = m\pi, \quad k_y b = n\pi, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2 / (0, 0).$$

Ciò è facilmente interpretabile in termini di cammini ottici: se questa condizione è verificata, per ogni punto dell'apertura possiamo trovarne un altro tale che la differenza di cammino tra le onde emesse dai due sia esattamente π ; visto che nella diffrazione Fraunhofer l'unica quantità rilevante è la fase relativa (e non l'ampiezza dell'onda emessa, visto che ci si trova a grandi distanze) il risultato è l'annullarsi del campo elettromagnetico nella direzione \hat{n} .

Nel limite $b \rightarrow +\infty$ ritroviamo il caso di singola fenditura.

§ 4.6.2. **Multiple aperture molto piccole.** — Supponiamo di avere diverse aperture, indicate da un indice j , ognuna di area $A_j \ll \lambda^2$ e centrate in \vec{r}_j . Questa è la situazione tipica dell'analisi dei reticoli di diffrazione, o delle fenditure multiple. Nella stessa situazione di onda incidente come sopra, f diventa:

$$f(\hat{n}) = \frac{1}{\sum_j A_j} \sum_j \int_{S_j} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} dx' dy' \approx \frac{\sum_j A_j e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_j}}{\sum_j A_j},$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che l'argomento dell'esponenziale varia molto poco all'interno di ogni singola apertura. Si vede quindi che la condizione di massima intensità $|f(\hat{n})| = 1$ si verifica solo per i \vec{k} per cui

$$\vec{k} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 2\pi m_{ij}, \quad m_{ij} \in \mathbb{Z}$$

per ogni coppia i, j , ovvero la differenza di cammino ottico tra due onde provenienti da due aperture diverse è un multiplo intero di λ .

Nel caso in cui ci siano due piccole aperture identiche, poste sull'asse x a distanza d l'una dall'altra, osservando l'onda sul piano $y = 0$ la condizione di interferenza costruttiva diventa

$$d \sin\theta = m\lambda,$$

ovvero il risultato ben noto per la doppia fenditura. Per angoli piccoli

$$\sin \theta \approx \theta \approx y/D,$$

quindi troviamo massimi di intensità distanti l'uno dall'altro

$$\Delta = \frac{\lambda D}{d}.$$

§ 4.6.3. **Apertura circolare.** — Consideriamo un'onda incidente su un'apertura circolare di raggio a , osservata nella direzione $\hat{n} = \hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta$. Visto che siamo in zona Fraunhofer e non Fresnel, ci aspettiamo di trovare un massimo dell'intensità per $\theta = 0$. Passiamo in coordinate polari (ρ, ϕ) e integriamo:

$$f(\hat{n}) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \exp(-ik\rho \sin \theta \cos \phi) \rho d\rho d\phi.$$

Questo integrale non è esprimibile in termini di funzioni elementari: il risultato è

$$f(\hat{n}) = 2 \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta},$$

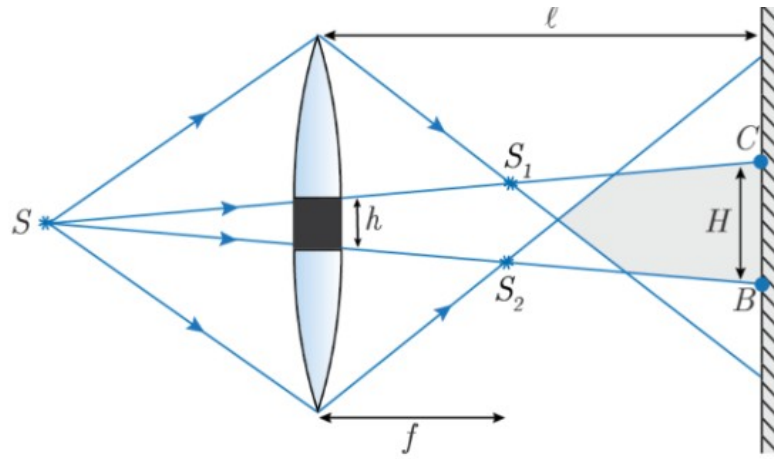
dove la funzione $J_1(x)$ è detta *funzione di Bessel di tipo 1*. Le funzioni di Bessel sono funzioni speciali che compaiono di frequente nello studio dei fenomeni ondulatori, sono ben conosciute e sono tabulate su qualsiasi libreria di funzioni. Le proprietà che ci interessano sono solo due:

- per $x \rightarrow 0$, $J_1(x) \approx \frac{x}{2}$, quindi nel limite $\theta \rightarrow 0$ ritroviamo $f(\hat{n}) \approx 1$, come atteso;
- il primo zero della funzione J_1 si trova in $x \approx 3.83$, dunque si osserverà un primo anello d'ombra ad un angolo $\sin \theta \approx 0.61 \frac{\lambda}{a}$.



Figura 5: Pattern di diffrazione da apertura circolare.

§ 4.6.4. **Lente di Billet.** — Supponiamo di avere una lente convergente, di lunghezza focale F , che è stata tagliata a metà lungo un suo diametro. Tra i due pezzi viene inserito un sottile strato di materiale opaco spesso h . Una sorgente luminosa puntiforme che emette luce con lunghezza d'onda λ viene posta sull'asse ottico a distanza $p > 2F$ dalla lente, e la luce viene raccolta su uno schermo distante $\ell \gg F$ dalla lente.



Nella zona limitata dai punti B, D si osserva un pattern di interferenza, dovuto alla sovrapposizione tra la luce proveniente dalla metà superiore e inferiore. La sorgente è posta ad un'altezza $-h/2$ rispetto al punto più basso della metà superiore della lente; usando la legge dei punti coniugati, vediamo che i raggi luminosi passanti da sopra convergono in

$$S_1 = \left(\frac{Fp}{p-F}, \frac{hp}{2(p-F)} \right).$$

Analogamente, i raggi passanti dal basso convergono in

$$S_2 = \left(\frac{Fp}{p-F}, -\frac{hp}{2(p-F)} \right).$$

Dunque il pattern di interferenza coincide con quello prodotto dalle due sorgenti puntiformi S_1 e S_2 , ovvero è identico a quello di una doppia fenditura con

$$d = \frac{hp}{p-F}, \quad D = \ell - \frac{Fp}{p-F} \implies \Delta = \frac{\lambda}{h} \left(\ell - F - \frac{\ell F}{p} \right).$$

— ESERCIZI —

★★★★★ **Esercizio 1 Sfere Conduttrici** Si risolva il problema dell'elettrostatica in tutto lo spazio nel caso siano presenti i seguenti oggetti.

1. Una sfera conduttrice messa a potenziale V_0 .
2. Una sfera conduttrice messa a potenziale V_0 e una carica puntiforme q posizionata davanti a essa.
3. Una sfera conduttrice di carica Q e una carica puntiforme q posizionata davanti a essa.
4. Una carica puntiforme q posta all'interno di un guscio sferico conduttore messo a terra.
5. Una carica puntiforme q posta all'interno di un guscio sferico conduttore messo a potenziale V_0 .

★★★★★ **Esercizio 2 Piani conduttori**

1. Una carica q è posta in posizione $(a, b, 0)$ con $a, b > 0$ ed è presente un conduttore nella regione di spazio $x < 0 \vee y < 0$.
E se invece il conduttore fosse in $x < 0 \wedge y < 0$?
2. Usando ora un sistema di coordinate cilindriche, studiare il sistema in cui è presente un conduttore nella regione di spazio $\theta \in [\alpha, 2\pi]$ con $\alpha = \pi/2n$ per qualche $n \in \mathbb{N}^+$ e una carica q in posizione $(r, \alpha/2, z = 0)$.
Studiare lo stesso sistema di prima dove però q è in posizione $(r, \bar{\theta}, z = 0)$ con $\bar{\theta} \in [0, \alpha]$ qualunque.
3. Due cariche q sono poste rispettivamente in posizione $(a, b, 0)$ e $(-a, -b, 0)$ con $a, b > 0$ ed è presente un conduttore (messo a terra) nella regione di spazio $-d < x < d$ (ovviamente con $d < a$).

★★★★★ **Esercizio 3 Densità positiva o negativa?** Una carica puntiforme q si trova a distanza $r > a$ dal centro di un guscio sferico conduttore non a terra con raggio a e carica netta anch'essa uguale a q . Se la carica puntiforme si trova molto vicino al guscio, la densità di carica sulla superficie più vicina è negativa. Ma se la carica puntiforme si trova molto lontana dal conduttore, la densità superficiale è positiva ovunque (e sostanzialmente uniforme). Si trovi la distanza r per cui la densità subisce questo cambio di segno.

★★★★★ **Esercizio 4 Attrattiva o repulsiva?** Una carica puntiforme q si trova a distanza $r > a$ dal centro di un guscio sferico conduttore non a terra con raggio a e carica netta anch'essa uguale a q . Se la carica puntiforme è molto lontana dal conduttore, questo si comporta essenzialmente come una carica puntiforme q , quindi la forza tra i due oggetti è repulsiva. Ma se la carica q è molto vicino al guscio, allora diventa dominante la carica negativa in eccesso sul lato vicino del guscio, quindi la forza è attrattiva. Si trovi la distanza r per cui la forza subisce questo cambio di segno.

★★★★☆ **Esercizio 5 Piano con innesto sferico** Si consideri un sistema conduttore formato da un piano con l'innesto sferico esattamente uguale all'esercizio svolto a lezione. Si risolva il problema dell'elettrostatica nei seguenti due casi.

1. Il sistema conduttore è a terra e la carica esterna q può essere posizionata ovunque nel semispazio superiore.
2. Non è presente carica esterna, ma il sistema conduttore (sempre messo a terra) è immerso in un campo elettrico uniforme perpendicolare al piano.

★★☆☆☆ **Esercizio 6 Densità di carica sul piano con innesto sferico** Torniamo alla situazione dell'esercizio svolto 1.5.2. Supponiamo che la distanza r della carica q sia molto più grande del raggio a dell'emisfera. Mostra che nel limite $r \gg a$, la densità di carica superficiale nella parte superiore dell'emisfera è tre volte più grande della densità sul piano (ai piedi della perpendicolare passante per q) se avessimo semplicemente un piano senza l'innesto. Sempre in questo limite quanto vale la densità di carica in corrispondenza della linea di contatto tra piano e semisfera?

★★★★☆ **Esercizio 7 Giunzione bipolare** Una giunzione $p-n$ (o meglio noto come diodo) può essere rappresentata come due lastre adiacenti uniformemente cariche con densità $\rho_p > 0$ e $\rho_n < 0$. Si denoti con s_p e s_n gli spessori delle piastre. Si trovi la condizione per cui all'esterno della giunzione il campo elettrico sia nullo. In questa condizione si calcoli il campo elettrico all'interno della giunzione e il relativo potenziale elettrico.

★★★★☆ **Esercizio 8 Sfere conduttrici nello spazio** Due sfere conduttrici di raggio a distano $d \gg a$ l'una dall'altra. Su entrambe le sfere è presente una carica di ugual modulo Q ma segno opposto. Calcolare al primo ordine in a/d la forza di interazione elettrostatica.

★★★★☆ **Esercizio 9 Cilindri carichi** Si considerino due cilindri infiniti carichi con densità volumica uniforme ρ e $-\rho$ di raggio R , con i centri rispettivamente nei punti $(d, 0, 0)$ e $(-d, 0, 0)$.

1. Si trovi il campo all'interno dell'intersezione tra i due cilindri.
2. Nell'approssimazione in cui ρ tende a infinito ma il prodotto $2\rho d = P_0$ si mantiene valore costante, si trovi il campo in tutto lo spazio e la densità superficiale di carica sul cilindro di raggio R centrato nell'origine.

★★★★☆ **Esercizio 10 Sfera conduttrice in campo esterno** Si consideri una sfera conduttrice messa a terra immersa in un campo uniforme esterno di modulo E_0 . Si risolva il potenziale elettrostatico in tutto lo spazio. E se la sfera non fosse messa a terra ma avesse carica Q_0 ?

★★☆☆☆ **Esercizio 11 Sfera ohmica in campo esterno** Si consideri una sfera di raggio a di materiale ohmico di conducibilità σ_1 immersa in un materiale ohmico di conducibilità σ_2 . Attraverso l'intero sistema si fa scorrere una densità di corrente uniforme \vec{J}_0 proveniente dall'infinito. Si calcoli il campo elettrostatico in tutto lo spazio.

★★★★☆☆ **Esercizio 12 Aureola bella carica (200 More Physics Puzzling Problems 151)** Considero un anello e una sfera conduttori di raggi rispettivamente R e r . L'anello è caricato in modo che al suo centro il potenziale sia V_0 , mentre la sfera è messa a terra. Ora avvicino l'anello alla sfera in modo tale che il piano in cui giace l'anello sia tangente nel centro dell'anello alla sfera. Calcola la carica totale indotta sulla sfera.

★★★★☆ **Esercizio 13 Potenziale in un cubo (200 More Physics Puzzling Problems 141)** Considera un cubo con densità di carica volumica uniforme ρ . Prendendo lo 0 del potenziale all'infinito ($V(\infty) = 0$) trova il rapporto fra il potenziale al centro del cubo e quello su uno dei vertici.

★★☆☆☆ **Esercizio 14 Methane is so mundane (200 More Physics Puzzling Problems)** Quattro piccole sfere identiche conduttrici A, B, C e D sono posizionate ai vertici di un tetraedro regolare. Se metto q su A questa ha potenziale V . La sfera A ha potenziale V anche se metto $3q/4$ su A e su una delle altre sfere.

1. Calcola la carica che va messa su A e altre due sfere per avere nuovamente il potenziale di A uguale a V (nel senso che su ciascuna delle tre sfere ci deve essere la stessa carica).
2. Stessa domanda di sopra ma utilizzando tutte le sfere.

★★★★★ **Esercizio 15 Esplosione coulombiana 1** Una nube sferica uniformemente carica di raggio R e carica totale Q inizia a espandersi al tempo $t = 0$ a causa della repulsione coulombiana.

1. Mostrare che, se per due particelle vale $r_1(0) < r_2(0)$, allora varrà sempre $r_1(t) < r_2(t)$.
2. Trovare inoltre l'equazione differenziale del moto e dimostrare che la densità di carica rimane uniforme durante l'espansione.
3. Dire se esiste una velocità asintotica delle particelle che compongono la nube e nel caso calcolarla.

★★★★☆ **Esercizio 16 Esplosione Coulombiana 2** La situazione è la stessa dell'esercizio precedente, ma al posto di una sfera si consideri un cilindro infinito di raggio R . Si risponda alle stesse domande dell'esercizio precedente.

★★★★★ **Esercizio 17 Rutherford era un grand'uomo (IPhO 2011 - 3)** Uno ione di massa m e carica Q , inizialmente molto lontano, si muove con velocità iniziale non relativistica v_0 verso un atomo neutro di massa $M \gg m$ e polarizzabilità α . Il parametro di impatto è b come illustrato in figura 6.

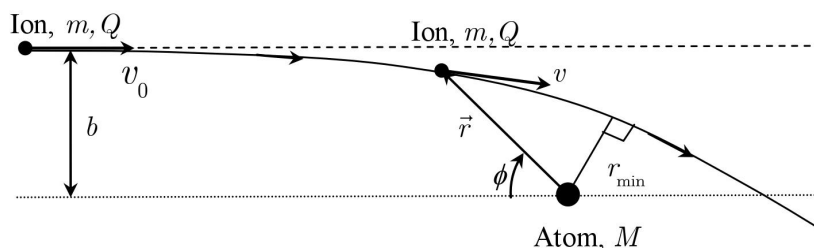


Figura 6: Problema della deviazione coulombiana di un atomo, tratto dalle IPhO 2011.

L'atomo è istantaneamente polarizzato (dunque acquista momento di dipolo \mathbf{p}) dal campo elettrico dello ione che si avvicina. In questo problema si trascuri qualsiasi perdita di energia per radiazione.

1. Calcolare il campo elettrico \mathbf{E}_p ad una distanza r dal dipolo elettrico ideale \mathbf{p} situato nell'origine O , lungo la direzione individuata da \mathbf{p} nella Figura.

2. Trovare l'espressione della forza \mathbf{f} che l'atomo polarizzato esercita sullo ione. Dimostrare che la forza è attrattiva indipendentemente dalla carica dello ione.
3. Qual è l'energia potenziale elettrica dell'interazione ione-atomo in funzione di α , Q e r ?
4. Trovare l'espressione di r_{\min} , cioè la distanza di massimo avvicinamento (vedi figura).
5. Se il parametro d'impatto b è minore di un valore critico b_c , lo ione cadrà sull'atomo descrivendo un percorso a spirale. In tale caso, lo ione sarà neutralizzato e l'atomo, invece, si caricherà. Questo processo è conosciuto con il nome di interazione di "scambio di carica". Qual è l'area della sezione d'urto, $A = \pi b_c^2$, dello "scambio di carica" della collisione tra atomo e ione?

★★★☆☆ **Esercizio 18 Carica tra due piastre** Due piastre parallele bidimensionali sono poste una di fronte all'altra in corrispondenza rispettivamente dei piani $z = 0$ e $z = s$ e sono messe a terra. Si assuma che la distanza s tra le piastre sia molto più piccola delle loro dimensioni laterali. Una carica puntiforme q si trova a distanza $a < s$ da una delle due piastre, nello spazio tra esse compreso. Qual è il valore delle cariche nette su ciascuna piastra conduttrice?

NOTA: in questo problema non si chiede semplicemente la somma delle due cariche delle piastre (che può essere dedotta con facilità), ma il valore esatto di ciascuna delle due. In questo caso il metodo delle cariche immagini non porta a nessun risultato sperato (si provi comunque a trovare la configurazione di cariche immagini per questo problema). Può risultare utile notare che, posizionando un'altra carica q ovunque sul piano $z = a$, avrebbe l'effetto per sovrapposizione di raddoppiare la carica netta sulle piastre (pur cambiando la distribuzione di carica su di esse). Si utilizzi questa osservazione per risolvere il problema.

Nota: prima di tentare i prossimi due problemi è molto consigliato aver risolto il precedente.

★★☆☆☆ **Esercizio 19 Corrente tra due elettrodi 1** Si consideri un semplice circuito formato da due elettrodi conduttori connessi con un filo. Gli elettrodi consistono in due piastre parallele molto vicine tra loro. A un certo punto uno ione di carica Q_0 viene emesso da uno dei due elettrodi e viaggia con velocità v_0 verso l'altro finché non si deposita su di esso. Si calcoli la corrente che scorre nel filo in funzione del tempo.

★☆☆☆☆ **Esercizio 20 Corrente tra due elettrodi 2** Si consideri un semplice circuito formato da due elettrodi conduttori connessi con un filo. Gli elettrodi consistono in due gusci cilindrici molto lunghi e concentrici. A un certo punto uno ione di carica Q_0 viene emesso da uno dei due elettrodi e viaggia con velocità v_0 verso l'altro finché non si deposita su di esso. Si calcoli la corrente che scorre nel filo in funzione del tempo.

★★★☆☆ **Esercizio 21 Disco conduttore** Si consideri un disco conduttore carico di raggio a con carica totale Q_0 . Si assuma che il disco abbia soltanto estensione bidimensionale.

1. Si calcoli la densità di carica superficiale in funzione della distanza dal centro in condizioni statiche (Hint: può essere utile pensare al campo elettrico all'interno di un guscio sferico carico uniformemente sulla superficie...).
2. Si usi il risultato precedente per calcolare la capacità del sistema.

★★★☆☆ **Esercizio 22 Bastoncino conduttore** Si consideri un bastoncino conduttore carico di lunghezza l con carica totale Q_0 . Si assuma che il bastoncino abbia soltanto estensione unidimensionale.

1. Si calcoli la densità di carica lineare in funzione della distanza dal centro in condizioni statiche (Hint: può essere utile pensare al campo elettrico all'interno di un guscio sferico carico uniformemente sulla superficie...).
2. Si usi il risultato precedente per calcolare la capacità del sistema.

★★★★☆ **Esercizio 23 Capacità di due palle** Si consideri un sistema composto da due sfere identiche e conduttrici, ciascuna di raggio R , poste in modo che i loro centri distino $2R$ l'uno dall'altro: le due sfere sono dunque reciprocamente tangenti. Si determini la capacità di questo sistema.

★★★★☆☆ **Esercizio 24 Physics Cup 2020/1** Due palle metalliche, entrambe di massa M e raggio R , sono collegate da una sbarretta rigida non conduttrice di lunghezza $L \gg R$. Il sistema viene quindi immerso in un campo elettrico esterno costante e uniforme di modulo E . Ignorando gravità e attrito, si determini il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla sua posizione di equilibrio stabile.

★☆☆☆☆ **Esercizio 25 IdPhO 2020/1** È dato un cubo fisso di lato a , avente una densità di carica ρ costante e uniforme. Una particella puntiforme di massa m e carica q , tale che $\rho q < 0$, è costretta a muoversi lungo una retta fissa passante per il centro del cubo, senza alcun tipo di attrito. Si trovi il periodo delle sue piccole oscillazioni attorno al centro del cubo.

★★★★☆ **Esercizio 26 What the Snell?** Un raggio di luce si muove in un mezzo con indice di rifrazione che dipende solo dalla distanza dall'origine, $n(r)$. Mostrare che la traiettoria del raggio giace su un piano e che

$$n(r)r \sin \theta = \text{const.},$$

dove θ è l'angolo tra la direzione del raggio e quella radiale.

★★★★☆☆ **Esercizio 27 Ray tracing** Nel diagramma in figura, F e F' indicano i due fuochi di una sottile lente convergente. Un raggio di luce passa dal punto A , viene rifratto dalla lente e raggiunge il punto B . Ricostruire il percorso del raggio a partire dalla figura.

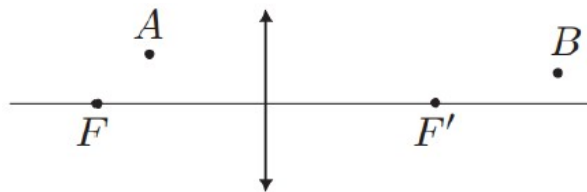


Figura 7: Diagramma es. 27

★★★★☆☆ **Esercizio 28 IZhO 2011/2** Nel diagramma in figura, il segmento $A'B'$ è l'immagine del segmento AB prodotta da una lente sottile la cui posizione e lunghezza focale sono ignote. Ricostruire la posizione del centro della lente, la sua orientazione e i suoi fuochi. La lente è convergente o divergente?

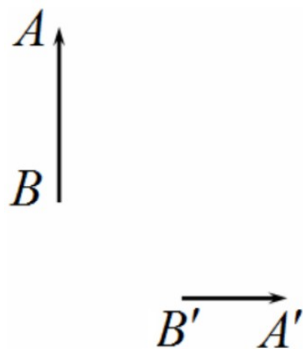


Figura 8: Diagramma es. 28

★★☆☆☆ **Esercizio 29 Physics Cup 2017/4** L'ellisse in figura è l'immagine reale tramite una lente sottile convergente di una circonferenza. Sia quest'ultima, sia i fuochi della lente giacciono nel piano del foglio. Ricostruire la posizione della lente (centro e orientazione) con riga e compasso.

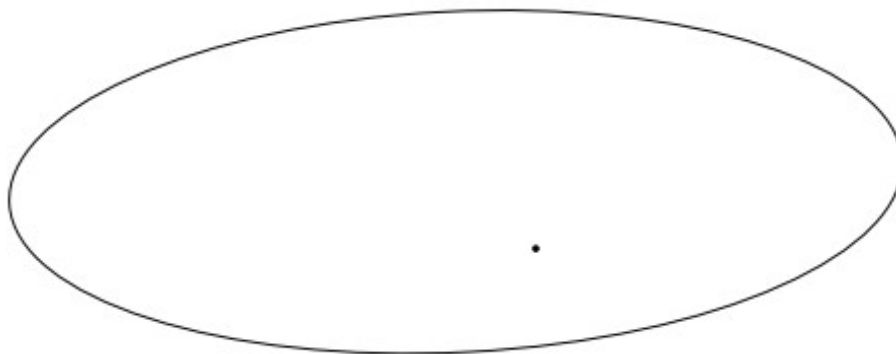


Figura 9: Diagramma es. 29

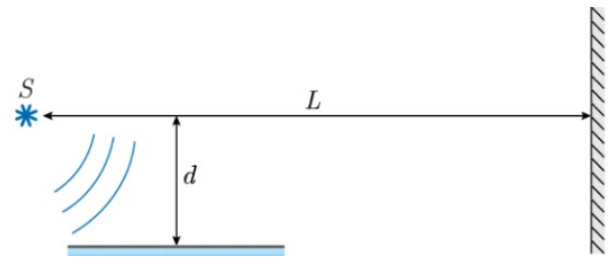
★★★★☆☆ **Esercizio 30 Al centro della sfera - 200MPPP 117** Una sorgente luminosa puntiforme è posta all'interno di una sfera di vetro, con indice di rifrazione uniforme n . La sfera ha raggio R e la sorgente dista d dal suo centro. Curiosamente, la sfera forma una perfetta immagine virtuale della sorgente: i prolungamenti dei raggi rifratti convergono in un unico punto. Quanto vale d , e dove si trova l'immagine virtuale della sorgente?

★★★★☆☆ **Esercizio 31 Lente perfettissima - 200MPPP 118** L'interfaccia tra un materiale con indice di rifrazione n e il vuoto ha la forma di una superficie di rotazione, ottenuta ruotando una certa funzione $r(z)$ attorno all'asse z . Quale dovrebbe essere $r(z)$ affinché tutti i raggi provenienti dal vuoto e diretti lungo l'asse z convergano esattamente in un punto all'interno del materiale rifrangente, a distanza F dall'interfaccia e posto sull'asse di simmetria del sistema? Se, invece, dovesse far convergere raggi provenienti dall'interno del materiale in un punto sull'asse al di fuori di esso?

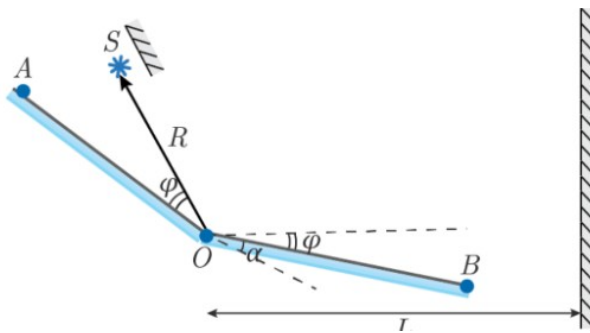
★★★★☆☆ **Esercizio 32 Messa a fuoco - 200MPPP 120** Una sferetta di raggio r viene posizionata sull'asse ottico di una lente sottile convergente (con $F > r$), in modo che il suo centro coincida con uno dei due fuochi. Trovare la forma dell'immagine prodotta dalla lente.

★★★★★ **Esercizio 33 Specchi di Lloyd**

Uno specchio ideale occupa l'intero piano $z = 0$, mentre uno schermo opaco viene posizionato sul semipiano $x = 0, z > 0$. Una sorgente luminosa puntiforme viene tenuta ferma ad una distanza L dallo specchio e d dallo schermo, ed emette luce in modo isotropo con lunghezza d'onda λ . La distanza dallo schermo è tale da essere nel regime di Fraunhofer. Descrivere il pattern di interferenza visibile sullo schermo.



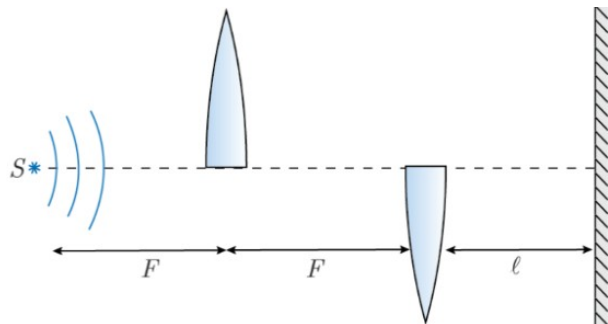
★★★★☆ **Esercizio 34 Specchi di Fresnel**



Analogamente all'esercizio precedente, AO e OB sono specchi ideali e S una sorgente di luce isotropa a lunghezza d'onda λ . L'angolo tra i due specchi è α , e l'inclinazione ϕ dello specchio di destra rispetto alla normale allo schermo coincide con l'inclinazione della posizione della sorgente rispetto allo specchio di sinistra. Quanto vale la distanza tra due frange di interferenza visibili sullo schermo?

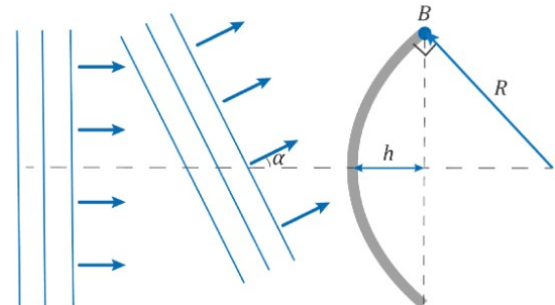
★★★★☆☆ **Esercizio 35 Interferometro di Meslin**

Una lente sottile ideale, con lunghezza focale F , viene tagliata in due parti identiche lungo un diametro. La prima viene posizionata ad una distanza ℓ da uno schermo, la seconda viene traslata rigidamente di una distanza F lontano dallo schermo. Una sorgente puntiforme S si trova nel fuoco della metà lente più lontana dallo schermo ed emette isotropicamente a lunghezza d'onda λ . Descrivere le frange di interferenza visibili sullo schermo, assunto $\ell \gg F$.



★★★★☆☆ **Esercizio 36 Schermo cilindrico**

Due fronti d'onda con lunghezza d'onda λ incidono contemporaneamente su uno schermo cilindrico di raggio R . L'angolo tra le direzioni delle due onde è α . Il punto B dista orizzontalmente h rispetto all'estremo del cilindro, con $h \ll R$. Quanto sono distanti l'una dall'altra le frange di interferenza nel punto B ?



☆☆☆☆☆ **Esercizio 37 Diffrazione... Cantor?** Un'onda piana monocromatica sta incidendo su una fenditura larga a in uno schermo opaco. Eseguiamo la seguente procedura: dividiamo la fenditura in tre parti uguali lunghe $a/3$ e copriamo quella centrale, ottenendo due

fenditure più piccole ai lati. Ripetiamo questo procedimento anche per quest'ultime, ottenendone quattro larghe $a/9$. Ripetiamo questo processo un numero $N \gg 1$ di volte. Osserviamo il pattern di diffrazione su uno schermo molto lontano: quanto vale la distanza tra il massimo centrale e il primo minimo?

★☆☆☆☆ **Esercizio 38 Diffrazione da un semipiano** Uno schermo opaco occupa il semipiano $z = 0, x < 0$. Un'onda piana monocromatica diretta lungo \hat{z} vi incide e viene diffratta. Nel limite $z \gg \lambda, x$ mostrare che l'intensità dell'onda diffratta a grandi distanze vale

$$I(x, 0, z) = \frac{I_0}{2} \left[\left(\text{Si}(\xi) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\text{Ci}(\xi) + \frac{1}{2} \right)^2 \right],$$

dove $\xi = x\sqrt{\frac{k}{2z}}$ e $\text{Si}(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$, $\text{Ci}(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$.