

Elettrostatica

LEZIONE BASE

Carmine Foggia*, Edoardo Loiero†

Data

Sommario

La lezione introduttiva fornirà gli strumenti fondamentali per affrontare problemi di elettrostatica e magnetostatica. Tratteremo la legge di Coulomb, il teorema di Gauss, i conduttori, i condensatori e le leggi della magnetostatica, evidenziando l'importanza delle simmetrie per la risoluzione dei problemi. Sarà inoltre introdotta la tecnica delle cariche immagine per l'analisi di campi elettrostatici in presenza di conduttori.

Sommario Extra

In verità vi dico: questa lezione vi condurrà alla conoscenza dei fondamenti dell'elettrostatica e della magnetostatica. Parleremo della forza che agisce tra le cariche, secondo la legge di Coulomb, e del teorema di Gauss, per comprendere il campo elettrico nei luoghi ove la simmetria regna sovrana. Così come i conduttori e i condensatori hanno i loro ruoli nel mondo della materia, anche voi vedrete la loro utilità nel mondo del sapere. E ancora, vi mostrerò il metodo delle cariche immagine, affinché possiate risolvere con saggezza i problemi in presenza dei conduttori. Chi ha orecchi per intendere, intenda.

*carmine.foggia@sns.it

†edoardo.loiero@sns.it

— INDICE —

1	Osservazioni Sperimentali	4
1.1	Legge di Coulomb	4
1.2	Principio di Sovrapposizione	4
2	Il Campo Elettrico	5
2.1	Definizione	5
2.1.1	come si interpreta/deduce questa formula	5
2.2	Simmetrie	6
	★★☆☆☆ Filo Infinito Uniformemente Carico	6
	★★☆☆☆ Piano Uniformemente Carico	7
2.3	La Legge di Gauss	7
	★★★★☆ Filo Infinito con Gauss	10
	★★★★☆ Piano Infinito con Gauss	10
2.4	L'Energia Elettrostatica	11
	★☆☆☆☆ Energia di un condensatore	14
3	I Conduttori	15
3.1	Definizioni	15
3.2	Disposizione delle Cariche sui Conduttori	16
	★★★★☆☆ Gabbia di Faraday	16
	★★★★☆☆ Gabbia di Faraday Inversa	16
	★☆☆☆☆ Effetto delle Punte	17
3.2.1	★★★★★★ Sovrapposizione e Unicità delle Soluzioni	18
4	Le Cariche Immagine	18
4.1	Presentazione del Problema	19
	★★★★★★ Piano Conduttore e Carica	19
	★★★★★★ Sfera Conduttrice e Carica	19
4.2	Il Metodo Risolutivo	19
4.2.1	★★★★★★ Carica Immagine del Piano	19
4.2.2	★★★★★★ Carica Immagine della Sfera	21
5	I Dipoli Elettrici	22
5.1	Approssimazioni e perché farle	22
5.2	Il Potenziale del Dipolo	23
5.3	Il Campo Elettrico del Dipolo	24
5.4	Giocare con i Dipoli: Momento Torcente, Energia e Forza	25
6	I Condensatori	26
6.1	Definizione	26
6.2	Il Campo Elettrico di un Condensatore	27
6.3	La Capacità di un Condensatore	27
6.4	I Materiali Isolanti	28
7	Cenni di Magnetostatica	28
7.1	Il Campo Magnetico	28
7.2	Moto delle Cariche in Campo Magnetico	29
	★★★★☆ Moto in Campo Uniforme	29
7.3	Le Equazioni di Maxwell per la Magnetostatica	29

7.4	Sorgenti di Campo Magnetico	30
	★★★☆☆ Campo di un Filo Infinito	30
	Esercizi	33
	Soluzioni	41

SEZ. 1 — OSSERVAZIONI SPERIMENTALI

In principio erano le osservazioni sperimentali...

Questo è vero in ogni ambito della fisica, ed è giusto (e importante) capire quali risultati sono della matematica e quali ipotesi siamo riusciti a mettere grazie a semplici osservazioni.

Iniziamo quindi dalla parte più propriamente fisica della fisica.

1.1 Legge di Coulomb

In principio furono create le cariche. Coulomb disse: "Vi sia interazione!"

E interazione fu. Fece esperimenti con ciò che aveva creato e dedusse cose. E fu sera e fu mattina: Primo Giorno.

In natura si osserva che i corpi sono dotati di una certa proprietà, comunemente chiamata carica elettrica. Sempre sperimentalmente, si distinguono due *tipi* di carica elettrica, convenzionalmente identificati come *carica positiva* e *carica negativa*.

Due corpi carichi, posti a grande distanza rispetto alle proprie dimensioni (in modo che possano essere trattati a tutti gli effetti come puntiformi) interagiscono tramite una forza che Coulomb osservò essere direttamente proporzionale a entrambe le cariche in gioco e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

In particolare, se si pone una carica q_1 nella posizione \vec{r}_1 e una carica q_2 nella posizione \vec{r}_2 , la forza di cui risente la carica q_2 è:

$$\vec{F}_{2,1} = k \frac{q_1 q_2}{r_{2,1}^2} \hat{r}_{2,1} \quad (1.1)$$

dove si indica con $\vec{r}_{2,1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ e la costante di proporzionalità $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ è positiva ed è chiamata costante elettrostatica o costante di Coulomb.

1.2 Principio di Sovrapposizione

Volendo studiare cosa succede in presenza di un numero maggiore di cariche ci viene in aiuto un'altra osservazione sperimentale: in una configurazione di 3 cariche q_1, q_2, q_3 , la forza sulla terza carica dovuta alle altre due, \vec{F}_3 , vale

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2}.$$

In particolare, non compaiono altri termini di interazione (che potrebbero essere ad esempio un termine $\vec{F}(q_1 q_2 q_3)$ dipendente dal prodotto di tutte e tre le cariche). E questo è vero anche continuando ad aggiungere ulteriori cariche.

Questo fatto è fondamentale e assolutamente non banale, perché la conoscenza della sola legge di Coulomb non ci fornisce informazioni su come si comporti la forza in presenza di un numero di cariche maggiore di 2¹.

La teoria che andremo a trattare sarà quindi lineare e vedremo che questo sarà di notevole importanza per i metodi matematici e l'approccio che useremo per la risoluzione degli esercizi.

¹Inutile dirlo, ma saremo puntigliosi, che anche questa osservazione non ci garantisce che aggiungendo la n-millesima carica non compaia qualche altro termine di interazione... ma utilizzeremo il principio di sensatezza e la magica domanda "perché mai dovrebbe funzionare per poche cariche e poi rompersi in fondo tutte le cariche stanno interagendo non solo quelle nel laboratorio... dai secondo me funziona, le formule che ne escono sono molto belle".

SEZ. 2 — IL CAMPO ELETTRICO

Ora che siamo giustamente stanchi di fare osservazioni sperimentali possiamo notare che abbiamo già tanto con cui lavorare e che siamo solo al secondo giorno della creazione e quindi iniziamo la parte divertente della fisica, ovvero usare la matematica per costruire una teoria in grado di descrivere e risolvere problemi.

2.1 Definizione

Dal principio di sovrapposizione deduciamo che nel caso di varie cariche puntiformi q_1, \dots, q_N , posizionate rispettivamente in $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ e tenute fissate², allora la forza di cui risente una carica *di prova* q posta in \vec{r} (con $\vec{r} \neq \vec{r}_j$ per ogni $j = 1, \dots, N$) vale:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N k \frac{qq_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j) = q \sum_{j=1}^N k \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j) \equiv q\vec{E}(\vec{r}) \quad (2.1)$$

dove si è semplicemente raccolta fuori dalla sommatoria la dipendenza dall'intensità della carica q che può essere presa idealmente piccola a piacere.

Il vettore $\vec{E}(\vec{r})$, chiamato campo elettrico, definisce quindi una proprietà del punto \vec{r} che dipende solo dalla distribuzione delle cariche q_1, \dots, q_N ed è indipendente da q .

Possiamo ora generalizzare a distribuzioni di cariche continue, introducendo il concetto di densità di carica. In questo caso la sommatoria che precedentemente permetteva di iterare sulle varie cariche puntiformi distinte è sostituita da un integrale. Per le densità di carica solitamente vengono utilizzate le lettere ρ, σ, λ rispettivamente per le densità di carica volumica, superficiale e lineare.

In particolare, il campo elettrico generato da una densità volumica di carica è

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d^3r'$$

e per gli altri casi si integra sulla superficie o linea considerata invece che sul volume di interesse.

§ 2.1.1. come si interpreta/deduce questa formula. — Consideriamo un volume *mooolto* piccolo, diremo *infinitesimo*, che indichiamo con d^3r' (centrato in un punto \vec{r}'). La densità di carica in quel punto $\rho(\vec{r}')$ si può considerare costante e il contenuto di questo volume equivale quindi a una carica puntiforme $q' = \rho(\vec{r}')d^3r'$ posizionata in \vec{r}' . Se questa carica fosse da sola genererebbe nel punto \vec{r} un campo infinitesimo:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

ma non essendo sola, bisogna sommare su tutte le cariche, come da definizione dedotta dal principio di sovrapposizione.

Per volumetti infinitesimi questa sommatoria è proprio il modo in cui l'integrale di volume è definito.

L'integrale è chiaramente esteso a tutti i punti in cui la densità ρ è non nulla, ed eventualmente può essere esteso a tutto lo spazio. A meno di particolare ambiguità, eviteremo di indicare il volume su cui si integra, in modo da alleggerire la notazione.

Analogamente, per distribuzioni superficiali e lineari si parte considerando i campi $d\vec{E}$ prodotti rispettivamente da un pezzetto infinitesimo di superficie o di filo.

²Diciamo da una qualche forza esterna.

2.2 Simmetrie

Le simmetrie sono uno strumento potentissimo e importantissimo in ogni ambito della fisica, vedremo ora come si utilizzano per capire tantissime cose (intendo proprio tante) nel campo dell'elettrostatica. Incominciamo osservando che se una distribuzione di carica gode di una certa simmetria (ad esempio sotto riflessione o rotazione), allora a causa del principio di sovrapposizione lineare, anche il campo elettrico da essa generato deve godere della stessa simmetria. Per capire come mai tiriamo di nuovo in ballo il principio di sovrapposizione. Si pensi ad una distribuzione di carica che rimane invariata sotto una certa trasformazione; allora la differenza tra il campo iniziale \vec{E} e il campo del sistema risultante dopo la trasformazione \vec{E}' è pari al campo prodotto dalla differenza delle cariche... che però sono invariate e quindi hanno differenza nulla! Da questo deduciamo che $\vec{E} = \vec{E}'$.

Vediamo ora alcuni esempi.

Esempio 2.1 (★★☆☆☆ Filo Infinito Uniformemente Carico). Consideriamo un filo rettilineo con densità di carica uniforme λ , e supponiamo per semplicità che sia infinito³.

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano in cui l'asse z coincide con il filo. Consideriamo un punto P sull'asse x a distanza D dal filo.

Vediamo ora le simmetrie di questo problema: se facciamo una riflessione rispetto al piano xz , sia il filo che P vengono mandati in se stessi. Ciò significa che il vettore campo elettrico in P è contenuto nel piano xz , perché se ci fosse una componente ortogonale a esso, questa cambierebbe di segno sotto tale riflessione.

Analogamente, operando una riflessione rispetto a xy arriviamo a concludere che anche la componente z del campo è nulla.

Passiamo ora ad un sistema di coordinate cilindriche (z è lo stesso di prima): il risultato precedente si traduce nel fatto che il campo è radiale⁴. Inoltre, data appunto la simmetria cilindrica della distribuzione di cariche e l'invarianza per traslazioni lungo z , non ci potrà essere nessuna dipendenza da z o φ ma solo da r quindi è evidente che le coordinate cilindriche sono le più comode per questo problema.

Utilizziamo ora un secondo importantissimo trucco: l'analisi dimensionale. Il campo elettrico non può che essere del tipo $Ck\lambda/r$ con C costante adimensionale. Infatti λ è l'unica carica che abbiamo a disposizione e non può che essere presente come termine lineare per il principio di sovrapposizione, e analogamente r è l'unico termine di lunghezza rilevante (per quanto detto prima).

Procediamo quindi con il calcolo che per ora è l'unico modo che abbiamo per ricavare la costante adimensionale C . I dettagli di questo calcolo non sono troppo interessanti e dopo verrà introdotto uno strumento per ricavare lo stesso risultato in modo più semplice. Per apprezzare però la grande semplificazione del futuro è istruttivo capire cosa si sarebbe dovuto fare in generale. Prima si calcola il campo generato da un pezzetto infinitesimo di filo, dove indichiamo con θ l'angolo in Fig. 1a.

$$dE_r(r, z') = k \frac{dq}{|PP'|^2} \cos \theta = k \frac{\lambda dz'}{r^2 + z'^2} \cos \theta.$$

Poi si somma (integra) per tutti i pezzetti di filo: sfruttiamo il cambio di coordinate $z' =$

³Per gli sperimentali si intende, ovviamente, che una delle dimensioni è molto maggiore delle altre due, che quindi trascuriamo, e che siamo a distanze molto minori della lunghezza tanto da non riuscire a cogliere gli effetti dovuti alla lunghezza finita del filo.

⁴Aggiungendo il fatto che per rotazioni attorno all'asse z la distribuzione rimane invariata.

$$r \tan \theta \implies dz' = \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta:$$

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dE_r(r, z') = k\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz' \cos \theta}{r^2 + z'^2} = k\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{r}{\cos \theta} \frac{1}{r^2 + r^2 \tan^2 \theta} = \\ &= \frac{k\lambda}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2k\lambda}{r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \end{aligned}$$

Esempio 2.2 (★★☆☆☆ Piano Uniformemente Carico). Sia xy un piano uniformemente carico di densità superficiale σ .

Come nell'esempio precedente analizziamo le simmetrie: il sistema è invariante sotto traslazioni lungo il piano xy e quindi il campo in un punto P dipende solo dalla sua distanza D dal piano. Supponiamo ora per assurdo che $\vec{E}(P)$ abbia una componente non nulla parallela al piano. Facendo ora una riflessione rispetto al piano ortogonale a tale componente e passante per P il sistema rimane invariato ma questa componente del campo cambia di segno, il che è assurdo. Abbiamo così ottenuto $\vec{E} = E_z(D)\hat{z}$.

Per analisi dimensionale si ottiene che il modulo del campo elettrico è del tipo $Ck\sigma\dots$ indipendente dalla distanza⁵!

Possiamo ora calcolare il modulo di tale vettore, anche qui i dettagli non sono troppo interessanti: per farlo, dividiamo il piano in corone circolari concentriche di raggio r e spessore dr , che avranno una carica $dq = 2\pi r dr \cdot \sigma$. Come osservato, siamo solo interessati alla componente lungo \hat{z} ($\cos \theta = \frac{D}{\sqrt{r^2 + D^2}}$):

$$\begin{aligned} dE_z(D) &= \frac{k dq}{r^2 + D^2} \cos \theta = k \frac{2\pi\sigma r dr D}{(r^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z(D) &= k\pi\sigma \int_0^{+\infty} \frac{2r dr D}{(r^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} = k\pi\sigma \int_0^{+\infty} \frac{2r dr D}{(r^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & \quad u = r^2 + D^2 \implies du = 2r dr \\ E_z(D) &= k\pi\sigma D \int_{D^2}^{+\infty} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = k\pi\sigma D \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_{D^2}^{+\infty} = 2k\pi\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

2.3 La Legge di Gauss

Il Poi Gauss disse: "Sia la legge di Gauss!"

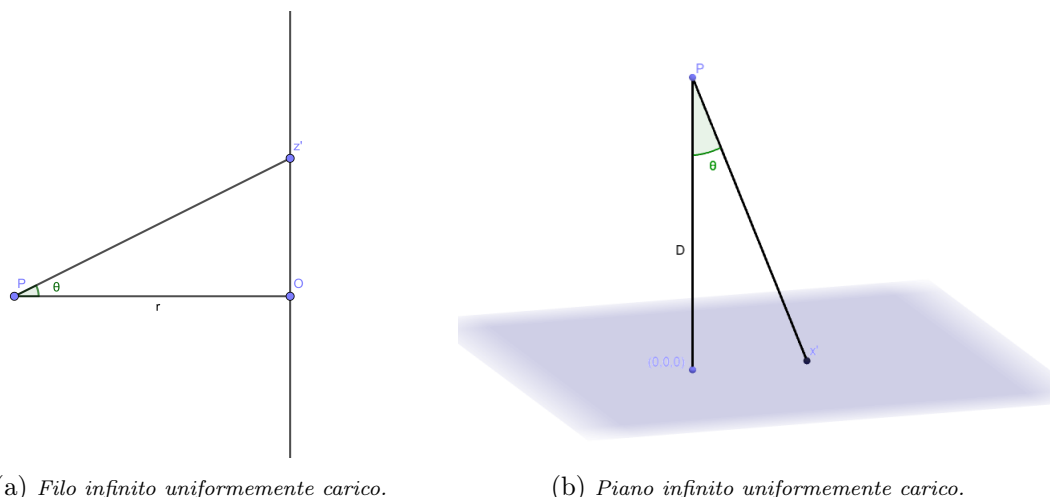
e la legge di Gauss fu. Poi Gauss decise che era cosa buona farsi rubare le leggi da Maxwell. E fu sera e fu mattina: Secondo Giorno.

In questa sezione andremo a dimostrare uno dei teoremi cardine dell'elettrostatica e vedremo come applicarlo in alcuni casi semplici ma di interesse. Per arrivare a questo importante passo della nostra genesi è necessario prima introdurre un utile strumento matematico: il flusso.

Il flusso è uno strumento importante in moltissimi ambiti della fisica ed è più facile da visualizzare nel caso di un fluido: immaginiamo di avere una funzione che ci dice qual è il suo vettore velocità in ogni punto dello spazio in cui è presente il fluido. La domanda a cui vogliamo rispondere è: "Quanto fluido attraversa una superficie infinitesima dA in un intervallo di tempo infinitesimo dt ?"

Chiameremo questa quantità $d\Phi$. Sicuramente $d\Phi$ è proporzionale alla velocità del fluido nelle

⁵Sempre per gli sperimentali ricordiamo che deve valere l'approssimazione dell'esempio precedente per cui la distanza è piccola a sufficienza da percepire il piano come infinito.



(a) Filo infinito uniformemente carico.

(b) Piano infinito uniformemente carico.

Figura 1: Le due situazioni fisiche considerate in Esempio 2.1 ed Esempio 2.2.

vicinanze della superficie, ed essendo la superficie infinitesima possiamo immaginare questa velocità uniforme (dipendente solo dalla posizione del baricentro della superficie dA). Pensandoci meglio però, ci interessa solo la componente della velocità perpendicolare alla superficie (le altre componenti fanno muovere il fluido *lungo* la superficie e non *attraverso*).

Indichiamo quindi questa direzione con \hat{n} ; avremo $d\Phi \propto \vec{v} \cdot \hat{n}dA^6$. Se la superficie non fosse infinitesima, si ottiene la grandezza desiderata integrando.

Definizione 2.1 (Flusso attraverso una superficie). Dato un campo vettoriale \vec{F} (ossia un vettore per ogni punto dello spazio e le cui componenti dipendono dalla posizione, e.g. il campo elettrico) e una superficie S , si dice flusso $\Phi_S(\vec{F})$ di \vec{F} attraverso S :

$$\Phi_S(\vec{F}) = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA \quad (2.2)$$

dove \hat{n} è il versore normale alla superficie, che per superfici chiuse è preso *uscite* per convenzione.

Rimanendo all'interno dell'esempio del fluido è facile convincersi che se il fluido è incompressibile allora un flusso positivo attraverso una superficie chiusa indica una sorgente (ossia una regione da cui esce più fluido di quanto ne entri), uno negativo un pozzo (ossia una regione in cui entra più fluido di quanto ne esca) e un flusso nullo è la condizione di conservazione della materia (ossia una regione in cui entra tanto fluido quanto ne esce).

Facciamo ora alcune utili osservazione matematiche che rendono l'operatore flusso molto comodo da utilizzare e ce lo fanno apprezzare ancora di più.

La linearità dell'integrale concede all'operatore flusso ottime proprietà di linearità, tra cui:

$$\begin{aligned} \Phi_S(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) &= \Phi_S(\vec{F}_1) + \Phi_S(\vec{F}_2) \\ \Phi_{S_1+S_2}(\vec{F}) &= \Phi_{S_1}(\vec{F}) + \Phi_{S_2}(\vec{F}) \end{aligned}$$

la prima equazione ci dice cosa succede al flusso della somma di due campi vettoriali (dove si intende che ad ogni punto associo la somma dei vettori associati a quel punto da due campi di partenza), mentre la seconda tratta del caso in cui divido la mia area di interesse in due.

Applichiamo ora questo nuovo strumento al campo elettrico e vediamo che informazioni riusciamo a ricavare. Partiamo dal caso più semplice possibile come è buona norma fare quando si prova un nuovo attrezzo: la distribuzione di carica più semplice che riusciamo a pensare è quella di una singola carica puntiforme; ci serve anche una superficie e, dato che la simmetria della

⁶Talvolta troverete $d\vec{A}$ al posto di $\hat{n}dA$.

distribuzione di carica è sferica, è probabile che il caso più semplice sia considerare una superficie sferica (diciamo di raggio R). Il campo vettoriale di cui calcoliamo il flusso è ovviamente il campo elettrico e ricordando tutte le semplificazioni troviamo che il flusso è effettivamente facile da calcolare⁷:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} = \oint_S k \frac{q}{R^2} dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Notare che il flusso attraverso una superficie sferica centrata nella carica non dipende dalle dimensioni della sfera. Questo ci suggerisce che possiamo provare a complicare un attimo le cose. Procedendo per gradi, consideriamo sempre una carica puntiforme q , ma ora come S prendiamo una superficie chiusa e convessa, di forma generica. Calcoliamo il contributo $d\Phi$ di un singolo elemento dA a distanza R dalla carica:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E \cos \theta dA = k \frac{q}{R^2} R^2 d\Omega = kq d\Omega$$

Dove abbiamo prima proiettato l'elemento dA lungo la direzione del campo (inglobando il fattore $\cos \theta$ del prodotto scalare) e poi usato la definizione di angolo solido⁸. Integrando ora su tutto lo spazio otteniamo il risultato cercato.

Sempre procedendo per gradi consideriamo ora il caso di una superficie chiusa concava, sempre con una carica al suo interno. per calcolare il flusso in questo caso, dato che abbiamo visto la comodità di considerare gli angoli solidi per il problema, consideriamo un immaginario cono infinito la cui punta è sulla carica e il cui angolo solido al vertice sia di valore $d\Omega$; notiamo subito che tale cono attraverserà la superficie un numero dispari di volte: essendo la superficie chiusa e limitata e ogni intersezione passa da dentro a fuori e viceversa non può essere altrimenti dato che il vertice del cono è dentro e la *base* è fuori.

Osserviamo anche che se la carica fosse stata esterna, per lo stesso ragionamento l'avrebbe attraversata un numero pari di volte. Applicando lo stesso ragionamento fatto nel caso precedente, possiamo notare come per ogni porzione di superficie risultante dall'intersezione del cono con la superficie iniziale otteniamo un valore del flusso infinitesimo uguale, dipendente solo dall'angolo solido considerato e dal verso considerato per la normale alla superficie: se il cono attraversa la nostra superficie da fuori verso dentro, il segno del flusso sarà opposto al segno della carica, altrimenti concorde.

Concludiamo quindi che se la carica è interna alla superficie, il contributo netto finale sarà identico a quello che avremmo avuto nel caso in cui la superficie fosse stata convessa. Se invece la carica fosse stata esterna, notiamo che essa non avrebbe contribuito in alcun modo al flusso totale.

Per la linearità del campo elettrico dovuta al principio di sovrapposizione e per le proprietà già evidenziate dell'operatore flusso, si può generalizzare questo risultato ad un qualunque numero di cariche (che vista l'ultima osservazione e l'assenza di ipotesi sulla forma della superficie chiusa possono essere in qualsiasi posizione esterna o interna) e quindi a distribuzioni di cariche continue. Abbiamo ottenuto così così la **Prima legge di Maxwell** anche detta Teorema di Gauss:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad (2.3)$$

Teorema 2.1 (Legge di Gauss). *Il flusso, attraverso una superficie chiusa S , del campo elettrico prodotto da un insieme di cariche è proporzionale alla carica totale contenuta nella superficie con costante di proporzionalità $1/\varepsilon_0$.*

⁷Infatti $\vec{E} \cdot \hat{n}$ si calcola facilmente essendo i due vettori paralleli (entrambi radiali); inoltre, essendo E funzione della sola distanza tra il punto in cui lo calcolo e la carica sorgente (che nel nostro caso è costante e pari a R), questo, può uscire dall'integrale, il quale si riduce al calcolo dell'area della sfera, ovvero $4\pi R^2$.

⁸Estensione tridimensionale dell'angolo piano. Dato un elemento di superficie A tutto a distanza R dal punto a partire dal quale vogliamo calcolare l'angolo, quest'ultimo si definisce come il rapporto A/R^2 . Gli angoli solidi si misurano in steradiani ed è facile notare che l'angolo sotteso dalla superficie sferica totale vale 4π .

Notare che in tutta la dimostrazione abbiamo usato solo che il campo di una carica puntiforme è centrale, proporzionale a r^{-2} e gode della proprietà di sovrapposizione lineare, quindi lo stesso risultato vale anche per il campo gravitazionale dove la massa gioca il ruolo della carica.

Vediamo ora come ricompensare la *fatica* fatta per questa dimostrazione, affrontando di nuovo Esempio 2.1 e Esempio 2.2.

Esempio 2.3 (★★★★☆ Filo Infinito con Gauss). Per i ragionamenti già visti sappiamo che il campo è della forma: $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{r}$, con $E_r(r) = Ck\lambda/r$. Ci manca solo da calcolare la costante adimensionale e ci vorremmo risparmiare l'integrale⁹.

Per applicare Gauss ci serve una superficie, il problema non ha nessuna superficie rilevante quindi ce ne inventiamo una fittizia, e la scegliamo semplice dato che ne abbiamo la possibilità. Essendo il problema a simmetria cilindrica una superficie semplice è un cilindro (diciamo di raggio r e altezza h , ovviamente preso con asse coincidente con il filo). A quale coordinata z posizioniamo il cilindro non è importante visto che $E_r(r)$ dipende solo da r .

Il flusso attraverso le basi è nullo e il flusso attraverso la superficie laterale può essere calcolato facilmente:

$$\Phi_{SL}(\vec{E}) = E_r(r)2\pi rh = Ck\lambda h2\pi = Ck2\pi Q_{\text{int}}$$

e aggiungendo i flussi nulli attraverso le due basi si ottiene il flusso calcolabile anche grazie a Gauss:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \Phi_{SL}(\vec{E}) + \Phi_{B_1}(\vec{E}) + \Phi_{B_2}(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Uguagliando i risultati si ricava $C = 2$ e quindi:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{r} \quad (2.4)$$

Esempio 2.4 (★★★★☆ Piano Infinito con Gauss). Come prima, facciamo alcune osservazioni: la simmetria per traslazioni in x e in y e l'invarianza per trasformazioni $x \rightarrow -x$ e $y \rightarrow -y$ implicano $\vec{E}(x, y, z) = E_z(z)\hat{z}$, inoltre l'invarianza per $z \rightarrow -z$ (si ricorda che il piano è posto a $z = 0$) ci fa concludere $\vec{E}(x, y, z) = \text{sgn}(z)E_z(|z|)\hat{z}$, con $E_z = Ck\sigma$.

Scegliamo come superficie per Gauss un parallelepipedo di altezza $\varepsilon = 2h$ ¹⁰, area di base A e posto con le basi parallele al piano infinito e tale che il piano lo bisechi (vedi Fig. 2a).

Il contributo delle facce laterali è nullo in quanto il campo è diretto lungo z , e le due basi danno lo stesso contributo perché sia \vec{E} che \hat{n} cambiano verso mantenendo invariato modulo e direzione. Procediamo come nell'esempio precedente:

$$\Phi_{\text{base}} = Ck\sigma A$$

e

$$\Phi_S = 2\Phi_{\text{base}} + \Phi_{\text{lati}} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = 2Ck\sigma A$$

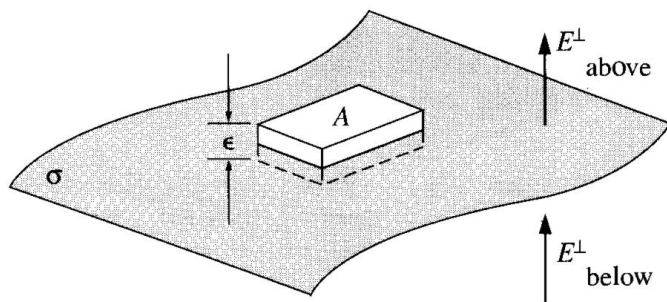
da cui ricaviamo $C = 2\pi$ e:

$$\vec{E}(x, y, z) = \text{sgn}(z) \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{z} \quad (2.5)$$

Con un procedimento analogo, come si osserva in Fig. 2a si può ottenere un risultato, molto utile quando parleremo di conduttori, ovvero l'applicazione del teorema ad una superficie generica

⁹Per pigrizia, ma soprattutto perché in questo caso l'integrale era fattibile mentre per forme strane potrebbe non esserlo e il teorema di Gauss continua a valere.

¹⁰Si usa ε per dare l'idea che questa sarà la dimensione più piccola del parallelepipedo, nel caso del piano veramente infinito questo è irrilevante e ε può essere grande a piacere visto che il campo non dipende dalla distanza. Manterremo comunque questa notazione per ricordare che nella realtà difficilmente le cose sono veramente piatte e ancora più difficilmente sono infinite.



(a) Flusso infinitesimo.

Figura 2: Flusso infinitesimo sulla superficie di un conduttore (presa dal [griffiths]). Nel caso in cui siamo abbastanza vicini alla superficie questo è un piano carico infinito.

con densità di carica non nulla (non necessariamente uniforme). La presenza della superficie causa una discontinuità a salto nella componente del campo elettrico perpendicolare alla superficie stessa, questa è proporzionale alla densità superficiale di carica in quel punto. Il problema si risolve come Esempio 2.4 considerando un parallelepipedo così piccolo da vedere la densità di carica uniforme, la superficie piana e da avere altezza tale che $\sqrt{A} \gg \epsilon$. Si ottiene pertanto:

$$\Delta \vec{E}_\perp(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (2.6)$$

2.4 L'Energia Elettrostatica

... poi tutto il mondo venne popolato di Energia!

Il campo elettrico genera una forza, dunque può variare l'Energia dei corpi.

Vorremmo calcolare, ad esempio, il lavoro necessario per muovere una carica di prova q all'interno di un campo elettrico \vec{E} lungo una curva γ . Per definizione¹¹ di lavoro L si ha:

$$L := \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.7)$$

da cui si nota che la quantità rilevante da calcolare è l'integrale di linea del campo elettrico, una quantità che non dipende dalla carica di prova.

Questo è (a grandi linee) simile al flusso introdotto precedentemente, con un integrale di linea invece che di superficie, come prima facciamo un caso semplice e consideriamo una sola carica puntiforme posta al centro di coordinate sferiche e notiamo che l'integrale può essere fatto indipendentemente dalla curva¹²:

$$\int_\gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_\gamma k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = \int_{r_a}^{r_b} k \frac{Q}{r^2} dr = -kQ \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

in cui si è dato un nome alla coordinata radiale dell'inizio e della fine di γ (rispettivamente r_a e r_b).

Usando il principio di sovrapposizione lineare, possiamo concludere che il campo generato da una distribuzione di N cariche puntiformi q_i in posizioni \vec{r}_i ha integrale lungo γ pari a:

$$\int_\gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -k \left(\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r}_b - \vec{r}_i|} - \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r}_a - \vec{r}_i|} \right).$$

¹¹Se non avete confidenza con gli integrali di linea, intuitivamente stiamo approssimando il percorso chiuso γ con una spezzata fatta di tanti piccoli $d\vec{l}$. Per ogni pezzettino calcolo $\vec{F} \cdot d\vec{l}$ e sommo tutti questi contributi.

¹²Perché il campo è centrale e $\propto 1/r^2$, quindi i risultati seguenti valgono anche per il campo gravitazionale.

Possiamo quindi definire per comodità, data una distribuzione di cariche puntiformi il potenziale scalare $V(\vec{r})$:

$$V(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

e scrivere il risultato precedente come:

$$\int_{\gamma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -(V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a))$$

Nel caso di una distribuzione continua di cariche, valgono gli stessi risultati con:

$$V(\vec{r}) = k \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio.

Vediamo alcune conseguenze di questo risultato:

- Poiché il potenziale è una funzione del solo punto in cui è calcolata (a fissata distribuzione di cariche si intende), l'integrale di linea del campo elettrico non dipende dalla curva ma solo dal punto iniziale e dal punto finale. Inoltre, se i due punti coincidono (ovvero si considerano curve chiuse), si ha $\Delta V = 0$.
- Il potenziale scalare è definito a meno di una costante. Se infatti poniamo $V'(\vec{r}) = V(\vec{r}) + C$ si ha $\Delta V' = \Delta V$ e solo le differenze sono rilevanti per la circuitazione. Per esprimere il potenziale di una certa distribuzione di cariche sarà necessario fissare tale costante. Nella maggioranza dei casi per convenzione si imporrà $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ se non altrimenti specificato.
È importante sottolineare che questa scelta non è sempre completamente arbitraria e non sempre è possibile porre nullo il potenziale all'infinito. Una condizione sufficiente affinché ciò sia possibile è che le sorgenti del campo siano localizzate, ovvero che non ci siano sorgenti a distanza arbitraria. Tipici esempi in cui non succede sono il piano¹³ o filo infinito.
- In analogia con la relazione che sussiste tra la primitiva e l'integrale definito nel caso unidimensionale, si ha la seguente relazione, valida in generale e considerabile la definizione di potenziale elettrico¹⁴: $-\vec{\nabla}V = \vec{E}$.

Il primo di questi punti in particolare è noto come **Seconda Legge di Maxwell**

Teorema 2.2 (Seconda Legge di Maxwell). *La circuitazione del campo elettrostatico lungo una qualsiasi curva chiusa è nulla*¹⁵:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.8)$$

¹³Questo è cruciale ad esempio quando si considera un condensatore *ideale* a facce piane e parallele in cui le piastre hanno larghezza e altezza infinite: se ci fosse il potenziale a zero su tutti i punti infinitamente lontani dall'origine del nostro sistema di coordinate, spostare carica da una piastra all'altra non richiederebbe lavoro. In tal caso generalmente si pone il potenziale a *zero* su una delle due armature.

¹⁴ $\vec{\nabla}$ rappresenta l'operatore gradiente che nello spazio è così definito

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{z}$$

¹⁵ATTENZIONE: questo risultato vale solo in elettrostatica, per quello l'enunciato dice "del campo elettrostatico" e non "del campo elettrico".

Grazie a questo risultato possiamo mostrare un'ulteriore condizione di raccordo per il campo elettrico nel caso di superfici cariche, questa volta relativa alla sua componente parallela. Calcoliamo la circuitazione del campo lungo un percorso rettangolare, avente i lati più lunghi paralleli a un piano carico, l'uno da una parte e l'altro dall'altra rispetto al piano, e gli altri due lati, molto più corti dei primi, ortogonali al piano carico come si vede in Fig. 3.

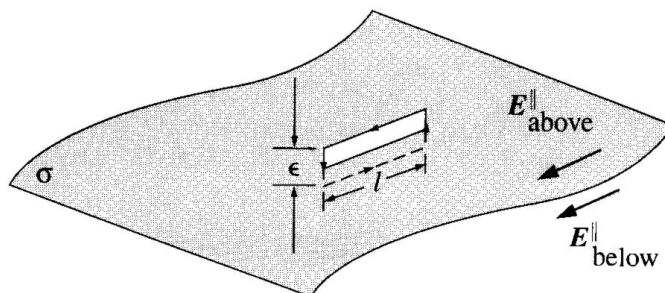


Figura 3: Circuitazione infinitesima usata nella dimostrazione.

Assumiamo che:

- la lunghezza l dei lati lunghi sia molto più piccola della scala su cui varia il campo, in modo da poterlo considerare costante lungo tutto il lato;
- la lunghezza ϵ dei lati corti sia molto più piccola di l , in modo tale da trascurare la parte del percorso perpendicolare al piano.

Così facendo otteniamo:

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{\text{in}}^{\parallel} l - E_{\text{out}}^{\parallel} l = 0 \implies E_{\text{in}}^{\parallel} = E_{\text{out}}^{\parallel} \quad (2.9)$$

ovvero la componente parallela ad una superficie, anche se carica, è continua al passaggio dalla superficie.

Ora che abbiamo tutti gli strumenti possiamo calcolare il lavoro necessario a portare una carica dall'infinito ad un certo punto \vec{r} . Se supponiamo che le sorgenti del campo elettrico siano sufficientemente localizzate, in modo da imporre convenzionalmente $V(\infty) = 0$ si ottiene:

$$L = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{l} = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{l} = q(V(\vec{r}) - V(\infty)) = qV(\vec{r}).$$

Dunque possiamo definire l'energia potenziale di una carica q in un campo elettrico (ponendo nulla l'energia potenziale all'infinito):

$$U(\vec{r}) = qV(\vec{r}) \quad (2.10)$$

Ad una configurazione di cariche può essere associata un'energia *di costruzione* che corrisponde al lavoro necessario a portare le cariche nella loro posizione, a partire dall'infinito, una alla volta. per N cariche puntiformi q_1, \dots, q_N poste in $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ e, per ogni $1 \leq i, j \leq N$, sia $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. La carica q_1 viene portata dall'infinito a \vec{r}_1 senza compiere lavoro. La seconda carica viene portata dall'infinito a \vec{r}_2 compiendo un lavoro

$$L_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}},$$

il lavoro compiuto per spostare q_3 dall'infinito a \vec{r}_3 è, per principio di sovrapposizione:

$$L_3 = k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}}.$$

Generalizzando, l'energia della configurazione di cariche, che è uguale alla somma dei lavori precedenti, è:

$$U_N = \sum_{i=1}^N L_i = k \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{k}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.11)$$

e per distribuzioni continue di carica si definisce l'energia potenziale del sistema come:

$$U = \frac{k}{2} \iint \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r d^3r'$$

. Da quest'ultima, ricordando l'espressione del potenziale nel caso di distribuzione continua di energia, si ottiene infine:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(r)V(r)d^3r \quad (2.12)$$

Prima di procedere sottolineiamo come le due formule non siano esattamente l'una l'estensione dell'altra. Nel caso continuo stiamo integrando anche dove $r = r'$, ovvero il corrispettivo discreto di $i = j$.

Questa discrepanza deriva dal fatto che la Eq. (2.12) tiene conto anche dell'energia spesa per *creare* effettivamente la carica puntiforme (ossia per concentrare una carica finita in un solo punto), mentre nella Eq. (2.11) si suppone che le cariche puntiformi siano preesistenti, e tale equazione esprime solamente l'energia di interazione tra coppie di cariche. Se infatti volessi passare da una distribuzione di carica continua a delle cariche puntiformi dovrei comprimere la carica in una regione di spazio sempre più piccola, e questo costa energia (molta energia).

È possibile inoltre riscrivere l'ultima relazione in funzione del solo campo elettrico \vec{E} , con lo scopo di vedere il campo elettrico come lui stesso portatore di energia. Questo è utile ad esempio nei problemi in cui è presente un campo elettrico in cui non ci è dato sapere (o non ci interessa) quale distribuzione di cariche lo genera. Tuttavia far ciò in maniera elementare e rigorosa non è possibile, quindi qui ne daremo solamente un'idea intuitiva.

Il risultato importante è:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})V(\vec{r})d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 d^3r \quad (2.13)$$

E come sempre quando si cala una formula dal cielo procediamo subito con un esempio per distrarre dal fatto che non è per nulla intuitivo che Eq. (2.13) sia vera.

Esempio 2.5 (★☆☆☆☆ Energia di un condensatore). Consideriamo un condensatore quadrato di carica Q , lato L e distanza tra le facce d . Vogliamo calcolare l'energia immagazzinata. Calcoliamo l'energia secondo Eq. (2.10). Essendo il condensatore un condensatore¹⁶ vale $V(q) = \frac{q}{C}$. L'energia immagazzinata nel condensatore è pari al lavoro fatto per caricarlo:

$$U = L = \int dL = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.14)$$

Ora calcoliamo questa energia integrando il campo elettrico nello spazio secondo Eq. (2.13). Notiamo intanto che fuori dal condensatore il campo è trascurabile, quindi integriamo solo nel volume interno al condensatore (chiamiamolo Ω). Trascurando gli effetti di bordo, il campo all'interno è uniforme e di intensità $\frac{V}{d}$ e quindi:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} \frac{V^2}{d^2} d^3r = \frac{\epsilon_0 V^2 L^2}{2d} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

¹⁶Con questo bellissimo gioco di parole si intende dire che l'elemento circuitale è caratterizzato dalla grandezza C dipendente dalla geometria dello stesso ($C = \epsilon_0 L^2/d$ per un condensatore a facce piane quadrate parallele) e definibile secondo la relazione citata. Si ricorda inoltre che per un condensatore ideale il campo all'interno è uniforme e pari a V/d .

SEZ. 3 — I CONDUTTORI

Tutti i materiali nell'universo sono composti da atomi e reagiscono al campo elettrico. Materiali diversi però hanno proprietà chimiche diverse, ad esempio alcuni potrebbero condurre di più, ovvero non opporsi al movimento delle cariche, oppure isolare, ovvero opporsi. Noi non ci addentreremo nei difficili dettagli tecnici della realtà e ci rintaneremo nel magico mondo matematico dell'approssimazione grazie alla seguente classificazione.

3.1 Definizioni

La Natura vide che ciò che era stato creato era cosa buona e separò i conduttori dagli isolanti. E fu sera e fu mattina: Terzo Giorno.

I materiali più comuni possono essere classificati come *isolanti* oppure *conduttori*. Nei problemi utilizzeremo i modelli *ideali* per questi due materiali:

Definizione 3.1 (Isolante Perfetto). Si definisce così un materiale nel quale le cariche non si possono muovere, indipendentemente dall'intensità del campo elettrico che agisce su di esse.

Definizione 3.2 (Conduttore Perfetto). Si definisce così un materiale che contiene un numero illimitato di cariche di entrambi i segni, libere di muoversi sotto l'azione di un campo elettrico applicato, qualunque sia l'intensità del campo stesso.

Da questa definizione seguono alcune proprietà dei conduttori all'equilibrio elettrostatico che procediamo ora coll'elencare/dimostrare.

1. **Il campo elettrico è nullo all'interno del conduttore.** Se così non fosse, allora non potremmo trovarci in una condizione di equilibrio statico, tutte le cariche presenti nel conduttore possono muoversi liberamente al suo interno e risentirebbero di una forza netta data dal campo interno e sarebbe fuori equilibrio. Da questo fatto segue anche che l'intero volume del conduttore è equipotenziale:

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{0} \cdot d\vec{l} = 0$$

dove il percorso che collega A a B è interno al conduttore.

2. **La densità di carica netta all'interno è nulla.** Questo risultato segue dalla legge di Gauss presa una qualunque superficie chiusa S contenuta all'interno del conduttore. Infatti, si avrebbe che:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{A} = \oint_S \vec{0} \cdot d\vec{A} = 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

e dunque la carica netta interna è sempre nulla. Pertanto, la carica sarà sempre localizzata sulla superficie esterna.

3. **Il campo elettrico esterno, sulla superficie, è perpendicolare alla superficie stessa.** Se in un punto della superficie il campo elettrico avesse una componente tangenziale, allora questa spingerebbe una qualunque carica localizzata in quel punto verso una posizione diversa, contraddicendo il fatto che il conduttore si trovi all'equilibrio elettrostatico. Si può giungere allo stesso risultato utilizzando la relazione di continuità della componente parallela del campo elettrico precedentemente ricavata ($E_{\text{in}}^{\parallel} = E_{\text{out}}^{\parallel}$); infatti, per ipotesi di equilibrio elettrostatico vale $E_{\text{in}}^{\parallel} = 0$ da cui sarà nulla la componente parallela del campo anche all'esterno del conduttore.

4. **L'intensità del campo subito fuori dal conduttore è direttamente proporzionale alla densità di carica sulla superficie dello stesso.** Ricordando il risultato che lega la densità superficiale locale alla discontinuità della componente perpendicolare del campo (Eq. (2.6)) e ricordando che all'interno del conduttore il campo è nullo e la componente parallela fuori è nulla, allora il campo elettrico in prossimità della superficie (all'esterno) vale:

$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad E_{\parallel} = 0$$

3.2 Disposizione delle Cariche sui Conduttori

Dato che al momento i conduttori ci piacciono molto di più degli isolanti e visto il titolo della sezione che non include cenni agli isolanti dimentichiamoci temporaneamente dell'esistenza di questi e studiamo alcuni problemi e situazioni tipiche relative ai conduttori. Tutti i punti dell'elenco precedente saranno importanti quindi se non sono chiari fate domande se siete alla lezione o rileggeteli prima di continuare.

Esempio 3.1 (★★★★☆☆ Gabbia di Faraday). Considerate un conduttore immerso in un campo esterno, in condizione di equilibrio elettrostatico e con una cavità al suo interno (che per questo definiamo *gabbia*). Assumiamo che la cavità sia priva di carica al suo interno.

Per quanto visto le cariche si dispongono dunque sulla superficie esterna in modo da renderla una superficie equipotenziale. Se è presente una cavità nel conduttore, un osservatore posto al suo interno non potrà percepire alcun campo elettrico, e sulla superficie interna non comparirà alcuna densità di carica.

Se per assurdo questo non fosse vero, dato che per Gauss la carica sulla superficie interna è nulla, consideriamo una curva chiusa costruita in questo modo: all'interno della cavità segue una linea di campo che parte dalla parete della cavità in corrispondenza di una carica positiva e termina sulla parete della cavità in corrispondenza di una carica negativa, e il resto della curva si trova all'interno del conduttore. Calcolando la circuitazione del campo lungo questa curva, essa sarà non nulla! Lungo la linea di campo infatti, per definizione, il campo stesso è parallelo e concorde alla curva e dunque dà contributo solo positivo alla circuitazione, mentre all'interno del conduttore il campo è nullo, e tale è il suo contributo alla circuitazione.

L'effetto descritto in Esempio 3.1, è a dir poco contro-intuitivo, ed è alla base del funzionamento delle gabbie di Faraday, ed è il motivo per cui se un fulmine colpisce la vostra auto mentre siete al suo interno, la corrente non scorre attraverso di voi ma solo sulla superficie esterna dell'auto, o per cui in ascensore il cellulare *non prende*¹⁷.

Esempio 3.2 (★★★★☆☆ Gabbia di Faraday Inversa). Consideriamo l'esempio precedente nel caso in cui venga posta una carica puntiforme all'interno della cavità. Iniziamo con il notare che la quantità di carica totale presente sulla superficie della cavità deve essere uguale e opposta a quella puntiforme posizionata al suo interno (per Gauss)¹⁸. Si può anche mostrare che la densità superficiale esterna è indipendente dalla posizione della carica all'interno, o dalla forma della cavità, ma dipende solo dalla forma della superficie esterna, e si dispone come se il conduttore fosse pieno, avente una carica netta totale q . Questa però è un ottimo esempio di come si può

¹⁷Un'altra applicazione a dir poco elettrizzante di questo principio si può trovare a questo link: <https://www.youtube.com/watch?v=syAwpQBLmng>. In questo video una band suona musica "elettronica" ben al sicuro all'interno di tute metalliche che sfruttano proprio il principio della gabbia di Faraday. Questo video è un estratto di una puntata di "Te l'avevo detto", che potete trovare qui in versione integrale: <https://it.dplay.com/dmax/te-lavevo-detto/strani-poteri/>

¹⁸Inoltre non è possibile che sulla parete interna del conduttore all'equilibrio ci siano cariche di entrambi i segni. Riapplicando lo stesso ragionamento usato per la gabbia di Faraday, se ci sono due cariche di segno opposto sulla parete, esiste una linea di campo che le congiunge. Compiono quindi solo cariche di segno opposto a quello della carica q posta nella cavità.

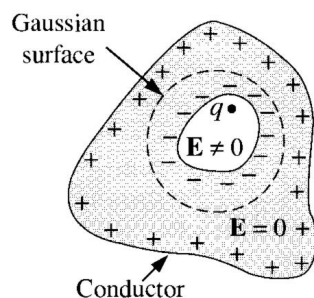


Figura 4: Conduttore cavo, con carica al suo interno

utilizzare il principio di sovrapposizione per problemi altrimenti difficili, quindi lo risolveremo dopo a parte in una sezione decorata da più stelline per attirare di più l'attenzione.

Esempio 3.3 (★☆☆☆☆ Effetto delle Punte). Le cariche si dispongono sulla superficie del conduttore in modo che sia una superficie equipotenziale. Un effetto interessante legato a questo è l'effetto delle punte, ovvero il fatto che la densità superficiale di carica sia maggiore in corrispondenza delle parti della superficie più spigolose ¹⁹. Per dimostrarlo, consideriamo due sfere come in Fig. 5 di raggio R_1 ed R_2 , rispettivamente con carica Q_1 e Q_2 . Poniamole ora a contatto tramite un filo sottilissimo conduttore: la carica si distribuirà fra le due sfere in modo da porle allo stesso potenziale. Dopo il contatto, dette le cariche sulle sfere rispettivamente Q'_1 e Q'_2 , si può scrivere:

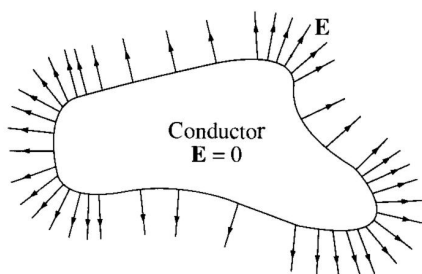
$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_2}{R_2} \end{cases}$$

Risolviendo il sistema, si ricava:

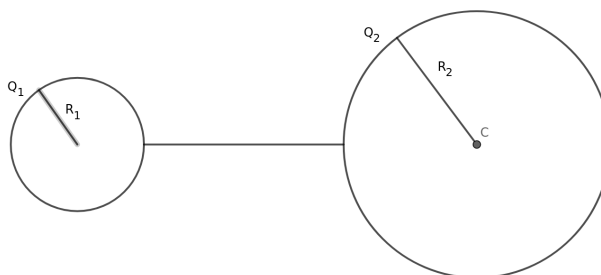
$$Q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2) \Rightarrow \sigma'_1 = \frac{Q'_1}{4\pi R_1^2} \propto \frac{1}{R_1}$$

$$Q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2) \Rightarrow \sigma'_2 = \frac{Q'_2}{4\pi R_2^2} \propto \frac{1}{R_2}$$

Dal risultato si può pensare di dedurre che la carica tende a spostarsi in punti del corpo dove la superficie è *più curva*.



(a) Effetto delle punte su un conduttore generico.



(b) Sfere conduttrici collegate da un filo.

Figura 5: effetto delle punte.

¹⁹Questo equivale a dire "nei punti della superficie il cui raggio di curvatura è minore", ovvero intuitivamente il raggio della sfera che al limite meglio approssima la superficie nel punto che stiamo considerando.

§ 3.2.1. ★★★★★ **Sovrapposizione e Unicità delle Soluzioni.** — Il problema sembra già semplice (ma non lo sappiamo risolvere) quindi lo rendiamo ancora più semplice. Dividiamo il problema nelle due configurazioni:

1. tutto lo spazio è costituito di materiale conduttore, tranne per una cavità vuota, identica a quella del problema originale, con la carica puntiforme q posizionata all'interno;
2. nello spazio c'è solo il conduttore senza cavità ma dotato di una carica q .

Nella prima delle due configurazioni, la carica si distribuisce sulla superficie in modo tale da produrre fuori della cavità, quindi anche nella parte di spazio che nel problema originale non è occupata dal conduttore, un campo elettrico nullo.

Nella seconda delle configurazioni, la carica superficiale si dispone in modo che all'interno del materiale conduttore (anche dove nel problema originale era presente la cavità) il campo elettrico sia nullo. Per risolvere il problema originale assumiamo quindi che la densità di carica superficiale interna si disponga come nella configurazione (1), in questo modo la carica presente sulla superficie esterna non potrebbe essere influenzata in alcun modo dalla posizione della carica interna. A questo punto la carica superficiale esterna si disporrebbe sulla superficie esterna come se si trovasse nella configurazione (2). Questa configurazione di carica è sicuramente una soluzione del problema originario per la quale la distribuzione di carica esterna non dipende dalla posizione della carica all'interno né dalla forma interna della cavità.

Potreste ora pensare che questa è sì una soluzione, ma che potrebbe non essere l'unica e in particolare che potrebbero esistere altre soluzioni, diverse da quella proposta, la cui configurazione invece dipende dalla posizione della carica nella cavità. Questo però **NON** può accadere, e la soluzione proposta è l'unica possibile per un motivo profondo, ovvero per l'**unicità della soluzione** del Problema dell'Elettrostatica.

La formulazione matematica dell'elettrostatica garantisce quest'unicità a parità di *condizioni al bordo*, che in questo caso sono:

- la carica all'interno della cavità
- la posizione della carica
- la forma del conduttore
- il potenziale nullo all'infinito

e sono rispettate dalla nostra scomposizione del problema in due. Questa unicità ha un chiaro significato fisico di esperienza quotidiana: se si ripete una stessa esperienza, a parità di condizioni iniziali la configurazione finale è una sola, ed è l'unica possibile²⁰. Il teorema di unicità sarà fondamentale per comprendere la prossima sezione.

SEZ. 4 — LE CARICHE IMMAGINE

Il titolo di questa sezione dovrebbe essere, ad essere precisi, *Il Metodo delle Cariche Immagine* perché le cariche immagine, che andremo ad introdurre, non esistono. Esse sono essenzialmente un metodo risolutivo, fortemente basato sull'unicità della soluzione per il problema dell'elettrostatica. Tecnicamente questa sezione non dovrebbe essere un capitolo a parte, perché sempre di conduttori si parla, ma vista l'importanza e la potenza del metodo risolutivo diciamo che è giusto darne enfasi in un capitolo apposito.

²⁰Questo ragionamento induttivo potrebbe non essere particolarmente confortante, ma tranquilli, vi è un motivo più profondo legato alla parte matematica della determinazione della soluzione.

4.1 Presentazione del Problema

Il tipo di problemi che vogliamo affrontare sono quelli in cui ci si chiede di studiare l'effetto della presenza di un materiale conduttore sul campo elettrico.

Esempio 4.1 (★★★★★ Piano Conduttore e Carica). Consideriamo una carica q in $\vec{d} = (d, 0, 0)$ in presenza di un materiale conduttore in tutto il semispazio $x < 0$. Vogliamo calcolare il campo elettrico \vec{E} e il potenziale V in tutto lo spazio.

La parte facile del problema riguarda calcolare campo e potenziale all'interno: il campo è nullo per definizione di conduttore e il potenziale sarà messo a zero per convenzione (e tutto il conduttore è equipotenziale). Sulla superficie del conduttore ci sarà una certa densità di carica superficiale σ tale da schermare la carica q . Calcolare questa densità con un metodo *brute force* partendo dalle condizioni al bordo risulta molto laborioso.

Esempio 4.2 (★★★★★ Sfera Conduttrice e Carica). Consideriamo una carica q in $\vec{d} = (d, 0, 0)$ in presenza di una sfera conduttrice di raggio $a < d$ centrata nell'origine. Vogliamo calcolare il campo elettrico \vec{E} e il potenziale V in tutto lo spazio.

Di nuovo la parte interna alla sfera è facile per quanto riguarda il campo. Dato che vogliamo mantenere la convenzione che il potenziale sia nullo all'infinito, ci risulta più difficile calcolare il potenziale a cui è messa la sfera; aggiriamo quindi il problema immaginando che inizialmente la sfera sia messa a terra: torneremo poi sulla soluzione in caso non lo sia.

4.2 Il Metodo Risolutivo

L'unicità della soluzione, che si era ritrovata inaspettatamente in questo mondo, dopo un attimo di esitazione disse: "siano le cariche immagine", e le cariche immagine furono. E fu sera e fu mattina: Quarto Giorno.

L'idea è quella di sfruttare il teorema di unicità. Se restringiamo del problema ad una zona dello spazio possiamo cambiare qualsiasi cosa nelle restanti zone di spazio, a patto che rimangano invariate le condizioni al bordo. In particolare quello che vogliamo fare è togliere i conduttori e mettere delle cariche in posizioni strategiche. Vedremo che è possibile trovare queste posizioni strategiche nel caso di conduttori piani e sferici.

§ 4.2.1. ★★★★★ **Carica Immagine del Piano.** — per una situazione come in Esempio 4.1 dato che abbiamo già risolto il problema per $x < 0$ restringiamo il problema a $x > 0$ e sostituiamo il piano conduttore con alcune cariche fittizie. Queste devono essere poste nella regione *esterna* al problema, ovvero dove originariamente è presente il piano. Se poniamo una carica q' in posizione r' si avrà:

$$V(\vec{r}) = k \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{d}|}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') + k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{d})$$

Per rispettare le condizioni del problema originale il potenziale deve annullarsi ad infinito e a $x=0$. Osserviamo inoltre che, data la simmetria del problema per rotazioni attorno all'asse x , tutte le cariche immagine che andremo a mettere saranno poste proprio su questo asse²¹.

²¹A meno di ammettere nel metodo di poter disporre distribuzioni continue di carica tipo anelli attorno all'asse ma perché complicarsi la vita se stiamo cercando di semplificarla.

Dunque sicuramente sappiamo che le cariche immagine saranno poste lungo l'asse x a coordinate negative, cerchiamo se esiste una soluzione con una sola carica immagine in posizione $(d', 0, 0)$ con $d' < 0$, che rispetti le condizioni al bordo:

$$0 = V(0, y, z) = k \frac{q'}{\sqrt{d'^2 + y^2 + z^2}} + k \frac{q}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.1)$$

È facile notare che $q' = -q$ e $d' = -d$ è una soluzione del problema. Abbiamo dunque:

$$V(x, y, z) = kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = kq \left(\frac{(x-d)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x+d)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

In particolare, sulla superficie del conduttore:

$$\vec{E}(0, y, z) = -2k \frac{qd}{[d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{x}$$

Quindi il campo elettrico è perpendicolare alla superficie, come c'era da aspettarsi. Possiamo ora, tornando al problema originale, calcolare anche la densità di carica superficiale ricordandoci che per una superficie $\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ e che il campo elettrico è nullo all'interno di un conduttore.

$$\sigma(0, y, z) = -\frac{qd}{2\pi[d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Se avessimo voglia potremmo ora integrare su tutta la superficie questa espressione e troveremmo che la carica totale è proprio $-q$ (Ovviamente con "se avessimo voglia" si intende che il calcolo è lasciato come esercizio al lettore). Noi qui riportiamo solo il risultato, non per effettiva mancanza di voglia ma perché tale risultato si può ottenere anche usando la legge di Gauss e questo ci sembra molto più istruttivo: consideriamo una calotta emisferica centrata nell'origine e di raggio R (con la superficie di base a x negativo molto piccolo). Facendo tendere il raggio a $+\infty$ si nota che il flusso va a 0 (in quanto l'area scala come R^2 , mentre il campo va come R^{-3}), e dunque anche la carica interna (che tende alla somma algebrica di q e la carica totale sulla superficie del conduttore) deve essere nulla. Per apprezzare completamente questo ragionamento però bisogna riconoscere l'andamento a grandi distanze del campo di un dipolo, che non è stato ancora introdotto, quindi rimandate i dubbi a dopo... quando saranno meno dubbi.

Osservazione. Un occhio attento potrebbe notare che nel sistema *carica + carica immagine*, nella regione dove era posto il conduttore, il campo non è nullo, mentre sappiamo che nella soluzione del problema con il piano conduttore il campo in quella regione sarebbe stato certamente nullo. Questo non è un problema: noi stiamo cercando una soluzione che segua tutte le leggi della fisica solo nella regione $x > 0$ ovvero dove non c'è il conduttore. Una volta trovata la soluzione e calcolata la densità superficiale, sarà questa ad assicurare che per $x > 0$ si abbia lo stesso campo di prima, mentre per $x < 0$ la carica q sia totalmente schermata e dunque il campo nullo.

Un altro modo molto suggestivo di vedere questo metodo è che la carica immagine rappresenta l'effetto della carica superficiale dalla parte opposta del piano rispetto alla quale è messa. Dal momento che la densità superficiale è concentrata sul piano $x = 0$ (e dunque simmetrica per $x \rightarrow -x$) agirà allo stesso modo sui due semispazi. Quando consideriamo il semispazio $x < 0$ possiamo immaginarci una carica immagine $-q$ posta a $x = d$ che genera il campo, questa carica immagine è sovrapposta alla carica reale e ha carica opposta, il campo generato è dunque nullo.

Teorema 4.1 (Posizione delle Cariche immagine). *Le cariche immagine si possono posizionare solo fuori dalla regione di interesse (ossia solitamente solo dove c'è il conduttore).*

Se per assurdo mettessimo una carica immagine fuori dal conduttore, calcolando poi σ e togliendo le cariche immagine, staremmo chiedendo al conduttore di simulare la presenza di una sorgente di campo (per gli amici, una carica puntiforme²²). In altre parole, calcolando il flusso di \vec{E} in un volumetto abbastanza piccolo contenente la posizione in cui avevamo messo la carica immagine, otterremmo un flusso non nullo, che secondo il teorema di Gauss implicherebbe una carica interna non nulla dove invece non c'è!

§ 4.2.2. ★★★★★ **Carica Immagine della Sfera.** — Anche adesso restringiamo il problema all'esterno della sfera e iniziamo con una sola carica immagine. Riciogliamo la simmetria cilindrica valida anche in questo caso attorno all'asse delle x e posizioniamo la carica sullo stesso in $(d', 0, 0)$. Studiamo il problema ristretto al piano xy . Ricordando che la sfera è messa a terra otteniamo:

$$\frac{r'}{r} = \left| \frac{q'}{q} \right| = \text{cost}$$

dove r e r' sono rispettivamente le distanze di un punto generico della sfera dalla carica reale e immagine. Questo risultato ci fa capire che una carica immagine sarà sufficiente, in quanto sappiamo dalla geometria euclidea che il luogo di punti tali che il rapporto delle loro distanze da due punti fissati è costante è proprio una sfera (in due dimensioni prende il nome di Cerchio di Apollonio²³). Ora dobbiamo solo imporre che la superficie equipotenziale a potenziale nullo sia quella di raggio a e centro nell'origine. Imponendo $V(a, 0, 0) = V(-a, 0, 0) = 0$ abbiamo il risultato:

$$d' = \frac{a^2}{d} \quad q' = -q \frac{a}{d}$$

Osservazione. Non ci siamo dimenticati del fatto che abbiamo aggiunto la comoda condizione che la sfera fosse messa a terra, ma ora che abbiamo la soluzione della carica immagine possiamo usare il nostro amato principio di sovrapposizione per risolvere anche tutti gli altri casi, ovvero quello di una sfera tenuta ad un potenziale costante $V_0 \neq 0$ o di una sfera isolata con carica totale Q . Nel primo caso basterebbe aggiungere una carica $q'' = aV_0/k$ nell'origine (in quanto, per sovrapposizione, il potenziale in tutto lo spazio coincide con la somma dei potenziali delle due distribuzioni e il potenziale della configurazione iniziale si annulla sulla superficie della sfera, mentre il potenziale della carica q'' sulla superficie è proprio V_0). Per il secondo caso invece il potenziale è incognito ma sempre costante quindi la seconda carica immagine va sempre posta nel centro e per Gauss deve avere valore $q'' = Q - q'$.

In entrambi i casi una volta trovata la soluzione con condizione a contorno $V = 0$ ci limitiamo a trovare la soluzione a un problema in cui nello spazio c'è solo il conduttore (senza cariche esterne) per poi *sovrapporla* a quella di prima.

Il calcolo della densità superficiale e del campo elettrico nello spazio sono lasciati come esercizio al lettore, così come il calcolo della forza sulla sfera.²⁴

Vediamo che da questo risultato si possono dedurre due limiti simpatici, uno dei quali introdurrà la prossima sezione:

- La sfera è a terra, e $a \rightarrow \infty$ mantenendo fissa la distanza tra la carica e la sfera (dunque anche $d \rightarrow \infty$ ma $d - a = D$ costante). In questo modo il nostro sistema tende ad assomigliare ad un piano conduttore infinito davanti al quale pongo una carica a distanza D . Con semplici conti (ricordandoci che $(1 + \varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon$ per $\varepsilon \ll 1$) si vede che $d' \rightarrow a - D$ e $q' \rightarrow -q$. Questo risultato è effettivamente quello che ci aspettavamo.
- La sfera è neutra e $d \rightarrow \infty$, ma teniamo $\frac{q}{d^2} = 4\pi\varepsilon_0 E_0$ costante (è come se mettessimo la sfera immersa in un campo elettrico uniforme pari a $-E_0 \hat{x}$). Le due cariche immagine si

²²Per i più formali, una singolarità nel potenziale.

²³cfr. https://it.wikipedia.org/wiki/Cerchio_di_Apollonio

²⁴Hint: Usare il principio di azione-reazione.

avvicinano (tendono a coincidere) e generano un dipolo

$$\vec{p} = q' d' \vec{\hat{x}} = -\frac{qa^3}{d^2} \vec{\hat{x}} = 4\pi\epsilon_0 \vec{E}_0 a^3$$

SEZ. 5 — I DIPOLI ELETTRICI

Ora che abbiamo trattato esaurientemente i conduttori, ce ne dimentichiamo nuovamente e torniamo a studiare distribuzioni di carica, in particolare studieremo un oggetto onnipresente nello studio dei campi elettrici, ovvero i dipoli. Chiariremo anche perché sono così onnipresenti.

5.1 Approssimazioni e perché farle

Il potenziale di una distribuzione di carica è formalmente calcolabile con la formula introdotta prima:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.1)$$

valida per ogni distribuzione di carica. Quindi a livello teorico si può conoscere il potenziale esatto in ogni punto, per ogni distribuzione.

L'applicazione di questa formula è (*sadly*) spesso molto complessa, tanto che in pratica risulta difficile calcolare esplicitamente il valore di tale potenziale in tutti i casi non abbastanza simmetrici. In genere nei problemi verrà infatti richiesta un'approssimazione del potenziale a grandi distanze, così da renderne più agevole la soluzione.

Se la quantità complessiva di carica Q_{tot} è non nulla, un osservatore posto a grande distanza dal sistema²⁵ percepirà in prima approssimazione un campo proveniente dal sistema pari a quello generato da una carica puntiforme di valore Q_{tot} posizionata nel baricentro delle cariche²⁶: in formule, se \vec{R} è la distanza dal baricentro delle cariche all'osservatore e \vec{r}_i è la distanza della i -esima carica dal baricentro,

$$V(\vec{R}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + r_i^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r}_i}} \approx \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

dove l'approssimazione è giustificata dal fatto che $R \gg r_i \forall i$.

Se invece la carica totale è nulla, il valore del potenziale a grande distanza sarà dato dall'ordine successivo dell'approssimazione e sarà approssimabile a quello di due cariche, opposte in segno e di valore uguale alla quantità complessiva di carica dello stesso segno, posizionate rispettivamente nel baricentro delle cariche negative e nel baricentro delle cariche positive²⁷.

Effettueremo qui il calcolo a grande distanza per la configurazione non banale più semplice, ovvero due cariche di segno opposto a distanza d l'una dall'altra: questa configurazione, denominata comunemente *dipolo*, risulta centrale nello studio dell'elettrostatica. Il risultato che otterremo ha un'applicazione più ampia di quella del semplice problema proposto proprio perché ogni configurazione di carica, vista a grande distanza, si comporta come un dipolo. Possiamo quindi dire che il dipolo è l'oggetto più comune dopo la carica puntiforme per approssimare le distribuzioni

²⁵Più formalmente, sia la distanza d_G dell'osservatore dal baricentro (geometrico) delle cariche, e sia r_{min} il minimo raggio di una superficie sferica centrato nel baricentro delle cariche che le contiene tutte. Diremo che il nostro sistema è osservato a grandi distanze quando $d_G \gg r_{\text{min}}$. Inoltre, diremo che le distanze fra le cariche sono considerate trascurabili se nello sviluppo in serie di Taylor del potenziale ci interessa solamente il termine dell'ordine di $\frac{r_{\text{min}}}{d_G}$.

²⁶E in particolare quando parliamo di oggetti fisicamente puntiformi intendiamo spesso di essere semplicemente molto più lontani delle dimensioni caratteristiche.

²⁷Nel caso continuo ovviamente si integra nelle zone per cui ρ è positivo o negativo per il calcolo del baricentro e delle cariche complessive dei due segni.

di carica, in particolare genera un campo più debole, spesso trascurabile se la carica totale è non nulla, ma che diventa fondamentale altrimenti.

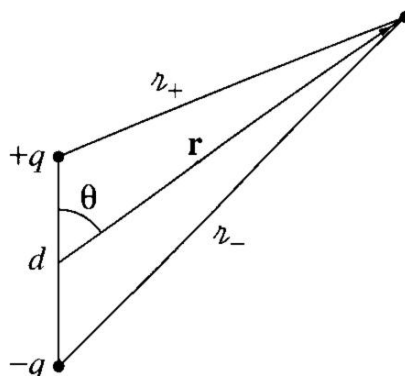


Figura 6: Quantità rilevanti per il calcolo del campo di un dipolo in un punto dello spazio.

5.2 Il Potenziale del Dipolo.

Poi la Natura ammirando ciò che era stato creato si accorse che ogni tanto la carica era nulla, e... senza che nessuno dicesse nulla, il dipolo fu. E fu sera e fu mattina: Quinto Giorno.

Come in Fig. 6, consideriamo due cariche puntiformi di carica $+q$ e $-q$ che si trovano sull'asse \hat{z} rispettivamente in posizione $-a\hat{z}$ e $a\hat{z}$, dove $d = 2a$ è la distanza fra le due cariche e \vec{d} il vettore che collega la posizione della carica negativa a quella della carica positiva. Siano ora \vec{r}_- ed \vec{r}_+ la distanza fra il nostro punto dello spazio e rispettivamente la carica negativa e la carica positiva. Sia \vec{r} il vettore distanza dall'origine.

Il potenziale in ogni punto dello spazio si può scrivere pertanto come:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-}. \quad (5.2)$$

Come possiamo notare, vale che

$$\begin{aligned} \vec{r}_+ &= \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d} \\ \vec{r}_- &= \vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d} \end{aligned}$$

Pertanto, usando la formula trigonometrica di Carnot²⁸ e chiamato θ l'angolo fra l'asse \hat{z} (parallelo a \vec{d}) e il vettore \vec{r} , si può scrivere:

$$r_+ = \sqrt{r^2 + d^2 - 2\vec{r} \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{d}\right)} = r\sqrt{1 - \frac{d \cos \theta}{r} + \frac{d^2}{r^2}}$$

e quindi, per $r \gg d$ si può approssimare come segue, utilizzando l'approssimazione al primo ordine in 0 per le potenze del binomio²⁹ ($(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ se $x \ll 1$):

$$\frac{1}{r_+} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d \cos \theta}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d \cos \theta}{2r}\right)$$

²⁸https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_coseno

²⁹Vedi anche disuguaglianza di Bernoulli:https://it.wikipedia.org/wiki/Disuguaglianza_di_Bernoulli.

dove si sono trascurati i termini di ordine superiore al primo, ovvero quelli dove compaiono potenze di $\frac{d}{r}$ con esponente maggiore di 1.

Facendo lo stesso ragionamento per r_- si ottiene analogamente

$$\frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d \cos \theta}{2r} \right)$$

Sostituendo le due relazioni trovate in Eq. (5.1) si ricava che per $r \gg d$:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{d \cos \theta}{2r} - 1 + \frac{d \cos \theta}{2r} \right) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

e indicando con $\vec{p} = +qd\vec{e}$, si ha che il potenziale può essere scritto:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (5.3)$$

Il vettore \vec{p} a cui abbiamo appena individuato viene chiamato *momento di dipolo*, ha unità di misura della carica moltiplicata per l'unità di lunghezza [Cm] e per una configurazione spaziale di cariche generica si può calcolare come segue:

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad (5.4)$$

Nel caso di cariche puntiformi, questo vettore è nullo se il baricentro delle cariche negative coincide con il baricentro delle cariche positive.

Il potenziale in Eq. (5.3) viene chiamato in generale *potenziale di dipolo*. In modo più formale si definisce *dipolo perfetto* una configurazione di cariche³⁰ tale che il campo in ogni punto sia esattamente identico a Eq. (5.3).

Tale potenziale può essere pensato come il risultato di un processo di limite, in cui la distanza fra le due cariche tende a zero, mantenendo costante il valore del modulo di \vec{p} (dunque $qd = p$ costante, con $d \rightarrow 0$ e $q \rightarrow \infty$). Possiamo vedere il confronto fra i campi di un dipolo perfetto e di un dipolo reale in Fig. 7.

5.3 Il Campo Elettrico del Dipolo

Ora che abbiamo una formula esplicita per il potenziale vediamo un primo esempio di come utilizzare $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ per ricavare il campo elettrico al costo di svolgere solo qualche derivata³¹.

Riscrivendo in cartesiane il potenziale di dipolo, si ottiene:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{pz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dove si è supposto che il momento di dipolo fosse diretto nella direzione positiva dell'asse \hat{z} . Si ha allora che:

$$\begin{aligned} \vec{E}_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} x \\ \vec{E}_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} y \\ \vec{E}_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} z - \frac{p}{3r^3} \right) \end{aligned}$$

³⁰Nella realtà la configurazione di dipolo perfetto è impossibile da ottenere, esistono solo dipoli fisici che però possono bene approssimare i dipoli perfetti. In essi la distanza fra le due cariche è finita ma molto piccola. Un esempio è la molecola d'acqua, che ha un momento di dipolo pari a $6,17 \times 10^{-30}$ Cm.

³¹Allo stesso risultato si può arrivare con ragionamenti simili a quelli fatti per il potenziale ma le formule sono meno semplici e i ragionamenti non hanno molto valore aggiunto. Quindi utilizzare il calcolo del gradiente è più semplice.

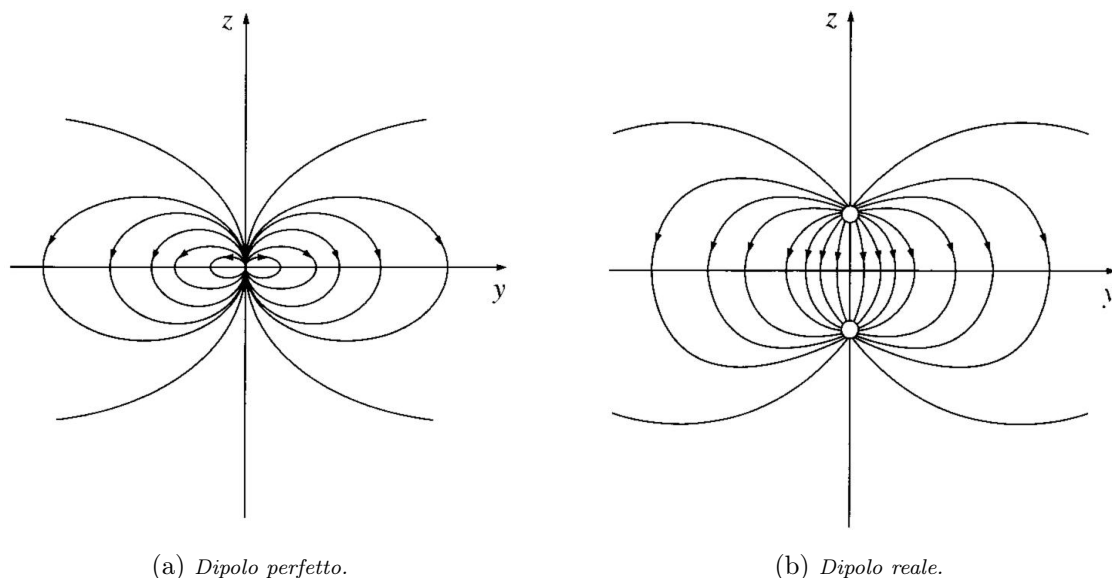


Figura 7: Confronto dei campi di un dipolo perfetto e di un dipolo reale.

da cui segue che il campo vale:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{3\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \right) \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \quad (5.5)$$

Possiamo osservare, come già menzionato in precedenza, che il campo del dipolo decresce come il cubo della distanza.

5.4 Giocare con i Dipoli: Momento Torcente, Energia e Forza

Avendo quindi capito che una configurazione di carica globalmente neutra non si approssima a carica puntiforme ma a dipolo capiamo che è molto utile scoprire come i dipoli reagiscono all'applicazione di un campo elettrico esterno. Le cariche sappiamo subiscono una forza $\vec{F} = q\vec{E}$ e hanno un'energia potenziale $U(\vec{r}) = qV(\vec{r})$. Cerchiamo le formule equivalenti per i dipoli.

Dato un momento di dipolo \vec{p} possiamo rappresentare la configurazione di cariche come un bilanciere di lunghezza d con agli estremi cariche opposte di modulo q , con $\vec{p} = q\vec{d}$.

Per semplicità iniziamo dal caso in cui il campo elettrico esterno sia uniforme in tutto lo spazio. In questo caso è facile calcolare la forza e l'energia, utilizzando le formule valide per le cariche ai capi del bilanciere:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} - q\vec{E} = 0$$

e quindi la somma delle forze agenti sul dipolo è nulla.

Sia ora $\vec{F}_- = -q\vec{E}$ la forza agente sulla carica negativa e sia $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ la forza agente sulla carica positiva, notazione già usata e che fa riferimento a Fig. 8. Allora si nota che anche quando la forza netta è nulla il dipolo subisce un momento torcente non nullo.

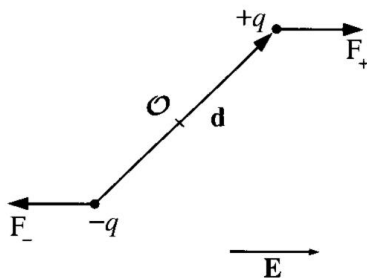


Figura 8: Schema delle forze su un dipolo in campo costante.

Se si calcola il momento torcente sul dipolo rispetto al punto medio della distanza fra le due cariche, si ottiene:

$$\vec{\tau} = \left(+\frac{\vec{d}}{2}\right) \wedge \vec{F}_+ + \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \wedge \vec{F}_- \Rightarrow \vec{\tau} = q\vec{d} \wedge \vec{E}$$

Che possiamo suggestivamente riscrivere come:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad (5.6)$$

Il significato di Eq. (5.6) è che il momento torcente ha come scopo nella vita quello di allineare il dipolo con il campo elettrico esterno.

Questo claim può essere reso più quantitativo se osserviamo che l'energia della configurazione è data da

$$U_{\text{dipolo}} = -qV(\vec{r}) + qV(\vec{r} + \vec{d}) \approx q\vec{\nabla}V \cdot \vec{d} = -\vec{E} \cdot \vec{p}. \quad (5.7)$$

Dove abbiamo ignorato l'energia derivante dalla mutua interazione tra le cariche puntiformi, in quanto supponiamo che la distanza tra loro non cambi. Nell'equazione abbiamo supposto che la distanza d sia molto minore delle scale di variazione del potenziale³².

Questo non ci deve sorprendere, soprattutto alla luce di Eq. (5.7) che è ovviamente minima quando dipolo e campo sono paralleli e massima quando antiparalleli³³.

SEZ. 6 — I CONDENSATORI

Anche qui ci ritroviamo nella situazione in cui un modello, quello del condensatore in questo caso, dovrebbe rientrare nel capitolo dei conduttori per completezza, ma è così importante che una sezione a parte, anche se corta, se la merita.

6.1 Definizione

Gli elettricisti videro che quello che era stato creato era cosa utile, e produssero i condensatori. I fisici capirono di non avere troppa voglia di fare i calcoli. E i condensatori ideali furono! E fu sera e fu mattina: Sesto Giorno

Un condensatore è costituito da due conduttori, separati da materiale isolante (o dal vuoto), e carichi con carica totale uguale in modulo e opposta in segno. I condensatori esistono nella realtà

³²Si noti che abbiamo assunto che il momento di dipolo \vec{p} sia costante in modulo, ipotesi necessaria affinché questa formula sia valida. Un caso lampante è quello del dipolo dipendente linearmente dal campo ($\vec{p} = \alpha\vec{E}$): in quel caso $U_{\text{dipolo}} = -\frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{p}$.

³³Intendiamo con stessa direzione ma verso opposto. In particolare notate che anche in questa configurazione il momento torcente è nullo, infatti essendo un massimo è una configurazione di equilibrio, ma instabile.

e sono componenti circuitali molto diffusi, ma quelli che tratteremo noi saranno ovviamente i molto migliori: condensatori ideali esistenti solo nella nostra immaginazione³⁴.

Definizione 6.1 (Condensatore a facce Piane Parallele Ideale). Si definisce così l'insieme di due piastre conduttrici quadrate con facce parallele di area S , "ideale" si riferisce al fatto che la distanza tra le due facce è $d \ll \sqrt{S}$ quindi consideriamo il campo come generato da piani infiniti, trascurando effetti di bordo. Se una faccia ha carica $Q > 0$, allora avrà una densità superficiale di carica $\sigma = \frac{Q}{S}$ uniforme a meno di effetti di bordo trascurabili. L'altra faccia avrà una carica $-Q$ e densità $-\sigma$.

Definizione 6.2 (Condensatore Cilindrico Ideale). Allo stesso modo se consideriamo due lastre cilindriche coassiali con carica uguale e opposta (ideali se l'altezza, uguale per entrambi, è molto maggiore di entrambi i raggi) possiamo costruire un condensatore cilindrico

Le formule per il condensatore cilindrico sono leggermente più complesse quindi per chiarezza espositiva ci limiteremo a quello a facce piane in questa sezione e lasceremo i condensatori cilindrici agli esercizi poiché non offrono complicazioni concettuali notevoli.

6.2 Il Campo Elettrico di un Condensatore

Calcoliamo ora il campo elettrico utilizzando il principio di sovrapposizione (perché sì, alla fine si usa sempre) e scopriamo perché i condensatori sono così tanto utilizzati nei problemi e perché meritano una sezione dedicata.

Se trascuriamo effetti di bordo per le due piastre vale separatamente che il campo è quello di un piano infinito che abbiamo già calcolato. Prendiamo una terna ortonormale di assi $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ con \hat{x} normale alle piastre che punta verso la piastra carica negativamente, e fissiamo l'origine degli assi nel centro della piastra positiva:

$$\vec{E}_+(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_-(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, & \text{se } x > d \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, & \text{se } x < d \end{cases}$$

e quindi, sovrapponendo, si ottiene

$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{x}, & \text{se } 0 < x < d \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (6.1)$$

da cui si deduce la bellissima proprietà di generare un campo uniforme, regolabile tramite il valore di σ e limitato nello spazio compreso tra $x = 0$ e $x = d$.

6.3 La Capacità di un Condensatore

Oltre al campo elettrico possiamo calcolare la differenza di potenziale elettrico tra le due piastre del condensatore. Questa è una quantità interessante dal punto di vista circuitale per le leggi di kirchhoff e in generale ci permette di non dover fissare uno zero del potenziale³⁵. Integrando il campo elettrico:

$$\Delta V = \int_0^d E \cdot dx = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}.$$

³⁴Ovviamente lo facciamo perché anche se ideali rimangono un ottimo modello anche per i condensatori fisici in regimi di utilizzo standard.

³⁵Che in questi casi non può essere messo all'infinito come ci piace tanto quindi viene solitamente messo a zero su una delle due piastre ma noi calcoleremo la differenza di potenziale apposta per non doverci preoccupare.

Da questa formula osserviamo che il rapporto $Q/\Delta V = \frac{\varepsilon_0 S}{d} := C$ dipende soltanto dalla costante dielettrica e dalle dimensioni del condensatore, quindi è una caratteristica del condensatore stesso che possiamo chiamare capacità e considerare costante a meno di non variare la geometria del condensatore.

6.4 I Materiali Isolanti

I materiali isolanti, definiti e poi da noi dimenticati, meriterebbero una trattazione molto più approfondita, ma che va oltre lo scopo della lezione. Un occhio attento avrà notato che gli isolanti sono già stati citati anche nella definizione di condensatore all'inizio di questa sezione. Tra le due facce di un condensatore infatti viene comunemente inserito un materiale isolante (che in questi contesti viene chiamato più propriamente *dielettrico*) il cui scopo è quello di aumentare la capacità del condensatore stesso.

L'argomento è, come già detto, molto vasto, ma per quanto riguarda le olimpiadi è sufficiente sapere che i materiali dielettrici possono essere descritti da una costante, chiamata *costante dielettrica relativa* che si indica ε_r e indica quanto questi materiali isolano meglio del vuoto. Per tutti i fini pratici quindi è spesso sufficiente sostituire la costante ε_0 che infatti è nota come costante dielettrica del vuoto, con $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ ³⁶.

SEZ. 7 — CENNI DI MAGNETOSTATICA

Ora che abbiamo attraversato 6 sezioni di elettrostatica siamo stanchi di vedere le nostre cariche ferme e vorremmo provare a farle muovere un pochino. Aggiungiamo qualche osservazione sperimentale e deduciamo che, forse, ci manca qualche ingrediente.

7.1 Il Campo Magnetico

Il settimo giorno, dopo aver terminato il lavoro fatto, tutti si riposarono e ammirarono ciò che avevano creato... campi elettrici e cariche in movimento... aspetta! In che senso in movimento?!

Quando una carica si muove subisce una forza aggiuntiva che non era osservabile per cariche ferme. sperimentalmente osserviamo³⁷ che anche questa è direttamente proporzionale alla carica, come quella dovuta al campo elettrico, ma in aggiunta è direttamente proporzionale al modulo della velocità ed è perpendicolare ad essa.

Ipotizziamo quindi che sia dovuta ad un qualche nuovo campo vettoriale, che indicheremo con \vec{B} e chiameremmo campo magnetico.

Definizione 7.1 (Forza di Lorentz). Una carica q immersa in un campo elettrico e in un campo magnetico che si muove con velocità \vec{v} subisce una forza:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (7.1)$$

La forza di Lorentz si può generalizzare ovviamente a fili in cui scorre corrente. Supponiamo di avere un filo in cui scorre una corrente I , il filo individua una curva γ nello spazio e $d\vec{l}$ è uno spostamento infinitesimo lungo questo filo.

³⁶ATTENZIONE: alcune volte potrebbe essere fornita la costante dielettrica del materiale e non quella *relativa*, in quel caso ε_0 è già *inglobato* e va rimosso dalla formula finale.

³⁷L'osservazione sperimentale tecnicamente è fatta con fili in cui scorre corrente che è molto più fattibile in pratica che isolare una singola carica lanciarla e misurarne la velocità e la forza subito. Consideriamo il nostro esperimento mentale più semplice da comprendere ma più difficile da realizzare nella pratica.

La forza che un campo magnetico \vec{B} esercita sul filo si calcola integrando la forza di Lorentz su tutte le cariche che si muovono nel filo³⁸, assumendo assenza di campo elettrico per semplicità:

$$\vec{F} = \int_{\gamma} dq \vec{v} \times \vec{B}$$

e da questa, utilizzando la definizione di corrente, secondo la quale in un tempo dt su un tratto di filo $d\vec{l}$ scorre una carica $dq = Idt$, che percorre un tratto di filo $d\vec{l} = \vec{v}dt$, si ottiene:

$$\vec{F} = \int_{\gamma} Idt \vec{v} \times \vec{B} = \int_{\gamma} Id\vec{l} \times \vec{B} = I \int_{\gamma} d\vec{l} \times \vec{B}$$

in cui la corrente I esce dall'integrale perché è costante lungo il filo.

Osservazione. Si può osservare che, data la direzione della forza, sempre perpendicolare alla velocità, il campo magnetico non è in grado di compiere lavoro. In formule, preso un qualsiasi percorso γ per la carica q in assenza di campo elettrico:

$$L = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^t q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

7.2 Moto delle Cariche in Campo Magnetico

Sappiamo che le cariche devono muoversi per sentire gli effetti di questo nuovo campo, quindi studiamo, per la prima volta in questa lezione il moto di una carica. Scegliamo il caso più semplice ovviamente, ovvero quello di campo magnetico uniforme.

Esempio 7.1 (★★★★☆ Moto in Campo Uniforme). Consideriamo una carica q che si muove con velocità $\vec{v}(t)$ immersa di un campo magnetico uniforme che scegliamo diretto lungo l'asse \hat{z} : $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Vogliamo studiare come evolve il moto.

Scomponiamo la velocità in componente parallela al campo e componente perpendicolare: $\vec{v} = v_z \hat{z} + v_n \hat{n}$. La forza di Lorentz sulla carica è $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = qv_n B_0 \hat{n} \times \hat{z}$.

Dall'osservazione che questa forza è perpendicolare alla velocità riconosciamo il moto circolare uniforme e uguagliando la forza di Lorentz con la forza centripeta otteniamo:

$$m \frac{v_n^2}{r} = qv_n B_0 \rightarrow r = \frac{mv_n}{qB_0}$$

Per quanto riguarda la componente della velocità parallela al campo elettrico invece ovviamente il moto è rettilineo uniforme perché la forza è anche perpendicolare al campo magnetico.

La traiettoria di q è quindi la somma di un moto circolare uniforme nel piano ortogonale al campo di raggio $r_0 = \frac{mv_n}{qB_0}$ con velocità angolare $\omega = \frac{v_n}{r_0} = \frac{qB_0}{m}$, e di un moto rettilineo uniforme lungo z con velocità v_z (vedi Fig. 9). Questo stesso risultato si può dimostrare in modo più rigoroso scrivendo $\vec{F} = m\vec{a}$ e risolvendo le equazioni differenziali risultanti, ma non essendo nello spirito di questa lezione la dimostrazione con questa strada alternativa è lasciata per esercizio al lettore.

7.3 Le Equazioni di Maxwell per la Magnetostatica

Il campo magnetico è un campo vettoriale come il campo elettrico, quindi è sensato chiedersi quanto valgano il flusso uscente da ogni superficie chiusa e la sua circuitazione lungo ogni curva chiusa in modo da ottenere due leggi, come quelle valide per il campo elettrico.

I risultati che si ottengono e che non dimostreremo sono molto importanti e sono note, insieme alle due leggi già enunciate per il campo elettrico come Equazioni di Maxwell per la magnetostatica. Facciamo solo notare alcune analogie/differenze di queste nuove equazioni con le precedenti:

³⁸Perché la forza agisce sulle cariche, che però sono vincolate a rimanere all'interno del filo.

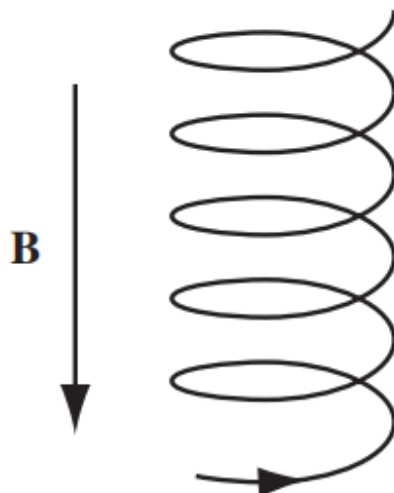


Figura 9: Moto di una carica puntiforme in un campo magnetico costante.

- per il campo magnetico è il flusso ad essere nullo e non la circuitazione;
- il termine con la circuitazione contiene quello che è noto come un termine *di sorgente* che equivale alla carica interna nel teorema di Gauss;
- in analogia con il teorema di Gauss il fatto che l'equazione per il flusso sia sempre nulla afferma l'inesistenza di monopoli magnetici, ovvero di cariche magnetiche puntiformi in qualche modo contrapposte a quelle elettriche.

Le equazioni sono, Per ogni superficie chiusa S e ogni percorso chiuso γ :

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.2)$$

$$\int_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (7.3)$$

in cui il termine di sorgente I_{enc} è la corrente *concatenata* alla curva γ , ovvero l'equivalente di *interna* per una curva chiusa³⁹. La costante di proporzionalità è μ_0 ed è comunemente chiamata *permeabilità magnetica* del vuoto, ed è legata ad ϵ_0 dalla velocità della luce, ma anche questo è al di fuori dello scopo di questa lezione.

7.4 Sorgenti di Campo Magnetico

Abbiamo visto che secondo le equazioni non esistono le cariche magnetiche elementari, le sorgenti di campo magnetico sono le correnti, ovvero le cariche elettriche in movimento. Vediamo quindi di calcolare ora il campo magnetico generato dalla più semplice delle distribuzioni di corrente.

Esempio 7.2 (★★★☆☆ Campo di un Filo Infinito). Fissiamo ora un sistema di coordinate cilindriche $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$ perché più adatto alla simmetria del problema. In queste coordinate le componenti del campo in generale sono:

$$\vec{B}(r, \phi, z) = B_r(r, \phi, z)\hat{r} + B_{\phi}\hat{\phi}(r, \phi, z) + B_z(r, \phi, z)\hat{z}.$$

³⁹Scelta una superficie il cui bordo è γ , e scelto un verso per la normale a questa, coerente con il verso di percorrenza della curva nella circuitazione, I_{enc} è la corrente che 'entra' nella superficie meno quella che 'esce'. Il verso coerente è scelto secondo la regola della mano destra, ovvero quando le dita seguono il verso di percorrenza il pollice punta nel verso corretto.

Nel filo scorre una corrente I in direzione positiva dell'asse \hat{z} .

Usiamo le simmetrie come faremmo per il campo elettrico, facendo però attenzione ad un fatto che fino ad ora abbiamo ignorato: \vec{B} è uno pseudovettore. Con questo termine intendiamo che lo possiamo immaginare esattamente come un campo vettoriale che associa ad ogni punto dello spazio una freccia, proprio come il campo elettrico, ma trasforma diversamente sotto simmetrie, in particolare cambia segno ad ogni riflessione⁴⁰.

Il filo è infinito, quindi è invariante per traslazioni lungo z e ci aspettiamo che il campo non dipenda da z . Inoltre il sistema è invariante per rotazioni attorno a \hat{z} , quindi il campo non dipende da ϕ , ovvero $\vec{B}(r, \phi, z) = \vec{B}(r)$. Il filo è anche invariante per simmetrie rispetto al piano passante per il filo e un qualsiasi punto esterno, ma B_z in quel punto verrebbe mandato in $-B_z$ da questa simmetria dunque $B_z = -B_z$ da cui deduciamo che $B_z = 0$. Possiamo quindi concludere che secondo queste simmetrie deve essere:

$$\vec{B}(r) = B_r(r)\hat{r} + B_\phi(r)\hat{\phi}$$

Usiamo ora l'equazione del flusso che si applica molto facilmente se consideriamo una superficie cilindrica coassiale al filo di raggio r e altezza h :

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B}(r) \cdot (2\pi r h \hat{r}) = B_r(r)(2\pi r h) = 0$$

Quindi anche $B_r = 0$.

Ora rimane solo da calcolare la restante componente del campo magnetico e può essere fatto con la restante equazione di Maxwell, scegliendo un circuito γ ad anello di raggio r con asse coincidente con il filo:

$$\int_{\gamma} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi r} B_\phi(r) dl = \mu_0 I$$

Ovviamente il percorso è scelto appositamente per avere due caratteristiche comode, ovvero quello di seguire esattamente il campo magnetico (in modo da semplificare il prodotto scalare) e quello di avere una coordinata r costante, in modo da poter portare fuori $B_\phi(r)$ dall'integrale.

$$B_\phi(r) \int_0^{2\pi r} dl = B_\phi(r) \cdot (2\pi r) = \mu_0 I \rightarrow B_\phi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Il campo magnetico generato da un filo infinito è quindi costituito da linee di campo che formano circonferenze con asse coincidente con il filo, e il modulo del campo è proporzionale alla corrente I e a $1/r$. In formule:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

Osservazione. Per distribuzione semplici a volte si riesce a trovare il campo magnetico in tutto lo spazio solamente sfruttando le simmetrie e le formule per il flusso e la circuitazione di \vec{B} . Questo è l'equivalente della tecnica mostrata per il campo elettrico in in Esempio 2.3 e in Esempio 2.4.

In generale esiste una formula che riporteremo per completezza, nota come *Formula di Biot-Savart* che, a patto di ottenere integrali che si sanno risolvere, permette di calcolare il campo magnetico che una generica densità di corrente \vec{J} genera in tutto lo spazio:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'. \quad (7.4)$$

⁴⁰Potreste chiedervi come facciamo a saperlo e perché mai dovrebbe decidere di comportarsi diversamente. Il motivo è semplice e sta nella definizione. Poiché $\vec{F} \propto \vec{v} \times \vec{B}$ quando facciamo una riflessione sia la forza che la velocità si trasformano come dei vettori, e per definizione di prodotto scalare l'unico modo di far funzionare le cose è che il campo magnetico cambi ulteriormente segno. Basta pensare ad alcuni esempi in casi semplici per convincersi.

In Eq. (7.4) si utilizza la densità di corrente \vec{J} che è un campo vettoriale, il cui valore indica, data una qualsiasi superficie S , quale intensità di corrente I la attraversa e ha unità di misura di una corrente diviso una superficie.

— ESERCIZI —

Per ogni esercizio, il numero di stelline indica la sua utilità⁴¹. Potete quindi interpretare il numero di stelle come un suggerimento dell'ordine in cui fare gli esercizi, da quello con più stelle a quello che ne ha meno. In ogni caso si consiglia di fare almeno un problema per ogni sezione. (Le soluzioni verranno pubblicate sul sito dello stage.)

Distribuzioni di Carica e Campi Elettrici

★★★★☆ **Esercizio 1 Carica in campo elettrico a simmetria sferica di modulo costante (Senigallia 2011 P3)** Si considerino due superfici sferiche concentriche di raggi $R_1 = R$ ed $R_2 = 2R$ che delimitano un volume V ; un'opportuna distribuzione di cariche, in posizione determinata, è tale da generare un campo elettrico radiale uscente, il cui modulo (E_0 noto) è uguale in tutti punti del volume V .

Il campo elettrico è nullo nei punti interni alla prima superficie (quella di raggio minore) e nei punti esterni alla seconda superficie. Per ottenere questo è necessario porre una distribuzione di carica positiva sulla superficie interna, una negativa sulla superficie esterna ed un'ulteriore distribuzione volumetrica nello spazio tra le due superfici, in modo tale che la carica totale sia nulla.

1. Quanto valgono le densità di carica superficiale (uniformi) sulle due superfici sferiche di raggio R_1 ed R_2 ?
2. Quanto vale la densità media di carica spaziale tra le due superfici sferiche di raggio R_1 ed R_2 ?

Si può facilmente verificare (per esempio considerando due corone sferiche di uguale volume) che la densità di carica spaziale non può essere uniforme; essa sarà quindi funzione della distanza dal centro: $\rho = \rho(r)$.

1. Determinare l'andamento della densità volumetrica di carica $\rho(r)$ al variare della distanza dal centro.
2. Tracciare i grafici del campo elettrico $E(r)$, della densità di carica (volumetrica) $\rho(r)$ e del potenziale elettrostatico $V(r)$, con $V_\infty = 0$, per ogni r compreso nell'intervallo $[0, 5R]$.

Una particella di massa m e carica $q > 0$, lanciata radialmente dall'esterno verso il centro della distribuzione sferica, riesce ad attraversare la sfera se la sua velocità iniziale ha un valore qualunque maggiore di v_0 (e la conservazione dell'energia mostra che $v_0^2 = 2qE_0R/m$). La stessa particella viene lanciata, da fuori, con velocità di modulo v_0 in modo che nel punto di ingresso la direzione sia ruotata di 45° rispetto a quella radiale; la particella raggiunge una distanza minima dal centro della distribuzione (r_{\min}) per poi uscire di nuovo all'esterno.

1. Spiegare perchè la traiettoria della particella è certamente una curva piana.
2. Scrivere l'equazione che dà il valore di r_{\min} e risolverla in termini della variabile $z = r/R$ con un'opportuna tecnica numerica e con l'approssimazione dell'1%.

★★★★☆ **Esercizio 2 Potenziale in un cubo (200 More Physics Puzzling Problems 141)** Considera un cubo con densità di carica volumica uniforme ρ . Prendendo

⁴¹Secondo il nostro modesto giudizio.

lo 0 del potenziale all'infinito ($V(\infty) = 0$) trova il rapporto fra il potenziale al centro del cubo e quello su uno dei vertici.

★★☆☆☆ **Esercizio 3 Esplosione Coulombiana** Una nube sferica uniformemente carica di raggio R e carica totale Q inizia a espandersi al tempo $t = 0$ a causa della repulsione coulombiana. Mostrare che se per due particelle vale $r_1(0) < r_2(0)$ allora varrà $r_1(t) < r_2(t)$ sempre (confronta la figura 10). Trovare inoltre l'equazione differenziale del moto e dimostrare che la densità di carica rimane uniforme durante l'espansione.

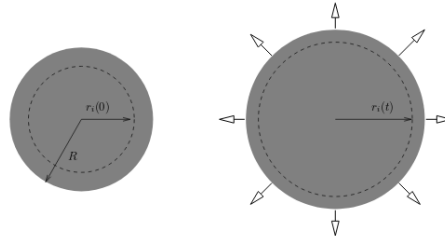


Figura 10: esplosione coulombiana.

Conduttori e Metodo delle Cariche immagine

★★★★★ **Esercizio 4 Cariche immagine** Trovare l'espressione del potenziale e della carica superficiale nei seguenti casi:

- Una carica q è posta in posizione $(d, 0, 0)$ davanti a un conduttore la cui superficie coincide in parte con il piano yz ma che presenta una sporgenza semisferica centrata nell'origine e di raggio $a < d$. E se la carica fosse in posizione generica $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con $\bar{x} > 0$ e $\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} > a$
- Una carica q è posta in posizione $(a, b, 0)$ con $a, b > 0$ ed è presente un conduttore nella regione di spazio $x < 0 \vee y < 0$.
E se invece il conduttore fosse in $x < 0 \wedge y < 0$?
- (*) Usando ora un sistema di coordinate cilindriche, studiare il sistema il cui è presente un conduttore nella regione di spazio $\theta \in [\alpha, 2\pi]$ con $\alpha = \pi/2n$ per qualche $n \in \mathbb{N}^+$ e una carica q in posizione $(r, \alpha/2, z = 0)$.
Studiare lo stesso sistema di prima dove però q è in posizione $(r, \bar{\theta}, z = 0)$ con $\bar{\theta} \in [0, \alpha]$ qualunque⁴².
- Due cariche q sono poste rispettivamente in posizione $(a, b, 0)$ e in posizione $(-a, -b, 0)$ con $a, b > 0$ ed è presente un conduttore (messo a terra) nella regione di spazio $-d < x < d$ (ovviamente con $d < a$)

★★★★☆☆ **Esercizio 5 Sfere conduttrici nello spazio** Due sfere conduttrici di raggio a distano $d \gg a$ l'una dall'altra. Su entrambe le sfere è presente una carica di ugual modulo Q ma segno opposto. Calcolare al primo ordine in a/d la forza di interazione elettrostatica.

★★★★☆☆ **Esercizio 6 Cilindri conduttori nello spazio** Due cilindri infiniti conduttori di raggio R sono posti in modo tale da avere gli assi paralleli e distanti d l'uno dall'altro (ovviamente con $d > 2R$). Sapendo che la differenza di potenziale tra di essi è V_0 , calcolare la forza di interazione elettrostatica (per unità di lunghezza).

⁴²Hint: si osservi cosa succede per $\alpha' = 2\alpha$.

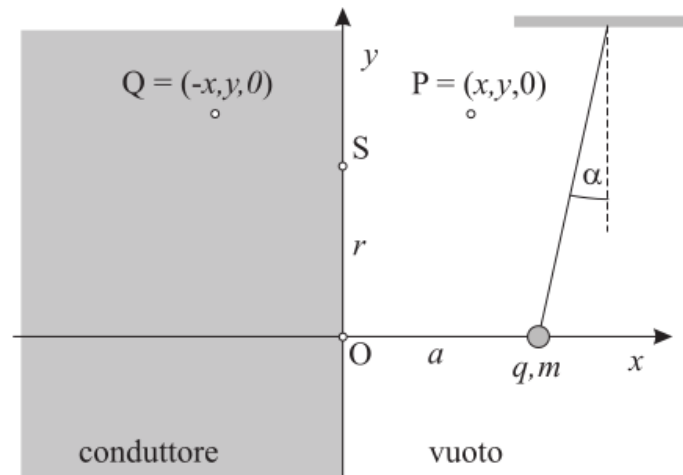


Figura 11: *Senigallia 2013, P3*: una carica davanti ad un piano conduttore.

[*Hint*: può essere utile dimostrare che, chiamate r ed r' le distanze di un punto P da due punti fissati nel piano, il luogo dei punti per cui $r/r' = K$ con K una costante arbitraria, è una circonferenza.]

★★★★☆ **Esercizio 7 Facciamo scontrare palline!** Si ponga una carica q e massa m ferma a distanza d da un semispazio conduttore. Calcolare il tempo che impiega a collidere con il piano.

Considera ora tre piccole palline caricate positivamente che giacciono una ad ogni vertice di un triangolo. Le loro masse sono m_1 , m_2 e m_3 e le loro cariche sono rispettivamente Q_1 , Q_2 e Q_3 . Quando le perle vengono rilasciate dal riposo, ognuna si muove lungo una diversa linea retta (il tutto si svolge nel vuoto e si possono trascurare gli effetti gravitazionali). Quali condizioni speciali devono essere soddisfatte affinché ciò accada? Trova gli angoli del triangolo formato dalle perle, se i rapporti carica-massa delle tre palline sono nella proporzione:

$$\frac{Q_1}{m_1} : \frac{Q_2}{m_2} : \frac{Q_3}{m_3} = 1 : 2 : 3$$

★★★★☆ **Esercizio 8 L'attrazione dell'induzione elettrostatica (Senigallia 2013 P2)** Una sferetta di massa m possiede una carica q ed è appesa ad un lungo filo. Se si dispone la sferetta vicino ad una lastra conduttrice scarica, si osserva che la sferetta viene attratta dalla lastra; questo accade perché, per induzione, sulla superficie della lastra si forma una distribuzione di cariche di segno opposto a q . Si supponga che, all'equilibrio, la sferetta si trovi ad una distanza a dalla lastra e che il filo formi un angolo α con la verticale. Rispetto alla distanza a tra carica e lastra le dimensioni della sferetta sono molto piccole cosicché la carica q può essere sempre considerata **puntiforme**; inoltre le dimensioni della lastra, molto maggiori di a , possono essere considerate **infinite**. Si può quindi considerare un piano (di equazione $x = 0$) come superficie di separazione tra un mezzo conduttore nel semispazio $x < 0$ e il vuoto nel semispazio $x > 0$, entro cui si trova la sferetta. Nella figura è indicato anche il sistema di coordinate consigliato, in modo che la sferetta si trovi sull'asse \hat{x} , quindi nel punto di coordinate $(a, 0, 0)$, che l'asse \hat{y} sia verticale e orientato verso l'alto e l'asse \hat{z} perpendicolare al piano della figura ed uscente. Relativamente alla distribuzione delle cariche indotte, sarà sufficiente studiare la situazione lungo l'asse $y > 0$. Infatti, per simmetria, la densità di carica, σ , dipenderà solo dalla distanza r del punto considerato dall'origine ($r^2 = y^2 + z^2$).

1. Per determinare il campo elettrostatico in un generico punto $P = (x, y, 0)$ nel semispazio vuoto $x > 0$ si consideri inizialmente il punto $Q = (-x, y, 0)$ all'interno del materiale

conduttore e simmetrico di P rispetto al piano di separazione tra i due mezzi. Si scrivano il vettore campo e.s. $\mathbf{E}(Q)$ prodotto da tutte le cariche presenti e il vettore $\mathbf{E}_1(Q)$ prodotto dalle sole cariche indotte che si formano sulla superficie della lastra (piano $x = 0$).

2. Si scriva adesso il campo e.s. \mathbf{E}_1 (prodotto dalle sole cariche indotte presenti sulla superficie della lastra) nel punto P nel semispazio $x > 0$, mostrando che, limitatamente a questo semispazio, il campo \mathbf{E}_1 è identico a quello generato da una singola carica puntiforme q di cui si chiede il valore e la posizione.
3. A titolo d'esempio, si scriva il campo e.s. (totale) \mathbf{E} , nel punto $A = (a, a, 0)$.
4. Si scriva il campo e.s. (totale) \mathbf{E} , in prossimità del punto $S = (0, r, 0)$ nel semispazio vuoto, cioè in un punto vicinissimo alla superficie della lastra, a distanza r dall'origine O ; in altri termini, il limite dell'espressione del campo per $x \rightarrow 0^+$, $y = r$, $z = 0$.
5. Si calcoli la densità di carica indotta $\sigma(r)$ nel punto S e si dica quanto vale nel punto della superficie della lastra dove il suo modulo è massimo.
6. Si calcoli il valore della carica q in funzione di m , a ed α .
7. Si calcoli la quantità totale di carica indotta sul piano conduttore.

★★★★☆ **Esercizio 9 Carica immagine in un oggetto metallico (IPhO 2010 P1)**

Una particella puntiforme di carica elettrica q è posizionata nelle vicinanze di una superficie sferica metallica collegata elettricamente a terra e di raggio R . Di conseguenza, sulla sfera viene indotta una distribuzione superficiale di carica. Riuscire a calcolare il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico prodotti dalla distribuzione della carica superficiale è un compito assai improbo. Tuttavia tale calcolo può essere considerevolmente semplificato utilizzando un metodo matematico chiamato metodo delle immagini. In questo metodo il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico prodotti dalla carica distribuita sulla sfera sono equivalenti a quelli prodotti da una singola carica puntiforme q' posta dentro la sfera (non devi dimostrare ciò).

Nota: Il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico di questa carica immagine q' riproducono il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico solamente all'esterno della sfera (compresa la sua superficie).

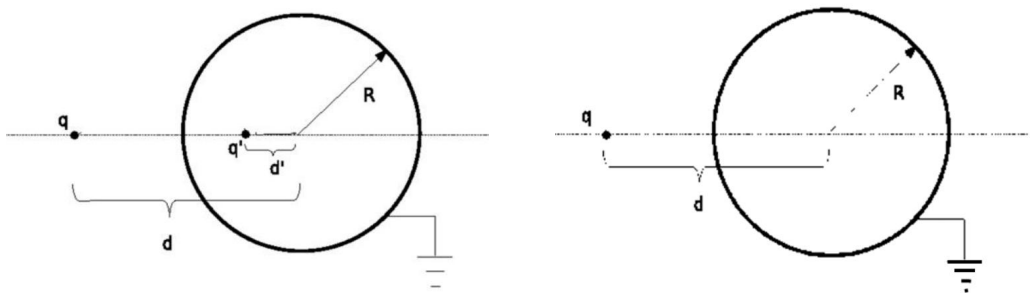


Figura 12: Sfera messa a terra

- **Parte 1 – La carica immagine.** Per la simmetria del sistema la carica q' si trova sulla linea congiungente la carica puntiforme q e il centro della sfera (confronta la figura 12).

1. Qual è il valore del potenziale elettrostatico della sfera? (0.3 punti)

2. Esprimi q' e la distanza d' della carica q' dal centro della sfera, in funzione di q , d e R . (1.9 punti)
 3. Trova l'espressione dell'intensità della forza che agisce sulla carica q . Si tratta di una forza repulsiva? (0.5 punti)
- **Parte 2**– *Schermaggio di un campo elettrostatico.* Considera una particella puntiforme di carica q posizionata a distanza d dal centro di una sfera metallica di raggio R collegata elettricamente a terra (confronta la figura 13). Siamo interessati a come la presenza della

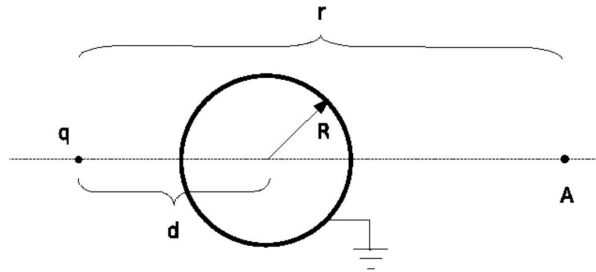


Figura 13: Schermo alla carica.

sfera metallica collegata elettricamente a terra modifica il campo elettrico in un punto A posizionato sul lato opposto della sfera. Il punto A è sulla retta che unisce la carica q al centro della sfera; la distanza di A dalla carica puntiforme q è r .

1. Trova il vettore campo elettrico totale nel punto A . (0.6 punti)
 2. Se la distanza r è molto maggiore di d , trova l'espressione approssimata per il campo elettrico nel punto A utilizzando l'approssimazione $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$, dove $a \ll 1$. (0.6 punti)
 3. A che limite deve tendere d perché la sfera metallica collegata elettricamente a terra schermi completamente il campo generato dalla carica q , in modo che il campo elettrico totale in A sia esattamente nullo? (0.3 punti)
- **Parte 3**– *Piccole oscillazioni nel campo elettrico generato dalla sfera metallica.* Una particella puntiforme di carica q e massa m è legata a un filo di lunghezza L che ha l'altra estremità fissata a un muro nelle vicinanze della sfera metallica collegata elettricamente a terra (confronta la figura 14). Nelle tue considerazioni, ignora tutti gli effetti elettrostatici

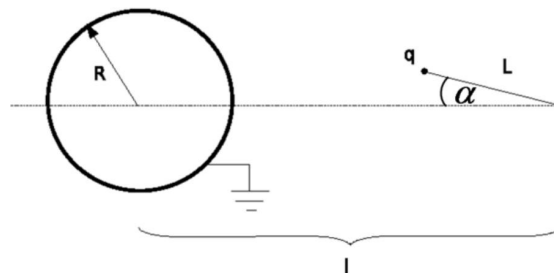


Figura 14: Oscillazioni della carica.

prodotti dal muro. La particella puntiforme si comporta come un pendolo matematico. Il punto al quale il filo è fissato al muro si trova a distanza l dal centro della sfera. Trascura gli effetti della gravità.

1. Trova il modulo della forza elettrica che agisce sulla carica puntiforme q per un certo angolo α e indicane chiaramente la direzione in un disegno (0.8 punti)

2. Per questa forza, esprimi la componente perpendicolare al filo in funzione di l , L , R , q e α . (0.8 punti)
 3. Trova la frequenza delle piccole oscillazioni del pendolo. (1.0 punti)
- **Parte 4– L'energia elettrostatica del sistema.** Data una distribuzione di cariche elettriche, è importante calcolare l'energia elettrostatica del sistema. Nel nostro problema, c'è interazione elettrostatica tra la carica q esterna alla sfera e le cariche indotte sulla superficie della sfera ed è presente un'interazione elettrostatica anche tra le cariche indotte sulla sfera (fai riferimento alla seconda delle figure 12). In funzione della carica q , del raggio R della sfera e della distanza d determina le seguenti energie elettrostatiche:
1. l'energia elettrostatica dovuta all'interazione tra la carica q e le cariche indotte sulla sfera; (1.0 punti)
 2. l'energia elettrostatica dovuta all'interazione tra le cariche indotte sulla sfera; (1.2 punti)
 3. l'energia elettrostatica totale del sistema dovuta all'interazione. (1.0 punti)

Hints

1.

$$\int_d^\infty \frac{x \, dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}$$

2. Una famiglia di N cariche puntiformi q_i posizionate nei punti \mathbf{r}_i , l'energia elettrostatica è la semisomma su tutte le coppie di cariche diverse:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

★★★★☆ **Esercizio 10 Aureola bella carica (200 More Physics Puzzling Problems 151)** Considero un anello e una sfera conduttori di raggi rispettivamente R e r . L'anello è caricato in modo che al suo centro il potenziale sia V_0 , mentre la sfera è messa a terra. Ora avvicino l'anello alla sfera in modo tale che il piano in cui giace l'anello sia tangente nel centro dell'anello alla sfera. Calcola la carica totale indotta sulla sfera.

★★★★☆ **Esercizio 11 Methane is so mundane (200 More Physics Puzzling Problems 152)** Quattro piccole sfere identiche conduttrici A , B , C e D sono posizionate ai vertici di un tetraedro regolare. Se metto q su A questa ha potenziale V . La sfera A ha potenziale V anche se metto $3q/4$ su A e su una delle altre sfere.

1. Calcola la carica che va messa su A e altre due sfere per avere nuovamente il potenziale di A uguale a V (nel senso che su ciascuna delle tre sfere ci deve essere la stessa carica).
2. Stessa domanda di sopra ma utilizzando tutte le sfere.

Dipoli Elettrici

★★★★☆ **Esercizio 12 Interazioni tra dipoli** Si considerino due dipoli perfetti: $\vec{p}_1 = p_1 \hat{y}$ posto nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane e $\vec{p}_2 = p_2 \hat{x}$ posto in $\vec{r} = (r, 0, 0)$.

1. Qual è il momento torcente su \vec{p}_1 rispetto al suo centro, dovuto a \vec{p}_2 ? E quello su \vec{p}_2 dovuto a \vec{p}_1 ? Perché i due risultati non sono opposti?
2. Calcolare la forza che \vec{p}_1 esercita su \vec{p}_2 e la forza che \vec{p}_2 esercita su \vec{p}_1 .

3. Calcolare il momento torcente totale su \vec{p}_2 rispetto al centro di \vec{p}_1 e confrontarlo con il momento torcente su \vec{p}_1 rispetto allo stesso punto. Dovrebbero ora risultare chiari i due diversi (non opposti) risultati ottenuti al primo punto.

★★☆☆☆ **Esercizio 13 4.31 Griffiths** Su una circonferenza sono presenti due cariche che formano un dipolo, che sono vincolate a muoversi su di essa e nell'istante $t = 0$ hanno velocità parallela a \vec{p} e concorde in verso. Al centro di questa c'è invece una carica Q (confronta la figura 15). Trova la forza sul dipolo e spiega qualitativamente perché questo non può essere un moto perpetuo.

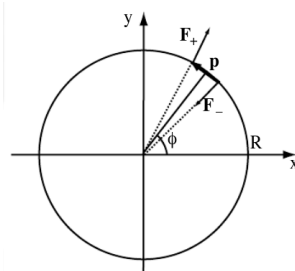


Figura 15: esercizio 4.31 del Griffiths [griffiths].

★★★★☆ **Esercizio 14 Condensatore semicircolare (Febbraio 2018)** Si consideri un condensatore piano a facce parallele le cui armature hanno la forma di semicerchi di raggio R , ad una distanza $d = \eta R$ con $\eta \ll 1$ (confronta la figura 16a): le due armature sono in aria ($\epsilon_r \approx 1$). Una delle due armature è fissa ed è disposta con il diametro orizzontale, mentre l'altra, di massa m , può ruotare di un angolo θ attorno ad un asse perpendicolare alla faccia e passante per il centro del cerchio C . Poiché la distanza d tra le armature è molto minore del raggio R di queste, si può ritenere - con sufficiente approssimazione - che, quando il condensatore è carico, il campo elettrico tra le armature sia non nullo solo nella parte in cui le due superfici sono affacciate, che sia perpendicolare alle armature e uniforme.

1. Determinare la capacità del condensatore in funzione dell'angolo θ , di R e di η .
2. Se il condensatore viene caricato con un generatore di f.e.m. V_0 nella posizione $\theta = 0$, e successivamente isolato, qual è l'energia elettrostatica U_{es} immagazzinata nel condensatore in funzione dell'angolo θ nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$? Rappresentare schematicamente in un grafico la funzione $U_{es}(\theta)$.
3. Utilizzando la risposta precedente, spiegare perché l'armatura mobile del condensatore rimane in equilibrio solo per $\theta = 0$ sia che il condensatore sia carico sia che sia scarico.

All'armatura mobile viene ora fissato un filo sottile al quale viene appeso un corpo di massa m pari a quella dell'armatura, come mostrato in figura 16b.

4. Determinare l'angolo θ_0 di equilibrio del sistema quando il condensatore è scarico, sapendo che il centro di massa di un semicerchio si trova a distanza $h = \frac{4R}{3\pi}$ dal centro del cerchio.
5. Spiegare perché, se il condensatore è carico, la posizione di equilibrio si ha per un angolo θ^* minore di θ_0 trovato al punto precedente.
6. Nel caso particolare di un condensatore descritto dai valori dati qui di seguito, e calcolando l'energia totale del sistema a partire dalla posizione θ_0 con passo pari a 1° , stimare il valore di θ^* .

$$R = 25 \text{ cm}, \eta = 0.004, V_0 = 1500 \text{ V}, m = 5 \text{ g}.$$

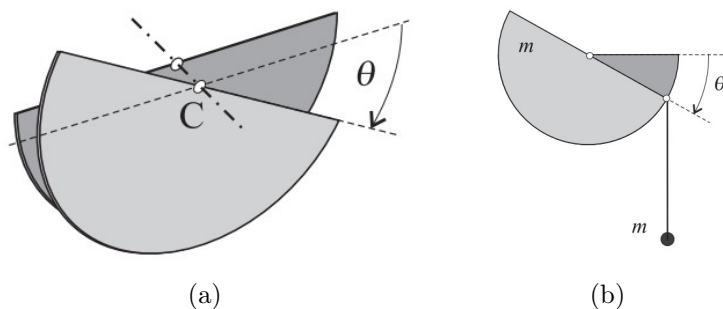


Figura 16: Configurazioni del condensatore semicircolare

Condensatori e Dielettrici

★★★★★ **Esercizio 15 Condensatori e dielettrici** Un condensatore piano avente armature quadrate di lato a poste a distanza $h \ll a$ è riempito da due lastre di materiali dielettrici differenti, aventi permeabilità ϵ_1 e ϵ_2 con $\epsilon_2 > \epsilon_1$. La superficie di contatto tra le due lastre si trova in posizione x . Sulle due armature si trovano le cariche $\pm Q$ rispettivamente.

1. Calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore, trascurando gli effetti di bordo.
2. Determinare la forza che tende a spostare le due lastre di dielettrico.
3. Ripetere il calcolo per la superficie di separazione tra i dielettrici parallela alle armature del condensatore e a metà del suo spessore.

★★★★☆ **Esercizio 16 Capacitors suck! (IPHO 1972 P3)** Un condensatore piano con armature rettangolari di altezza H è fissato in posizione verticale e produce inizialmente un campo elettrico E . Alla base è in contatto con un liquido dielettrico di permeabilità relativa ϵ_r e densità ρ . Assumi che la distanza tra le armature sia molto minore delle dimensioni lineari delle stesse. Trascurando effetti di capillarità, trova l'altezza dalla base del condensatore h di cui il liquido è risalito nella condizione di equilibrio.

Un piccolo esercizio di Magnetostatica

★★★★★ **Esercizio 17 Interazioni tra fili** Si considerino due fili infiniti paralleli, posti a distanza d e percorsi da una corrente I : quanto vale la forza che un filo esercita sull'altro? Considerare i casi in cui le correnti sono parallele e antiparallele.

— SOLUZIONI —

Ecco le soluzioni dei problemi

NOTA: Non sono qui riportate le soluzioni dei problemi presi dai testi delle gare passate

Soluzione 1 Problema 2 Sia Q la carica totale del cubo e l il suo lato. Costruiamo il cubo originale sovrapponendo 8 cubi che hanno uno spigolo $l/2$ e carica totale q . Indico con $V_c(a, p)$ e $V_v(a, p)$ il potenziale al centro e su un vertice in un cubo di lato a e carica totale p (con a e p generici). Dal principio di sovrapposizione allora ottengo $V_c(l, Q) = 8V_v(\frac{l}{2}, q)$. Se la densità di carica ρ è uniforme la carica q in uno dei cubi piccoli sarà $q = \rho(\frac{l}{2})^3 = Q/8$. Per linearità il potenziale può dipendere solo linearmente dalla carica, allora per analisi dimensionale troviamo che $V_v(a, p) = kp/a$, da cui $V_v(l, Q) = kQ/l = \frac{4kq}{l/2} = 4V_v(\frac{l}{2}, q)$. Il risultato cercato è $\frac{V_c(l, Q)}{V_v(l, Q)} = 2$.

Soluzione 2 Problema 3 Calcoliamo il campo elettrico. Notando la simmetria radiale si ha $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Dove il valore di $E(r)$ si può trovare con il teorema di Gauss (scegliendo come superficie una sfera centrata nell'origine di raggio r): $4\pi r^2 E(r) = Q_{int}(r)/\epsilon_0$, dove $Q_{int} = Q \cdot r/R$ per $r < R$ e $Q_{int}(r) = Q$ per $r > R$. Otteniamo, infine:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} & (r < R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & (r > R) \end{cases}$$

Al tempo $t = 0$ il campo elettrico all'interno della nube sferica aumenta con r . Così, le particelle "esterne" situate a r più grandi avranno un'accelerazione più alta che le particelle "interne" situate a r più piccole, e dopo un intervallo di tempo infinitesimale le particelle "esterne" avranno una velocità più elevata (supponendo che tutte le particelle abbiano velocità nulla a $t = 0$) e non saranno superate dalle "interne". Inoltre, l'accelerazione ha anche una simmetria radiale e quindi qualsiasi strato sferico conserva la sua forma.

Questi argomenti possono essere iterati per qualsiasi tempo successivo, in modo che le particelle non si superino l'un l'altra e la simmetria sferica sia preservata.

Poiché le particelle non si capovolgono tra loro, la carica all'interno di una sfera di raggio $r_i(t)$, cioè la superficie delimitata dallo strato di particelle che a $t = 0$ si trovavano a $r = r_{i0} = r_i(t = 0)$ ⁴³, è una costante. Quindi, applicando il teorema di Gauss alla superficie sferica di tale raggio, si ha:

$$4\pi r_i^2 E(r_i) = \frac{Q}{\epsilon_0} \left(\frac{r_{i0}}{R}\right)^3$$

Da cui:

$$m \frac{d^2 r_i}{dt^2} = qE(r_i) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \left(\frac{r_{i0}}{R}\right)^3$$

La forza sulle particelle, e quindi la loro accelerazione, aumenta con r_{i0} , il che è coerente con l'ipotesi del "non sorpasso".

Introducendo ora una nuova variabile $x(t) = r_i(t)/r_{i0}$, l'equazione differenziale appena trovata può essere riscritta come:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = qE(r_i) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3 x^2}$$

Dove r_{i0} non compare più; questo significa che la soluzione $x(t)$ con $x(0) = 1$ descrive il moto di tutti gli strati. Come conseguenza si ha la definitiva conferma dell'ipotesi che se per due strati

⁴³Sostanzialmente è come se dipingessimo di rosso le cariche che all'istante $t = 0$ erano a un raggio fissato r_{i0} e a ogni istante temporale guardassimo la sfera delimitata dalle particelle rosse in quel momento

$r_2(0) > r_1(0)$, allora vale $r_2(t) > r_1(t) \forall t$.

Infine il numero di particelle contenute tra gli strati 1 e 2 è costante ed è dato da:

$$\delta N_{12} = N \left[\left(\frac{r_2(0)}{R} \right)^3 - \left(\frac{r_1(0)}{R} \right)^3 \right]$$

E quindi la densità tra i due strati al tempo t è data da:

$$n(t) = \frac{\delta N_{12}}{(4\pi/3)[r_2^3(t) - r_1^3(t)]} = \frac{(N/r)[r_2^3(0) - r_1^3(0)]}{(4\pi/3)[r_2^3(t) - r_1^3(t)]x^3(t)} = \frac{n(0)}{x^3(t)}$$

Con $n(0) = N/(4\pi R^3/3)$ la densità iniziale. Questo risultato non dipende dalla scelta particolare dei due strati, quindi la densità è uniforme a qualsiasi t e diminuisce con il tempo come $x^{-3}(t)$.

Soluzione 3 Problema 4 In tutti i problemi ci limiteremo a trovare la disposizione delle cariche immagine in quanto da lì in poi è un semplice problema di conti. Infatti basta usare il principio di sovrapposizione per avere $E = \sum E_i$ con E_i sono i campi delle cariche puntiformi q_i in posizioni x_i (immagini e reale) con $E_i(\vec{x}) = \frac{kq_i\vec{x}}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^2}$ e $\sigma = \varepsilon_0 E$.

1. L'idea di base è di provare a mettere insieme i due risultati che abbiamo ottenuto per i problemi di cariche immagini con solo il piano e con solo la sfera (immaginando di continuare la semisfera dentro al conduttore, magari solo tratteggiandola).

Partiamo con il caso facile in cui la carica è posta in posizione $(d, 0, 0)$ e proviamo a mettere solo la carica immagine dovuta alla sfera, ossia $q_1 = -q \cdot \frac{a}{d}$ in posizione $(\frac{a^2}{d}, 0, 0)$ e guardiamo cosa otteniamo: la superficie della sfera (se immaginiamo di continuare la semisfera anche dentro al conduttore) è effettivamente a terra ma il piano assolutamente no!

Fino ad ora abbiamo considerato solo la presenza della sfera, adesso dimentichiamoci un attimo di questa e consideriamo la sola presenza del piano, mettendo le cariche immagini corrispondenti alle due cariche finora presenti (quella reale e quella immagine q_1 che è anch'essa a destra del piano).

Dobbiamo quindi aggiungere due cariche $q_2 = -q$ in posizione $(-d, 0, 0)$ e $q_3 = -q_1$ in posizione $(\frac{a^2}{d}, 0, 0)$.

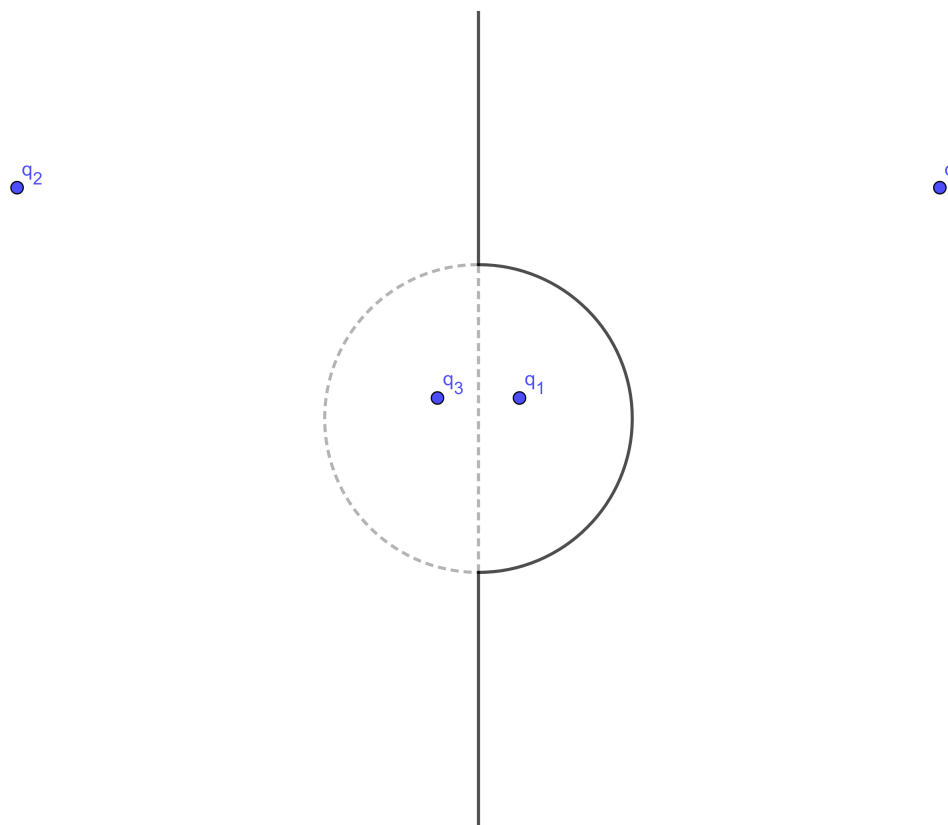
Convinciamoci di aver effettivamente ottenuto la soluzione: il piano è a terra in quanto il contributo di q è cancellato dal quello della sua immagine rispetto al piano q_2 mentre quello di q_1 è cancellato da q_3 ; la sfera è a terra in quanto il contributo di q è cancellato dal quello della sua immagine rispetto al piano q_1 mentre quello di q_3 è cancellato da q_2 (qui sto usando il principio di sovrapposizione lineare: divido il sistema fisico come due sistemi ciascuno con solo due cariche e dico che il potenziale totale è la somma dei potenziali nei due casi). Inoltre se avessimo tentato di fare lo stesso giochetto di prima non avremmo comunque ottenuto nulla di fatto: provando a fare la carica immagine di una qualsiasi delle quattro cariche presenti rispetto al piano o alla sfera otterrei solo un'altra delle quattro cariche (in particolare la sfera manda $q \rightarrow q_1$ $q_2 \rightarrow q_3$ e viceversa, mentre il piano manda $q \rightarrow q_2$ $q_1 \rightarrow q_3$ e viceversa).

Facciamo ora il caso con la carica in posizione generica. Il concetto è lo stesso: continuare a fare riflessioni e inversioni circolari⁴⁴ fino a che non ne posso fare più e verificare che ottengo effettivamente la soluzione.

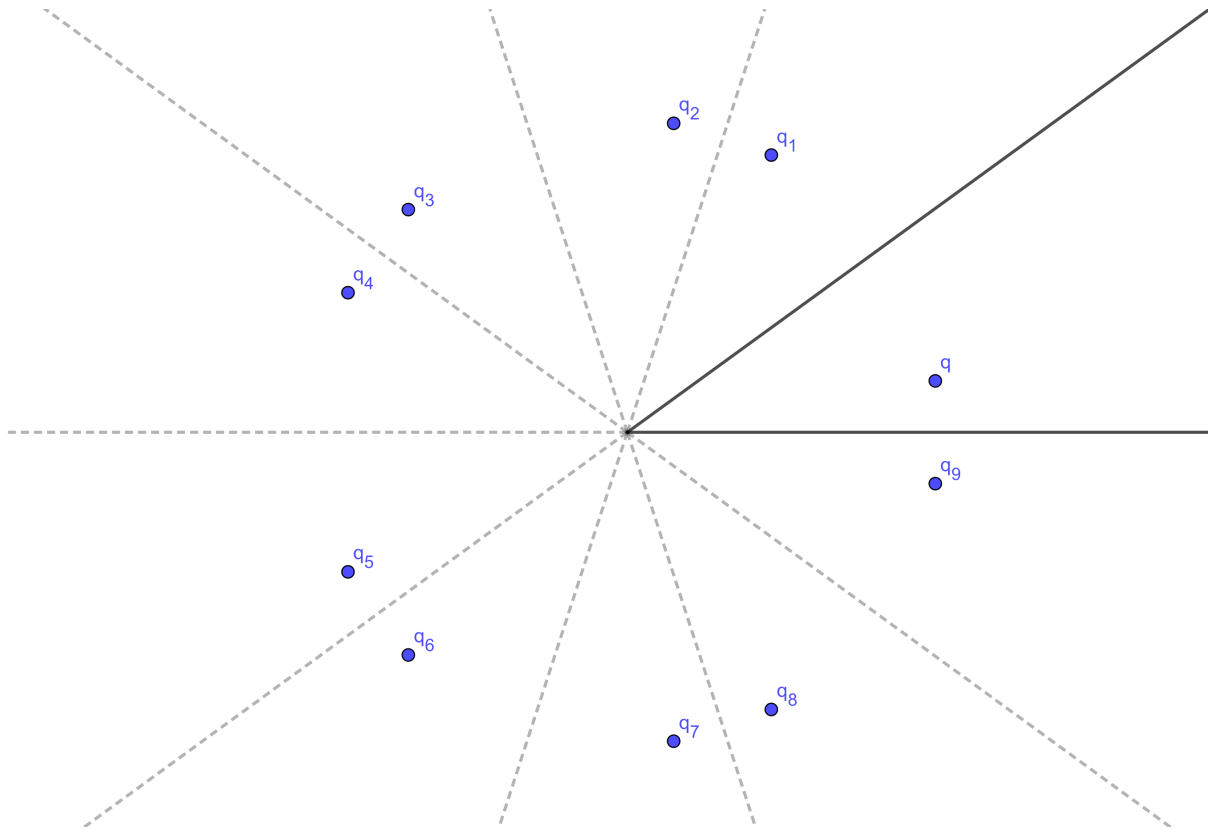
Inizio riflettendo la mia carica rispetto al piano, poi faccio l'inversione circolare di entrambe le cariche rispetto alla sfera. Un rapido controllo mi convince di aver finito.

Una piccola osservazione: in questo caso non ho problemi, ma in teoria dovrei sempre controllare che tutte le cariche immagine siano nella zona conduttrice.

⁴⁴É semplicemente un modo fancy per chiamare la trasformazione che data una carica mi dice dove si trova la sua carica immagine rispetto alla sfera. Qui potete trovare qualche informazione in più e convincervi di quanto ho appena detto



2. Come prima immagino di continuare i due semispazi che delimitano la superficie del conduttore e faccio le cariche immagine della mia carica rispetto ai due piani, ottenendo così $q_1 = q_2 = -q$ rispettivamente in posizioni $(-a, b, 0)$ e $(a, -b, 0)$ e riflettendole ciascuna rispetto all'altro piano (non quello usato per ottenerle a partire dalla carica originale) si ottiene $q_3 = q$ in posizione $(-a, -b, 0)$. Osservando che per ciascun piano esistono due coppie di cariche (diverse per i due piani) in cui il contributo di una carica è annullato da quello dell'altra carica della coppia, ci si convince di aver finito (sempre per principio di sovrapposizione lineare). Consideriamo ora il caso analogo in cui il conduttore occupa solo uno dei quattro quadranti e la carica è posta nel quadrante opposto. Saremmo tentati di fare lo stesso ragionamento di prima e ottenere le stesse quattro cariche disposte a rettangolo. Effettivamente questa soluzione rende la superficie del conduttore equipotenziale, tuttavia avrei due cariche immagine fuori dalla zona conduttrice e quindi è da scartare. Questo è un esempio di problema non risolvibile con questo metodo.
3. Immaginiamo di suddividere lo spazio "a spicchi di torta" ossia inserendo dei piani contenenti l'asse delle z e ciascuno ottenuto da quello precedente ruotandolo di α rispetto all'asse stesso e iterativamente la carica immagine q_{i+1} la si ottiene riflettendo la carica immagine q_i rispetto al piano successivo (osserviamo che questa operazione coincide con una rotazione di un angolo α). Il processo termina grazie all'ipotesi $\frac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{N}^+$ inoltre l'ipotesi che il denominatore sia pari serve perché ogni riflessione cambia il segno della carica e voglio che la prima carica immagine in senso orario abbia lo stesso segno della prima in senso antiorario (entrambi opposti alla carica reale perché ottenute con una sola riflessione a partire dalla reale, ossia rispetto ai piani effettivamente esistenti). Ancora una volta ci convinciamo di aver ottenuto il risultato perché i contributi delle cariche si cancellano a vicenda.
- Lo stesso metodo vale anche quando la carica è posta in una posizione generica (ma in questo caso l'ipotesi sul denominatore serve anche per non avere più di una carica per ogni



"fetta" di spazio)

4. Il primo istinto porterebbe a riflettere le cariche rispetto ai piani e continuare questo processo con le cariche immagini. Tuttavia, questa soluzione è problematica per vari motivi tra cui il fatto che dovrei calcolare il campo generato da un numero infinito di cariche puntiformi (che oltre a essere difficile, non so neanche se converge) e tutte nella zona fuori dal conduttore. Proviamo a guardare al problema come alla sovrapposizione di due casi più semplici: un semispazio conduttore nella zona $x \leq d$ davanti al quale c'è una carica q in posizione $(a, b, 0)$ e il problema simmetrico con il conduttore in $x \geq -d$ e carica q in $(-a, -b, 0)$.

Come abbiamo già visto, le soluzioni sono rispettivamente:

$$V_1 = \begin{cases} kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a-2d)^2 + (y-b)^2 + z^2}} \right) & \text{per } x \geq d \\ 0 & \text{per } x < d \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{cases} kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a+2d)^2 + (y+b)^2 + z^2}} \right) & \text{per } x \leq -d \\ 0 & \text{per } x > -d \end{cases}$$

che sommate danno come soluzione al problema originale:

$$V = \begin{cases} kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a-2d)^2 + (y-b)^2 + z^2}} \right) & \text{per } x \geq d \\ 0 & \text{per } -d < x < d \\ kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a+2d)^2 + (y+b)^2 + z^2}} \right) & \text{per } x \leq -d \end{cases}$$

Questa soluzione è valida perché soddisfa sia le leggi di Maxwell che le condizioni dati dalla presenza dei conduttori (che in realtà sono solo una conseguenza di Maxwell). Chiariamo

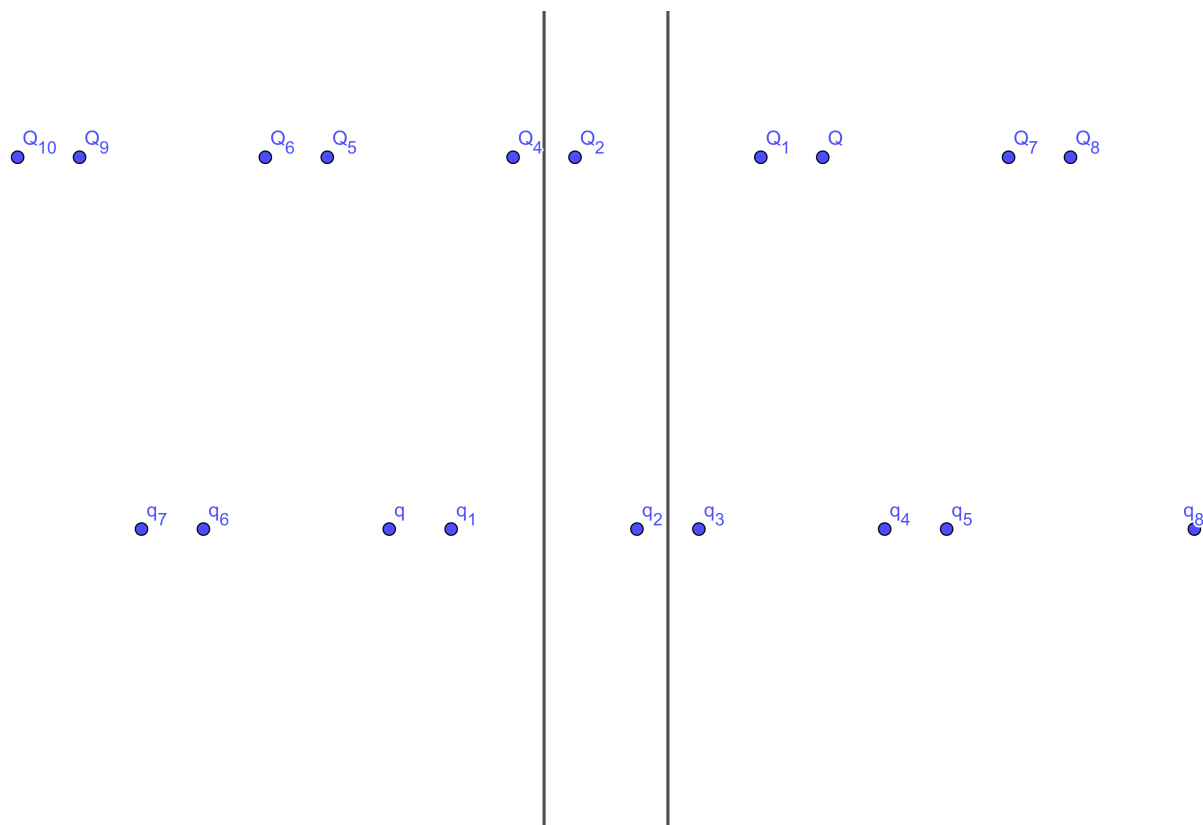


Figura 17: come NON risolvere il problema

qualche dubbio che potrebbe sorgere: perché la soluzione è legale anche se quando guardo il sistema nel complesso mi sembra ci siano delle cariche immagine in $(-a + 2d, b, 0)$ e $(a - 2d, -b, 0)$, ossia fuori dal conduttore? In realtà quando guardando l'espressione del potenziale noto che l'effetto della prima carica immagine "si sente" solo nella regione $x > d$ in cui però non c'è la carica stessa e viceversa l'effetto della seconda carica immagine "si sente" solo nella regione $x < -d$. Quindi non c'è nessun punto in cui facendo Gauss posso ottenere un assurdo (si veda pag TOT). Detto in un altro modo, la densità di carica che c'è su una delle due superfici schermo completamente la carica e quindi l'altra superficie è ignara della sua presenza.

Soluzione 4 Problema 5

Risolveremo il problema iterativamente, considerando all'inizio una soluzione grezza e migliorandone via via il grado di approssimazione. Inoltre, vale l'assunzione che la forza che una sfera esercita sull'altra all'ordine di approssimazione scelto è pari alla forza totale che agisce sulle cariche immagine posta dentro la sfera che subisce la forza, come sarà spiegato meglio in fondo a questa soluzione. Di seguito si farà riferimento alla figura (18).

Nell'approssimazione all'ordine costante, le due sfere possono essere approssimate come due cariche $+Q$ e $-Q$ centrate nei centri delle rispettive sfere a distanza d l'una dall'altra. La forza fra le due sfere, a questo ordine di approssimazione, vale $F = \frac{Q^2}{d^2}$ in modulo ed è diretta lungo la congiungente dei centri, con verso attrattivo.

Consideriamo ora la sfera di destra. La disposizione delle cariche nel centro delle due sfere non lascia il potenziale costante sulla superficie della sfera, come invece dovrebbe essere dato che la sfera è conduttrice. Per rendere il potenziale costante sulla superficie della sfera di destra, se supponiamo che l'unica carica esterna sia quella posta nel centro della sfera di sinistra, allora

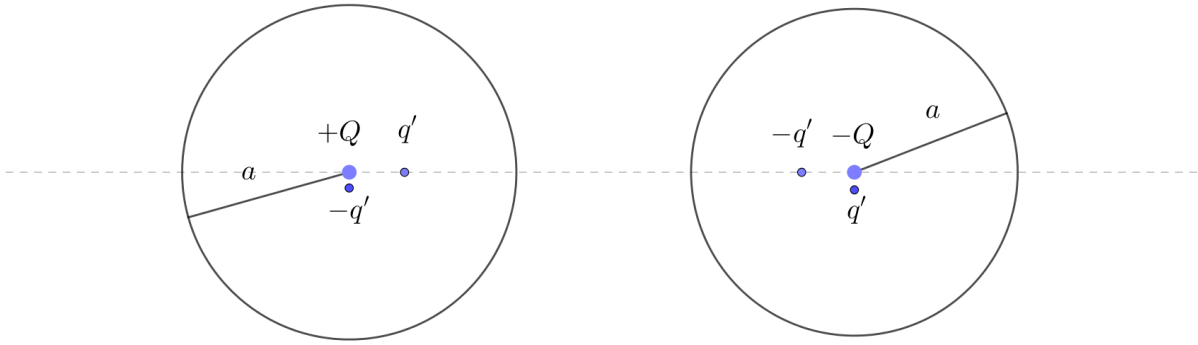


Figura 18: Immagine del problema 5.

richiamando il risultato ottenuto a lezione posizioneremmo due nuove cariche, $q_1 = q' = Q\frac{a}{d}$ e $q_2 = -q' = -Q\frac{a}{d}$, rispettivamente nel centro e a distanza $d' = \frac{a^2}{d}$ dal centro. Per la simmetria del problema, se avessimo fatto le stesse considerazioni per la sfera di sinistra, avremmo ottenuto altre due cariche $q'_1 = -q_1 = -q'$ e $q'_2 = -q_2 = q'$ posizionate nel centro della seconda sfera e a distanza $d' = \frac{a^2}{d}$. In questo caso, il modulo della forza vale

$$F = k_e \left(\frac{(Q - q')^2}{d^2} + 2 \frac{(Q - q')q'}{(d - d')^2} + \frac{q'^2}{(d - 2d')^2} \right) \quad (\text{E.5})$$

Se ora chiamiamo $x = \frac{a}{d}$, allora $q' = Qx$ e $d' = dx^2$, perciò, sviluppando i conti in (E.5) e sostituendo, possiamo scrivere:

$$F = \frac{Q^2}{d^2} \left((1 - x)^2 + 2 \frac{x(1 - x)}{(1 - x^2)^2} + \frac{x^2}{(1 - 2x^2)^2} \right) \quad (\text{E.6})$$

e ricordando lo sviluppo di Taylor $(1 - x^2)^{-2} \approx 1 + 2x^2$ si ha che (E.5) diventa

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{Q^2}{d^2} (1 - 2x + x^2 + 2x(1 + 2x^2) - 2x^2(1 + 2x^2) + x^2(1 + 4x^2)) \\ &\approx \frac{Q^2}{d^2} (1 + 4x^3) \end{aligned}$$

dove si è trascurato tutti i termini dello sviluppo di ordine superiore al terzo (dipendenti pertanto da x^3). Notiamo che in tal modo la forza è già oltre l'ordine richiesto, e che dunque non è più necessario andare avanti nell'approssimazione. Puntualizziamo che la forza totale fra le due forze non è esattamente quella in (E.5), e la formula ricavata è solo l'approssimazione dovuta alla prima iterazione del procedimento delle cariche immagine. Questo ci garantisce che approssimare le sfere come cariche puntiformi è un'approssimazione più che buona per la maggior parte dei problemi incontrati.

Perché la forza fra le sfere è proprio la forza fra le cariche immagine? Le cariche immagine sono un costrutto che realizzano il campo elettrico all'esterno dei conduttori. Ora, consideriamo una nuova configurazione, per cui abbiamo nello spazio che esiste solamente una delle due sfere conduttrici, per esempio quella di sinistra, ed al posto dell'altra poniamo solo le cariche immagini nelle stesse posizioni di figura (18), come mostrato in figura 19. A questo punto, dato che le cariche immagine della sfera rimanente sono un modo comodo per rappresentare una distribuzione

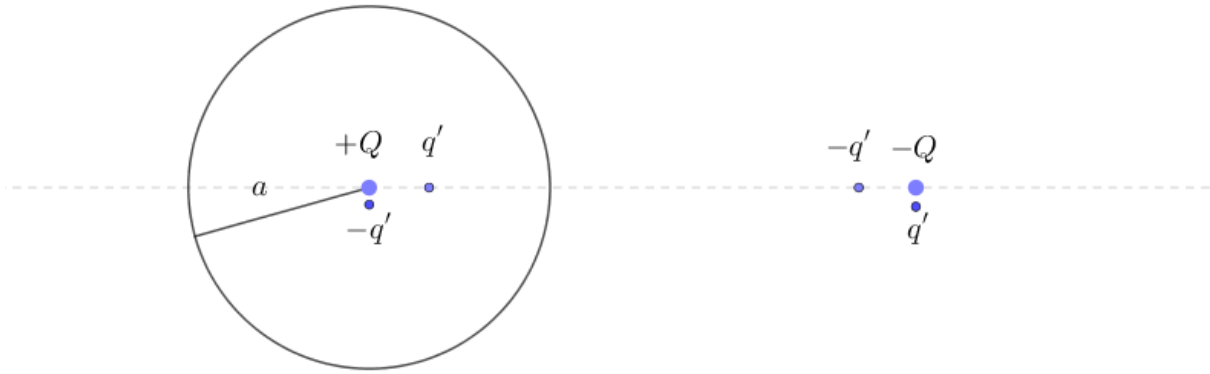


Figura 19: Problema 5, sostituzione della sfera conduttrice con le cariche immagine.

di carica che genera lo stesso campo elettrico che la sfera produce. Pertanto, la forza esercitata sulle cariche che sostituiscono l'altra sfera è proprio la forza di interazione fra queste e le cariche immagine. Per la terza legge di Newton (principio di azione e reazione) questa forza è anche la stessa che le cariche immagine esercitano sulla sfera. Sostituiamo nuovamente le cariche con la sfera conduttrice. Il campo elettrico che agisce sulla sfera di destra, nelle due configurazioni, è lo stesso, pertanto la forza che agisce sulla sfera *deve* essere la stessa. Del resto, si è supposto che il campo generato dalla sfera sia lo stesso, in prima approssimazione, di quello generato dalle cariche immagine, pertanto per la sfera di destra il fatto che ci siano cariche come in figura (19) o una sfera come in figura (18) è ininfluenza, l'importante è il campo elettrico che essa percepisce.

Soluzione 5 Problema 6 Iniziamo dimostrando l'hint. Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano e poniamo i due punti fissi in posizioni $(-a, 0)$ e $(a, 0)$, dunque, indicando con (x, y) le coordinate di P si ottiene $r = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ e $r' = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$. Elevando al quadrato entrambi i lati dell'equazione $r/r' = K$ e riarrangiando qualche termine si ha:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{1+K^2}{1-K^2}ax = -a^2$$

da cui, completando il quadrato, si ottiene l'equazione di una circonferenza di centro $(\frac{1+K^2}{1-K^2}a, 0)$ e raggio $\frac{2Ka}{|K^2-1|}$.

Passiamo ora al problema vero e proprio. Notando l'analogia con il problema precedente vorrei iniziare a mettere qualche carica immagine, ma vista la simmetria del problema sotto traslazioni lungo z opto per dei fili immagine paralleli all'asse z .

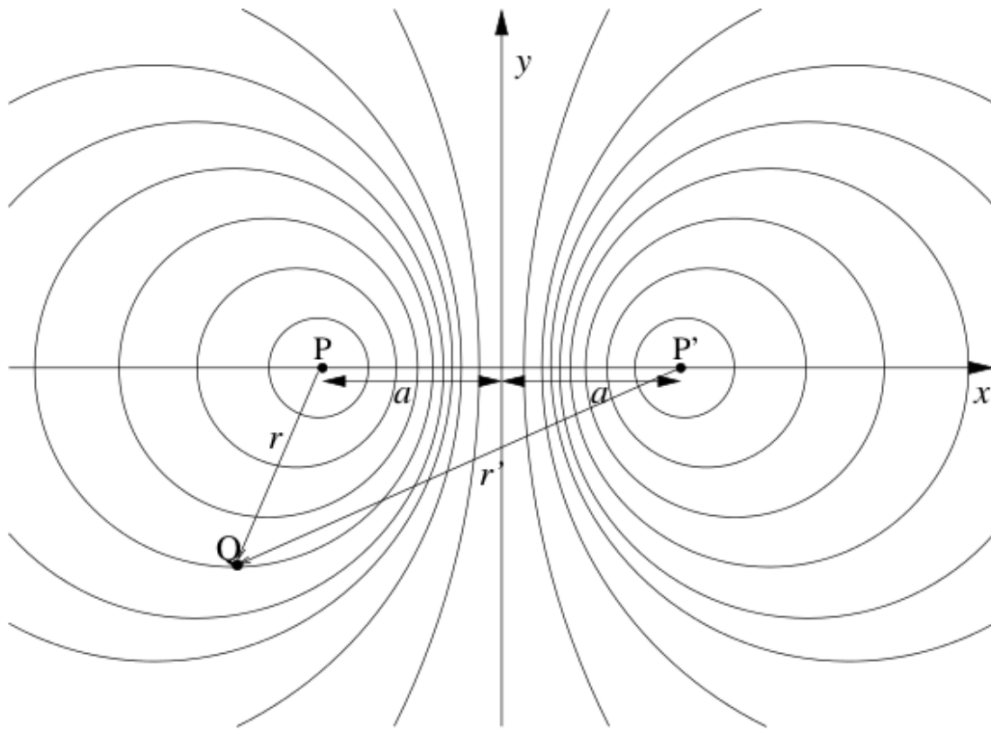
Da adesso in poi il problema è sostanzialmente diventato due dimensionale: devo solo dividere le coordinate x e y dei fili.

Iniziamo calcolando la forma del potenziale generato da due fili di densità di carica opposta λ e $-\lambda$ posti in posizioni $(-a, 0)$ e $(a, 0)$. Se per il teorema di Gauss il potenziale di un filo vale:

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

dove r è la distanza dal filo (sto implicitamente usando una sorta di sistema di coordinate cilindriche) e r_0 è una costante arbitraria, corrispondente alla distanza in cui abbiamo posto $V = 0$; allora il potenziale di due fili vale:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r'}{r'_0}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r'}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r'_0}{r_0}\right)$$



con r' la distanza dal secondo filo e r'_0 analoga a r_0 . A questo punto però possiamo imporre il termine $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r'_0}{r_0}\right)$ pari a zero, intanto r_0 e r'_0 sono costanti che posso scegliere arbitrariamente: sto semplicemente fissando lo zero del potenziale (che è infatti definito a meno di una costante) e in questo caso il luogo degli zeri coinciderà con il piano $x = 0$.

L'equazione che caratterizza le superfici equipotenziali diventa:

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r'}\right) = V \quad \equiv \quad \frac{r}{r'} = e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda}$$

che, usando il risultato dell'hint, ci fa concludere che le superfici equipotenziali sono cilindri di centro e raggio rispettivamente:

$$x_0 = \frac{e^{4\pi\epsilon_0 V/\lambda} + 1}{e^{4\pi\epsilon_0 V/\lambda} - 1} a, \quad y_0 = 0 \quad R = \frac{2e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda}}{e^{4\pi\epsilon_0 V/\lambda} - 1} a$$

Moltiplicando numeratore e denominatore di x_0 e R per $e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}$ si ottiene:

$$x_0 = \frac{e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda} + e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}}{e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda} - e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}} a, \quad y_0 = 0 \quad R = \frac{2}{e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda} - e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}} a$$

Che si può riscrivere in termine di funzioni iperboliche come:

$$x_0 = a \coth\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}\right) \quad R = \frac{a}{\sinh\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}\right)}$$

Ora dobbiamo solo scegliere λ e a in modo che il cilindro equipotenziale a potenziale $V_0/2$ abbia raggio R e sia centrato in $(d/2, 0)$ mentre quello a potenziale $-V_0/2$ abbia raggio R e sia centrato in $(-d/2, 0)$. Dividendo membro a membro l'espressione del centro per quella del raggio otteniamo:

$$\frac{d}{2R} = \cosh\left(\frac{\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\pi\epsilon_0 V_0}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{d}{2R}\right)}$$

e quindi sostituendo nell'espressione del raggio (sapendo che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ e quindi $\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$):

$$a = R\sqrt{(d/2R)^2 - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4R^2}$$

dove la radice è ben definita perché, per evitare compenetrazioni, $d > 2R$

Come già spiegato per il problema sopra, la forza (per unità di lunghezza) percepita da uno dei cilindri è la stessa che c'è tra i due fili immagine:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0(2a)} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0\sqrt{d^2 - 4R^2}}$$

Soluzione 6 Problema 7 Per il primo punto, il problema è analogo a quello di due pianeti che si schiantano nel loro centro di massa a causa della forza gravitazionale che attrae i due pianeti. Nel nostro caso, invece, le equazioni del moto si scriveranno come segue. Ponendoci nel sistema di riferimento con assi \hat{y} e \hat{z} sul piano e con l'asse \hat{x} ortogonale al piano e passante per la carica, la forza che agisce sulla carica a distanza x dal piano è esattamente quella che la carica immagine provocherebbe se fosse realmente esistente, ovvero

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4x^2}\hat{x} \quad (\text{E.7})$$

In questa configurazione, per il solo moto della carica a distanza x dal piano è come se ci fosse, posta nell'origine del nostro sistema di riferimento, una carica $q' = -\frac{q}{4}$, che appunto esercita una forza pari a quella di equazione E.7. Questa configurazione è praticamente identica a quella di un pianeta che ruota intorno ad un "sole" fermo nell'origine del sistema. L'analogo della legge di Keplero per questa configurazione è:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k_e q^2}{16\pi^2 m} \Rightarrow T = \pi\sqrt{\frac{16ma^3}{k_e q^2}} \quad (\text{E.8})$$

dove m è la massa della particella e a è il semiasse dell'orbita. Se supponiamo ora che l'orbita della particella è fortemente eccentrica, ovvero che il fuoco dell'ellisse intorno a cui orbita coincide praticamente con l'origine del nostro sistema di coordinate, allora possiamo scrivere che il tempo che la particella ci impiega ad arrivare nell'origine è pari a metà di tutto il periodo. Inoltre, dato che l'orbita è fortemente eccentrica, il semiasse principale dell'orbita sarà la semidistanza della carica dall'origine, dunque $a = \frac{1}{2}d$. Il tempo di caduta sul piano τ sarà pertanto

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{md^3}{2k_e q^2}} \quad (\text{E.9})$$

Consideriamo ora il problema delle tre palline⁴⁵.

In assenza di forze esterne, il centro di massa (CM) del sistema fatto dalle tre palline cariche rimane fermo (o si muove a velocità costante, che è equivalente). Perciò è un buon punto da scegliere come origine del sistema di riferimento di un sistema di coordinate, in cui \vec{r}_i sono le posizioni delle palline nel sistema di riferimento. Si chiamino le distanze d_i fra le palline come in figura.

La forza totale che agisce sulla prima particella è la somma delle forze elettrostatiche esercitate dalle altre due cariche:

$$\vec{F} = m_1 \vec{a}_1 = k_e \frac{Q_1 Q_2}{d_3^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + k_e \frac{Q_1 Q_3}{d_2^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \quad (\text{E.10})$$

⁴⁵Liberamente ispirato al problema 130 di [200puzzling].

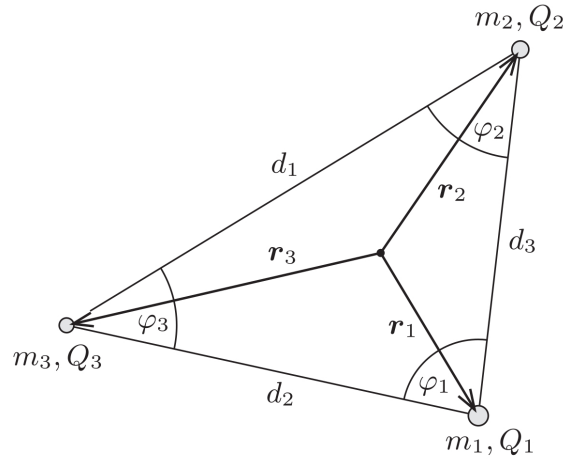


Figura 20: Figura del Problema 7, ispirato al Problema 130 di [200puzzling].

In conseguenza della scelta dell'origine nel centro di massa si ha che

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = 0$$

E sostituendo \vec{r}_3 in (E.10) dà l'equazione del moto per la prima pallina:

$$m_1 \vec{a}_1 = k_e Q_1 \left(\frac{Q_2}{d_3^3} + \frac{Q_3}{d_2^3} \left[\frac{m_1}{m_3} + 1 \right] \right) \vec{r}_1 + k_e Q_1 \left(\frac{Q_3 m_2}{d_2^3 m_3} + \frac{Q_2}{d_3^3} \right) \vec{r}_2 \quad (\text{E.11})$$

La condizione per cui la traiettoria della prima pallina sia una linea retta è che l'accelerazione deve essere allineata ad ogni istante al vettore posizione. Pertanto, il fattore che moltiplica \vec{r}_2 deve annullarsi, ovvero $Q_2 d_2^3 / m_2 = Q_3 d_3^3 / m_3$. Similmente, data la simmetria del problema se si scambiano gli indici in modo ciclico, si ottiene che

$$\frac{Q_1}{m_1} d_1^3 = \frac{Q_2}{m_2} d_2^3 = \frac{Q_3}{m_3} d_3^3 = \lambda \quad (\text{E.12})$$

Dove λ ha lo stesso valore per tutti e tre i corpi. Il valore di λ **non** è una costante del moto, ma cambia col tempo dato che la distanza fra le palline aumenta.

Se le uguaglianze in (E.12) sono soddisfatte, allora l'accelerazione di ogni pallina può esprimersi come (segue dai conti):

$$\vec{a}_i = k_e \frac{Q_1 Q_2 Q_3 (m_1 + m_2 + m_3)}{\lambda m_1 m_2 m_3} \vec{r}_i \quad (\text{E.13})$$

Perciò, ad ogni tempo fissato la proporzione del modulo dell'accelerazione è la stessa di quella dei moduli della posizione rispetto al CM. Di conseguenza, il rapporto delle distanze dall'origine delle tre palline rimane *costante nel tempo!*

Questi rapporti possono essere trovati dalla condizione (E.12 e dalla proporzione massa-carica delle tre palline data nel testo:

$$d_1 : d_2 : d_3 = \sqrt[3]{\frac{m_1}{Q_1}} : \sqrt[3]{\frac{m_2}{Q_2}} : \sqrt[3]{\frac{m_3}{Q_3}} = 1 : \frac{1}{\sqrt[3]{2}} : \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad (\text{E.14})$$

Con questo rapporto distanza e massa-carica, le tre palline si muovono in modo tale che in ogni momento il triangolo che formano è simile al triangolo iniziale, e usando il Teorema di Carnot so possono ricavare gli angoli del triangolo.

Soluzione 7 Problema 10 Detta Q la carica dell'anello, quando questo è molto lontano dalla sfera, il potenziale al suo centro è $V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \implies Q = 4\pi\epsilon_0 R V_0$. Quando dispongo l'anello come descritto nel testo, sulla sfera (che è connessa a terra) viene indotta una carica di polarizzazione. Il potenziale nel centro dell'anello, che ora appartiene alla sfera conduttrice, deve essere nullo. Sia $-q$ la carica totale sulla sfera (il segno meno è coerente con la scelta di $Q > 0$), voglio trovare un modo per utilizzare solamente le cariche totali su anello e sfera senza passare dalle loro distribuzioni superficiali. A questo scopo cerco un punto equidistante da tutti i punti della sfera e dell'anello. Il punto cercato è il centro della sfera, per principio di sovrapposizione il suo potenziale è somma di quello dato dalle cariche dell'anello e quello delle cariche della sfera. Il potenziale dato dalla carica sull'anello per equidistanza di tutti gli elementini di carica è $V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^2+R^2}}$, e come voluto dipende solo dalla carica totale sull'anello. Analogamente il potenziale al centro della sfera causato dalle cariche sulla sfera è $V_s = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$. La sfera è conduttrice dunque il suo potenziale al centro è uguale a quello sulla superficie, ovvero è nullo. Imponendo $V_a + V_s = 0$ si ottiene $q = 4\pi\epsilon_0 V_0 \frac{rR}{\sqrt{r^2+R^2}}$.

NOTA: questo problema si poteva risolvere anche con il metodo delle cariche immagine. Il risultato del problema di una carica davanti a una sfera è nota (vedere la lezione), disponendo le cariche immagine per ogni elemento di carica dell'anello ottengo un anello immagine interno alla sfera. Con qualche calcolo si giunge allo stesso risultato trovato tramite il principio di sovrapposizione.

Soluzione 8 Problema 11 Anzitutto notiamo che una configurazione di cariche in equilibrio, rimane in equilibrio se moltiplichiamo tutte le cariche per un fattore λ , e in tal caso per linearità campi elettrici e potenziali sono moltiplicati per λ . Vogliamo ottenere A al potenziale V mettendo una carica uguale su WLOG A, B e C. Chiamiamo il caso in cui si pone q su A configurazione 1, e configurazione 2 e 3 i casi in cui si pone $3q/4$ su rispettivamente A e B e su A e C. Vogliamo ottenere la nuova situazione di equilibrio per sovrapposizione delle vecchie configurazioni, sovrapponendo λ_1 volte la 1 e λ_2 volte la 2 e la 3 (che per simmetria devono contribuire in maniera uguale) abbiamo come condizioni:

$$q\lambda_1 + 2\frac{3}{4}q\lambda_2 = \frac{3}{4}q\lambda_2$$

$$\lambda_1 V + 2\lambda_2 V = V$$

Da cui si ottiene $\lambda_1 = -3/5$, $\lambda_2 = 4/5$, dunque la carica che bisogna mettere su A, B e C è $3q\lambda_2/4 = 3q/5$. Per il secondo punto si procede allo stesso modo aggiungendo anche la configurazione 4 in cui si dispone $3q/4$ su A e D. Come sopra le condizioni 2, 3, e 4 devono contribuire in modo uguale per simmetria, allora si hanno le condizioni:

$$q\lambda_1 + 3\frac{3}{4}q\lambda_2 = \frac{3}{4}q\lambda_2$$

$$\lambda_1 V + 3\lambda_2 V = V$$

Da cui si ottiene $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2/3$, dunque la carica da mettere su tutte le sfere è $3/4\lambda_2 q = q/2$

Soluzione 9 Problema 13 Ruotiamo gli assi in modo che uno dei due (diciamo quello delle ascisse) divida in due l'angolo sotteso dal dipolo (che chiameremo $d\theta$). Il campo elettrico è radiale e di modulo kQ/R^2 uniforme sulla guida.

Scomponiamo le due forze mostrate in figura 15 lungo le due componenti (immaginiamo per semplicità il dipolo \vec{p} effettivamente composto da due cariche di modulo q e distanti D , con ovviamente $p = qD$):

$$F_x = qE \cos(d\theta/2) - qE \cos(d\theta/2) = 0$$

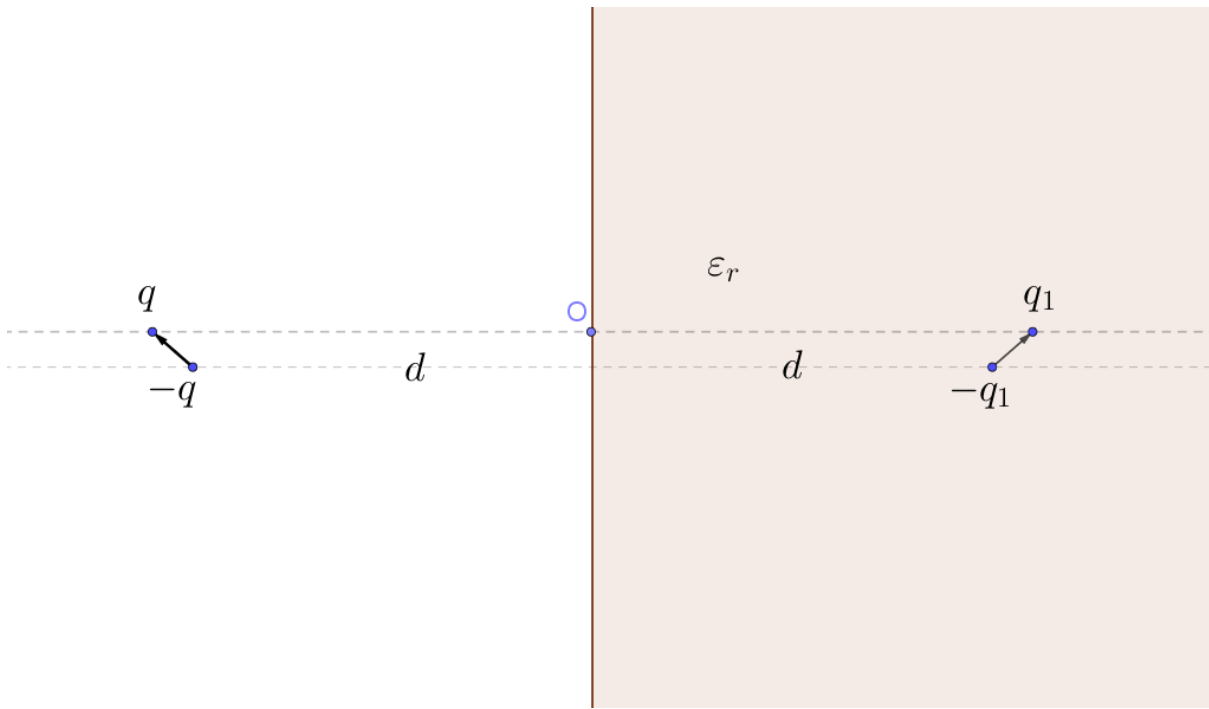


Figura 21: Dipolo davanti ad un dielettrico.

$$F_y = qE \sin(d\theta/2) + qE \sin(d\theta/2) = 2qE \sin(d\theta/2) \approx qEd\theta \approx \frac{qED}{R} = \frac{pQ}{R^3}$$

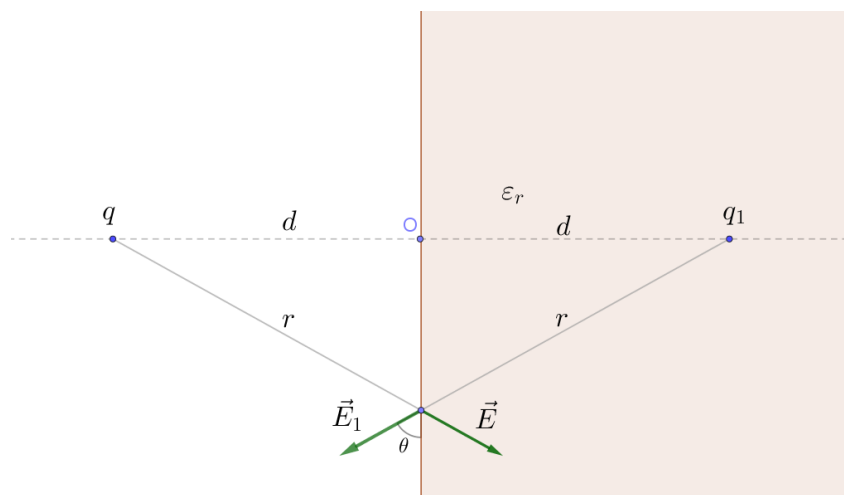
Quindi sembrerebbe quasi ci fosse una forza tutta diretta lungo la guida (e dunque non contrastabile con la reazione vincolare, che è solo radiale) che causerebbe un moto perpetuo! Tuttavia, sebbene la reazione vincolare è solo radiale, anche la forza elettrica lo è. Inoltre, per far mantenere il moto circolare serve anche un momento torcente che tiene il dipolo orientato tangenzialmente alla guida. Come si vede dalla figura il momento torcente dovuto a Q è in senso orario mentre la rotazione del dipolo dev'essere antioraria, quindi le forze vincolari devono essere più grandi delle forze esercitate da Q e in particolare saranno frenanti per il dipolo.

Soluzione 10 Problema 15 Utilizzando la conservatività del campo elettrostatico nella sua espressione globale, ovvero circuitazione nulla, intorno a un cammino rettangolare con due lati paralleli all'interfaccia otteniamo $E_1 = E_2$ (con E_i i campi elettrici nei due diversi dielettrici). Inoltre sappiamo che vale $E_i h = V = Q/C$, ma qual è questa C ?

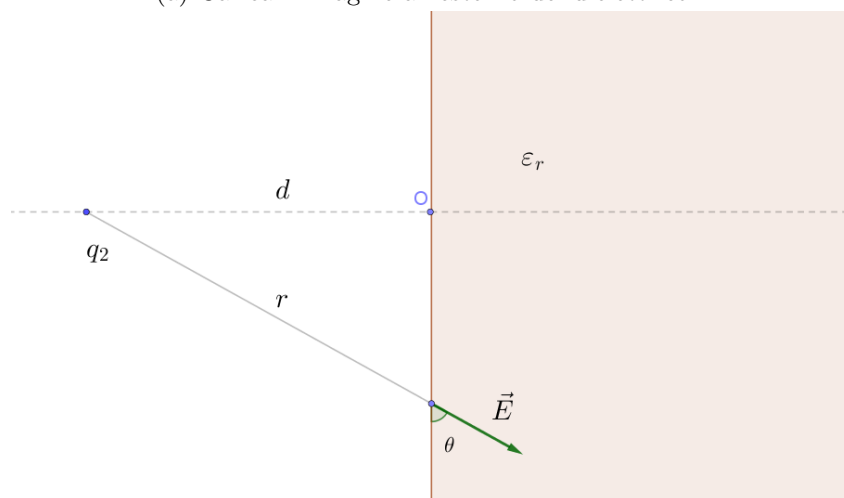
Si può facilmente osservare che, immaginando di vedere il condensatore come due condensatori appiccicati (dove la distinzione tra i due viene fatta in base al dielettrico che c'è tra le piastre), questi possono essere considerati come se fossero collegati in parallelo (infatti la d.d.p. è la stessa, visto che hanno le piastre in comune e queste sono equipotenziali). Quindi $C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 x a}{h} + \frac{\epsilon_2 a(a-x)}{h}$.

Per calcolare la forza sugli strati dielettrici utilizziamo un approccio energetico $F = -\frac{dU}{dx}$ dove $U = \frac{Q^2}{2C}$ ed è quindi interessante notare che il dielettrico con ϵ_i più alta viene tirato dentro, allo scopo di minimizzare l'energia del sistema.

Nel caso dei due strati consecutivi con superficie di separazione parallela alle facce del condensatore ci basta usare il teorema di Gauss che ci dice che la componente perpendicolare all'interfaccia di D si conserva e quindi $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$. Inoltre in questo caso abbiamo anche l'equazione $E_1 \frac{h}{2} + E_2 \frac{h}{2} = V = Q/C$ dove però C è data dalla serie di C_1 e C_2 e quindi $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.



(a) Carica immagine all'esterno del dielettrico.



(b) Carica immagine all'interno del dielettrico.

Figura 22: Carica immagine davanti ad un dielettrico.