

# Corpo rigido

Giovanni Antonucci\*, Luciano Xiccatto†

2 Febbraio 2026

## Sommario

Partendo dalle nozioni fondamentali del calcolo vettoriale, la prima parte della lezione analizza la dinamica del punto materiale, con particolare attenzione ai concetti di forza conservativa ed energia. Dopo una breve parentesi sui sistemi di riferimento non inerziali, si passa alla trattazione della dinamica dei sistemi di punti materiali. Vengono introdotti il centro di massa, le equazioni cardinali e i teoremi di König. Successivamente si tratta il corpo rigido, partendo dalla relazione tra le velocità di coppie di punti, per poi discutere quando è possibile usare la seconda equazione cardinale, soffermandosi sul concetto di centro istantaneo di rotazione. Infine si studia il corpo rigido in tre dimensioni, definendo il tensore di inerzia e ricavando le equazioni di Eulero.

---

\*giovanni.antonucci@sns.it

†luciano.xiccatto@sns.it

---

# — INDICE —

---

<b>1</b>	<b>Calcolo vettoriale</b>	<b>4</b>
1.1	Concetto di vettore . . . . .	4
1.1.1	Cos'è un vettore . . . . .	4
1.1.2	Rappresentazione di un vettore . . . . .	4
1.2	Operazioni tra vettori . . . . .	5
1.2.1	Addizione tra vettori e prodotto per scalare . . . . .	5
1.2.2	Prodotto scalare . . . . .	5
1.2.3	Prodotto vettoriale . . . . .	6
1.2.4	Due identità notevoli . . . . .	7
1.3	Derivate di vettori . . . . .	7
1.3.1	Singolo vettore . . . . .	7
1.3.2	Terna rotante di versori . . . . .	8
1.4	Sistemi di coordinate . . . . .	9
1.4.1	Coordinate cartesiane . . . . .	9
1.4.2	Coordinate cilindriche . . . . .	10
1.4.3	Coordinate sferiche . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Dinamica del punto materiale</b>	<b>13</b>
2.1	Modello . . . . .	13
2.2	Principi della dinamica . . . . .	13
2.3	Particella in moto unidimensionale . . . . .	14
2.4	Forze conservative nel caso generale . . . . .	15
2.5	Sistemi di riferimento non inerziali . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Sistemi di punti materiali</b>	<b>17</b>
3.1	Sistema di riferimento del centro di massa . . . . .	17
3.2	Prima equazione cardinale . . . . .	18
3.3	Seconda equazione cardinale . . . . .	18
3.4	Teoremi di König . . . . .	19
3.4.1	Primo teorema di König . . . . .	19
3.4.2	Secondo teorema di König . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Cinematica del corpo rigido</b>	<b>20</b>
4.1	Cos'è il corpo rigido? . . . . .	20
4.1.1	Definizione . . . . .	20
4.1.2	Gradi di libertà . . . . .	20
4.2	Atto di moto del corpo rigido. . . . .	21
4.2.1	Teorema di Chasles . . . . .	21
4.2.2	Espressione operativa . . . . .	21
4.3	Conseguenze. . . . .	22
4.3.1	Indipendenza di $\vec{\omega}$ . . . . .	22
4.3.2	Cambio del sistema del laboratorio . . . . .	22
4.3.3	Asse e Centro Istantaneo di Rotazione . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Dinamica del corpo rigido</b>	<b>23</b>
5.1	Equazioni della dinamica in funzione di $\vec{\omega}$ . . . . .	23
5.1.1	Momento angolare . . . . .	23
5.1.2	Energia cinetica . . . . .	25
5.1.3	Teorema di Huygens-Steiner . . . . .	25

5.1.4	Diagonalizzazione . . . . .	25
5.2	Asse di rotazione fisso. . . . .	26
5.2.1	Momento angolare . . . . .	26
5.2.2	Momento d'inerzia . . . . .	26
5.2.3	Passaggio a 2 dimensioni . . . . .	27
5.2.4	Equazioni del moto e dove utilizzarle . . . . .	28
5.2.5	Questione di poli . . . . .	28
5.3	Equazioni di Eulero. . . . .	28
5.3.1	Stabilità degli assi principali . . . . .	29
<b>A Il tensore d'inerzia</b>		<b>31</b>
A.1	Alcune proprietà. . . . .	31
A.2	Cos'è il tensore d'inerzia? . . . . .	31
<b>Esercizi</b>		<b>33</b>

## SEZ. 1 — CALCOLO VETTORIALE

## 1.1 Concetto di vettore

Un concetto fondamentale in fisica è quello di simmetria. Quando una cosa è simmetrica? Partiamo dalla nostra intuizione. Pensate all'oggetto più simmetrico che vi viene in mente: la sfera. Supponiamo di guardarla in due istanti di tempo diversi. Essa ci apparirà in entrambi esattamente identica e non sapremo affermare se sarà stata ruotata in qualche modo o meno. Questo ci fornisce un ottimo indizio sulla definizione che cerchiamo. In effetti, rifacendoci a Weyl, possiamo affermare che una cosa è simmetrica se, sottoposta a una determinata operazione, appare esattamente la stessa di prima. Per quanto ne sappiamo, dato un sistema di riferimento, le leggi della fisica (incluse le leggi di Newton, il fondamento di quanto guarderemo oggi), possiedono due proprietà:

- Simmetria per traslazione degli assi;
- Simmetria per rotazione degli assi.

In parole povere, le equazioni che descrivono un fenomeno in un determinato sistema di coordinate sono le stesse che si ottengono in un sistema di coordinate con diversa origine e orientamento degli assi. Il calcolo vettoriale è il meccanismo matematico che ci consente di trarre vantaggio da ciò: i vettori permettono di indicare con lo stesso simbolo uno stesso oggetto, che può essere visto da assi differenti.

§ 1.1.1. **Cos'è un vettore.** — Come anticipato, i vettori forniscono alla fisica un linguaggio naturale, dato che permettono di esprimere molte leggi in forma sintetica. La definizione di vettore in matematica, come elemento di un insieme dotato di due operazioni che rispettano certe proprietà (uno spazio vettoriale), non è particolarmente illuminante dal punto di vista fisico. In particolare, per i nostri scopi, un vettore è una rappresentazione matematica di un'entità fisica, ad esempio una forza o una velocità, che possiede tre caratteristiche: *lunghezza, direzione e verso*. Geometricamente, possiamo vedere un vettore come una freccia nello spazio tridimensionale.

§ 1.1.2. **Rappresentazione di un vettore.** — Per rappresentare in modo semplice un vettore abbiamo bisogno del concetto di indipendenza lineare. Studiamo in queste dispense il caso tridimensionale, notando che in dimensione più alta le considerazioni sono del tutto analoghe. I vettori  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  sono linearmente indipendenti se l'unica soluzione dell'equazione

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 = 0$$

è  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ .

L'insieme  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  è detto *base* ed ogni vettore può essere scritto in maniera unica come combinazione lineare di essi.

Se avessimo due rappresentazioni diverse dello stesso vettore  $\vec{v}$ ,

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 = b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 + b_3 \vec{v}_3$$

avremmo

$$(a_1 - b_1) \vec{v}_1 + (a_2 - b_2) \vec{v}_2 + (a_3 - b_3) \vec{v}_3 = 0$$

e, per l'indipendenza lineare, questo implica che  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ , e  $a_3 = b_3$ , assicurando così l'unicità della rappresentazione.

Osserviamo che nonostante la rappresentazione del vettore sia diversa a seconda della base utilizzata, il vettore in sé resta lo stesso. Ciò permette di ricavare delle importanti proprietà di

trasformazione dei vettori che sono accennate nella sezione degli esercizi.

Per comodità, scegliamo basi formate da vettori ortogonali, in modo da poter usare il teorema di Pitagora per calcolare la lunghezza dei vettori a partire dalla loro rappresentazione (approfondiremo più formalmente la definizione di lunghezza e ortogonalità nella prossima sezione, per ora vi basta avere l'idea intuitiva del loro significato).

Inoltre, per semplificare ulteriormente, possiamo imporre che i vettori della base abbiano tutti lunghezza unitaria. Un vettore di lunghezza unitaria viene chiamato *versore* e lo rappresentiamo con un cappellino sopra la lettera, al posto della freccia usuale. In particolare, ogni vettore nello spazio tridimensionale può essere scritto come

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

dove  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ , e  $\hat{z}$  sono i tre versori canonici, che corrispondono ai vettori  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Dunque, fissato un sistema di assi cartesiani con i tre versori canonici, possiamo ora identificare un vettore con una terna di numeri reali<sup>1</sup>.

## 1.2 Operazioni tra vettori

**§ 1.2.1. Addizione tra vettori e prodotto per scalare.** — Dati due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  che in un particolare sistema di coordinate si rappresentano come  $(v_x, v_y, v_z)$  e  $(w_x, w_y, w_z)$ , definiamo la loro somma  $\vec{v} + \vec{w}$  come il vettore rappresentato da  $(v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$ . Questa definizione ha un evidente significato geometrico: ponendo la *coda* di  $\vec{w}$  sulla *punta* di  $\vec{v}$ , il vettore  $\vec{v} + \vec{w}$  è quello che ha *coda* coincidente con quella di  $\vec{v}$  e *punta* coincidente con quella di  $\vec{w}$ . Quest'ultima descrizione ha il vantaggio di non contenere riferimenti a specifici assi coordinati.

Possiamo poi definire il prodotto per scalare: dati un numero  $\alpha$  e un vettore  $\vec{v}$  rappresentato da  $(v_x, v_y, v_z)$ , definiamo  $\alpha\vec{v}$  il vettore rappresentato da  $(\alpha v_x, \alpha v_y, \alpha v_z)$ . Geometricamente,  $\alpha\vec{v}$  è il vettore lungo  $\alpha$  volte  $\vec{v}$  e con uguali direzione e verso.

**§ 1.2.2. Prodotto scalare.** — Il prodotto scalare euclideo è una funzione che prende come input due vettori e restituisce uno scalare:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z.$$

Esso gode delle due seguenti proprietà:

- Simmetria:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

- Linearità:

$$(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \cdot \vec{v} = \lambda\vec{x} \cdot \vec{v} + \mu\vec{y} \cdot \vec{v}$$

Il prodotto scalare euclideo induce la nostra nozione intuitiva di lunghezza di un vettore, quella che soddisfa il teorema di Pitagora. Chiamiamo la lunghezza di un vettore *norma* (indicata con  $\|\vec{v}\|$ ) e la definiamo come

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

D'altronde, il prodotto scalare tra due vettori ha un'immediata interpretazione geometrica: si tratta del prodotto della lunghezza di uno per la proiezione su di esso dell'altro (con opportuno segno). Dimostriamo infatti quanto segue:

**Teorema:** *Siano  $\vec{v}, \vec{w}$  due vettori e sia  $\theta$  sia l'angolo tra i due, allora vale:*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta$$

<sup>1</sup>Attenzione, non ogni terna di numeri reali costituisce un vettore. Perchè essa costituisca un vettore, i tre numeri devono essere legati a un sistema di coordinate in modo che, se lo ruotiamo, essi si trasformino così da continuare a descrivere lo stesso oggetto.

Costruiamo un triangolo nello spazio tridimensionale con i lati  $\|\vec{w}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$ , e  $\|\vec{v} - \vec{w}\|$  e usiamo il teorema di Carnot, che afferma

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta$$

Ora, usando la definizione di norma, possiamo scrivere

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene la tesi.

Il prodotto scalare ci permette quindi di calcolare le componenti di un vettore, e in particolare di determinare il coseno dell'angolo tra due vettori, un'operazione molto utile in uno spazio tridimensionale, dove è difficile "vedere" le proiezioni a occhio. Inoltre abbiamo un criterio per stabilire l'ortogonalità tra due vettori scritti in componenti, in particolare vale

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$$

Così, per un vettore  $\vec{v}$  nello spazio tridimensionale, possiamo scrivere

$$\vec{v} = \hat{x}(\vec{v} \cdot \hat{x}) + \hat{y}(\vec{v} \cdot \hat{y}) + \hat{z}(\vec{v} \cdot \hat{z}) = \hat{x}v \cos\theta_1 + \hat{y}v \cos\theta_2 + \hat{z}v \cos\theta_3$$

Infine, dato che  $\|\vec{v}\| = v$ , vale la relazione

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$$

Questo ci dice che per determinare un vettore nello spazio euclideo abbiamo bisogno di sapere la sua lunghezza e l'angolo che forma con due dei tre versori cartesiani. Dunque, una direzione generica nello spazio tridimensionale è determinata da due parametri.

**§ 1.2.3. Prodotto vettoriale.** — Il prodotto vettoriale è una funzione che prende come input due vettori e restituisce in output un altro vettore<sup>2</sup>:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

Esso gode delle seguenti proprietà:

- Antisimmetria:  $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$
- Linearità:  $(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \times \vec{u} = \lambda\vec{v} \times \vec{u} + \mu\vec{w} \times \vec{u}$

In termini geometrici, si può verificare che il prodotto vettoriale tra due vettori è un vettore ortogonale a quelli di partenza, di verso definito dalla regola della mano destra e modulo dato da

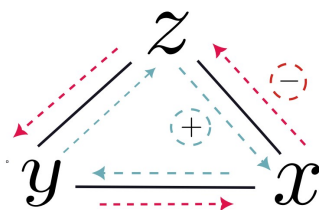
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\theta = \sqrt{a^2b^2 - (a \cdot b)^2}.$$

Osserviamo che il prodotto vettoriale ci fornisce un valido criterio per determinare quando due vettori sono paralleli:

$$\vec{v} \times \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w}$$

Risulta particolarmente utile saper calcolare rapidamente i prodotti vettoriali tra i versori cartesiani: il seguente diagramma aiuta la memorizzazione.

<sup>2</sup>In realtà l'output non è un vettore propriamente detto. Infatti, se applicate una riflessione al vostro sistema, questa modifica il segno dei due vettori di partenza ma non del loro prodotto vettoriale (un oggetto con questa proprietà è detto **pseudovettore**). Tuttavia, essendo questa differenza irrilevante ai nostri scopi, lo continueremo a chiamare impropriamente "vettore"



Una terna di versori a due a due ortogonali  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  è detta destrorsa se ha la stessa orientazione dei tre versori cartesiani standard, ovvero se vale  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ . Per determinare il segno del prodotto vettoriale tra due versori di una terna destrorsa si procede nel modo seguente: si prende il versore che sta a sinistra nel prodotto vettoriale e si procede sul triangolo ciclico nel verso del secondo versore (supposto diverso dal primo), l'output fornisce il terzo versore ed il segno è dato dalla seguente regola: se per andare dal versore di sinistra nel prodotto vettoriale a quello di destra mi muovo in verso orario sul triangolo allora il segno è positivo, altrimenti è negativo. Inoltre se i due versori sono identici, il che equivale a non spostarsi sul triangolo ciclico, il risultato è il vettore nullo.

**§ 1.2.4. Due identità notevoli.** — Concludiamo la sezione sulle operazioni tra vettori con un paio di identità che vi semplificheranno notevolmente la risoluzione di problemi in cui dovrete maneggiare vettori (si rimanda anche qui alla sezione degli esercizi per delle dirette applicazioni). La prima è la cosiddetta relazione **BAC -CAB** per il doppio prodotto vettoriale:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Osserviamo che a secondo membro si è ottenuta una combinazione lineare di  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ , coerente con il fatto che il prodotto vettoriale dei primi due vettori restituisce un vettore ortogonale ad entrambi, perciò iterando il processo con un terzo vettore si otterrà un vettore che giace nel piano generato dai due vettori di partenza.

La seconda identità esprime invece la ciclicità del prodotto misto: permette di permutare ciclicamente i tre elementi quando si calcola il prodotto scalare di un vettore con il prodotto vettoriale di altri due. In formule:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

Si noti che queste relazioni sono compatibili con il fatto che il prodotto vettoriale di due vettori è ortogonale ad essi.

### 1.3 Derivate di vettori

**§ 1.3.1. Singolo vettore.** — Supponiamo di avere un certo vettore  $\vec{v} = v\hat{v}$  nello spazio ad un certo istante  $t$ . Vogliamo capire come esprimere la variazione ad un istante successivo  $t + \delta t$  nel limite  $\delta t \rightarrow 0$ . Studiamo prima il caso più semplice in cui il vettore varia in modulo ma punta sempre nella stessa direzione. Sotto queste ipotesi possiamo dimenticarci della direzione e trattare la variazione del modulo del vettore come tratteremmo una variazione di una funzione qualsiasi al primo ordine, ovvero

$$\vec{v}(t + \delta t) \approx \vec{v}(t) + \dot{v}\delta t$$

che diventa esatta passando al limite  $\delta t \rightarrow 0$ . Otteniamo così

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\hat{v}.$$

Cosa succede se ora a variare è solo la direzione del vettore con modulo fissato? Per un vettore generico  $\vec{v}$  costante in modulo si ha

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 = \text{costante}$$

Derivando entrambi i membri rispetto al tempo si ha

$$v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} = 0$$

ovvero

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

Dunque,  $\vec{v}$  e la sua derivata sono ortogonali, per cui posso trovare un vettore  $\vec{\omega}$  perpendicolare ad entrambi tale che

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Osserviamo che, non limitandoci alla ricerca di un vettore perpendicolare a  $\vec{v}$ , esistono infiniti vettori che soddisfano la relazione scritta prima: è sufficiente sommare all' $\vec{\omega}$  trovato un qualunque multiplo di  $\vec{v}$ . Per comprendere più a fondo il significato di  $\vec{\omega}$ , disegniamo i vettori  $\vec{v}(t)$  e  $\vec{v}(t + \delta t)$ . Sia  $\delta\theta$  l'angolo compreso tra essi. Con semplici relazioni trigonometriche si ottiene

$$|\delta\vec{v}| = |\vec{v}(t + \delta t) - \vec{v}(t)| = |2\vec{v} \sin\left(\frac{\delta\theta}{2}\right)| \simeq |\vec{v}|\delta\theta$$

Dividiamo per  $\delta t$  e passiamo al limite per  $\delta t \rightarrow 0$ :

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = |\vec{v}| \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\theta}{\delta t}.$$

Il vettore appena menzionato è detto velocità angolare.

Analizziamo infine il caso in cui un vettore può modificare nel tempo sia il suo modulo che la sua direzione. Usiamo la regola di Leibniz per la derivata di un prodotto:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt}.$$

Poichè il modulo del versore non cambia (per definizione la sua lunghezza resta unitaria), usiamo l'argomentazione discussa sopra per concludere

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\hat{v} + v\vec{\omega} \times \hat{v} = \dot{v}\hat{v} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

**§ 1.3.2. Terna rotante di versori.** — Analizziamo in questa sezione il comportamento di una terna ortogonale destrorsa di versori mobile. Siano essi  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ . Per quanto prima mostrato, è lecito porre

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \hat{i}, \quad \frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega}_2 \times \hat{j}, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega}_3 \times \hat{k}.$$

Dimostriamo che è possibile soddisfare tutte le relazioni con un unico  $\vec{\omega}$ , che costituisce la scelta più naturale per descrivere la rotazione della terna (quindi non più ortogonale ai singoli versori). Chiamiamo  $\omega_{lm}$  ( $l, m = 1, 2, 3$ ) le componenti di  $\omega_l$  sulla terna data, per cui

$$\omega_l = \omega_{l1}\hat{i} + \omega_{l2}\hat{j} + \omega_{l3}\hat{k}.$$

Sostituendo nelle relazioni scritte prima e facendo uso di

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j},$$

si ottiene

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = -\omega_{12}\hat{k} + \omega_{13}\hat{j},$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = -\omega_{23}\hat{i} + \omega_{21}\hat{k},$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = -\omega_{31}\hat{j} + \omega_{32}\hat{i}.$$

L'ipotesi di perpendicolarità a ogni istante di tempo equivale a imporre

$$(\hat{i} + d\hat{i}) \cdot (\hat{j} + d\hat{j}) = (\hat{j} + d\hat{j}) \cdot (\hat{k} + d\hat{k}) = (\hat{i} + d\hat{i}) \cdot (\hat{k} + d\hat{k}) = 0.$$

Sviluppando la prima uguaglianza si ottiene

$$-\omega_{23}dt + \omega_{13}dt - \omega_{12}\omega_{21}(dt)^2 = 0,$$

che, trascurando il termine di ordine superiore, diventa

$$\omega_{23} = \omega_{13} = \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j}.$$

Con passaggi analoghi si può dimostrare che si deve avere

$$\omega_{12} = \omega_{32} = \frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i},$$

$$\omega_{21} = \omega_{31} = \frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k}.$$

Dunque,  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$  risultano determinati rispettivamente a meno delle componenti  $\omega_{11}\hat{i}, \omega_{22}\hat{j}, \omega_{33}\hat{k}$  (come ci si aspettava dalla sezione precedente). Non resta che scegliere  $\omega_{11} = \omega_{21} = \omega_{31}, \omega_{22} = \omega_{12} = \omega_{32}, \omega_{33} = \omega_{13} = \omega_{23}$  per definire un unico  $\vec{\omega}$ , diretto lungo l'asse istantaneo di rotazione, per la terna di versori.

$$\vec{\omega} = \left(\frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k}\right)\hat{i} + \left(\frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i}\right)\hat{j} + \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j}\right)\hat{k}$$

Abbiamo così ricavato le relazioni di Poisson:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}, \frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}, \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}.$$

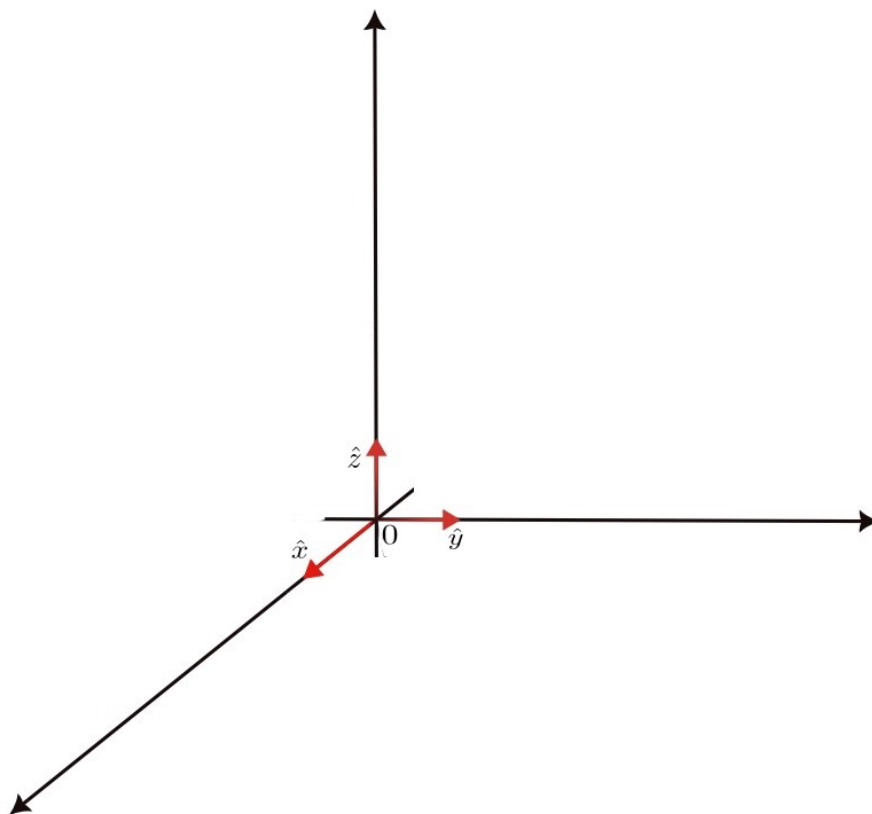
## 1.4 Sistemi di coordinate

**§ 1.4.1. Coordinate cartesiane.** — Le **coordinate cartesiane**  $(x, y, z)$  forniscono la descrizione più semplice e naturale dello spazio euclideo tridimensionale. A ogni punto dello spazio è associata una terna ordinata di numeri reali che rappresentano le sue distanze, con segno, dai tre piani coordinati. Il vettore posizione è dato da

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z},$$

dove  $\hat{x}, \hat{y}$  e  $\hat{z}$  sono i versori diretti lungo gli assi cartesiani.

A differenza dei casi cilindrico e sferico che analizzeremo, i versori cartesiani non dipendono dalla posizione del punto considerato, né dal tempo, e quindi non possiedono una velocità angolare associata.



Poiché i versori sono fissi, il calcolo delle derivate temporali del vettore posizione risulta particolarmente semplice. Derivando direttamente si ottengono:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z},$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} + \ddot{z} \hat{z}.$$

In coordinate cartesiane, dunque, le componenti della velocità e dell'accelerazione coincidono direttamente con le derivate temporali delle coordinate. Questa semplicità è il principale vantaggio del sistema cartesiano e lo rende particolarmente adatto allo studio di moti in cui non sono presenti simmetrie cilindriche o sferiche. Tuttavia, in molti problemi di meccanica, la scelta di sistemi di coordinate adattati alla simmetria del problema (come quelli cilindrico o sferico) consente una descrizione più naturale ed efficace del moto.

§ 1.4.2. **Coordinate cilindriche.** — Le **coordinate cilindriche**  $(r, \theta, z)$  sono legate alle coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  dalle relazioni

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

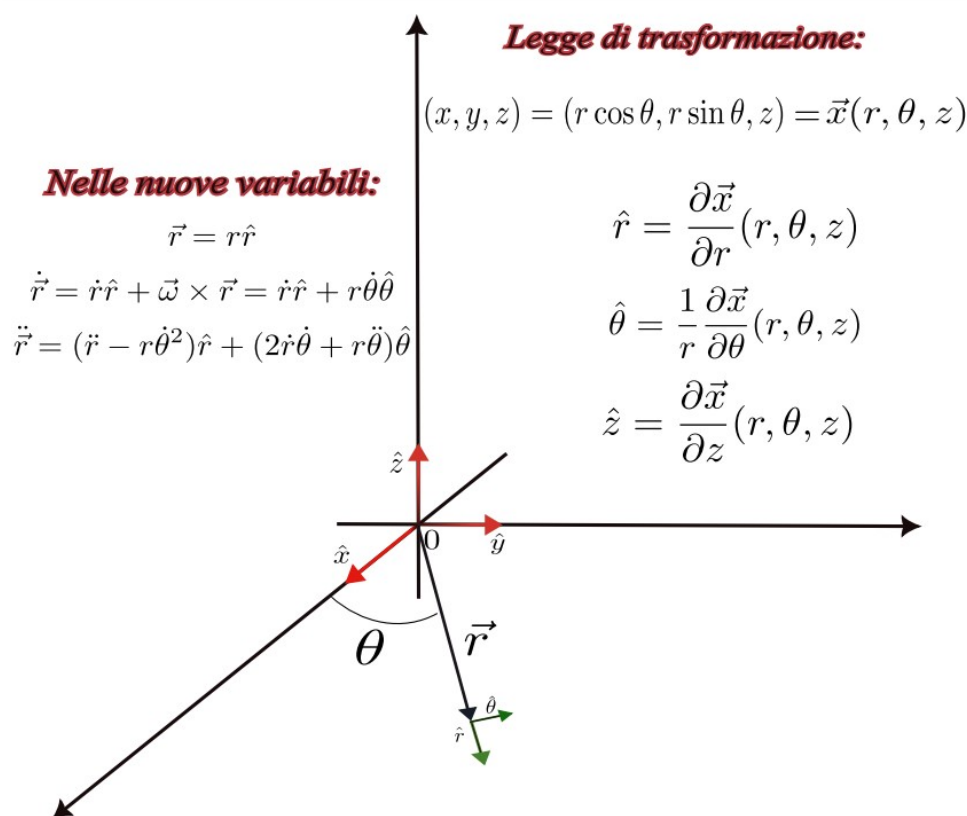
Esse definiscono una trasformazione che associa a ogni punto dello spazio, descritto nel sistema cartesiano  $(x, y, z)$ , una nuova terna di coordinate  $(r, \theta, z)$ . Il **vettore posizione** può essere scritto come

$$\vec{x} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} = r \hat{r} + z \hat{z},$$

dove  $\hat{r}$  è il versore radiale nel piano  $xy$ . Nella figura,  $\vec{r}$  rappresenta il vettore posizione nel piano, mentre  $\vec{x}$  indica il vettore posizione nello spazio tridimensionale.

I versori  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{z}$  si ottengono studiando come varia il vettore posizione  $\vec{x}$  al variare di ciascuna coordinata, mantenendo fisse le altre. In particolare:

$$\hat{r} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r}(r, \theta, z) = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y},$$



$$\hat{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}(r, \theta, z) = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y},$$

$$\hat{z} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial z}(r, \theta, z) = \hat{z}.$$

Il fattore  $1/r$  nella definizione di  $\hat{\theta}$  è necessario affinché il versore abbia modulo unitario.

La terna  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$  è una **terna destrorsa**: essa si ottiene dalla terna cartesiana mediante una rotazione di angolo  $\theta$  attorno all'asse  $z$ .

I versori  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  dipendono dal tempo attraverso l'angolo  $\theta(t)$ . Poiché essi rimangono sempre ortogonali e giacciono nel piano  $xy$ , la loro variazione nel tempo può essere descritta tramite una **velocità angolare** diretta lungo l'asse  $z$ :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{z}.$$

Questo approccio, basato sulla velocità angolare della terna, è particolarmente utile perché non fa uso esplicito di coordinate e sarà fondamentale nello studio dei sistemi di riferimento non inerziali.

Consideriamo ora il caso planare ( $z = \text{costante}$ ); l'estensione al caso tridimensionale è immediata, poiché il versore  $\hat{z}$  è fisso.

Il vettore posizione è

$$\vec{r} = r \hat{r}.$$

La velocità risulta

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}.$$

Derivando nuovamente, si ottiene l'accelerazione:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta}.$$

Con l'esperienza, queste espressioni diventeranno familiari e verranno ricordate quasi automaticamente.

§ 1.4.3. **Coordinate sferiche.** — Le **coordinate sferiche**  $(r, \theta, \phi)$  forniscono una parametrizzazione dello spazio euclideo tridimensionale tramite le relazioni

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

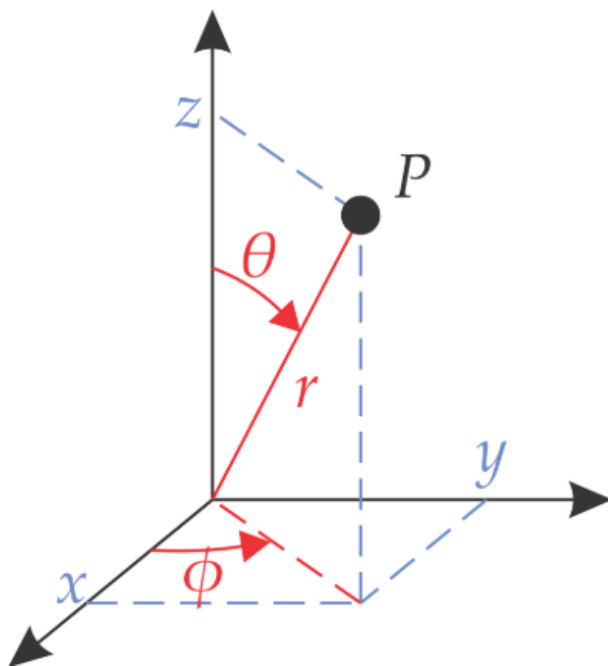
Esse descrivono la posizione di un punto mediante la distanza dall'origine  $r$ , l'angolo polare  $\theta$  (misurato dall'asse  $z$ ) e l'angolo azimutale  $\phi$  (misurato nel piano  $xy$ ).

Il **vettore posizione** può essere scritto in forma compatta come

$$\vec{r} = r \hat{r}.$$

I versori associati alle coordinate sferiche si ricavano in modo del tutto analogo a quanto visto per le coordinate cilindriche, studiando la variazione del vettore posizione al variare di ciascuna coordinata. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial r}(r, \theta, \phi) = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}, \\ \hat{\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}(r, \theta, \phi) = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}, \\ \hat{\phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi}(r, \theta, \phi) = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}.\end{aligned}$$



La terna  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  è una **terna destrorsa** e soddisfa

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}.$$

Nel triangolo ciclico utilizzato per determinare il segno del prodotto vettoriale, la terna cartesiana  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  viene quindi mappata nella terna sferica  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ .

Dall'osservazione geometrica della figura si deduce che il moto dei versori è descritto da due rotazioni infinitesime successive:

- una rotazione associata alla variazione dell'angolo  $\phi$ , attorno all'asse  $z$  (analogo a quanto avviene per i versori nel caso cilindrico);

- una rotazione associata alla variazione dell'angolo  $\theta$ , attorno al versore  $\hat{\phi}$ .

Poiché le rotazioni infinitesime commutano, le corrispondenti velocità angolari si sommano. La velocità angolare complessiva della terna è dunque

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{\phi} + \dot{\phi} \hat{z}.$$

Scrivendo il versore  $\hat{z}$  in coordinate sferiche,

$$\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta},$$

si ottiene

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{\phi} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{r} - \dot{\phi} \sin \theta \hat{\theta}.$$

Il vettore posizione è

$$\vec{r} = r \hat{r}.$$

La velocità si ricava come

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi}.$$

Il calcolo dell'accelerazione segue concettualmente gli stessi passaggi, ma richiede un numero maggiore di prodotti vettoriali. Il dettaglio dei conti è lasciato come esercizio. Il risultato finale è

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} \\ & + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} \\ & + (r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta) \hat{\phi}. \end{aligned}$$

Sebbene queste espressioni vengano utilizzate meno frequentemente rispetto a quelle in coordinate cilindriche, il loro calcolo costituisce un ottimo esercizio per sviluppare familiarità e padronanza nella manipolazione dei vettori, competenza fondamentale nello studio della meccanica.

## SEZ. 2 — DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE —

### 2.1 Modello

Il protagonista della prima parte della nostra trattazione è il punto materiale. Si definisce tale un corpo le cui dimensioni sono trascurabili rispetto al fenomeno che si sta studiando. A esso associamo una massa  $m$  e una posizione  $\vec{r}$ . Definiamo inoltre la sua quantità di moto

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$$

e il suo momento angolare rispetto a un polo  $O$  posizionato in  $r_{\vec{O}}$

$$\vec{L}_O = (\vec{r} - r_{\vec{O}}) \times \vec{p}.$$

### 2.2 Principi della dinamica

La meccanica classica si pone l'obiettivo di determinare cosa accade a un insieme di oggetti in una data situazione fisica. Per farlo, dobbiamo indagare quali sono le cause del moto e come agiscono. Ci sono due principali modi di farlo: attraverso le leggi di Newton o la *lagrangiana*. Seguiremo la prima strada. Pubblicate nel 1687 nei *Principia Mathematica*, esse affermano quanto segue:

**Primo principio:** *Ciascun corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme,*

salvo che sia costretto a mutare quello stato da una forza risultante non nulla applicata a esso.

**Secondo principio:** In un sistema di riferimento inerziale, la derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un corpo eguaglia la forza agente su di esso.

**Terzo principio:** Per ogni forza su un corpo, ce n'è un'altra uguale e opposta che agisce su un altro corpo.

Osserviamo che il primo principio fornisce una definizione di forza nulla e di sistema di riferimento inerziale, concetto necessario per passare al secondo.

Per quanto riguarda la notissima  $\vec{F} = m\vec{a}$ , il contenuto fisico principale è che esiste una grandezza  $\vec{F}$  che dà la stessa  $m\vec{a}$  quando applicata a particelle diverse. È questo che la differenzia da un'altra ipotetica definizione quale  $\vec{G} = m^2\vec{a}$ , che, seppur definita per tutte le particelle, non dà alcun vantaggio visto che non esistono grandezze che operano in questo modo. Una forza  $\vec{F}$  può dipendere esplicitamente da più parametri: solitamente questi sono la posizione  $\vec{r}$  della particella su cui agisce, la sua velocità  $\vec{v}$  e il tempo  $t$ . Tuttavia, ci limiteremo a trattare forze non dipendenti dal tempo e dalla velocità perchè solitamente non permettono di trovare quantità conservate non banali, molto utili per semplificare la risoluzione dei problemi. Ci concentreremo quindi su forze nella forma

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}).$$

Per forze di questo tipo, osserviamo che  $\vec{F} = m\vec{a}$  è invariante per inversione temporale. Infatti, presa una trasformazione tale che  $\vec{r}' = \vec{r}$  e  $t' = t_0 - t$ , si ha

$$\vec{F}(\vec{r}') = \vec{F}(\vec{r}) = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2}.$$

Dunque, vale il principio per cui se un sistema evolve da uno stato  $(\vec{r}_1, t = 0)$  a uno stato  $(\vec{r}_2, t)$  lungo una certa traiettoria, allora esso può percorrere la stessa traiettoria al contrario invertendo lo scorrere del tempo. Detto in altri termini, se facciamo partire il sistema dalla posizione  $\vec{r}_2$  con velocità  $\vec{v}' = -\vec{v}(\vec{r}_2, t)$ , questo arriverà dopo un tempo  $t' = t$  alla posizione  $\vec{r}_1$  con velocità  $\vec{v}'' = -\vec{v}(\vec{r}_1, 0)$ . Questo principio è l'analogo della reversibilità del cammino ottico che forse avete già incontrato in ottica geometrica.

La terza legge invece postula, come vedremo, la conservazione della quantità di moto totale per un sistema isolato.

### 2.3 Particella in moto unidimensionale

Consideriamo una particella puntiforme vincolata a muoversi lungo l'asse  $\hat{x}$ , sotto l'azione di una forza conservativa  $\vec{F} = F(x)\hat{x}$ . Tralasciando i casi patologici, è possibile trovare una funzione  $U(x)$  tale che

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}.$$

Esibiamo un esempio esplicito: dato un qualsiasi punto  $x_0$ , definiamo

$$U(x) = -\int_{x_0}^x F(x)dx.$$

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale,  $U(x)$  soddisferà la condizione richiesta. La scelta del simbolo  $U$  non è casuale: in seguito vedremo come essa coincida con la già familiare energia potenziale. Possiamo convincerci di ciò esaminando la Seconda Legge di Newton, scritta nel seguente modo:

$$m\dot{v} = -\frac{dU}{dx}.$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $v$ , si ottiene

$$m\dot{v}v = -\frac{dU}{dx}v = -\frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Possiamo ora riscrivere primo e secondo membro in termini di derivate rispetto al tempo di funzioni familiari:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{d}{dt}U(x).$$

Portando tutto a primo membro, si ottiene la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U(x)\right) = 0.$$

Energia ed energia potenziale sono definite a meno di una costante additiva: aggiungere una quantità  $U_0$  a entrambe non altererebbe la fisica del problema, visto che  $U(x)$  appare nelle equazioni del moto solo sotto l'azione di una derivata.

## 2.4 Forze conservative nel caso generale

Definiamo il lavoro di una forza tra due punti dello spazio in posizioni  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_B$  la seguente quantità:

$$L = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Per qualsiasi forza vale il **Teorema dell'energia cinetica**: *il lavoro netto  $\Delta W$  svolto dalle forze su un oggetto equivale alla sua variazione di energia cinetica  $\Delta K$* . Affinché sia possibile trovare un'energia che si conservi, tale lavoro deve dipendere soltanto dal punto di partenza e di arrivo dell'oggetto e non dal percorso seguito per arrivarvi o, equivalentemente, il lavoro svolto dalla forza lungo un cammino chiuso dev'essere nullo. Tutte le forze che soddisfano questa condizione per ogni possibile cammino sono dette forze conservative: esempi notevoli sono la forza elettrostatica e gravitazionale. Non sempre ciò accade: la forza d'attrito, ad esempio, non soddisfa tale condizione, dal momento che il lavoro svolto su un circuito chiuso è sempre strettamente negativo. Tramite strumenti matematici più avanzati è possibile dimostrare che, per forze conservative, la legge di conservazione dell'energia continua a valere anche in più dimensioni. Ciò significa che per una particella in moto in un campo di forze conservativo l'energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r})$$

sarà conservata, dove  $U(x, y, z)$  è una funzione della posizione tale che

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}\right)$$

Si può dimostrare che l'esistenza di una funzione  $U$  per cui quest'ultima condizione è verificata è equivalente a richiedere che la forza sia conservativa. Nel caso in cui lo sia, possiamo quindi "costruire" una possibile funzione  $U(\vec{r})$  scegliendo arbitrariamente un punto  $\vec{r}_0$  in cui  $U$  si annulla e ponendo per qualsiasi altro punto

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove l'integrale è svolto su un qualsiasi cammino con origine in  $\vec{r}_0$  e terminante in  $\vec{r}$ . L'arbitrarietà del punto di annullamento equivale alla possibilità di poter aggiungere ad  $U$  una qualsiasi costante senza alterare la fisica del problema.

Notiamo inoltre come l'energia potenziale per una coppia di particelle interagenti sia un unico termine associato alla coppia, e non uno per ciascuna particella. A questo punto è immediato generalizzare al caso di  $N$  particelle mutuamente interagenti, associando un termine  $U_{ij}$  alla coppia fatta dall' $i$ -esima e  $j$ -esima particella.

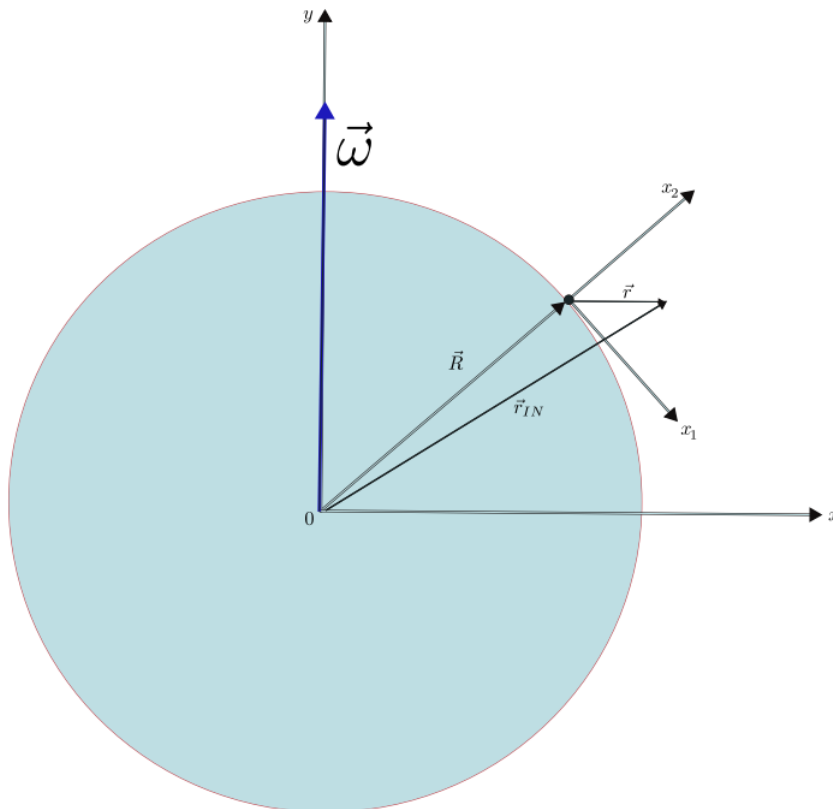
Nel caso più generale (particelle interagenti poste in un campo di forze conservative esterno) avremo quindi un'energia potenziale data dalla somma di termini  $U_i$  per ciascuna particella,

dovuti alla presenza del campo esterno, e termini  $U_{ij}$  dovuti all'interazione tra coppie: in assenza di forze non conservative, l'energia totale del sistema sarà data da

$$E = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{1 \leq i \leq N} U_i(\vec{r}_i) + \sum_{1 \leq j < i \leq N} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

## 2.5 Sistemi di riferimento non inerziali

Consideriamo il sistema di coordinate mobili mostrato in figura. Per fissare le idee, possiamo



pensare di star trattando le coordinate locali di un osservatore sulla Terra, la cui rotazione attorno al sistema inerziale è descritta da  $\vec{\omega}$ . Per costruzione abbiamo:

$$\vec{r}_{IN} = \vec{R} + \vec{r},$$

dove  $r_{IN}$  indica la posizione di un punto materiale rispetto al sistema di riferimento inerziale,  $\vec{r} = \sum_i x_i \hat{x}_i$  la posizione dello stesso punto rispetto al sistema di riferimento non inerziale e  $\vec{R}$  la posizione dell'origine del sistema rotante rispetto a quello inerziale. Calcoliamo le derivate dei vettori sfruttando quanto dimostrato nelle sezioni precedenti.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{IN} &= \dot{\vec{R}} + \sum_i \dot{x}_i \hat{x}_i + \sum_i x_i \vec{\omega} \times \hat{x}_i = \dot{\vec{R}} + \sum_i \dot{x}_i \hat{x}_i + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \ddot{\vec{r}}_{IN} &= \ddot{\vec{R}} + \sum_i \ddot{x}_i \hat{x}_i + \sum_i \vec{\omega} \times \dot{x}_i \hat{x}_i + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \sum_i \vec{\omega} \times \dot{x}_i \hat{x}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \ddot{\vec{R}} + \sum_i \ddot{x}_i \hat{x}_i + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

Moltiplicando entrambi i membri per la massa del punto materiale e applicando la seconda legge di Newton a primo membro (osserviamo che è possibile perchè si riferisce al sistema inerziale), otteniamo la seguente equazione:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{R}} + m \sum_i \ddot{x}_i \hat{x}_i + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Esplicitiamo l'accelerazione misurata nel sistema di riferimento non inerziale  $\vec{a}_{rel} = \sum_i \ddot{x}_i \hat{x}_i$ .

$$m\vec{a}_{rel} = \vec{F} + \vec{F}_t + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{az} + \vec{F}_{cent}$$

Abbiamo definito le cosiddette forze fittizie:

**Forza di trascinamento:**

$$\vec{F}_t = -m\ddot{\vec{R}}$$

**Forza di Coriolis:**

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

**Forza Azimutale:**

$$\vec{F}_{az} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

**Forza Centrifuga:**

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

L'osservatore nel sistema non inerziale deve considerare queste forze (fittizie perchè appunto non compaiono nei sistemi inerziali) per spiegare con il secondo principio il moto dei corpi rispetto alle sue coordinate.

## SEZ. 3 — SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

### 3.1 Sistema di riferimento del centro di massa

Nello studio di un sistema di punti materiali assume particolare rilievo il sistema del centro di massa, definito come segue:

$$\vec{R}_{cm} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

dove  $M = \sum_i m_i$ .

Studiare il moto del centro di massa equivale a studiare il moto di un punto materiale di massa  $M$  con delle proprietà utili che semplificano la trattazione di sistemi estesi. Tra queste, la più immediata si ottiene a partire dalla sua stessa definizione. Detto  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}_{cm}$ , si ha

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$$

e derivando rispetto al tempo

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0.$$

Dunque nel sistema del centro di massa la quantità di moto totale è nulla. Infine notiamo che dalla definizione di quantità di moto totale del sistema abbiamo che

$$\vec{P}_{tot} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{V}_{cm}.$$

Abbiamo quindi ottenuto che la quantità di moto del sistema è pari a quella associata a una particella di massa  $M$ , posta in corrispondenza del centro di massa.

### 3.2 Prima equazione cardinale

Dato un oggetto su cui la risultante delle forze è nulla, la Seconda Legge della Dinamica afferma che

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Di conseguenza,  $\vec{p}$  rimane costante nel moto successivo. La Legge di conservazione della quantità di moto costituisce una generalizzazione di questo fatto.

Supponiamo adesso che sulla  $i$ -esima particella del sistema agiscano una forza esterna netta  $\vec{F}_i^{\text{ext}}$  e una forza interna netta  $\sum_j \vec{F}_{ij}$  dovuta alle interazioni con le altre particelle. Si avrà

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \vec{F}_{ij}.$$

Sommando questa quantità per tutte le particelle del sistema, otteniamo

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i,j} \vec{F}_{ij}.$$

Riconosciamo che il lato sinistro è pari a  $\dot{\vec{P}}$ . Inoltre, dalla Terza Legge di Newton si ha  $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}$ , quindi  $\sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = \vec{0}$  dal momento che stiamo contando esattamente una volta sia la coppia ordinata  $(i, j)$  sia  $(j, i)$ . Di conseguenza

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Questa è proprio la prima equazione cardinale. Da ciò segue immediatamente che se la forza esterna netta è nulla,  $\vec{P}$  si conserva. Ciò vale anche se la risultante ha una sola (o due) componenti nulle: se  $\sum_i F_{i(x)}^{\text{ext}} = 0$  allora  $P_x$  sarà una costante del moto, indipendentemente da ciò che accade lungo gli altri due assi. Ciò vale non solo per sistemi di particelle ma anche per sistemi dove sono presenti corpi estesi, dal momento che anch'essi possono essere visti come costituiti da un insieme di parti infinitesime trattabili a loro volta come particelle puntiformi. Esse interagiranno tramite forze interne che complessivamente si annulleranno a coppie, dunque il risultato finale rimarrà valido anche in questo caso.

Di norma, nei casi in cui  $\vec{P}$  si conserva, è utile porsi nel sistema di riferimento che ha il c.d.m. come origine: questo sarà inerziale, dunque non necessiterà di aggiunta di forze apparenti, ed inoltre varranno le relazioni dimostrate nel paragrafo precedente:

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{0} \quad \sum_i m_i \vec{v}'_i = \vec{0}.$$

### 3.3 Seconda equazione cardinale

Vogliamo trovare un analogo "angolare" della conservazione della quantità di moto, che identificheremo nel momento angolare.

Partiamo dal momento angolare totale del sistema rispetto al polo  $O$ :

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{v}_i.$$

Considerando  $O$  come non necessariamente fisso, abbiamo:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \times \vec{v}_i + \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{a}_i.$$

Ora, ricordando che  $\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$  e che  $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$  è la forza totale agente sull' $i$ -esimo punto materiale, otteniamo:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_i - \vec{v}_O \times \vec{p}_{\text{tot}}.$$

Definendo  $\vec{\tau}_{/O} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i$  il *momento torcente totale* delle forze agenti sul sistema rispetto al polo  $O$ , ricaviamo:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{/O} - \vec{v}_O \times \vec{p}_{\text{tot}}.$$

Questa è la *Seconda Equazione Cardinale*. A differenza di quanto avviene per la prima, non è vero, in generale, che il momento torcente totale è uguale a quello applicato dalle forze esterne: i momenti torcenti interni possono non cancellarsi. Ciò avviene se si assume la forma forte della terza legge di Newton, la quale afferma che le forze interne tra due particelle sono uguali in modulo, opposte in direzione e allineate con la congiungente dei due centri ( $\vec{F}_{ij} \propto \vec{r}_i - \vec{r}_j$ ). Sotto questa ipotesi vale:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ext}/O} - \vec{v}_O \times M_{\text{tot}} \vec{v}_{\text{cm}}$$

Il secondo addendo al secondo membro è detto *termine di polo mobile*. Solitamente, è preferibile che non compaia nelle equazioni con cui si sta lavorando, in modo da avere una legge più semplice della forma

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$$

Osserviamo che tale termine si annulla nei seguenti casi:

1.  $\vec{v}_P = \vec{0}$ , il polo è fermo.
2.  $\vec{v}_{\text{cm}} = \vec{0}$ , il centro di massa è fisso rispetto al nostro sistema di riferimento.
3.  $\vec{v}_P$  e  $\vec{v}_{\text{cm}}$  sono paralleli, condizione soddisfatta, ad esempio, scegliendo il centro di massa come polo.

Ciascuna di queste situazioni presenta dei vantaggi, ed è solo facendo esercizi che si impara a capire di volta in volta in quale conviene mettersi per risolvere il problema.

### 3.4 Teoremi di König

Abbiamo visto in precedenza come la quantità di moto di un sistema di particelle sia la stessa che si otterrebbe se tutta la massa fosse concentrata in una particella posta nel centro di massa con una opportuna velocità. Delle relazioni simili esistono anche per l'energia cinetica e per il momento angolare, consentendoci di decomporli in una componente relativa al c.d.m. e una corrispondente al sistema visto come particella puntiforme. Lavoriamo con distribuzioni di massa discrete, ma i teoremi si possono dimostrare in modo del tutto analogo per distribuzioni continue.

**§ 3.4.1. Primo teorema di König.** — Il primo teorema ci permette di esprimere il momento angolare di un sistema come somma del momento angolare del centro di massa e momento angolare del sistema rispetto a centro di massa<sup>3</sup>. L'idea sta solo nell'usare la definizione di momento angolare e decomporre il moto sfruttando il centro di massa.

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{r}'_i + \vec{R}_{\text{cm}} - \vec{r}_O) \times (\vec{v}'_i + \vec{V}_{\text{cm}}) = \\ &= \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i + (\vec{R}_{\text{cm}} - \vec{r}_O) \times \sum_i m_i \vec{V}_{\text{cm}} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i + (\vec{R}_{\text{cm}} - \vec{r}_O) \times M \vec{V}_{\text{cm}} \end{aligned}$$

dove nella seconda riga si è usato  $\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$ . La prima quantità ottenuta è  $\vec{L}_{/cm}$  mentre la seconda è  $\vec{L}_{\text{cm}/O}$ . In particolare vale la seguente equazione:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{/cm} + \vec{L}_{\text{cm}/O}$$

<sup>3</sup>Sottolineiamo che con sistema del centro di massa si intende un sistema di riferimento con origine nel centro di massa e assi fissi rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

§ 3.4.2. **Secondo teorema di König.** — Il secondo teorema è l'analogo del primo applicato all'energia cinetica. Per dimostrarlo, procediamo in maniera simile a quanto fatto nel caso appena analizzato:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{v}'_i + \vec{V}_{cm}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (|\vec{v}'_i|^2 + 2\vec{v}'_i \cdot \vec{V}_{cm} + |\vec{V}_{cm}|^2) = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{v}'_i|^2 + \frac{1}{2} M |\vec{V}_{cm}|^2. \end{aligned}$$

Chiamando il primo termine  $K_{/cm}$  e il secondo  $K_{cm}$ , vale:

$$K = K_{/cm} + K_{cm}.$$

Il primo termine è l'energia cinetica del sistema rispetto al centro di massa, mentre il secondo è l'energia cinetica del centro di massa, preso come punto materiale nel suo moto.

## SEZ. 4 — CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO —

### 4.1 Cos'è il corpo rigido?

§ 4.1.1. **Definizione.** — In questa sezione introduciamo le caratteristiche di un nuovo modello di descrizione degli enti fisici: il corpo rigido. Il primo modello col quale si studia la dinamica degli enti fisici (primo in ordine di complessità di caratterizzazione della relativa dinamica) è il punto materiale: è possibile così trattare l'intero problema con un'unica legge oraria, come abbiamo visto precedentemente.

Tuttavia questo non è sempre possibile, e diventa a quel punto necessario studiare oggetti con distribuzioni di massa continue, che possono raggiungere un grado di complessità molto alto. Un modo per affrontare questo problema è quello di trattare la distribuzione di massa come un insieme di punti materiali (infiniti nel nostro limite), e studiarne la posizione di ciascuno.

Questo approccio, senza ulteriori limitazioni, lascia il problema estremamente complesso a causa del numero di *gradi di libertà* del sistema. Infatti, se nel nostro sistema ci sono  $N$  punti materiali, il sistema in 3 dimensioni è descritto da  $3N$  equazioni del moto, ed è interamente descritto da  $3N$  variabili indipendenti (banalmente le coordinate degli  $N$  punti materiali), il cui numero corrisponde ai gradi di libertà. Senza ulteriori limitazioni il sistema tende a diventare complesso molto in fretta.

Si definisce *corpo rigido* un sistema di punti materiali la cui distanza reciproca è invariante (costante nel tempo). In particolare, scelta una coppia qualsiasi di punti materiali ( $P, P'$ ) che compongono il corpo vale, ad un qualsiasi istante di tempo  $t$ :

$$\frac{d}{dt} |\vec{r}_P(t) - \vec{r}_{P'}(t)| = 0,$$

essendo  $\vec{r}_P(t)$  ed  $\vec{r}_{P'}(t)$  i vettori posizione di ciascuno dei due punti.

Un corpo di questo tipo è assolutamente indeformabile e la posizione del suo centro di massa permane inalterata rispetto ai punti materiali del sistema.

§ 4.1.2. **Gradi di libertà.** — Il modello è ovviamente più complesso (e quindi può descrivere un fenomeno con più precisione) del punto materiale, infatti solo per la posizione del centro di massa il sistema ha almeno 3 gradi di libertà; ma risulta estremamente più semplice di un sistema con  $N$  punti materiali senza altri vincoli. In particolare *a un corpo rigido in tre dimensioni sono associati 6 gradi di libertà.*

Possiamo ottenere questo risultato in maniera costruttiva. Si prende un punto a scelta del corpo

rigido, e questo avrà ad esso associato 3 gradi di libertà. Quando se ne aggiunge il secondo, esiste un vincolo sulla distanza tra i due punti, che è costante: quindi il secondo punto non potrà trovarsi in qualsiasi punto dello spazio, ma solo su una sfera centrata nel primo punto materiale e di raggio fissato pari alla distanza tra i due punti. I gradi di libertà corrispondenti sono quindi 2 (in coordinate sferiche si ha libertà su  $\theta$  e  $\phi$ ). Aggiungendo un terzo punto (scelto affinché non sia allineato con gli altri due), questo ha due vincoli, ovvero le due distanze con il primo e il secondo punto, quindi si trova nell'intersezione tra due sfere (chiaramente il vincolo deve essere realizzabile e rispetta la disuguaglianza triangolare). Quest'ultima è una circonferenza, a cui corrisponde quindi un altro grado di libertà. Per qualsiasi altro punto, questo si trova nell'intersezione tra tre sfere, che è sempre un punto e non aggiunge alcun grado di libertà.

La scelta delle 6 variabili indipendenti che descrivono il sistema non è scontata. Intuitivamente, è possibile scegliere tre coordinate di un punto del corpo rigido (molto spesso il centro di massa) e tre coordinate angolari che descrivono la rotazione del corpo attorno a quel punto, ma sarà utile anche effettuare altre scelte.

Notiamo infine che il passaggio al continuo dalla descrizione di  $N$  punti materiali è naturale sostituendo alle masse delle particelle in un volume  $dV = d^3r$  la quantità  $\rho d\vec{r}$ , dove  $\rho$  è la densità del corpo, e integrando sul volume  $V$  del corpo stesso:

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \rightarrow \int_V \rho(\vec{r}) d^3r.$$

## 4.2 Atto di moto del corpo rigido.

Nel sistema di riferimento inerziale  $S$  fisso, ovvero il sistema del laboratorio, in cui individuiamo l'origine  $O$  e una base di versori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ , ci sono più modi per descrivere il moto del corpo rigido. Per definizione, l'*atto di moto* è il campo vettoriale che ad ogni punto del sistema associa la sua velocità istantanea.

**§ 4.2.1. Teorema di Chasles.** — La comodità di lavorare con un corpo rigido è che, visto il numero molto piccolo di gradi di libertà, è possibile trovare una formula analitica per questo atto. Per fare questo bisogna assegnare i 6 gradi di libertà a un punto  $O'$  (tre gradi), a un asse passante per il punto (due gradi), e all'angolo di rotazione del corpo attorno a tale asse (un grado). Questo corrisponde a scegliere un sistema di riferimento non inerziale  $S'$  con origine  $O'$ : questo sistema è *solidale* con il moto del corpo rigido. Questa interpretazione porta al teorema di Chasles, di cui segue l'enunciato.

*Consideriamo un corpo rigido che si muove di un moto arbitrariamente complicato. Sia  $O'$  un punto del corpo. Ad ogni istante temporale il moto del corpo può essere scritto come somma di un moto di traslazione di  $O'$  rispetto all'origine del sistema di riferimento, e una rotazione intorno ad un qualche asse (che in generale può cambiare nel tempo) passante per  $O'$ .*

**§ 4.2.2. Espressione operativa.** — Questo teorema permette di definire, associato al moto di un corpo rigido, il vettore *velocità angolare*  $\vec{\omega}$  tale che, se  $P$  e  $Q$  sono due punti del corpo rigido,  $\vec{v}_P$  e  $\vec{v}_Q$  le loro velocità istantanee, e  $\vec{r}_P$ ,  $\vec{r}_Q$  i vettori posizione rispettivamente di  $P$  e  $Q$ , abbiamo

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P).$$

Possiamo ricavare questa formula utilizzando questa interpretazione dei due sistemi di riferimento. Infatti, come già ricavato, le velocità, spostandosi da un sistema di riferimento inerziale a uno non inerziale, trasformano nel seguente modo:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}),$$

dove  $\vec{R}$  è la distanza tra i due sistemi di riferimento,  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  le posizioni dell'oggetto nei due sistemi di riferimento,  $\vec{r} - \vec{R} = \vec{r}'$ , e  $\vec{v}$  e  $\vec{v}'$  le velocità. Ma avendo noi scelto  $S'$  come solidale al corpo rigido,  $\vec{v}' = 0$  per tutti i punti. Perciò:

$$\vec{v} = \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}).$$

Scrivendo questa formula per due punti arbitrari  $P$  e  $Q$ , e sottraendo membro a membro:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P).$$

Questa relazione è l'espressione pratica del teorema di Chasles: infatti il moto del punto  $Q$  è la somma vettoriale della traslazione di  $P$ , e di una rotazione attorno all'asse (istantaneo)  $\hat{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{\omega}$  con velocità angolare  $\omega$ .

### 4.3 Conseguenze.

Ci sono alcune importanti conseguenze di questo teorema.

§ 4.3.1. **Indipendenza di  $\vec{\omega}$ .** — Si nota in primo luogo che  $\vec{\omega}$  è unico e *non* dipende dal sistema di riferimento solidale scelto, anche se a priori fare questo ragionamento con due sistemi di riferimento di partenza diversi potrebbe portare a due  $\vec{\omega}$  distinti.

Fissando allora il sistema di riferimento in cui facciamo le misure, siano due sistemi di riferimento solidali diversi, uno che ha come origine del sistema di riferimento  $O$ , (ad esempio il suo centro di massa, una scelta tipica), con  $\vec{\omega}$  velocità angolare del sistema di riferimento solidale, e un altro con un'altra origine generica  $O'$ , solidale al corpo, e con velocità angolare del sistema solidale  $\vec{\omega}'$ . Sia  $P$  un punto qualsiasi del corpo rigido e  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  il raggio vettore di quest'ultimo rispetto ai due sistemi di riferimento solidali, e sia  $\vec{a}$  il raggio vettore di  $O'$  rispetto a  $O$  (essendo due punti del corpo rigido, la distanza tra di loro è costante). Siano infine  $v_P$ ,  $v_O$  e  $v_{O'}$  le velocità nel sistema di riferimento inerziale rispettivamente di  $P$ ,  $O$  e  $O'$ . Da queste definizioni, e dall'equazione dell'atto di moto usando i due sistemi di riferimento solidali distinti:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{a}, \\ \vec{v} &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{r}'), \\ \vec{v} &= \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'. \end{aligned}$$

Sfruttiamo ora il fatto che è possibile scrivere la velocità di  $O'$  usando l'atto di moto rispetto al sistema di riferimento solidale con  $O$  come origine, per cui:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'.$$

Eguagliando le due espressioni per  $\vec{v}$ :

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{r}' = 0,$$

questo vale per ogni  $\vec{r}'$ , per cui

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}'.$$

Questo ci mostra che la nostra definizione di velocità angolare del corpo rigido è ben posta.

§ 4.3.2. **Cambio del sistema del laboratorio.** — Notiamo poi che variando il sistema di riferimento  $S$  cambia anche  $\vec{\omega}$ : se infatti ci si sposta in un sistema di riferimento  $S'$ , che ruota di  $\vec{\Omega}$  rispetto a  $S$ , con gli stessi calcoli (18) si ricava che:

$$\vec{\omega}_{S'} = \vec{\omega}_S - \vec{\Omega}.$$

Ci si può convincere di questa formula analizzando il caso in cui le velocità angolari in questione siano parallele.

§ 4.3.3. **Asse e Centro Istantaneo di Rotazione.** — Infine, se in un istante fissato  $\vec{\omega}$  e  $\vec{v}_O$  sono perpendicolari, le velocità di tutti i punti del corpo sono perpendicolari a  $\vec{\omega}$ , e sono quindi tutti planari. Questo fa sì che sia possibile scegliere un vettore  $-\vec{a}$  per cui:

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times (-\vec{a}).$$

Questo corrisponde a dire che il punto  $O'$  identificato dal vettore  $\vec{a}$  rispetto a  $O$ , ha velocità nulla. Perciò per ogni punto del corpo rigido:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

Con  $\vec{r}'$  posizione del punto rispetto a  $O'$ , detto *Centro Istantaneo di Rotazione*, o *CIR*.

Possiamo ovviare al vincolo per cui  $\vec{\omega}$  e  $\vec{v}_O$  siano perpendicolari cambiando sistema di riferimento  $S'$  in cui  $\vec{\omega}$  non cambia e la componente parallela a  $\vec{\omega}$  di  $\vec{v}_O$  è nulla (il nuovo sistema si muove in moto rettilineo uniforme rispetto a quello originale, non è un moto rotazionale).

Notiamo inoltre che tutti i punti in cui la distanza tra essi e  $O'$  è parallela a  $\vec{\omega}$  hanno anch'essi velocità nulla: riusciamo a definire quindi un *Asse istantaneo di rotazione* (che non per forza contiene alcun punto del corpo rigido) attorno a cui il corpo ruota istantaneamente, senza alcuna traslazione.

Notiamo che quindi la scelta di del CIR in un problema 3-dimensionale non è univoca ma può essere fatta su un qualsiasi punto dell'intero asse istantaneo.

Vedremo che molte delle equazioni della dinamica del corpo rigido si possono applicare solo utilizzando come polo il centro di massa o il centro istantaneo di rotazione, per questo ha un ruolo molto importante nella risoluzione degli esercizi.

## SEZ. 5 — DINAMICA DEL CORPO RIGIDO —

### 5.1 Equazioni della dinamica in funzione di $\vec{\omega}$ .

Abbiamo già ricavato che per un sistema di punti materiali le equazioni cardinali sono:

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{/O} - \vec{v}_O \times \vec{p}_{\text{tot}}.$$

Vogliamo scrivere le seguenti equazioni affinché ci diano tutte le informazioni sul moto del corpo rigido. Possiamo notare per prima cosa che le forze interne devono rispettare la forma forte della terza legge di Newton, se così non fosse non potrebbe essere rispettato il vincolo per cui la distanza tra due punti è fissa (è facile convincersene prendendo un corpo fatto da soli due punti) In particolare la prima equazione contiene già esplicitamente la componente traslazionale del moto, infatti esplicita del tutto il moto del centro di massa come fosse un singolo punto materiale. Vogliamo estrarre il moto rotazionale dalla seconda equazione. Si vuole trovare un modo più conveniente di scrivere il momento angolare  $\vec{L}$  esplicitando in qualche trio di variabili il moto rotazionale del corpo.

§ 5.1.1. **Momento angolare.** — Fissiamo allora un certo polo, per ora generico,  $O$ , e scriviamo la definizione di  $\vec{L}$  (il sistema è discreto, il conto sarà analogo per un sistema continuo):

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{r}^{(\alpha)} \times \vec{p}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}^{(\alpha)} \times \vec{v}^{(\alpha)},$$

dove stiamo mantenendo la usuale convenzione sui simboli per la  $\alpha$ -esima particella. Sfruttiamo ora l'atto di moto del corpo rigido rispetto al polo  $O$ :

$$\vec{v}^{(\alpha)} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}^{(\alpha)},$$

$$\vec{L} = \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}^{(\alpha)} \right) \times \vec{v}_O + \sum_{\alpha} \left[ m_{\alpha} \vec{r}^{(\alpha)} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(\alpha)}) \right].$$

Ora, possiamo notare che il primo termine è banalmente nullo in due casi: da una parte se scegliamo come polo il centro di massa, la sommatoria a sinistra è per definizione la posizione del centro di massa rispetto al centro di massa, ovvero il vettore nullo. In alternativa, se il polo scelto è il CIR,  $\vec{v}_O = 0$ .

Ci vogliamo restringere a questi due casi, e vogliamo trattare il secondo termine dell'equazione. Sfruttiamo allora la relazione vettoriale introdotta precedentemente:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Applicandola:

$$\sum_{\alpha} \left[ m_{\alpha} \vec{r}^{(\alpha)} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(\alpha)}) \right] = \sum_{\alpha} \left[ m_{\alpha} \left( |\vec{r}^{(\alpha)}|^2 \vec{\omega} - \vec{r}^{(\alpha)} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}^{(\alpha)}) \right) \right],$$

scrivendo per una singola particella:

$$L_x = \omega_x m_{\alpha} (|\vec{r}^{(\alpha)}|^2 - r_x^{(\alpha)2}) - \omega_y m_{\alpha} r_x^{(\alpha)} r_y^{(\alpha)} - \omega_z m_{\alpha} r_x^{(\alpha)} r_z^{(\alpha)}.$$

Notando che le singole componenti di  $\vec{L}$  sono lineari nelle componenti di  $\vec{\omega}$  (i termini che moltiplicano gli  $\omega_i$  sono tutte costanti che dipendono dalla geometria e orientazione rispetto agli assi dell'oggetto) possiamo pensare di esprimere questa relazione come la moltiplicazione di una matrice 3x3 per un vettore: <sup>4</sup>

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}.$$

Infatti per definizione di questa operazione:

$$L_i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{I}_{ij} \omega_j,$$

che è l'esatta forma della relazione appena ricavata se:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m(r_y^2 + r_z^2) & -\sum_{\alpha} m r_x r_y & -\sum_{\alpha} m r_x r_z \\ -\sum_{\alpha} m r_x r_y & \sum_{\alpha} m(r_x^2 + r_z^2) & -\sum_{\alpha} m r_y r_z \\ -\sum_{\alpha} m r_x r_z & -\sum_{\alpha} m r_y r_z & \sum_{\alpha} m(r_x^2 + r_y^2) \end{pmatrix}.$$

Dove abbiamo per semplicità di scrittura omissso l'indice ( $\alpha$ ) nelle masse e nelle posizioni. Questo oggetto è detto *tensore d'inerzia*, e notiamo che dipende solamente da come è fatto il corpo stesso (il passaggio al continuo è analogo a quanto descritto precedentemente), e per ottenere il momento d'inerzia viene moltiplicato per  $\vec{\omega}$ , che determina interamente il moto rotatorio (sono 3 coordinate).

<sup>4</sup>Un risultato derivante dall'algebra lineare mostra che una funzione di un vettore, lineare in tutte le sue componenti, detta *applicazione lineare*, a base fissata è esprimibile come la moltiplicazione di una matrice, detta *associata*, per quel vettore.

§ 5.1.2. **Energia cinetica.** — Con calcoli analoghi (19), è possibile verificare che l'energia cinetica del corpo si può esprimere come:

$$K = K_t + K_r,$$

dove il primo è il termine di traslazione:

$$K_t = \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) v_O^2 = \frac{1}{2} M_{\text{tot}} v_O^2,$$

uguale al primo termine del secondo teorema di König, se  $O$  è il centro di massa. Il termine rotazionale invece:

$$K_r = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \mathbf{I}_{ij} \omega_i \omega_j.$$

§ 5.1.3. **Teorema di Huygens-Steiner.** — Notiamo che la definizione del tensore è basata sulla scelta del sistema di riferimento solidale, quindi dal polo  $O$  e dalla direzione degli assi. Vogliamo però trovare una relazione che ci permetta di effettuare una sola volta il calcolo esplicito del tensore, che può risultare tedioso, in quanto solitamente frutto del calcolo esplicito di un integrale, e spesso dipendente da alcune simmetrie spesso non più utilizzabili in caso di cambio di polo. Partendo quindi dal tensore posto nel centro di massa  $\mathbf{I}$ , vogliamo trovare  $\mathbf{I}'$ , con polo  $O'$ , dove  $\vec{a}$  è la posizione di quest'ultimo punto rispetto a  $O$ , senza ruotare gli assi (si tratterà quel problema successivamente). Scrivendo  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$ , e sfruttando il fatto che nel centro di massa:

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}^{(\alpha)} = 0,$$

si ricava con un semplice calcolo (20) che:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} + \mathbf{I}_A,$$

dove  $\mathbf{I}_A$  è il tensore di inerzia centrato in  $O'$  di un singolo punto materiale posto in  $O$  di massa  $M_{\text{tot}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$  (sulla falsa riga dei teoremi di König).

§ 5.1.4. **Diagonalizzazione.** — Notiamo che questo oggetto è chiaramente non invariante per rotazioni, quindi i singoli termini dipendono dalla scelta di sistema di riferimento che si fa, che può essere sia quello solidale che quello in cui si effettuano le misure. Si approfondirà meglio questo discorso successivamente (Appendice A).

Sfruttando un risultato avanzato di algebra lineare si può vedere che, fissato un tempo, esiste una scelta degli assi per cui il tensore è *diagonale*, ovvero si può scrivere nella seguente forma:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Nella pratica basta trovare questo sistema di riferimento a un tempo fissato, e poi rimanendo solidale al corpo, dal momento che la definizione deriva solo dalla geometria del corpo, il tensore rimarrà costante.

Inoltre è molto tipico che il sistema di riferimento naturale da prendere, quello che rispetta più simmetrie, è quello dove il tensore è diagonale. Questo dipende dalla forma dei termini non sulla diagonale: se ad esempio il corpo è simmetrico per riflessioni che mandano la coordinata  $r_x$  in  $-r_x$ , la somma  $\sum_{\alpha} m r_x r_y = -\sum_{\alpha} m r_x r_y = 0$ , perciò  $\mathbf{I}_{xy} = 0$ , e si lavora allo stesso modo coi termini misti.

Questo sistema è detto *degli assi principali*, e gli  $I_1, I_2, I_3$  sono detti momenti principali d'inerzia,

che a meno di permutazione sono unici dato un corpo. I versori di questo sistema sono tipicamente indicati con  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$  e  $\hat{x}_3$ .

Poiché questo trio di numeri definisce diverse proprietà del corpo, ne derivano alcune definizioni: un corpo rigido è detto *trottola sferica* se  $I_1 = I_2 = I_3$ , *trottola simmetrica* se  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , e *trottola assimetrica* se sono tutti e tre diversi.

Vedremo in seguito che l'esistenza di questi tre assi è una proprietà molto importante che determina in modo molto più semplice il moto del sistema.

## 5.2 Asse di rotazione fisso.

§ 5.2.1. **Momento angolare.** — Prima di trattare che tipo di oggetto è il tensore di inerzia, ci vogliamo limitare a problemi dove l'asse istantaneo di rotazione è fisso, o per lo meno ha direzione fissata. Dal punto di vista rotazionale, questa condizione è equivalente dal punto di vista rotazionale a un problema in 2 dimensioni. Infatti la seconda equazione cardinale riguarda solo una direzione, quella lungo la quale si trova  $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$ , e la componente del moto rotazionale è determinata dal solo parametro  $\omega$ , mentre, fissato un punto sull'asse fisso, questo può sottostare a un problema tridimensionale. Notiamo che:

$$\vec{L} \cdot \hat{n} = \sum_{i,j} \mathbf{I}_{ij} n_i n_j \omega = I_n \omega,$$

dove per definizione  $\sum_{i,j} \mathbf{I}_{ij} n_i n_j$  è il momento di inerzia lungo quell'asse. Se senza perdita di generalità  $\hat{n} = (0, 0, 1)$ :

$$I_n = \sum_{\alpha} m (r_x^2 + r_y^2).$$

§ 5.2.2. **Momento d'inerzia.** — Notiamo che in questa definizione importano le coordinate  $x$  e  $y$  dei punti e non quelle  $z$ : questo implica che non è rilevante di quanto si estenda il corpo in direzione dell'asse fisso finchè mantiene la stessa geometria.

Di conseguenza, i solidi di tipo "pancake", ossia quelli che non presentano estensione lungo la direzione  $z$ , possiedono lo stesso momento d'inerzia di un solido che ha la medesima forma nel piano  $xy$  ma che si estende lungo  $z$ , con la stessa massa.

Un esempio significativo di questo risultato è l'equivalenza del momento d'inerzia tra un disco piano e un cilindro avente asse di rotazione fisso e coincidente con l'asse di simmetria del cilindro. Si può ricavare poi un caso particolare del teorema di Huygens-Steiner, nel caso 2-dimensionale, dove lo spostamento rispetto al centro di massa è planare. Questo è una banale conseguenza del teorema, ma si può ricavare con una dimostrazione più semplice, senza dover passare per il formalismo matriciale. Infatti, indicando con  $(x, y)$  le coordinate di un elemento di massa  $dm$  rispetto all'origine  $O$ , centro di massa, e con  $(x', y')$  le coordinate dello stesso elemento rispetto all'origine  $O'$ . Per una traslazione del sistema di riferimento vale:

$$x' = x - a_x, \quad y' = y - a_y,$$

dove  $\vec{d} = (d_x, d_y)$ . Il momento d'inerzia rispetto all'asse  $O'$  è definito come:

$$I_{O'} = \int (x'^2 + y'^2) dm.$$

Sostituendo le espressioni di  $x'$  e  $y'$  si ottiene:

$$I_{O'} = \int (x^2 + y^2) dm - 2a_x \int x dm - 2a_y \int y dm + (a_x^2 + a_y^2) \int dm.$$

Valgono le relazioni:

$$\int x dm = 0, \quad \int y dm = 0,$$

poiché sono la definizione della coordinata  $x$  e  $y$  del centro di massa, che nel sistema del centro di massa sono 0; mentre:

$$\int dm = M.$$

Segue quindi:

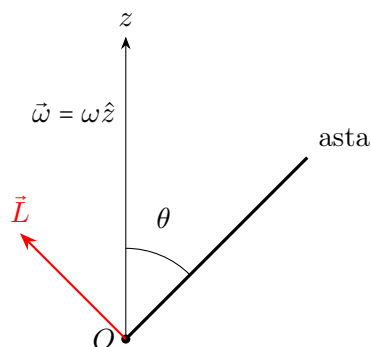
$$I_{O'} = \int (x^2 + y^2) dm + M(d_x^2 + d_y^2).$$

Da cui la forma più nota del teorema:

$$I_{O'} = I_O + Md^2.$$

### § 5.2.3. Passaggio a 2 dimensioni. —

Notiamo che seppur  $\vec{\omega}$  sia fisso, questo non si può dire per il momento angolare. Basti considerare un sistema ad asse fisso con un'asta rotante che ha un angolo  $\theta = \frac{\pi}{4}$  con  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ , come nella figura a destra: notiamo che il momento angolare in direzione dell'asta, che è un asse principale, è proporzionale a  $\int \rho(\vec{r})(r_2^2 + r_3^2) d\vec{r} = 0$ , dunque  $\vec{L}$  è sempre perpendicolare all'asta, e anche se  $\vec{\omega}$  resta costante,  $\vec{L}$  ruota (il vincolo produce un momento torcente sul piano perpendicolare al vincolo).



Scrivendo la derivata della  $i$ -esima componente (del sistema in cui si effettuano le misure) del momento angolare:

$$\dot{L}_i = \sum_j [\dot{\mathbf{I}}_{ij} \omega_j + \mathbf{I}_{ij} \dot{\omega}_j].$$

Notiamo che questa derivata lungo la componente normale  $\hat{n}$  ha solo il termine con  $\dot{\omega}$ , poiché  $I_n$  dipende solo dalla distanza dall'asse dei punti materiali, costante in una rotazione. Questo vuol dire che lungo  $\hat{n}$  vale l'equazione del moto:

$$\dot{L}_n = I_n \dot{\omega} = (\vec{\tau}_{O,\text{ext}} - \vec{v}_O \times \vec{p}_{\text{tot}}) \cdot \hat{n}$$

Il problema è che lo stesso non si può dire delle altre componenti, poiché il vincolo deve produrre delle forze e dei momenti non banali per mantenere la direzione di  $\vec{\omega}$  fissa. Questo rende non banale la questione di trasformare un sistema ad asse fisso in uno 2-dimensionale.

Questo è però possibile se lungo  $\hat{n}$  si trova uno degli assi principali (senza perdita di generalità sia  $I_n = I_3$ ). Quindi gli altri due assi principali sono sul piano, e l'unica componente di  $\vec{L}$  non nulla è proprio quella lungo  $\hat{n}$ , poiché:

$$|L_{\text{planare}}| = \sqrt{(I_1 \omega_1)^2 + (I_2 \omega_2)^2} = 0,$$

dal momento che  $\vec{\omega} = \omega \hat{x}_3$ .

Quindi  $L_{\text{planare}}$  in assenza di momenti lungo il piano tende a rimanere nulla, dal momento che  $\sum_j \dot{\mathbf{I}}_{ij} \omega_j = 0$ , visto che le uniche  $\omega_j$  nella somma sono quelle planari, che sono nulle (un altro modo di considerare la cosa è notare come  $L_{\text{planare}}$  tenda a ruotare, ma ruotare un vettore nullo lo lascia invariato), e il vincolo per mantenere  $\vec{\omega}$  lungo  $\hat{n}$  non deve fare nessuna forza o momento vincolare, quindi è in realtà superfluo.

In queste condizioni, in presenza di momenti esterni solo lungo  $\hat{n}$ , è possibile disaccoppiare il problema del moto traslazionale (del centro di massa ad esempio) lungo  $\hat{n}$ , da un problema 2-dimensionale, che combina il moto rotazionale e il moto traslazionale lungo il piano perpendicolare a  $\hat{n}$  (che è banale se l'asse è fisso, ma abbiamo visto che la condizione di  $\vec{\omega}$  a direzione costante è una condizione che non richiede vincoli, quindi è possibile studiare anche moti come quello di puro rotolamento, dove l'asse istantaneo di rotazione non è fisso ma semplicemente mantiene la sua direzione col tempo).

§ 5.2.4. **Equazioni del moto e dove utilizzarle.** — Nel problema 2-dimensionale ci sono quindi 3 gradi di libertà, due traslazionali e uno rotazionale, quindi 3 equazioni del moto:

$$\begin{cases} M_{\text{tot}}\ddot{x}_{\text{cm}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \hat{x} \\ M_{\text{tot}}\ddot{y}_{\text{cm}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \hat{y} \\ \dot{L}_z = I_n\dot{\omega} = \tau_{/O,\text{ext}} - (\vec{v}_O \times \vec{p}_{\text{tot}}) \cdot \hat{n} \end{cases} .$$

Osserviamo il fatto che quando trattiamo un problema in 2 dimensioni il CIR esiste sempre, dato che  $\vec{\omega}$  è perpendicolare al piano su cui avviene il moto e le velocità sono tutte contenute in esso, e ovviamente l'asse istantaneo di rotazione avrà in comune col piano un solo punto.

Sappiamo che la prima equazione può essere utilizzata solo sul centro di massa del corpo. La seconda può essere utilizzata o nel centro di massa del corpo (dove scompare il termine di polo mobile) o nel CIR, e in nessun altro punto, proprio per come questa è stata ricavata (questo discorso vale anche in 3 dimensioni).

§ 5.2.5. **Questione di poli.** — Data l'importanza del CIR, è giusto soffermarci. In primo luogo infatti in molti sistemi non è affatto scontato quale sia il CIR, ma c'è un modo molto comodo per trovarlo (a tempo fissato): si prenda un punto e la sua velocità, sappiamo che questa velocità è perpendicolare al segmento che unisce il punto al CIR, quindi si tracci una retta perpendicolare alla velocità e passante per il punto. Ripetendo questo processo l'intersezione tra le due rette dà la posizione del CIR. Spesso senza sapere questa giustificazione si utilizza la seconda cardinale sul CIR in un tipo di problemi tipico, ovvero quelli di puro rotolamento dove il CIR è il punto di contatto istantaneamente fermo dell'oggetto con il piano, ma è molto importante avere l'accortezza di considerare il termine di polo mobile: è vero che il CIR è istantaneamente fermo, ma dal momento che non è un punto fisso, il polo ha una velocità determinata unicamente dal fatto che in due tempi diversi il polo si trova in due punti differenti.

Mettiamo infine nuovamente peso sul fatto che cambiando polo nella seconda equazione cardinale, per quanto spiegato prima, le velocità angolari sono le stesse, e il cambio di valore dei momenti torcenti (dovuti al cambio di polo) corrispondono al cambio di valore del momento d'inerzia per Huygens-Steiner.

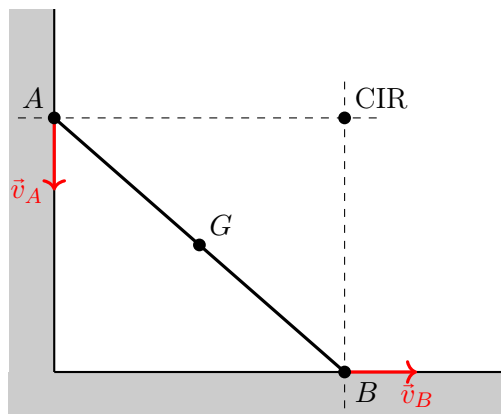


Figura 1: Esempio di individuazione del CIR

### 5.3 Equazioni di Eulero.

Vogliamo ora sfruttare l'esistenza di questo sistema di riferimento solidale "privilegiato" per ricavare una serie di equazioni del moto facili da trattare quando si lavora sul moto di un corpo rigido in 3 dimensioni.

La cosa che distingue questo sistema è che una componente della velocità angolare genera momento angolare solo lungo quella componente, cosa che ci permette di abbandonare il formalismo

matriciale mentre si tratta questo sistema.

Abbiamo visto che nel sistema di assi principali, solidale al moto del corpo:

$$\vec{L} = I_1\omega_1\hat{x}_1 + I_2\omega_2\hat{x}_2 + I_3\omega_3\hat{x}_3.$$

Sfruttiamo quanto ricavato all'inizio sulla derivata di un versore:

$$\dot{\vec{L}} = (I_1\dot{\omega}_1\hat{x}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{x}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{x}_3) + I_1\omega_1(\vec{\omega} \times \hat{x}_1) + I_2\omega_2(\vec{\omega} \times \hat{x}_2) + I_3\omega_3(\vec{\omega} \times \hat{x}_3),$$

Scrivendo poi in componenti i prodotti vettoriali:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = \dot{\vec{L}} \cdot \hat{x}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = \dot{\vec{L}} \cdot \hat{x}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = \dot{\vec{L}} \cdot \hat{x}_3 \end{cases} .$$

Ci poniamo ora con polo nel centro di massa (se si dovesse usare il CIR sarebbe abbastanza aggiungere il termine di polo mobile, ma in 3 dimensioni diventa meno comodo), e per la seconda cardinale:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = \tau_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = \tau_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = \tau_3 \end{cases}$$

Notiamo che questa equazione riguarda solo il sistema di riferimento degli assi principali, ma facendo i conti siamo partiti dal sistema di riferimento inerziale e abbiamo solo scritto  $\vec{L}$  nel sistema degli assi principali, quindi non compare alcuna forza apparente.

**§ 5.3.1. Stabilità degli assi principali.** — Innanzitutto notiamo un fatto che rende gli assi principali ancora più importanti. Se  $\vec{\omega}$  è orientato lungo solo uno degli assi principali, allora in assenza di momenti torcenti, dalle equazioni di Eulero  $\dot{\vec{\omega}} = 0$ , e se i momenti torcenti sono sempre paralleli a  $\vec{\omega}$ , allora quest'ultima mantiene la sua direzione. Questo fatto ha come conseguenza che, in presenza di un problema ad asse fisso, se quest'ultimo è uno degli assi principali il vincolo non deve produrre alcuna forza o momenti per mantenere l'asse fisso, e il problema si può rendere due dimensionale dimenticandosi del vincolo anche nelle equazioni del moto traslazionali (cosa che accade nelle gran maggior parte dei problemi che si tende ad affrontare).

Vogliamo ora capire in assenza di momenti esterni se questo moto con  $\vec{\omega}$  costante lungo gli assi è stabile o meno.

Faremo i calcoli in un corpo dove  $I_1 < I_2 < I_3$ , che è detta "trottola asimmetrica" (dal fatto che tutti i momenti di inerzia principali sono diversi tra loro), con  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , con  $\omega_1, \omega_3 \ll \omega_2$  (si fa questa scelta perché risulta il caso più interessante). Questo vuol dire che stiamo perturbando un moto in equilibrio con  $\vec{\omega} = \omega_2\hat{x}_2$

Allora le equazioni di Eulero sono:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \approx 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases} .$$

Quindi  $\omega_2$  è costante finché la perturbazione è piccola. Deriviamo la prima equazione:

$$\ddot{\omega}_1 = \frac{(I_2 - I_3)\omega_2}{I_1}\dot{\omega}_3.$$

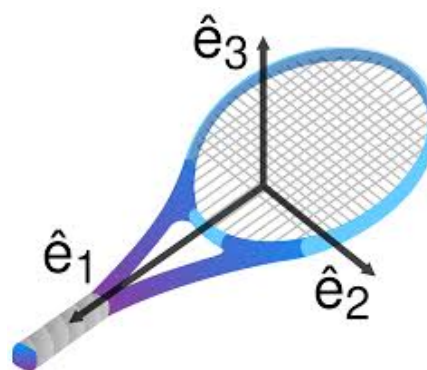
Sostituendo la terza equazione del sistema in questa:

$$\ddot{\omega}_1 = \frac{\omega_2^2(I_2 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_1 I_3}\omega_1.$$

Notando che  $\omega_2^2(I_2 - I_3)(I_1 - I_2) > 0$ , possiamo concludere che il moto non è stabile (al primo ordine il sistema è un repulsore armonico).

Questo è detto il teorema della racchetta da tennis, poiché si può vedere che lanciando in aria una racchetta da tennis attorno al suo secondo asse d'inerzia principale (come in figura), questa tende a cambiare orientamento.

Eseguendo gli stessi calcoli (21), si può ricavare che gli altri due assi sono stabili.



## SEZ. A — IL TENSORE D'INERZIA

### A.1 Alcune proprietà.

È possibile evidenziare alcune proprietà aggiuntive di questo tensore: innanzitutto si noti che è simmetrico per definizione, ovvero:

$$\mathbf{I}_{ij} = \mathbf{I}_{ji}.$$

Inoltre è possibile scrivere il suo elemento  $ij$ -esimo in maniera più sintetica introducendo la Delta di Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Allora possiamo scrivere:

$$\mathbf{I}_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} |\vec{r}^{(\alpha)}|^2 - r_i^{(\alpha)} r_j^{(\alpha)}),$$

che è una scrittura comoda per lavorare senza dover specificare quale componente si tratta.

### A.2 Cos'è il tensore d'inerzia?

Per come abbiamo definito  $\mathbf{I}$ , per ora sembra solo un modo compatto di scrivere la dipendenza lineare tra  $\vec{L}$  e  $\vec{\omega}$ . In realtà questo è un oggetto intrinseco al corpo e che non dipende dal sistema di riferimento.

Questo risulta ovvio notando che esso compare nell'espressione per l'energia cinetica, che ovviamente è uno scalare che non dipende dal sistema di riferimento scelto.

Risulta più semplice capire il modo con cui il tensore trasforma guardando la relazione tra  $\vec{\omega}$  e  $\vec{L}$ . Se indichiamo con  $\vec{\omega}'$  la velocità angolare in un altro sistema di riferimento (stesso discorso per  $\vec{L}$  e  $\vec{L}'$ , che essendo anch'esso un vettore ruota allo stesso modo), e con  $R$  la funzione che manda i vettori dal sistema di riferimento iniziale a quello ruotato ( $R(\vec{\omega}) = \vec{\omega}'$ ), e  $R^{-1}$  la trasformazione inversa (ruotare dello stesso angolo attorno allo stesso asse, ma nel verso opposto). Allora:

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega},$$

$$\vec{L}' = \mathbf{I}'\vec{\omega}'.$$

Applicando alla prima relazione una rotazione  $R$  in entrambi i termini, e scrivendo  $\vec{\omega}$  come  $R^{-1}(\vec{\omega}')$ :

$$\vec{L}' = R[\mathbf{I}R^{-1}(\vec{\omega}')].$$

Ponendo uguali le due espressioni diverse per  $\vec{L}'$  si ricava il modo con cui trasforma questo oggetto (la scrittura seguente ha senso in quanto  $R$  è una applicazione lineare, quindi si può esprimere come una matrice, e si può mostrare che la composizione di applicazioni lineari è equivalente alla moltiplicazione tra le matrici associate a queste applicazioni):

$$\mathbf{I}' = R\mathbf{I}R^{-1}.$$

In conclusione,  $\mathbf{I}$  non è in realtà solo una matrice, ma è un oggetto geometrico che come un vettore esiste anche se non si specifica il sistema di riferimento, ed è definito dal modo con cui esso modifica la forma matematica con cui lo si rappresenta, che nel caso di un vettore è una terna di numeri, e per un tensore una matrice, quando si cambia sistema di riferimento: trasforma in modo da mantenere coerente le quantità fisiche che esistono al di fuori di un sistema di riferimento.

Per rendere questo punto più chiaro è sufficiente pensare a un vettore come una "freccia" nello spazio, che esiste indipendentemente dal sistema di riferimento scelto, per ogni sistema di riferimento ha a sè associata una terna di numeri, ovvero le coordinate di quel sistema di

riferimento.

Allo stesso modo il tensore d'inerzia è un oggetto che esiste al di fuori di qualsiasi scelta di sistema di riferimento.

Il modo con cui questo oggetto trasforma, e il fatto che sia simmetrico, permettono l'esistenza di vettori di base ortonormali che lo diagonalizza (un risultato di algebra lineare detto teorema spettrale): l'esistenza del sistema degli assi principali, che ha conseguenze molto importanti sulla dinamica, è quindi una pura conseguenza del modo con cui questo oggetto ruota.

---

## — ESERCIZI —

---

### Meccanica di base

★☆☆☆☆ **Esercizio 1 Invarianza per rotazioni** Mostrate che il prodotto scalare è invariante per rotazioni. Per non complicarvi eccessivamente la vita potete lavorare nel piano, ovvero dimostrate che presi due vettori  $v_1 = (x_1, y_1)$  e  $v_2 = (x_2, y_2)$  scritti in coordinate cartesiane e preso un sistema di assi  $(\hat{x}', \hat{y}')$  ruotato di un angolo  $\vec{\theta}$  nel piano, vale  $(\vec{v} \cdot \vec{w})_{xy} = (\vec{v} \cdot \vec{w})_{x'y'}$ . Fate lo stesso per  $\vec{v} \times \vec{w}$

★☆☆☆☆ **Esercizio 2 Ortogonalità implica indipendenza lineare** Siano  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  tre vettori ortogonali nello spazio tridimensionale. Dimostrate che essi sono linearmente indipendenti. **Osservazione:** La dimostrazione al caso N-dimensionale è del tutto identica, convinceteneve.

★★☆☆☆ **Esercizio 3 Un vettore trasforma come un vettore!** Se chiedete a un fisico la definizione di vettore, alcuni vi risponderanno con la frase *"un vettore è tutto ciò che trasforma come un vettore"*. Per capire cosa intendono queste persone, cercate di capire come trasformano in generale le componenti di un vettore sotto rotazioni nel piano imponendo che a seguito della trasformazione  $\vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i = \sum_i v'_i \vec{e}'_i$  dove ho indicato con  $\vec{e}_i, \vec{e}'_i$  i vettori di base rispettivamente prima e dopo la trasformazione. Come trasformano invece i vettori di base? Se avete conoscenze riguardanti matrici, provate a usare quel tipo di formalismo per generalizzare il risultato a generiche trasformazioni invertibili nello spazio.

★★☆☆☆ **Esercizio 4 Direzione ortogonale** Presi due vettori  $v = (v_1, v_2, v_3)$  e  $w = (w_1, w_2, w_3)$  scritti in coordinate cartesiane, scrivete l'equazione cartesiana del piano da essi generato e trovate il vettore normale al piano. Dimostrate ora che  $\vec{v} \times \vec{w}$  fornisce un multiplo del vettore normale al piano, a conferma del fatto che il prodotto vettoriale tra due vettori fornisce in output un terzo vettore ortogonale ai primi due.

★★★☆☆ **Esercizio 5 Decomposizione di un vettore** Fissato  $\vec{b}$  nello spazio tridimensionale, dimostrate che un generico vettore può essere scomposto in due componenti, una parallela e una ortogonale a  $\vec{b}$ , e determinate esplicitamente questa decomposizione.

★★★★☆ **Esercizio 6 Si urtano o no?** Due masse puntiformi percorrono traiettorie parallele a velocità costante in un dato sistema di riferimento. Posso trovare un altro sistema di riferimento inerziale in cui le due traiettorie si intersecano? In tal caso, potrei pensare di far partire le due masse con delle condizioni iniziali tali per cui esse si scontrano in un certo punto della traiettoria. Come risolvere il paradosso?

★☆☆☆☆ **Esercizio 7 Il metodo classico** Ricavare velocità ed accelerazione in coordinate cilindriche derivando le espressioni cartesiane dei versori.

★★☆☆☆ **Esercizio 8 Ma dimmi Nabla, come trasformi?** Abbiamo incontrato l'operatore  $\vec{\nabla}$  nel calcolo della forza in sistemi con più gradi di libertà. Ora, insieme alle conoscenze su prodotto scalare e prodotto vettoriale, vorremmo capire come esprimerlo in coordinate diverse da quelle cartesiane, in cui esso è naturalmente stato definito. Essendo fisici non ci preoccuperemo troppo dei dettagli matematici che giustificano formalmente tutti i passaggi che effettuerete, in particolare tratteremo  $\vec{\nabla}$  come se fosse un vettore le cui componenti

sono le derivate parziali (ovvero in coordinate cartesiane vale  $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ), con l'aggiunta di qualche proprietà che vi permetterà di ottenere rotore e divergenza in altri sistemi di coordinate. Sarà inoltre comodo ricordarvi che per una funzione a più variabili vale la seguente formula di riparametrizzazione  $\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial f(u,v,w)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ . Definiamo il rotore e la divergenza in coordinate cartesiane come  $\mathbf{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ , ovvero si applica una delle componenti di  $\vec{\nabla}$  a un'altra componente di  $\vec{v}$  e si fa il prodotto vettoriale dei versori cartesiani corrispondenti alle rispettive componenti (ad esempio  $\vec{\nabla} \times (v\hat{x}) = \frac{\partial v}{\partial y} \hat{y} \times \hat{x} + \frac{\partial v}{\partial z} \hat{z} \times \hat{x}$ ). Analogamente, in coordinate cartesiane definiamo  $\mathbf{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ , ovvero si applica una delle componenti di  $\vec{\nabla}$  a un'altra componente di  $\vec{v}$  e si fa il prodotto scalare dei versori cartesiani corrispondenti alle rispettive componenti (ad esempio  $\vec{\nabla} \cdot (v\hat{x}) = \frac{\partial v}{\partial x} \hat{x} \cdot \hat{x}$ ).

- Imponendo che  $\vec{\nabla}$  trasformi come un vettore sotto rotazioni, determinarlo in coordinate cilindriche. *Hint: esprimete i versori cartesiani in coordinate cilindriche e usate la formula di riparametrizzazione.*
- Imponendo che presa comunque una terna di versori valga la seguente regola  $\nabla_i \hat{x}_i \times v_j \hat{x}_j = \nabla_i (v_j) \hat{x}_i \times \hat{x}_j + \hat{x}_i \times \nabla_i (v_j)$  ricavare  $\vec{\nabla}$  in coordinate cilindriche (se avete visto anche la sezione in coordinate sferiche provate a ricavarlo pure in coordinate sferiche, con l'avviso che il conto da svolgere è parecchio laborioso)
- Imponendo che presa comunque una terna di versori valga la seguente regola  $\nabla_i \hat{x}_i \cdot v_j \hat{x}_j = \nabla_i (v_j) \hat{x}_i \cdot \hat{x}_j + \hat{x}_i \cdot \nabla_i (v_j)$  ricavare la divergenza in coordinate cilindriche (e sferiche come bonus)

### ★★★★☆☆ Esercizio 9 Ortogonale all'ortogonale Usando le identità

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \quad (\text{E.1})$$

dimostrare **BAC -CAB** *Hint: Provate prima a dimostrarlo nel caso in cui  $\vec{a} = \vec{c}$*

### ★★★★☆☆ Esercizio 10 Coriolis o Momento Angolare?

Studiare la caduta dalla Torre di Pisa dal punto di vista di un osservatore inerziale.

*Hint: Usate la conservazione di energia e momento angolare, approssimando al primo ordine in  $\omega/\sqrt{g/R}$ .*

★★☆☆☆☆ Esercizio 11 Chi lo tiene fermo? Anna e Bob hanno come passatempo quello di correre in cerchio uno attorno all'altro a turni, mentre l'altro sta fermo al centro. Adesso tocca ad Anna correre. Nel frattempo Bob, che non vede l'ora arrivi il suo turno, pensa a cosa vede Anna dal suo punto di vista e realizza che secondo Anna Bob risente della forza centrifuga (diretta lungo la congiungente tra i due amici) che tende a farlo allontanare da Anna. Cosa tiene Bob fermo in questo sistema?

★★☆☆☆☆ Esercizio 12 A tutta velocità Un'auto da corsa percorre una curva inclinata di un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale a velocità  $\vec{v}$ . Il coefficiente di attrito statico vale  $\mu$ . Trovare la massima e la minima velocità che permettono alla macchina di percorrere la curva senza strisciare.

★★★★☆☆ Esercizio 13 Vincoli e sistemi inerziali Si consideri un piano inclinato di altezza  $h$ , angolo  $\alpha$  rispetto al piano orizzontale senza attrito. é presente un campo gravitazionale uniforme  $\vec{g}$ . Una massa puntiforme  $m$  è lasciata libera di muoversi dalla cima del piano.

- Determinare la velocità  $\vec{v}$  con cui la massa si muove sul piano orizzontale nel suo moto successivo.
- Studiare lo stesso sistema dal punto di vista di un osservatore che si muove lungo il piano orizzontale con velocità  $\vec{v}$ , in particolare studiare il bilancio energetico in questo sistema. Chi compie lavoro? Verificate le vostre affermazioni svolgendo esplicitamente il conto.

★★☆☆☆ **Esercizio 14 Terza equazione cardinale** Dimostrare che, preso un polo  $O$  ed un sistema su cui agisce una forza risultante  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  ed un momento torcente risultante rispetto ad  $O$   $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i$  allora, vale

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_O + \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}_O$$

che è detta terza equazione cardinale.

★★☆☆☆ **Esercizio 15 Che brutto il termine di polo mobile!** Ricavate il termine di polo mobile nella seconda equazione cardinale ponendovi nel sistema di riferimento inerziale istantaneamente solidale con il polo.

★★★☆☆ **Esercizio 16 Similitudine meccanica** Supponiamo che l'energia potenziale sia omogenea di grado  $k$ . Supponiamo di riscalare le coordinate spaziali di un fattore  $\alpha$  e quelle temporale di un fattore  $\beta$ . Supponiamo inoltre che questo riscalamento abbia come conseguenza quella di moltiplicare l'energia totale per una certa costante. Dimostrate allora che vale  $\frac{t'}{t} = (\frac{l'}{l})^{1-k/2}$  Cosa ottenete nel caso  $k = -1$  e  $k = 2$ ?

★★★☆☆ **Esercizio 17 Isocronia delle piccole oscillazioni** Una particella di massa  $m$  libera di muoversi lungo l'asse  $x$  è soggetta al seguente potenziale:  $V(x) = kx^2$ . Dimostrare che il periodo di oscillazione non dipende dall'ampiezza iniziale e trovare il periodo del moto.

## Il Corpo Rigido

★☆☆☆☆ **Esercizio 18 Atto del moto in un sistema rotante**

Ricava che la relazione tra la velocità angolare del corpo rigido in due sistemi di riferimenti  $S$  e  $S'$ , con gli assi in rotazione rispetto al primo con velocità angolare  $\vec{\Omega}$  è:

$$\vec{\omega}_{S'} = \vec{\omega}_S - \vec{\Omega}.$$

★☆☆☆☆ **Esercizio 19 Energia cinetica**

Ricava che il termine rotazione dell'energia cinetica nel secondo teorema di König per un corpo rigido con velocità angolare  $\Omega$  e tensore d'inerzia rispetto al centro di massa  $\mathbf{I}$  è:

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \mathbf{I}_{ij} \omega_i \omega_j.$$

★☆☆☆☆ **Esercizio 20 Teorema di Huygens-Steiner**

Dimostra il teorema di Huygens-Steiner e ricava da questo la forma 2-dimensionale più nota.

★☆☆☆☆ **Esercizio 21 Stabilità degli assi principali**

Mostra la stabilità della rotazione attorno al primo e al terzo asse principale, e trova la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio.

★☆☆☆☆ **Esercizio 22 Assi principali sotto riflessione**

Si mostri che se una distribuzione di massa è invariante per riflessioni rispetto a un piano, allora uno dei suoi due assi principali è ortogonale a quel piano.

★★☆☆☆ **Esercizio 23 Simmetrie**

Calcola il tensore d'inerzia (del centro di massa) senza eseguire alcun integrale non banale dei seguenti oggetti attorno a un sistema di assi principali:

- guscio sferico di raggio  $R$  e massa  $M$ ;
- anello di raggio  $R$  e massa  $M$ ;
- $N$  punti materiali di massa  $m$  disposti sui vertici di un poligono regolare planare di raggio circoscritto  $R$ .

★☆☆☆☆ **Esercizio 24 Momenti d'inerzia**

Calcolare il tensore di inerzia (del centro di massa) dei seguenti oggetti, tutti di massa  $M$ , rispetto a un sistema di assi principali:

- sfera di raggio  $R$ , sia cava che piena;
- cilindro di altezza  $h$  e raggio  $R$ ;
- asta di lunghezza  $L$ ;
- prisma a base triangolare con lati  $a$ ,  $b$  e  $c$  e altezza  $h$ ;
- cubo di lato  $L$ ;
- sfera di raggio  $R$  con cavità sferica di raggio  $r$  a distanza  $d$  dal centro.

★☆☆☆☆ **Esercizio 25 Urto tra sfere**

Una sfera A di massa  $m_A$  e raggio  $R$  è a riposo sul piano. Una seconda sfera (B) di massa  $m_B$  e raggio  $R$  colpisce la sfera A con velocità prima dell'urto  $v_0$  e parametro d'impatto  $b < 2R$ . In questo caso il parametro di impatto  $b$  è definito come la distanza perpendicolare tra la traiettoria della sfera A e il centro della sfera B. Trovare le velocità finali di entrambe le sfere. Trascurare l'attrito.

★☆☆☆☆ **Esercizio 26 Urto tra asta e pallina**

Un'asta omogenea lunga  $l$  e di massa  $m$ , inizialmente a riposo in assenza di gravità, viene colpita da una massa puntiforme di massa  $m'$  a una distanza  $a$  dell'estremo superiore dell'asta ( $0 < a < l/2$ ) con velocità prima dell'urto  $v_0$  perpendicolare all'asta. Trovare la relazione fra le  $m$ ,  $m'$ ,  $a$ ,  $l$  e  $v_0$  per cui c'è un unico urto fra l'asta e la massa. Trascurare l'attrito.

★★☆☆☆ **Esercizio 27 Asta che cade**

Sia data un'asta omogenea lunga  $l$  appoggiata ad una parete, che forma un certo angolo  $\theta_0 < \pi/2$  rispetto al pavimento. Improvvisamente sparisce l'attrito sul pavimento e sulla parete che teneva l'asta in posizione. Determinare a quale angolo avviene il distacco tra l'asta e la parete verticale.

### ★★☆☆☆ **Esercizio 28 Matita che cade**

Una matita, modellizzabile come asta rigida omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $l$ , è tenuta in equilibrio sulla punta. Viene ora una piccola spinta iniziale. Nel caso in cui il tavolo in cui poggia sia privo d'attrito, si dimostri che la punta resta sempre in contatto con il tavolo e trovi la velocità angolare con cui la matita impatta il tavolo. Cosa cambia se invece il tavolo ha attrito infinito?

### ★★★★☆☆ **Esercizio 29 Tidal lock**

È risaputo che la Luna mostra sempre, più o meno, la stessa faccia alla Terra. Questa curiosità non è una coincidenza, ma una semplice conseguenza delle forze di marea che agiscono tra la Terra e la Luna. Nel corso del tempo, le forze di marea hanno continuamente rallentato la rotazione della Luna asse fino a quando il periodo di quella rotazione è diventato uguale al periodo orbitale della Luna intorno alla Terra. È per la stessa ragione per cui la rotazione della Terra attorno al suo asse rallenta continuamente e la velocità orbitale della Luna sta ancora decrescendo.

1. Stimare il rapporto tra la diminuzione di energia cinetica della Terra e della Luna per unità di tempo.
2. Durante il programma Apollo (voli 11, 14 e 15), dei catadiottri (serie di specchi laser ad angolo cubo) sono stati posizionati sulla Luna. Secondo le misurazioni laser estremamente accurate rese possibili dalla presenza dei catadiottri, la distanza lineare della Luna dalla Terra è attualmente in aumento a una velocità di 3,8 cm per anno. Utilizzando questo dato, stimare la variazione della lunghezza di un giorno terrestre durante un anno.
3. Se il sistema Terra-Luna continuasse il suo moto indisturbato, come a risultato dell'effetto frenante delle forze di marea, dopo un tempo sufficientemente lungo, la Terra mostrerebbe sempre la stessa faccia alla Luna, cioè le rotazioni e i movimenti orbitali di questi due corpi sarebbero sincronizzati<sup>5</sup>. Quante volte più lungo di oggi sarebbe un giorno della Terra e quanto più grande di oggi sarebbe la distanza Terra-Luna?

Si supponga che l'orbita della Luna rimanga circolare e si trascuri l'effetto di marea del Sole.

### ★★☆☆☆ **Esercizio 30 Disco da hockey**

Un disco piatto omogeneo (come un disco da hockey su ghiaccio) scivola e rotola su una superficie ghiacciata. A causa dell'attrito, entrambi i tipi di movimento decelerano e infine fermarsi. Quale dei due movimenti si ferma prima, la rotazione o lo scivolamento? Supponiamo che il disco preme uniformemente sul ghiaccio, che la forza di attrito tra due superfici non dipenda dalla loro velocità relativa e che resistenza dell'aria sia trascurabile.

### ★★☆☆☆ **Esercizio 31 Cilindro frenante**

Un cilindro di massa  $M$  e raggio  $R$  sta strisciando con velocità  $v$  e velocità angolare  $\omega$  quando inizia a sentire una forza di attrito che inizia a frenarlo. Quando raggiunge il puro rotolamento, ha una velocità di modulo  $v$  nel verso opposto della velocità iniziale. Quant'era  $\omega$ ?

### ★★★★☆☆ **Esercizio 32 Matita che rotola**

Si modellizzi una matita lunga  $l$  come un prisma che ha per base un esagono regolare di lato  $a \ll l$ , e ha una massa  $M$  distribuita omogeneamente. Si pone ora la matita su un piano inclinato di un angolo  $\theta$  con attrito infinito, con il lato lungo sempre alla stessa altezza. Viene quindi data una spinta alla matita che comincia a rotolare. Si assuma che le facce del prisma

<sup>5</sup>In realtà, prima che questo possa accedere, il Sole esploderà in una gigante rossa.

siano leggermente concave in modo che solo gli spigoli siano in contatto con il piano, ma che la concavità non abbia effetto sul momento d'inerzia.

1. Si dimostri che il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse centrale del prisma vale  $I = \frac{5}{12}Ma^2$ .
2. Si trovi la relazione fra la velocità angolare della matita appena prima che uno spigolo colpisca il tavolo e la velocità angolare immediatamente dopo l'urto. Domanda analoga per l'energia cinetica. Trovare ora l'energia cinetica minima appena dopo un impatto affinché possa avvenire l'impatto successivo. Trovare la velocità limite della matita. Si assuma che la matita tocchi il piano in ogni istante.
3. Qual è il minimo valore di  $\theta$  per cui esiste una velocità limite non nulla? Qual è il valore massimo di  $\theta$  per cui la matita rimane sempre in contatto con il piano?

### ★★★☆☆ Esercizio 33 Puro rotolamento - Senigallia 2024/1

Un disco sottile omogeneo ha raggio  $R$ . In esso viene praticato un foro circolare di raggio

$$r = \frac{R}{2},$$

il cui centro dista

$$\frac{R}{2}$$

dal centro  $C$  del disco (si veda la figura a sinistra). Sia  $M$  la massa dell'oggetto così ottenuto.

1. Determinare la posizione del centro di massa dell'oggetto (che indicheremo con Cdm).
2. L'oggetto viene appoggiato verticalmente sul suo bordo sopra un piano orizzontale. La sua configurazione è descritta dalla coordinata  $x$  del centro  $C$  e dall'angolo orientato  $\theta$  tra la verticale passante per  $C$  e la congiungente dei due centri. Durante il moto l'oggetto rotola sempre senza strisciare, rimanendo nello stesso piano verticale.

Trovare le posizioni di equilibrio dell'oggetto e stabilire quali siano di equilibrio stabile e quali di equilibrio instabile, giustificando la risposta.

3. Dimostrare che il momento d'inerzia dell'oggetto rispetto al punto di appoggio, quando esso si trova nella posizione di equilibrio stabile, è

$$I = \frac{29}{24}MR^2.$$

4. L'oggetto viene disposto inizialmente in  $x = 0$  con  $\theta = 0$  e successivamente ruotato verso destra fino a un angolo  $0 < \theta_0 \ll 1$ . Una volta lasciato libero, esso inizia a oscillare.

Scrivere la legge oraria del moto per la coordinata  $\theta(t)$  ed esplicitare l'espressione del periodo delle oscillazioni.

5. Si supponga ora che il disco si muova di puro rotolamento con velocità costante  $\vec{v}$  del centro  $C$ . Per ottenere questo moto viene applicata una forza orizzontale  $\vec{F}(t)$  nel punto  $C$ . Si assuma  $\theta = 0$  all'istante  $t = 0$ .

Mostrare che il momento angolare rispetto al punto  $C$ , in funzione del tempo, nel riferimento inerziale solidale con  $C$ , è costante.

6. Determinare, in funzione del tempo e in termini dei dati del problema, l'espressione della forza di attrito  $\vec{A}(t)$ , della reazione normale del piano  $\vec{N}(t)$  e della forza applicata  $\vec{F}(t)$ .

7. Trovare la condizione sulla velocità  $v$  affinché l'oggetto non si stacchi dal piano orizzontale, indicando con  $v^*$  la velocità limite.
8. Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico necessario affinché il moto avvenga sempre in condizioni di puro rotolamento.

### ★☆☆☆☆ Esercizio 34 Quanti assi principali?

Dimostrare che, in una trottola simmetrica, fissato un polo per il tensore d'inerzia, qualunque coppia di assi mutuamente ortogonali passanti per tale polo e appartenenti al piano definito dai due assi principali con lo stesso momento d'inerzia può essere scelta come assi principali al posto dei due dati. Cosa si può dire nel caso di una trottola sferica?

### ★★☆☆☆ Esercizio 35 More Puzzling Physics Problems 53

Una palla da biliardo, inizialmente a riposo su un tavolo da biliardo, viene colpita in un suo punto  $T$ . Siano  $O$  il centro della palla e  $P$  il suo punto di contatto col tavolo: allora l'impulso impresso alla pallina giace nel piano cui appartengono  $T$ ,  $O$  e  $P$ . Trovare l'angolo che deve formare tale impulso con l'orizzontale affinché:

1. I moti traslatorio e rotatorio della pallina risultanti terminino contemporaneamente;
2. La pallina rotoli senza scivolare, qualunque sia il coefficiente di attrito tra essa e il tavolo.

Assumere che, durante il colpo, non ci sia slittamento tra l'asta e la pallina da biliardo.

### ★★☆☆☆ Esercizio 36 Angolo di rotazione

Una disco piatto omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$  può ruotare sul piano senza attrito. Un bambino di massa  $m'$  sale sul disco dove c'è un segno  $S$  e fa un giro completo lungo il bordo del disco tornando in  $S$ . Dove si trova il bambino rispetto al punto dove è salito? Di quale angolo ha ruotato il disco rispetto al suo centro?

### ★★★★☆ Esercizio 37 Dipolo in campo magnetico

Possiamo schematizzare un dipolo elettrico come una sbarretta rigida di lunghezza  $\vec{l}$  ai cui capi sono attaccate due cariche, una  $+q$  e l'altra  $-q$ . Il verso di  $\vec{l}$  è fatto in modo che il vettore vada dalla carica negativa a quella positiva. Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ .

1. Leggi di conservazione.
  - Calcolare la forza totale agente sul dipolo, e il momento torcente rispetto al centro di massa. Scrivere le equazioni del moto per il centro di massa del dipolo e per la rotazione attorno al centro di massa.
  - Dalle equazioni del moto trovare la quantità di moto modificata che si conserva. Denotarla con  $\vec{P}$ . Scrivere la conservazione dell'energia meccanica totale  $E$ .
  - Mostrare che la quantità definita come

$$J = (\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \vec{B}$$

è una costante del moto ( $I$  è il momento di inerzia rispetto al centro di massa).

2. Moto nel piano perpendicolare a  $\vec{B}$ .

- Supponiamo che all'istante iniziale il centro di massa del dipolo sia fermo nell'origine,  $\vec{l}$  punti nella direzione  $x$  e la velocità angolare iniziale sia  $\omega_0 \hat{z}$ . Se  $\omega_0$  è minore di un certo valore critico  $\omega_c$ , il dipolo non compie un giro completo rispetto al centro di massa. Trovare  $\omega_c$ .
- Per un generico  $\omega_0 > 0$  qual è la massima distanza  $d_{\max}$  nella direzione  $x$ , che il centro di massa può raggiungere?
- Qual è la tensione sulla sbarretta in funzione di  $\omega$ ?

### ★★☆☆☆ **Esercizio 38 Altalena ideale**

Studiamo le piccole oscillazioni di un'altalena. Consideriamo una sbarretta unidimensionale di lunghezza  $d$  e massa  $m$  uniformemente distribuita, ai cui estremi sono attaccati due fili leggerissimi di lunghezza  $L$ . I loro altri due capi sono attaccati a due punti del soffitto la cui distanza relativa è  $d$ . La gravità è  $\vec{g}$ . Ruotiamo l'altalena di un angolo  $\phi$  piccolo (quantificare tale condizione) attorno a un asse verticale passante per il suo centro nella posizione di equilibrio, e poi la rilasciamo. Trovare la pulsazione delle piccole oscillazioni risultanti.

### ★★★★☆☆ **Esercizio 39 Monociclo**

Un monociclista viaggia su un monociclo il cui punto più basso percorre una traiettoria circolare piana di raggio  $R$ . Monociclista e monociclo assieme possono essere modellizzati come un'asta rigida e uniforme di lunghezza  $L$ , inclinata di un angolo  $\theta$  verso il centro della circonferenza rispetto alla verticale. Supponendo che il coefficiente d'attrito fra monociclo e terreno sia abbastanza alto, qual è la velocità angolare alla quale viene percorsa la traiettoria? La gravità è  $\vec{g}$ .

### ★★★★☆☆ **Esercizio 40 Puzzling Physics Problems 69**

Tre fili di lunghezze  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  sono attaccate per un estremo ai tre vertici di un triangolo omogeneo di massa  $m$ , mentre l'altro estremo di ciascuna è attaccato a uno stesso punto del soffitto. Ognuno dei tre fili è teso. Trovare i rapporti tra le tensioni dei tre fili.

### ★★☆☆☆ **Esercizio 41 Scalino - Morin 8.22**

Un cilindro di raggio  $R$  incontra uno scalino di altezza  $h < R$  mentre rotola senza strisciare.

1. Assumendo che ci sia abbastanza attrito sul gradino affinché la palla ci aderisca, calcola quanto deve essere la velocità  $v$  per salire il gradino.
2. Per  $h$  piccoli, calcola il calore disperso a causa dell'urto.

### ★★★★☆☆ **Esercizio 42 Astronave alla deriva**

Un'astronave di massa  $M$  è modellizzabile come un'asta rigida uniforme di lunghezza  $L$ . Ai due estremi dell'asta sono fissati due propulsori di massa trascurabile, orientati perpendicolarmente all'asta e in grado di esercitare una forza di modulo  $F$  diretta verso l'interno dell'astronave.

All'istante  $t = 0$  l'astronave è ferma e i propulsori vengono accesi in modo asimmetrico: solo uno dei due propulsori è attivo, mentre l'altro rimane spento.

1. Nel sistema di riferimento solidale con l'astronave, determinare di quanto essa risulta ruotata rispetto alla sua orientazione iniziale in funzione del tempo.
2. Determinare la velocità limite  $v_f$  del centro di massa dell'astronave, specificandone modulo e verso.

Può risultare utile il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

★★★☆☆ **Esercizio 43 Palla su giradischi** Un disco orizzontale con superficie ruvida è tenuto in rotazione attorno al suo asse di simmetria con velocità angolare  $\Omega$ . Una sfera ruvida di raggio  $R$  rotola senza strisciare. Determina il moto del centro di massa della sfera.

★★★☆☆ **Esercizio 44 Palla magnetica - EuPhO 2019/2**

Una sfera omogenea di massa  $m$  e raggio  $R$  possiede una densità di carica uniforme, tale che la carica totale sia  $Q$ . Essa viene posta su un piano orizzontale e la si mette in moto in maniera tale che sia in regime di puro rotolamento, con velocità del centro di massa  $v_0$ . Il piano è sufficientemente scabro da non farla slittare, ed è presente un campo magnetico costante e uniforme di modulo  $B$  e diretto verso l'alto. Descrivere il moto risultante della palla.

★★★★☆ **Esercizio 45 Palla magnetica su giradischi - APhO 2023/2C**

Una sfera di massa  $m$ , carica  $Q$  (entrambe distribuite uniformemente) e raggio  $R$  è poggiata su un giradischi orizzontale, che ruota a velocità angolare fissata  $\Omega\hat{z}$ , in presenza di un campo magnetico  $\vec{B} = B\hat{z}$  uniforme e costante. La sfera rotola senza strisciare sul giradischi. Descrivere la traiettoria percorsa dal centro di massa della sfera.

★★★★★ **Esercizio 46 Giradischi massivo - APhO 2023/2B**

Una sfera omogenea di massa  $m$  e raggio  $R$  è poggiata su un giradischi orizzontale, il quale ha momento d'inerzia  $I_d$  rispetto ad un asse passante per il suo centro e ortogonale alla sua superficie, che al tempo  $t = 0$  ruota a velocità angolare  $\Omega_0$ . La sfera rotola senza strisciare sul giradischi. Quali sono le possibili traiettorie per il centro di massa della sfera?

★★★★★ **Esercizio 47 Pallina in un tubo - MPPP 57**

Una pallina omogenea di massa  $m$ , raggio  $r$  viene lanciata dentro un tubo cilindrico rigido verticale di raggio  $R$ . Si assuma che l'attrito tra la pallina e il tubo sia sempre sufficientemente alto da permettere puro rotolamento. Se la velocità iniziale  $v_0$  è orizzontale e sufficientemente alta, la traiettoria della pallina comincia ad oscillare, pur rimanendo sempre in contatto con la parete. Quanto vale il periodo delle oscillazioni e la quota più bassa raggiunta nel moto successivo?

★★★★☆ **Esercizio 48 Giradischi pendente - MPPP 56**

Un giradischi ruvido è poggiato sopra ad un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale e ruota ad una velocità angolare costante  $\Omega$ . Una sfera omogenea di massa  $m$  e raggio  $R$  è poggiata su di esso ed è libera di muoversi senza strisciare. Il sistema è immerso nel campo gravitazionale terrestre. Si nota che, per un certo valore della velocità iniziale, la palla percorre una traiettoria rettilinea: qual è questo valore?

★★★★☆ **Esercizio 49 Materiale insolito - APhO 2007**

Una sfera uniforme di massa  $M$  e raggio  $r$  è racchiusa all'interno di un sottile guscio sferico, anch'esso di massa  $M$ . Il guscio è posto all'interno di una scodella sferica fissa di raggio  $R$  e compie piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio nel punto più basso.

Si assuma che l'attrito tra la scodella e il guscio sia molto grande, cosicché il guscio rotoli sempre senza strisciare. La sfera interna è fatta di un materiale particolare: può passare rapidamente dallo stato solido a quello liquido.

- Quando la sfera è nello stato liquido, non ha viscosità e quindi non esercita alcun attrito sul guscio.
  - Quando la sfera è nello stato solido, essa ruota insieme al guscio.
1. Determinare il periodo delle oscillazioni se la sfera è sempre nello stato solido.
  2. Determinare il periodo delle oscillazioni se la sfera è sempre nello stato liquido.
  3. Ora la sfera è regolata in modo tale che passi istantaneamente allo stato liquido ogni volta che inizia a muoversi verso il basso, e istantaneamente allo stato solido ogni volta che inizia a muoversi verso l'alto. Se l'ampiezza iniziale delle oscillazioni è  $\theta_0$ , determinare l'ampiezza dopo  $n$  oscillazioni.

### ★★★★☆ **Esercizio 50** **Corpo bi-sferico - WoPhO 2013/2**

Due sfere uniformi 1 e 2 di raggi  $R_1$  e  $R_2$ , rispettivamente, sono fatte dello stesso materiale di densità di massa  $\rho$ . Esse sono rigidamente incollate tra loro a formare un corpo rigido. Inizialmente, il corpo è in quiete su una superficie orizzontale piana, con entrambe le sfere sul piano

1. Determinare la distanza  $x_0$  tra il centro di massa del corpo a due sfere e il centro della sfera 1.
2. Determinare il momento d'inerzia  $I$  del corpo a due sfere rispetto all'asse che passa per i centri delle due sfere.
3. Determinare il momento d'inerzia  $I_1$  del corpo a due sfere rispetto all'asse che passa per il suo centro di massa ed è perpendicolare alla retta che unisce i centri delle due sfere.

Il corpo a due sfere viene poi posto su una superficie orizzontale piana in modo che la sfera più piccola si trovi direttamente sotto quella più grande e che la retta congiungente i centri delle due sfere sia perpendicolare alla superficie. Tale posizione di equilibrio è instabile e una perturbazione arbitrariamente piccola mette il corpo in moto sotto l'azione della gravità.

4. Supponendo che l'attrito tra la sfera inferiore e la superficie sia sufficientemente grande da impedire qualsiasi slittamento, determinare le velocità dei centri delle due sfere nell'istante immediatamente precedente a quello in cui la sfera superiore tocca il suolo. Tracciare uno schema indicando le direzioni delle velocità dei centri delle sfere.
5. Supponendo invece che non vi sia alcun attrito tra la sfera inferiore e la superficie, determinare le velocità dei centri delle due sfere nell'istante immediatamente precedente a quello in cui la sfera superiore tocca il suolo. Tracciare uno schema indicando le direzioni delle velocità dei centri delle sfere.

Successivamente, il corpo viene posto su un piano inclinato che forma un angolo  $\alpha$  con l'orizzontale. All'istante iniziale, la retta che unisce i punti di contatto delle sfere con il piano è perpendicolare all'orizzontale, con entrambe le sfere a contatto col piano. Si assuma che l'attrito tra le sfere e il piano sia sufficientemente grande da impedire qualsiasi slittamento in ogni istante.

6. Determinare le velocità massime dei centri delle due sfere.
7. Determinare l'accelerazione angolare del corpo a due sfere nell'istante in cui le velocità dei centri delle sfere sono massime.

Le sfere sono sempre posizionate sul piano inclinato.

8. Determinare la posizione di equilibrio e la pulsazione delle piccole oscillazioni del corpo attorno a quest'ultima.