

# Meccanica Celeste

STRUMENTI E APPLICAZIONI

Luca Cremonesi\*, Luigi de Gennaro†

3 febbraio 2026

## Sommario

In questa lezione discuteremo di gravità Newtoniana. Nella prima parte della lezione studieremo il moto in campo centrale e in particolare introdurremo le coordinate polari e le rilevanti quantità conservate. Ricaveremo il potenziale efficace e lo useremo per studiare qualitativamente le orbite. Successivamente calcoleremo l'equazione delle orbite. Nella seconda parte della lezione spiegheremo il teorema del viriale e alcune sue applicazioni. Infine studieremo la correzione al potenziale efficace dovuta alla relatività generale e come da questa possiamo intuire l'esistenza dei buchi neri.

---

\*luca.cremonesi@sns.it

†luigi.degennaro@sns.it

# — INDICE —

---

<b>1</b>	<b>Coordinate Polari</b>	<b>3</b>
1.1	Definizione . . . . .	3
1.2	Posizione, Velocità e Accelerazione in Coordinate Polari . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Gravità Newtoniana</b>	<b>5</b>
2.1	Leggi di Keplero . . . . .	5
2.2	Quantità Conservate . . . . .	6
2.3	Equazione delle Orbite . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Potenziale Efficace</b>	<b>9</b>
3.1	Togliere una Dimensione . . . . .	9
3.2	Considerazioni Qualitative sui tipi di Orbita . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Teorema di Bertrand</b>	<b>11</b>
4.1	Piccole Oscillazioni Attorno a Orbite Circolari . . . . .	11
4.2	Dimostrazione del Teorema di Bertrand . . . . .	11
4.2.1	Caso $\beta > 0$ . . . . .	12
4.2.2	Caso $\beta < 0$ . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Teorema del Viriale</b>	<b>13</b>
5.1	Applicazione 1 . . . . .	14
5.2	Applicazione 2 . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Correzione potenziale efficace</b>	<b>16</b>
6.1	La precessione del perielio . . . . .	16
6.2	Buchi Neri . . . . .	18
<b>A</b>	<b>Derivate dei versori</b>	<b>21</b>
<b>B</b>	<b>Frequenza Oscillazioni Delle Perturbazioni</b>	<b>22</b>
	<b>Esercizi</b>	<b>23</b>
	<b>Soluzioni</b>	<b>25</b>

## SEZ. 1 — COORDINATE POLARI

Iniziamo introducendo alcuni fatti matematici che ci saranno utili per descrivere i problemi che affronteremo in questa lezione. In particolare, ci interessa affrontare problemi caratterizzati dalla presenza di un punto dello spazio identificabile come “centro”; per questo motivo ci sarà molto comoda una descrizione che tiene conto della simmetria del problema.

### 1.1 Definizione

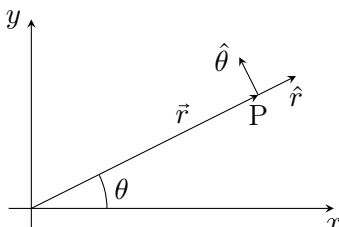


Figura 1: Individuazione di un punto sul piano attraverso le coordinate polari. Ogni punto è univocamente determinato dai parametri  $r$  e  $\theta$ .

In *coordinate polari*, in cui ogni punto è identificato da due parametri (come vedremo, saremo sempre su un piano, quindi avremo sempre due gradi di libertà), di solito indicati con  $r$  (la distanza del punto in questione dall'origine) e  $\theta$  (l'angolo orientato tra la congiungente punto-origine e l'asse  $x$ ), come indicato in Figura 1.

Risulta immediato verificare che è sempre possibile passare da coordinate polari a cartesiane mediante le relazioni:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

Osserviamo che questa operazione non è altro che un cambio della base, ossia del sistema di versori, che utilizziamo per rappresentare i nostri vettori nel piano: se prima i nostri versori erano  $\hat{x}$  ed  $\hat{y}$  (vettori di modulo 1 diretti rispettivamente lungo l'asse  $x$  ed  $y$ ), ora abbiamo scelto di considerare  $\hat{r}$  (il versore radiale, un vettore di modulo 1 diretto lungo la congiungente origine-punto) ed  $\hat{\theta}$  (sempre di modulo 1, che possiamo considerare perpendicolare a  $\hat{r}$  e diretto in modo che il verso positivo sia quello antiorario).

In quest'ottica facciamo attenzione a non confonderci tra le *componenti* e i *versori*: questi ultimi, caratterizzati dalla notazione “ $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$ ”, sono vettori e ci dicono “in che direzione ci stiamo muovendo” per trovare il punto, mentre le prime “ $x$ ,  $y$ ,  $r$ ,  $\theta$ ” sono degli scalari che ci dicono “di quanto ci muoviamo” in ciascuna direzione.

### 1.2 Posizione, Velocità e Accelerazione in Coordinate Polari

Per come abbiamo definito le coordinate polari risulta molto semplice scrivere in componenti il vettore posizione:

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

dove  $r$  è lo scalare che ci indica di quanto ci siamo allontanati dall'origine e  $\hat{r}$  ci dice in che direzione.

Ora vorremmo calcolarne le derivate temporali per ricavare velocità e accelerazione<sup>1</sup>. Dato che i versori non sono costanti come  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  nel fare le derivate dovremo tener conto anche delle

<sup>1</sup>Utilizzeremo un puntino sopra ad una variabile per indicare le derivate rispetto al tempo, secondo la notazione  $\dot{x} \equiv dx/dt$ .

derivate dei versori (vedi Appendice A). Calcoliamo quindi:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{z} \times \hat{r}\end{aligned}$$

Ossia, sviluppando  $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (1.1)$$

Derivando ulteriormente la velocità si ottiene l'accelerazione espressa in coordinate polari:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{z} \times \hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\hat{z} \times \hat{\theta} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}$$

Quindi, quando si ha tra le mani un problema di dinamica, bisogna risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_\theta \end{cases} \quad (1.2)$$

che corrisponde proprio alla seconda legge di Newton ( $m\vec{a} = \vec{F}$ ).

## SEZ. 2 — GRAVITÀ NEWTONIANA

La base di partenza per descrivere il moto dei pianeti è la legge di gravitazione universale, che esprime la forza di attrazione tra due masse poste ad una certa distanza

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

Mettiamoci nell'ipotesi in cui una delle due masse sia molto più grande dell'altra ( $M \gg m$ ), in modo da interessarci solo al moto della seconda (ad esempio, se consideriamo l'attrazione tra un satellite e la Terra, quest'ultima può considerarsi ferma). In questo modo possiamo fissare l'origine del sistema di coordinate nel centro del corpo grande. Eliminando i pedici, la forza agente sul corpo piccolo potrà scriversi come

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Questa è una *forza centrale*, quindi dotata della sola componente radiale e tale che questa dipenda solo da  $r$ , e come tutte le forze centrali è conservativa e quindi ammette un potenziale, esprimibile come

$$U = -\frac{GMm}{r} \equiv -\frac{\alpha}{r}$$

### 2.1 Leggi di Keplero

A partire da queste semplici relazioni è possibile ricavare le famose *Leggi di Keplero*, che recitano

1. Le orbite descritte dai pianeti sono delle ellissi, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro dei pianeti descrive aree uguali in tempi uguali.
3. I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo dei semiassi maggiori delle rispettive ellissi.

La prima legge stabilisce il tipo di traiettoria percorsa dai pianeti. Per i pianeti del sistema solare sono solo ellissi, ma nel caso generale, come poi dimostreremo, le orbite possibili sono delle coniche<sup>2</sup>.

L'equazione generale delle coniche in coordinate polari è

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (2.1)$$

dove  $l$  è un parametro con le dimensioni di una lunghezza e  $\epsilon$  è l'eccentricità dell'orbita, che vale

- $\epsilon = 0$  per le circonferenze;
- $0 < \epsilon < 1$  per le ellissi;
- $\epsilon = 1$  per le parabole;
- $\epsilon > 1$  per le iperboli.

---

<sup>2</sup>circonferenze, ellissi, parabole, iperboli; figure ottenibili sezionando un cono con un piano.

## 2.2 Quantità Conservate

Durante il moto di un pianeta in campo gravitazionale, sono tre le quantità che si conservano:

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{\alpha}{|\vec{r}|} \quad \text{Energia Meccanica}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad \text{Momento Angolare}$$

$$\vec{A} = m\vec{v} \times \vec{L} - m\alpha\hat{r} \quad \text{Vettore di Lenz}$$

L'energia meccanica si conserva perché la forza gravitazionale è una forza conservativa e sul sistema non agiscono forze dissipative. Il momento angolare si conserva perché la forza gravitazionale è radiale e quindi non produce alcun momento torcente sul sistema. Osserviamo inoltre che la conservazione del momento angolare è in “modulo direzione e verso”, questo implica necessariamente che il moto nello spazio tridimensionale sarà vincolato su un solo piano, perpendicolare alla direzione del momento angolare.

Prima di passare a discutere la terza quantità conservata, vale la pena sfruttare la conservazione di  $E$  e  $\vec{L}$  per caratterizzare le orbite chiuse, cioè ellissi e circonferenze.

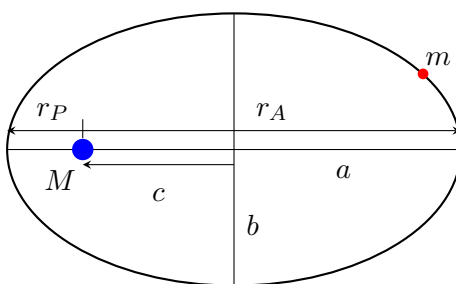


Figura 2: Satellite in moto su un'orbita ellittica di semiassi  $a$  e  $b$ .

Sfruttando la conservazione dell'energia e del momento angolare tra l'afelio e il perielio, possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{\alpha}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{\alpha}{r_P}$$

$$L = mr_A v_A = mr_P v_P \longrightarrow v_P = v_A \frac{r_A}{r_P}$$

dove  $r_A$  e  $r_P$  sono rispettivamente la massima e minima distanza dal corpo attrattore, tali che

$$r_A + r_P = 2a \quad r_A - r_P = 2c \quad a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = r_A r_P$$

Ricavando  $v_P$  dalla conservazione del momento angolare e sostituendola nella conservazione dell'energia, otteniamo:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 \left(1 - \frac{r_A^2}{r_P^2}\right) = \alpha \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = \alpha \left(\frac{r_P - r_A}{r_A}\right) \frac{r_P}{r_P^2 - r_A^2}$$

Avendo trovato un'espressione per l'energia cinetica all'afelio, possiamo usarla per trovare l'energia meccanica totale

$$E = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{\alpha}{r_A} = \frac{\alpha}{r_A} \left(\frac{r_P}{r_P + r_A} - 1\right) = -\frac{\alpha}{2a}$$

che, ovviamente, è indipendente dal punto dell'ellisse in cui ci troviamo. Notiamo inoltre che  $E < 0$ , caratteristica, come vedremo, di ogni traiettoria limitata in campo gravitazionale. Notiamo che nel limite di circonferenza  $a \rightarrow R$  e l'energia è proprio quella di un satellite in moto circolare uniforme attorno al corpo attrattore. Per quanto riguarda il momento angolare, invece, possiamo scrivere

$$L = mr_A v_A = \sqrt{2m\alpha \frac{r_A r_P}{r_P + r_A}} = \sqrt{2m\alpha \frac{b^2}{2a}} = b\sqrt{\frac{m\alpha}{a}}$$

Notiamo che nel caso di ellisse degenera (ovvero il segmento orizzontale di lunghezza  $2a$ ) il momento angolare è nullo. Ciò ha senso perché il moto avviene lungo una retta, quindi il prodotto scalare tra raggio vettore e quantità di moto è sempre nullo.

L'ultima quantità conservata è la più esotica tra le tre. Essa, come è chiaro dalla sua espressione, è necessariamente collocata sul piano dell'orbita. Vedremo a breve che il vettore di Lenz è legato all'eccentricità dell'orbita percorsa dal pianeta. Per mostrare che il vettore di Lenz è una costante del moto, dimostriamo che la sua derivata rispetto al tempo è nulla. Sfruttiamo il fatto che  $\vec{L}$  è a sua volta una costante del moto:

$$0 = \frac{d\vec{A}}{dt} = m \frac{d(\vec{v} \times \vec{L} - \alpha \hat{r})}{dt} \iff \alpha \dot{\hat{r}} = \vec{a} \times \vec{L}$$

Usando l'espressione della forza gravitazionale, la definizione di momento angolare, le proprietà del prodotto vettoriale e l'espressione della velocità in coordinate polari, troviamo la seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{L} &= \left( \frac{-\alpha}{mr^2} \hat{r} \right) \times (m\vec{r} \times \vec{v}) = -\frac{\alpha}{r} (\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{v})) = -\frac{\alpha}{r} (\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\hat{r} \cdot \hat{r})) = \\ &= -\frac{\alpha}{r} (\hat{r}\dot{r} - \vec{v}) = \frac{\alpha}{r} (r\dot{\hat{r}}) = \alpha \dot{\hat{r}} \end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione della conservazione del vettore di Lenz.

## 2.3 Equazione delle Orbite

Sfruttando la conservazione del vettore di Lenz, è possibile ricavare l'equazione delle possibili orbite percorribili dai satelliti. Consideriamo il seguente prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \theta$$

dove l'angolo  $\theta$  è preso dall'asse  $x$  che è scelto parallelo ad  $\vec{A}$ , cosa che possiamo fare se  $\vec{A}$  è conservato. Dalla definizione di  $\vec{A}$  segue che

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (m\vec{v} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - m\alpha \hat{r} \cdot \vec{r} = (m\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{L} - m\alpha r = \vec{L} \cdot \vec{L} - m\alpha r = L^2 - m\alpha r$$

Questo ci conduce all'espressione finale

$$\begin{aligned} Ar \cos \theta &= L^2 - m\alpha r \\ \implies r(\theta) &= \frac{L^2}{m\alpha + A \cos \theta} = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \theta} \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso il modulo del vettore  $\vec{A}$  sfruttando la perpendicolarità di  $\vec{v}$  e  $\vec{L}$ :

$$\begin{aligned} \vec{A}^2 &= m^2 \alpha^2 - 2m^2 \alpha \hat{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{L}) + m^2 (\vec{v} \times \vec{L})^2 = m^2 \alpha^2 - \frac{2m\alpha L^2}{r} + m^2 v^2 L^2 \\ &= m^2 \alpha^2 + 2mL^2 \left( -\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2} m v^2 \right) = m^2 \alpha^2 + 2mEL^2 \end{aligned}$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione per  $r(\theta)$ , otteniamo

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \theta} \quad (2.2)$$

Mettendo a confronto le equazioni (2.1) e (2.2) notiamo che i parametri dell'orbita possono scriversi come

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GMm)^2 m}}$$

Osservando l'espressione dell'eccentricità, notiamo che l'unica quantità che può essere negativa all'interno della radice è l'energia  $E$ . Questo ci porta alla seguente caratterizzazione delle orbite in base all'energia meccanica totale

- $E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}$  per orbite circolari;
- $-\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} < E < 0$  per orbite ellittiche;
- $E = 0$  per orbite paraboliche;
- $E > 0$  per orbite iperboliche.

Per casi diversi dal caso Newtoniano, ma comunque caratterizzati da potenziali centrali, è possibile ricavare un'equazione differenziale utile quando l'aspetto temporale del problema non è rilevante, che chiameremo *Equazione delle Orbite*. Per ricavarla consideriamo la conservazione dell'energia e utilizziamo la *chain rule* e la conservazione del momento angolare:

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r),$$

$$\dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta},$$

ottenendo

$$\frac{L^2}{2m} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E.$$

Questa equazione è solitamente espressa in termini della variabile  $u = \frac{1}{r}$  che risulta più comoda in molti casi. Vediamo che l'equazione diventa

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2m(E - U)}{L^2}, \quad (2.3)$$

Questa equazione può essere integrata per ottenere un'equazione implicita delle orbite; inoltre può essere usata per ricavare l'angolo orbitale  $\Delta\theta$  tra due momenti successivi di massimo di  $r$ . questo angolo è ottenuto integrando rispetto a  $u$  da  $u_{\min}$  a  $u_{\max}$  e moltiplicando per 2 per simmetria. Otteniamo quindi

$$\Delta\theta = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2m(E-U)}{L^2} - u^2}} \quad (2.4)$$

## SEZ. 3 — POTENZIALE EFFICACE

In questa sezione vedremo una tecnica grazie alla quale studiare qualitativamente le orbite anche in casi in cui il potenziale sia più complicato del caso newtoniano senza essere costretti a risolvere Equazione 2.3 per ottenere la forma esplicita dell'orbita.

### 3.1 Togliere una Dimensione

Fino ad ora abbiamo trattato un problema tridimensionale come se fosse bidimensionale sfruttando la conservazione di direzione e verso del momento angolare. Vediamo ora come sfruttare la conservazione del modulo del momento angolare possiamo passare a studiare un problema unidimensionale.

Considereremo una generica forza centrale, a cui è associata un'energia potenziale  $U(r)$ . Come prima avremo la conservazione di Energia Meccanica e Momento Angolare, ma per potenziali diversi in generale non avremo più la conservazione del Vettore di Lenz.

Esprimendo l'energia e il momento angolare in coordinate polari possiamo sfruttare la conservazione di  $L$  per eliminare  $\theta$  dalle equazioni:

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r)$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\hat{z} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

dove nell'ultimo passaggio si è definito il potenziale efficace:

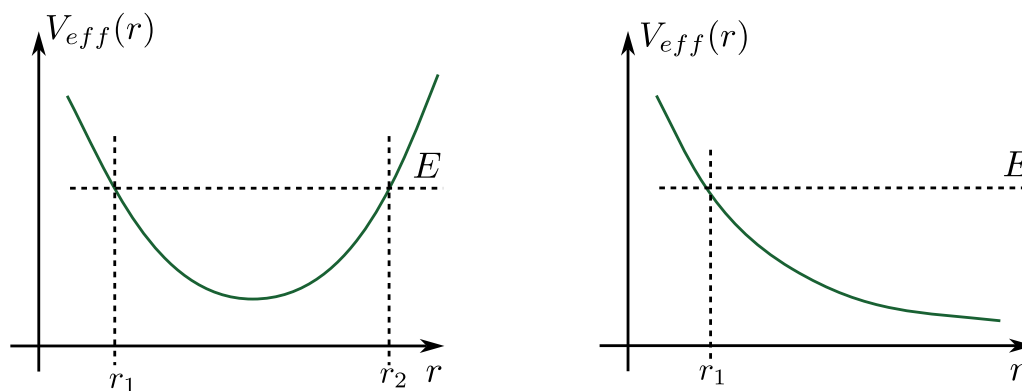
$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

Ci siamo quindi ridotti a studiare il moto di una particella di massa  $m$  in una direzione sotto l'effetto di un potenziale  $V_{\text{eff}}(r)$ .

### 3.2 Considerazioni Qualitative sui tipi di Orbita

Ora che dobbiamo solo studiare il moto unidimensionale, vediamo che risulta semplice stabilire quali potenziali danno origine ad orbite chiuse o aperte e per quali livelli di energia.

Ad esempio per i seguenti potenziali:

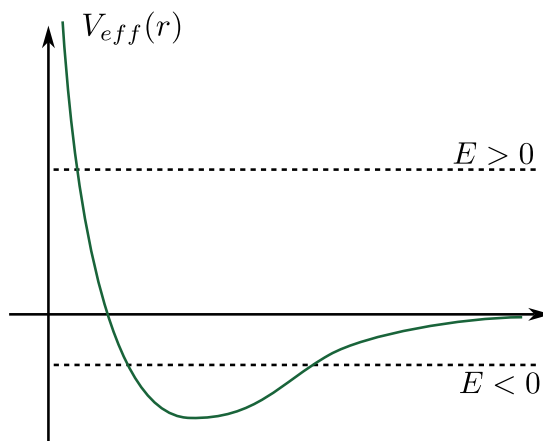


è evidente che nel primo caso saranno possibili orbite chiuse ma non orbite aperte e nel secondo caso saranno possibili solo orbite aperte.

Per forme generiche del potenziale efficace la situazione potrebbe variare al variare di  $E$ . In ogni caso i punti di intersezione tra  $E$  e  $V_{\text{eff}}$  corrispondono ai raggi in cui la componente radiale dell'energia cinetica è nulla, e quindi ad un *punto di inversione* dell'orbita (raggio massimo o raggio minimo).

Vediamo come secondo esempio il caso della gravità Newtoniana per riottenere molto velocemente i risultati ottenuti in precedenza.

Il potenziale efficace tende a  $0^-$  per  $r \rightarrow \infty$  e tende a  $\infty$  per  $r \rightarrow 0^+$ . quindi qualitativamente sarà:



Osserviamo che  $E \geq 0$  ha una sola intersezione (corrispondente alla distanza minima dall'origine) e quindi le orbite possono solo essere aperte, in effetti sappiamo che in questi casi le orbite sono iperboli o parabole nel caso  $E = 0$ . Per tutti i casi  $E < 0$  si ottengono orbite limitate<sup>3</sup>, e le intersezioni corrispondono a massima e minima distanza.

L'energia minima si ha in corrispondenza del minimo di  $V_{\text{eff}}(r)$ ; dato che in questo caso distanza minima e massima coincidono si deduce che questo corrisponde al caso di orbita circolare. Osserviamo che se il potenziale efficace avesse dei massimi potrebbero esistere anche orbite circolari in corrispondenza dei massimi, in questo caso però l'orbita non sarebbe *stabile*.

Nel caso in cui le intersezioni tra  $E$  e  $V_{\text{eff}}$  siano più di 2 significa che per una data energia possono esistere più situazioni a seconda delle condizioni iniziali. Nella seconda parte della lezione vedremo un caso in cui questo può succedere.

<sup>3</sup>Vedremo dopo che in generale non è possibile concludere che sono anche chiuse se non nel caso di potenziale gravitazionale e armonico.

## SEZ. 4 — TEOREMA DI BERTRAND

Vogliamo ora dimostrare che gli unici potenziali centrali in cui tutte le orbite limitate sono chiuse sono il potenziale Newtoniano  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  (con  $\alpha > 0$ ) e il potenziale armonico  $U(r) = \frac{kr^2}{2}$  (con  $k > 0$ ). Questo risultato è noto come *Teorema di Bertrand*.

### 4.1 Piccole Oscillazioni Attorno a Orbite Circolari

Consideriamo le orbite circolari nel caso di un potenziale generico  $U(r)$ . Utilizzando il formalismo del potenziale efficace il raggio dell'orbita circolare si trova imponendo<sup>4</sup>:

$$V'_{\text{eff}}(r_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{L^2}{mr_0^3} = U'(r_0). \quad (4.1)$$

Se ci troviamo in un'orbita *stabile*, per cui  $V''_{\text{eff}}(r_0) > 0$  allora l'oggetto percorrerà una traiettoria oscillante attorno all'orbita perturbata. Le oscillazioni saranno di frequenza angolare<sup>5</sup>

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''_{\text{eff}}(r_0)}{m}} \quad (4.2)$$

che va confrontata con la frequenza angolare dell'orbita

$$\omega_\theta = \frac{L}{mr_0^2}.$$

Calcolando il rapporto tra le due pulsazioni si ottiene la seguente formula:

$$\eta = \frac{\omega_r}{\omega_\theta} \approx \sqrt{3 + \frac{mr_0^4 U''(r_0)}{L^2}} = \sqrt{3 + \frac{r_0 U''(r_0)}{U'(r_0)}} \quad (4.3)$$

Che per il caso del potenziale newtoniano si riduce a  $\eta = 1$  e nel caso del potenziale armonico si riduce a  $\eta = 2$ . In generale possiamo stimare la precessione dell'orbita calcolando l'angolo orbitale spazzato tra due punti consecutivi di massimo di  $r$ . L'angolo di precessione sarà dato da<sup>6</sup>:

$$\delta\theta = \omega_\theta T_r - 2\pi = \omega_\theta \frac{2\pi}{\omega_r} - 2\pi = 2\pi \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right). \quad (4.4)$$

### 4.2 Dimostrazione del Teorema di Bertrand

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per dimostrare il teorema. Osserviamo prima di tutto che la condizione per avere un'orbita circolare perturbata che sia chiusa è che il rapporto tra l'angolo di precessione e l'angolo giro sia un numero razionale. Una condizione equivalente è che sia razionale  $\eta$ , ovvero sia  $\eta = \frac{p}{q}$ , con  $p, q \in \mathbb{N}_0$ .

Poiché orbite "vicine" si possono ottenere perturbando successivamente un'orbita data in maniera continua (ad esempio, variando in maniera continua l'energia  $E$  e il momento angolare  $L$ ), anche il parametro  $\eta$  dovrà variare in modo continuo.

Tuttavia, affinché  $\eta$  resti razionale per ogni orbita, l'unica possibilità è che tutte le orbite in un dato potenziale siano caratterizzate dallo stesso  $\eta$ .

<sup>4</sup>Osserviamo inoltre che questa condizione implica che le orbite circolari esistono solo se il potenziale non è sempre decrescente.

<sup>5</sup>Dimostrazione della formula in Appendice B.

<sup>6</sup>Sottraendo  $2\pi$  per convenzione.

Per le orbite simil-circolari che stiamo considerando<sup>7</sup>, si ha Equazione 4.3 che può essere invertita e integrata ottenendo:

$$\frac{1}{r}(\eta^2 - 3) = \frac{U''}{U'} \Rightarrow U'(r) = kr^{\eta^2-3} \Rightarrow U(r) = \frac{k}{\eta^2-2} r^{\eta^2-2}.$$

dove si è usato il fatto che sicuramente  $\eta \neq \sqrt{2}, \sqrt{3}$ ,  $k$  è una costante di integrazione e si è posta a zero una costante additiva irrilevante nel potenziale nella seconda integrazione.

Osserviamo che deve essere necessariamente  $k > 0$  per via della condizione sull'esistenza di orbite circolari. Abbiamo ora due situazioni distinte a seconda del segno di  $\eta^2 - 2$ , quantità che per comodità chiameremo d'ora in poi  $\beta$ .

§ 4.2.1. **Caso**  $\beta > 0$ . — Possiamo studiare il limite  $E \rightarrow +\infty$  a  $L$  fissato. Integrando l'equazione delle orbite come in (2.4), troviamo

$$\Delta\theta = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{2mk}{L^2\beta u^\beta} - u^2}},$$

dove  $u_{\min}$  e  $u_{\max}$  sono radici del denominatore<sup>8</sup>. Per  $E \rightarrow +\infty$  con  $L$  fissato, si ha  $u_{\min} \rightarrow 0$  e  $u_{\max} \rightarrow \frac{\sqrt{2mE}}{L} \equiv w$ , dunque dopo alcune sostituzioni si vede che l'integrale tende a

$$\Delta\theta = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{w^2 - \frac{w^2}{E\beta u^\beta} - u^2}} = 2 \int_{\frac{u_{\min}}{w}}^{\frac{u_{\max}}{w}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{E\beta x^\beta w^\beta} - x^2}} \simeq 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Imponendo quindi la condizione (4.4) sull'angolo di precessione si ottiene:

$$\delta\theta = \Delta\theta - 2\pi = -\pi \quad \rightarrow \quad \eta = 2 \quad \rightarrow \quad U(r) = \frac{kr^2}{2}.$$

§ 4.2.2. **Caso**  $\beta < 0$ . — Per  $\beta < 0$ , e quindi  $-2 < \beta < 0$  per definizione, guardiamo, a  $L$  fissato, il limite per  $E \rightarrow 0^-$ . In tale limite si ha  $u_{\min} \rightarrow 0^+$  e  $u_{\max} \rightarrow \left(-\frac{2mk}{L^2\beta}\right)^{\frac{1}{2+\beta}} = u_0$ , e, con sostituzioni simili al caso precedente<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &\rightarrow 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{\frac{u_0^{2+\beta}}{u^\beta} - u^2}} = 2 \int_0^1 \frac{\gamma x^{\gamma-1} dx}{\sqrt{\frac{1}{x^{\beta\gamma}} - x^{2\gamma}}} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\gamma x^{-1+\frac{2\gamma+\beta\gamma}{2}} dx}{\sqrt{1-x^{2\gamma+\beta\gamma}}} = \frac{4}{2+\beta} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\pi}{2+\beta} = \frac{2\pi}{\eta^2}. \end{aligned}$$

Imponendo ora la condizione (4.4) sull'angolo di precessione si ottiene:

$$\delta\theta = \Delta\theta - 2\pi = 2\pi \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right) \quad \rightarrow \quad \eta = \eta^2 = 1 \quad \rightarrow \quad U(r) = -\frac{k}{r}$$

Poiché i due casi precedenti sono anche gli unici possibili il Teorema è dimostrato.

<sup>7</sup>Ci si potrebbe chiedere se la richiesta che esistano orbite circolari sia legittima, ossia se così facendo non stiamo forse escludendo potenziali che non ammettono orbite circolari ma in cui tutte le orbite limitate risulterebbero chiuse. Per vedere che ciò non può succedere, ragioniamo come segue. I potenziali che stiamo escludendo, come visto, sono quelli tali che  $U'(r) \leq 0$ . Supponiamo che un tale potenziale ammetta un'orbita limitata e chiusa. Nel punto di massimo avvicinamento sarà  $\dot{r} = 0$ . Scrivendo la componente radiale dell'equazione del moto, abbiamo  $\ddot{r} = \dot{\theta}^2 r - U'(r) \geq 0$ , pertanto, con la condizione iniziale  $r = r_0$ ,  $\dot{r} = 0$ , otteniamo una soluzione tale che  $r \rightarrow +\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$ , a meno che non sia identicamente  $\dot{\theta} = 0$  e  $U'(r_0) = 0$ . Tuttavia, questa situazione corrisponde a un'orbita banale in cui la particella resta ferma nella posizione iniziale, che dunque non ci interessa.

<sup>8</sup>Vedi Equazione 2.3 e considera che  $u_{\min/\max}$  sono tali che  $\frac{du}{d\theta} = 0$

<sup>9</sup>Per fare l'integrale conviene operare la sostituzione  $u = u_0 x^{\frac{2+\beta}{2}}$  nel testo è riportato un modo per ricavare il giusto esponente della sostituzione usando  $u = u_0 x^\gamma$ , con  $\gamma$  esponente generico, e notando che la semplificazione avviene per  $2\gamma + \beta\gamma = 2$ .

## SEZ. 5 — TEOREMA DEL VIRIALE

Dato un sistema di  $n$  particelle puntiformi, consideriamo la quantità

$$I(t) \equiv \sum_{i=1}^n m_i |\vec{r}_i(t)|^2$$

dove  $m_i$  e  $\vec{r}_i(t)$  sono la massa e la posizione della particella  $i$ -esima. Se le particelle e l'origine sono tutte sullo stesso piano,  $I$  è il momento d'inerzia del sistema lungo l'asse perpendicolare a tale piano e passante per l'origine. Calcoliamone le derivate rispetto al tempo:

$$G \equiv \frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) = 2 \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d^2 I}{dt^2} = 2 \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i) = 2 \sum_{i=1}^n m_i (\ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i)$$

In quest'ultima espressione riconosciamo l'espressione della forza risultante agente sulla particella  $i$ -esima,  $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$ , e dell'energia cinetica totale

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2,$$

quindi

$$\frac{1}{2} \frac{dG}{dt} = 2K + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i. \quad (5.1)$$

Data una generica quantità  $A(t)$ , la sua media temporale su un intervallo di tempo  $\Delta t$  è definita da

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} A(t) dt,$$

in cui abbiamo scelto convenzionalmente di far cominciare l'intervallo dal tempo  $t = 0$ . Prendendo la media temporale dell'Equazione 5.1, si ottiene

$$\frac{1}{2\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{dG}{dt} dt = \langle 2K + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle$$

$$\frac{G(\Delta t) - G(0)}{2\Delta t} = 2\langle K \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle$$

In diversi casi, il termine a sinistra si annulla. Questo succede ad esempio se il moto è periodico di periodo  $\Delta t$ , dato che  $G$  è funzione delle posizioni e delle velocità delle particelle. Più in generale, è sufficiente che  $G(t)$ , durante l'evoluzione del sistema, vari tra un valore massimo e uno minimo affinché il primo membro si annulli nel limite  $\Delta t \rightarrow +\infty$ ; dall'espressione per  $G$  scritta precedentemente, è chiaro che questa condizione è soddisfatta, ad esempio, da sistemi stabilmente legati in cui le velocità delle particelle non divergono.

Il teorema del viriale, nella sua forma più generale, è dunque

$$2\langle K \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle = 0$$

Restringiamoci adesso al caso di  $n$  particelle interagenti a coppie unicamente attraverso un potenziale proporzionale alla potenza  $\nu$ -esima della distanza reciproca:

$$U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \alpha_{ij} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^\nu.$$

La forza agente sulla particella  $i$  causata da  $j$  è pari a

$$F_{ij} = -\alpha_{ij}\nu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{\nu-2}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\alpha_{ij}\nu r_{ij}^{\nu-2}(\vec{r}_i - \vec{r}_j),$$

dove chiaramente, per il principio di azione e reazione,  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ .

Possiamo, quindi, riscrivere

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \sum_{j \neq i} -\alpha_{ij}\nu r_{ij}^{\nu-2}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \\ &= -\sum_{j>i} \alpha_{ij}\nu r_{ij}^{\nu-2} [\vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{r}_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)] = \\ &= -\sum_{j>i} \alpha_{ij}\nu r_{ij}^{\nu-2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = -\nu \sum_{j>i} \alpha_{ij}\nu r_{ij}^{\nu} = -\nu U, \end{aligned}$$

dove  $U$  indica l'energia potenziale totale del sistema. Il teorema del viriale assume, quindi, la seguente forma:

$$2\langle K \rangle = \nu\langle U \rangle.$$

Diamo un'occhiata al teorema del viriale nei due casi più importanti di potenziali centrali con una sola particella.

- Se il potenziale è armonico,  $\nu = 2$ , cioè  $\langle K \rangle = \langle U \rangle$ . Questa conclusione è ovvia nel caso unidimensionale, perché il quadrato della posizione e il quadrato della velocità sono due funzioni sinusoidali shiftate di un quarto di periodo, e le energie cinetica e potenziale oscillano tra gli stessi massimi e minimi (basta considerare i punti di inversione del moto e quello di massima velocità). La conclusione, invece, non è ovvia nel caso a più dimensioni con orbite non circolari.
- Se il potenziale è quello Newtoniano,  $\nu = -1$ , cioè  $\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle$ . Questa relazione si può ottenere facilmente nel caso di orbita circolare, in cui le due energie sono costanti nel tempo, mentre risulta non ovvia nel caso di orbite ellittiche.

## 5.1 Applicazione 1

Una applicazione interessante è stimare la temperatura al centro del sole. Una sfera ha energia gravitazionale:

$$\langle U \rangle = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (5.2)$$

Inoltre, dalla cinetica dei gas sappiamo che vale

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} nk_B T \quad (5.3)$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann. Approssimando le particelle del sole a nuclei di idrogeno (di massa  $m_H$ ) si ha  $n \approx M/m_H$ . Usando il teorema del Viriale si ottiene:

$$\frac{3}{2} \frac{M}{m_H} k_B T = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R} \quad (5.4)$$

dopo alcune manipolazioni algebriche si trova:

$$T = \frac{1}{5} \frac{Gm_H M}{k_B R} \approx 10^7 K \quad (5.5)$$

dove si sono usati i valori  $m_H \approx 1.7 \cdot 10^{-27} kg$ ,  $M \approx 2 \cdot 10^{30} kg$ ,  $R \approx 7 \cdot 10^8 m$ . La stima ottenuta è molto buona (più dell'ordine di grandezza). Il teorema del Viriale, pertanto, è uno strumento potente in molte situazioni (astrofisiche e non) in cui si vogliono fare delle stime preliminari.

## 5.2 Applicazione 2

Il teorema del viriale può anche essere utilizzato per fornire una stima della massa di un ammasso di galassie. Consideriamo un'ammasso di  $N$  galassie, ciascuna di massa  $m$ , in modo che la massa totale valga  $M = Nm$ . Una stima molto brutale dell'energia potenziale dell'ammasso è data da

$$\langle U \rangle \approx -\frac{GM^2}{R},$$

dove  $R$  indica il raggio dell'ammasso.

L'energia cinetica media del sistema è data da

$$\langle K \rangle \approx N \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{M \langle v^2 \rangle}{2},$$

dove  $\langle v^2 \rangle$  sta a indicare la velocità quadratica media delle galassie rispetto al centro di massa dell'ammasso. Dal teorema del viriale applicato al potenziale gravitazionale otteniamo che

$$\langle U \rangle = -2\langle K \rangle \implies M \approx \frac{R \langle v^2 \rangle}{G}.$$

Questa stima è decisamente maggiore del valore ottenuto attraverso altre analisi, ad esempio misurando la luminosità delle galassie. Questa è una evidenza dell'esistenza della materia oscura, cioè di materia che non emette onde elettromagnetiche. Un altro contesto in cui la materia oscura gioca un ruolo fondamentale è nell'evoluzione dell'Universo e in particolare nella formazione delle galassie stesse.

## SEZ. 6 — CORREZIONE POTENZIALE EFFICACE —

Il potenziale efficace che abbiamo ottenuto per la gravità è quello della Meccanica Classica di Newton.

La Meccanica di Newton è una **teoria approssimata** ma funziona bene nell'ambito in cui è stata scoperta. Descrive con molta precisione corpi che hanno energie abbastanza piccole da muoversi molto più lentamente della luce e densità abbastanza bassa da non generare campi gravitazionali troppo intensi; quando queste ipotesi vengono meno bisogna ricorrere a una nuova teoria, formulata da Einstein: la **Relatività Generale**.

La Relatività ci fornisce un potenziale efficace modificato <sup>10</sup> (non lo dimostreremo):

$$V_{eff} = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{mc^2r^3} \quad (6.2)$$

Questo significa che la teoria classica “è predittiva” fin quando il termine aggiuntivo è trascurabile rispetto ai termini classici, cioè quando gli oggetti in gioco hanno densità piccole ( $M/r^3$  piccolo, per esempio nel caso di Sole e Terra) e non si muovono troppo velocemente ( $L^2$  piccolo). Se però osserviamo il sistema per molto tempo, la piccola correzione “si accumula”, dando contributi significativi.

### 6.1 La precessione del perielio

Un fenomeno nel Sistema Solare che evidenzia la presenza di questo termine è la **precessione del perielio nell'orbita dei pianeti**. Se l'orbita di un pianeta fosse perfettamente ellittica, la retta congiungente il perielio e l'afelio starebbe ferma. Se invece osserviamo i corpi celesti, per esempio Mercurio <sup>11</sup>, la retta che li congiunge ruota <sup>12</sup> a causa del termine aggiuntivo e su tanti periodi la variazione angolare è osservabile. La precessione del perielio di Mercurio fu una delle prime evidenze sperimentali della Relatività Generale.

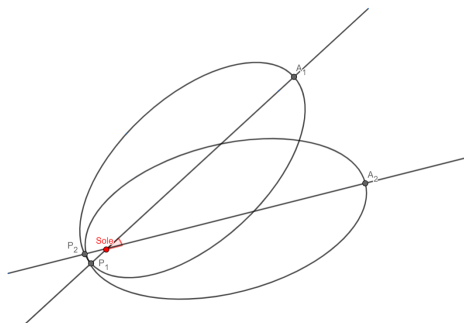


Figura 3: Precessione del Perielio.

Si vuole stimare quantitativamente la precessione del perielio di Mercurio. Per farlo è utile usare la conservazione dell'energia e la formula del modulo del momento angolare:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= mr^2\dot{\theta} \\ \tilde{E} &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \end{aligned}$$

<sup>10</sup>In questo caso l'approssimazione  $M \gg m$  è fondamentale, non è solo una comodità; il motivo principale è che l'equazione di campo di Einstein, cioè l'analogo relativistico della formula

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} \quad (6.1)$$

è non lineare.

<sup>11</sup>Il caso di Mercurio è rilevante perché, essendo il pianeta più vicino al Sole, è quello in cui la correzione relativistica, proporzionale a  $1/r^3$ , è più importante.

<sup>12</sup>Questo ce lo aspettiamo dato che il potenziale stavolta non rientra nei casi del teorema di Bertrand.

$\tilde{L}$  e  $\tilde{E}$  sono l'usuale momento angolare e l'usuale energia (l'uso della tilde è solo per comodità), d'ora in avanti  $c = 1$ . Per trovare di quanto varia l'angolo rispetto all'orbita chiusa ci serve  $r(\theta)$ , pertanto è utile riscrivere  $\dot{r}$  in funzione di  $r' = \frac{dr}{d\theta}$ :

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = r' \dot{\theta} = r' \frac{L}{r^2} \quad (6.3)$$

dove  $L = \tilde{L}/m$  e dove si è usata l'equazione del momento angolare nell'ultima uguaglianza. Sostituendo nell'equazione dell'energia e usando  $E = \tilde{E}/m$ , dopo semplici manipolazioni algebriche si ottiene:

$$r'^2 - \frac{2GM}{L^2} r^3 + r^2 - 2GM/r = \frac{2E}{L^2} r^4 \quad (6.4)$$

A questo punto è utile riscriverla in termini di  $x = \frac{L^2}{GM r}$ ; si ottiene:<sup>13</sup>

$$x'^2 - 2x + x^2 - \frac{2G^2 M^2}{L^2} x^3 = \frac{2EL^2}{G^2 M^2} \quad (6.6)$$

L'idea è renderla una equazione differenziale del secondo ordine (in questo modo la dipendenza dai termini derivativi diventa lineare), derivando rispetto a  $\theta$  e semplificando si ha:

$$x'' - 1 + x = \frac{3G^2 M^2}{L^2} x^2 \quad (6.7)$$

la correzione è piccola se il termine  $\alpha = \frac{3G^2 M^2}{L^2} \ll 1$ , che è sicuramente vero nel caso di Mercurio. Vogliamo sfruttare il fatto che questa è una piccola correzione, per trovare una soluzione che tenga conto dell'effetto di precessione del perielio al primo ordine non banale in  $\alpha$ . Studiamo preliminarmente l'ordine zero, in cui  $\alpha \approx 0$ . L'equazione differenziale da risolvere è  $x'' + x = 1$ , la cui soluzione è  $x_0 = 1 + e \cos \theta$ , dove  $e$  è l'eccentricità, pertanto abbiamo ritrovato la solita equazione Newtoniana.

Dato che la correzione è piccola una strategia è scrivere la soluzione generale come  $x = x_0 + x_1$ , dove  $x_0$  è la soluzione classica e  $x_1$  è la correzione, ci si aspetta che se  $\alpha \ll 1$ , allora  $x_1 \ll x_0$ . Sostituendo nell'equazione differenziale per  $x$  e trascurando i termini  $\alpha x_1$  si ottiene:

$$x_1'' + x_1 = \alpha \left[ 1 + e^2 \cos^2 \theta + 2e \cos \theta \right] \quad (6.8)$$

dove si è sostituita l'espressione esplicita di  $x_0$ .

L'equazione differenziale ottenuta è estremamente semplice rispetto alla precedente, perché è lineare nella funzione incognita. Ci interessa la soluzione particolare infatti quella omogenea è già inclusa in  $x_0$ , ed è stata fissata dalle condizioni iniziali. Utilizzando la seguente identità  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ , l'equazione differenziale diventa:

$$x_1'' + x_1 = \alpha \left[ 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^2 \cos 2\theta + 2e \cos \theta \right] \quad (6.9)$$

sfruttando la linearità dell'equazione differenziale si può trovare la soluzione particolare ragionando in maniera indipendente per i tre termini a secondo membro (e poi sommare le tre soluzioni). La soluzione particolare che risolve la costante è molto semplice  $x_1^{p1} = \alpha \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \right)$ . Per il secondo pezzo è sufficiente notare che  $\frac{d^2}{d\theta^2} \cos 2\theta + \cos 2\theta = -3 \cos 2\theta$  e quindi la soluzione particolare sarà  $x_1^{p2} = -\alpha \frac{1}{6} e^2 \cos 2\theta$ . Il terzo pezzo è il più complicato, ma anche il più importante. In questo caso

<sup>13</sup>Bisogna usare la seguente formula:

$$r' = \frac{d}{d\theta} \frac{L^2}{GMx} = -\frac{L^2}{GMx^2} x' \quad (6.5)$$

la soluzione particolare non si può trovare come prima usando  $\cos \theta$ , infatti  $\frac{d^2}{d\theta^2} \cos \theta + \cos \theta = 0$ . La soluzione particolare può essere trovata notando che  $\frac{d^2}{d\theta^2} \theta \sin \theta + \theta \sin \theta = 2 \cos \theta$  per cui fissando la costante opportunamente si ottiene  $x_1^{p3} = \alpha e \theta \sin \theta$ . Le prime due correzioni non causano nessuna precessione dato che sono periodiche. La terza invece causa una precessione che si accumula nel tempo. Per comodità ignoriamo le prime due correzioni e scriviamo la soluzione ottenuta al primo ordine in  $\alpha$ :

$$x = 1 + e \cos \theta + \alpha e \theta \sin \theta \approx 1 + e \cos (1 - \alpha) \theta \quad (6.10)$$

dove si è usato che al primo ordine in  $\alpha$  vale  $\cos (1 - \alpha) \theta = \cos \theta \cos \alpha \theta + \sin \theta \sin \alpha \theta \approx \cos \theta + \alpha \theta \sin \theta$ . Quindi in un giro si ha una differenza rispetto al caso Newtoniano (orbita chiusa) pari a (si è reinserita  $c$ )

$$\delta \theta = 2\pi - 2\pi(1 - \alpha) = \frac{6\pi G^2 M^2}{L^2 c^2} \approx \frac{6\pi GM}{c^2(1 - e^2)a} \quad (6.11)$$

dove si è usato che  $L^2 \approx GM(1 - e^2)a$ <sup>14</sup>. Un esempio numerico per il caso di Mercurio si ottiene usando i seguenti valori numerici:  $GM/c^2 \approx 1.5 \cdot 10^5 \text{ cm}$ ,  $a \approx 5.8 \cdot 10^{12} \text{ cm}$ ,  $e \approx 0.206$  per i quali si trova  $\delta \theta \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ rad/orbita}$ .

## 6.2 Buchi Neri

A questo punto è interessante fare un grafico del potenziale efficace il cui profilo tipico nel caso  $L > \frac{\sqrt{12GMm}}{c}$  è rappresentato in figura 4.

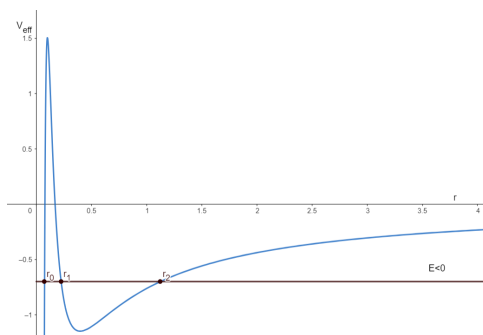


Figura 4: Grafico potenziale efficace completo.

Per fissare le idee prendiamo un'energia minore di zero e notiamo che le zone permesse sono due:

1.  $r_1 < r < r_2$ : questa è la situazione tipica nel moto dei pianeti (in cui l'unico effetto notevole è la precessione).
2.  $0 < r < r_0$ : questa invece è molto interessante, infatti, se ci troviamo in questa zona siamo destinati a cadere nel centro (pur avendo  $L > 0$ ).

Questo ci fa pensare alla **possibile esistenza di oggetti astrofisici da cui sia impossibile scappare quando ci si trova a distanza minore di  $r_s$** <sup>15</sup>. Chiamiamo questi corpi “**buchi neri**”. Attenzione però! Quello che abbiamo dimostrato dal grafico è solo che, avendo una certa energia fissata  $E$ , non possiamo scappare dalla buca che contiene  $r = 0$ , ma sembrerebbe che se avessimo a disposizione un motore potremmo aumentare l'energia fino a superare la barriera e fuggire verso l'infinito!

<sup>14</sup>Questa formula può essere dimostrata usando la conservazione dell'energia all'afelio e al perielio. Si utilizza la definizione di eccentricità  $e = c/a$ , dove  $c$  è la semi distanza focale e  $a$  il semi asse maggiore. L'approssimazione è dovuta al fatto che si trascura il termine correttivo (dovuto alla GR) che darebbe una correzione successiva in  $\alpha$ .

<sup>15</sup>“s” sta per Schwarzschild, cioè il fisico che ha trovato tale raggio. In particolare a lui si deve la soluzione dell'equazione di campo statica con simmetria sferica e carica nulla.

A questo punto arriva il colpo di scena: usando la Relatività Generale si può dimostrare che neanche avendo il motore più potente dell'universo sarebbe possibile sfuggire al buco nero una volta attraversato un bordo chiamato **orizzonte degli eventi**<sup>16</sup>. La Relatività Generale ci dimostra anche che considerazioni analoghe valgono per la luce, motivo per cui questi corpi si chiamano buchi neri (neanche la luce può uscire!).

Vogliamo calcolare  $r_s$  e per farlo ci serve un'idea fondamentale della Relatività: **non esiste nessun modo di trasportare informazione con velocità superiore alla velocità della luce**.

Immaginiamo di voler scappare da un certo oggetto: allora il modo migliore per farlo è usare tutta l'energia cinetica che abbiamo in direzione radiale (cioè con  $L = 0$ ). Inoltre, l'energia minima per scappare è l'energia potenziale all'infinito, ovvero zero. Imponendo questo, otteniamo quella che viene chiamata la **velocità di fuga**  $v_f$ , ovvero la velocità necessaria per sfuggire dall'attrazione gravitazionale di un corpo:

$$v_f^2 = \frac{2GM}{r} \quad (6.12)$$

Se la velocità massima che abbiamo a disposizione è quella della luce, non possiamo scappare quando  $v_f > c$ , da cui si ottiene:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (6.13)$$

che è proprio il famoso risultato ottenuto da Schwarzschild<sup>17</sup>.

Soffermiamoci su una questione importante che ci fa capire perché, ad esempio, il Sole non è un buco nero. In tutta la trattazione abbiamo utilizzato l'approssimazione di punto materiale, che è chiaramente falsa, ma sicuramente è ben sostituibile dall'approssimazione di Sole sferico. Per un oggetto a simmetria sferica vale il **teorema dei gusci**:

Una distribuzione di massa a simmetria sferica esercita su un punto materiale, che si trova fuori da essa, una forza uguale a quella che eserciterebbe un punto materiale nel centro della distribuzione con massa totale uguale a quella della distribuzione stessa.

In parole povere **se siamo fuori dal Sole, la forza gravitazionale di una sfera è uguale alla forza gravitazionale di un punto materiale**<sup>18</sup>.

Questo ci fa capire che un oggetto astrofisico non è un buco nero se il suo raggio è maggiore del raggio di Schwarzschild. Possiamo calcolare il raggio di Schwarzschild del Sole ricordandoci che la sua massa è  $M \approx 2 \cdot 10^{30} kg$ , inoltre  $c \approx 3 \cdot 10^8 m/s$ , per cui usando questi valori si ottiene  $r_s \approx 1.5 km$ . Il valore ottenuto è molto più piccolo rispetto al raggio del Sole ( $R_{Sole} \approx 7 \cdot 10^5 km$ ), pertanto, per nostra fortuna, il Sole non è un buco nero.

Finora abbiamo ipotizzato l'esistenza di questi mistici corpi celesti, i buchi neri. Ma esistono davvero? Come possiamo verificarne sperimentalmente l'esistenza? Ci sono due strade possibili:

- la prima è guardare gli effetti di questi oggetti su stelle vicine. Un forte attrattore gravitazionale che non riuscite a vedere (cioè che non emette onde elettromagnetiche) è un indicatore abbastanza evidente della presenza di un buco nero;
- la seconda possibilità sono buchi neri molto grossi, dotati di un disco di accrescimento, cioè di materia che ruota vicino al buco nero ma con distanza maggiore di  $r_s$ . La materia del disco di accrescimento emette onde elettromagnetiche che possono essere osservate e utilizzate per ricostruire un'immagine (come nella foto 5);

<sup>16</sup>La superficie che delimita la zona di spazio da cui non è possibile uscire si chiama orizzonte degli eventi (una volta oltrepassato non si può tornare indietro!).

<sup>17</sup>Questa non è una dimostrazione rigorosa, ma è solo un ragionamento semi-qualitativo, che non troppo sorprendentemente dà il risultato giusto.

<sup>18</sup>Questo teorema vale in maniera del tutto analoga in Relatività Generale!



Figura 5: Storica foto di un buco nero, realizzata nel 2019 dall'Event Horizon Telescope. Si tratta del buco nero al centro della galassia Messier 87.

Il luogo principale in cui è possibile trovare buchi neri è il centro delle galassie, dove spesso quelli che si trovano hanno masse abnormi: milioni di volte la massa del nostro Sole (il buco nero al centro di Messier 87 ha una massa di circa 6.6 miliardi di volte la massa del Sole)!

## SEZ. A — DERIVATE DEI VERSORI

I versori  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  possono essere scritti in coordinate cartesiane

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \quad (\text{A.2})$$

Possiamo calcolare le derivate dei secondi membri delle Equazioni (A.1) e (A.2) senza particolari problemi, perchè i versori  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  sono fissi. Si ha

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= -\hat{x}\dot{\theta} \sin \theta + \hat{y}\dot{\theta} \cos \theta = \dot{\theta}\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\hat{x}\dot{\theta} \cos \theta - \hat{y}\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta}\hat{r} \end{aligned}$$

Possiamo osservare che queste derivate possono essere scritte nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \vec{\Omega} \times \hat{r} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \vec{\Omega} \times \hat{\theta} \end{aligned}$$

a patto di porre  $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$ . Più in generale, consideriamo un vettore  $\vec{v}$  di modulo costante ed eseguiamo su di esso una rotazione attorno ad un asse  $\hat{n}$  di un angolo  $\theta$ , come in Figura 6. La componente di  $\vec{v}$  parallela a  $\hat{n}$ , ossia

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

è lasciata inalterata dalla trasformazione. Al contrario, la componente perpendicolare

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$$

è ruotata di un angolo  $\theta$  e rimane nel piano perpendicolare ad  $\hat{n}$ . In particolare, se indichiamo con un apice i vettori dopo la rotazione si avrà

$$\vec{v}'_{\perp} = (\vec{v} - \vec{v}_{\parallel}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Di conseguenza il vettore ruotato sarà

$$\vec{v}' = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Supponiamo ora che un vettore  $\vec{v}$  ruoti a velocità angolare  $\omega$  (in generale dipendente dal tempo) attorno ad un asse  $\hat{n}$ . Se  $d\theta = \omega dt$  è l'angolo infinitesimo di cui ruota  $\vec{v}$ , al primo ordine in  $dt$  abbiamo

$$\vec{v}(t + dt) = (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v}(t) - (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n}) + (\hat{n} \times \vec{v}(t))\omega dt = \vec{v}(t) + \omega(\hat{n} \times \vec{v}(t))dt$$

Ossia

$$\frac{\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

e al limite  $dt \rightarrow 0$  si ha

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

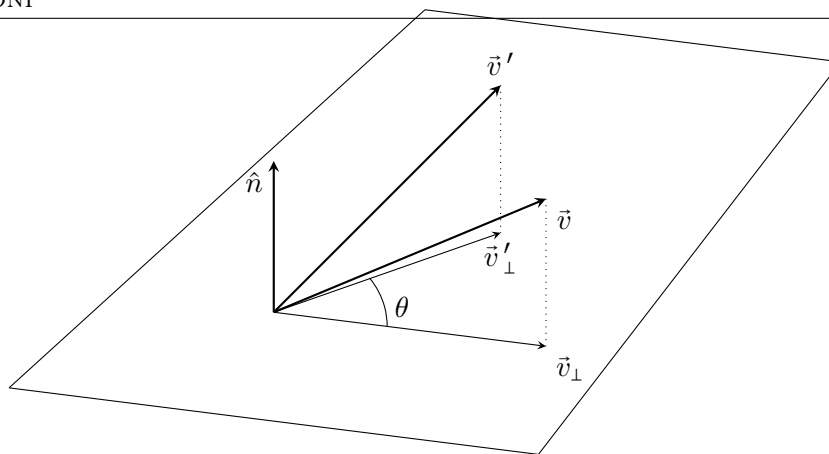


Figura 6: rotazione di  $\vec{v}$  intorno a  $\hat{n}$ .

## SEZ. B — FREQUENZA OSCILLAZIONI DELLE PERTURBAZIONI

Consideriamo un'orbita circolare di raggio  $r_0$  in un potenziale generico  $U(r)$  e lo perturbiamo in modo che l'ampiezza della perturbazione abbia dimensione caratteristica  $a \ll r_0$ . Per studiare il moto al primo ordine in  $\frac{a}{r_0}$  scriviamo  $r(t) = r_0 + \delta r(t)$ , con  $|\delta r| \ll r_0$  in ogni istante, e sostituiamo nell'equazione del moto radiale<sup>19</sup>:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(r_0 + \delta r) = \frac{L^2}{m(r_0 + \delta r)^3} - U'(r_0 + \delta r),$$

da cui, espandendo al primo ordine, si ha

$$m\ddot{\delta r} \simeq \frac{L^2}{mr_0^3} \left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^{-3} - U'(r_0) - U''(r_0)\delta r \simeq \frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{3L^2\delta r}{mr_0^4} - U'(r_0) - U''(r_0)\delta r.$$

Ricordando Equazione 4.1 e semplificando, rimaniamo con

$$\ddot{\delta r} = -\delta r \left( \frac{U''(r_0)}{m} + \frac{3L^2}{m^2 r_0^4} \right) \equiv -\delta r \omega_r^2.$$

Quindi, per  $\omega_r^2 > 0$ , si hanno effettivamente oscillazioni sinusoidali:

$$\delta r(t) \approx a \sin(\omega_r t).$$

mentre in caso contrario la perturbazione diverge e l'orbita non è stabile.

Per dimostrare Equazione 4.2 e la condizione di stabilità dell'orbita rimangono da calcolare le derivate del potenziale efficace. Si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(r) &= \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \\ V'_{\text{eff}}(r) &= -\frac{L^2}{mr^3} + U'(r) \\ V''_{\text{eff}}(r) &= \frac{3L^2}{mr^4} + U''(r) \quad \rightarrow \quad V''_{\text{eff}}(r_0) = m\omega_r^2 \end{aligned}$$

<sup>19</sup>In cui si è usata la conservazione del momento angolare per esprimere  $\dot{\theta}$ .

---

## — ESERCIZI —

---

★★★★★ **Esercizio 1 Esercizio Base** Consideriamo un satellite di massa  $m$  su un'orbita circolare di raggio  $R$  attorno alla Terra (di massa  $M$ ), che supporremo ferma.

1. Trova la velocità  $v_R$  ed il periodo orbitale  $T$  del satellite.
2. Trova l'energia meccanica totale del satellite ed il suo momento angolare.
3. Trova il valore di  $R$  nel caso dell'orbita geostazionaria.

Supponiamo adesso che il satellite si muove su un'orbita ellittica (di semiasse maggiore  $a$  ed eccentricità  $\epsilon$ ) attorno alla Terra.

4. Trova  $v_m$  e  $v_M$ , rispettivamente la velocità minima e massima del satellite durante il moto orbitale
5. Trova il periodo  $T$  del moto orbitale.
6. Dimostra che

$$a = \frac{T}{2\pi} \sqrt{v_m v_M}$$

7. Trova l'energia meccanica totale del satellite.

★★★☆☆ **Esercizio 2 Farfalle Kamikaze** Per spiegare il motivo che porta una farfalla notturna a cadere a spirale sulla fiamma di una candela, si può fare l'ipotesi che normalmente esse facciano riferimento alla luce della luna per guidarsi, mantenendo costante l'angolo tra la direzione di provenienza di questa e la propria direzione di volo. Mostrare che questa è una strategia suicida se la luce di riferimento è quella di una fiamma vicina. Perché invece funziona se la luce è molto lontana?

★★☆☆☆☆ **Esercizio 3 Razzo su Marte** Marte è un pianeta roccioso con approssimativamente la stessa densità della Terra, solo che la sua gravità in superficie è  $k = 0.38$  volte quella terrestre.

1. Detta  $V_T$  la velocità di fuga dalla superficie della Terra, e  $V_M$  la velocità di fuga dalla superficie di Marte, calcolare  $V_T/V_M$ .
2. Modelliamo un razzo come una massa  $m$ , corrispondente a tutta la struttura del razzo, e una massa  $M$  di propellente, che viene espulso ad una velocità  $w$  dal razzo. Noto che la densità tipica di un pianeta roccioso è di  $5500 \text{ kg m}^{-3}$ , e che sulla Terra  $g_T = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ , calcolare il rapporto  $M/m$  nel caso della Terra e nel caso di Marte.

★★☆☆☆☆ **Esercizio 4 Asteroide nell'Orbita Terrestre** Un asteroide di massa  $m$  si muove su una traiettoria parabolica intorno al Sole (la cui massa è  $M_s$ ) nello stesso piano dell'orbita terrestre, che si assume essere circolare e di raggio  $R$ . Trascurare l'attrazione tra asteroide e Terra.

1. Sia  $p$  la distanza di minimo avvicinamento dell'asteroide dal Sole. Nel caso in cui  $p < R$ , trovare il tempo  $T$  che l'asteroide spende all'interno dell'orbita terrestre.
2. Calcolare il massimo valore possibile di  $T$  in giorni. Per quale valore di  $p$  avviene ciò?

Se, invece,  $p$  è minore del raggio del Sole, l'asteroide ci cadrà dentro e la massa del Sole aumenterà di una frazione  $\alpha \equiv \frac{m}{M_S}$ .

3. Studiare come cambiano i parametri dell'orbita terrestre (asse maggiore ed eccentricità) al variare di  $\alpha$ .

☆☆☆☆☆ **Esercizio 5 Pianeti e Palline** Due pianeti identici, di raggio  $R = 1000 \text{ km}$ , sono fissi nello spazio e distano fra loro  $d = 5R$ . Su uno di questi pianeti ci sono  $n$  palline in contatto l'una sopra l'altra, con masse  $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$  (denominando con 1 la pallina più in basso, con 2 quella soprastante e così via), poste in modo che i baricentri di tutte le palline si trovano sulla congiungente dei centri dei due pianeti. La pallina più in basso viene lasciata libera di cadere da un metro d'altezza dalla superficie di uno dei pianeti. Supponendo che tutti gli urti siano elastici e che le dimensioni delle palline siano trascurabili, determinare il minimo valore di  $n$  tale che almeno una pallina possa arrivare sull'altro pianeta.

★☆☆☆☆ **Esercizio 6 Orbite poligonali** Trovare un potenziale del tipo  $V(r) = \lambda r^\beta$  per cui l'orbita generata da una piccola perturbazione dall'orbita circolare sia chiusa e abbia  $n$  raggi minimi e  $n$  raggi massimi.

★★★★☆ **Esercizio 7 Potenziale Miracoloso** Trovare *esattamente*  $r(\theta)$  per un corpo soggetto a un potenziale  $V(r) = \alpha/r + \lambda/r^2$ . Calcolare quanto vale l'angolo di precessione nel caso di orbita limitata e verificare che il risultato sia concorde con quanto trovato per il potenziale newtoniano.

# — SOLUZIONI —

Ecco le soluzioni dei problemi

## Soluzione 1 E1

1. Eguagliando la forza gravitazionale a quella centripeta si trova

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Dall'equazione dell'energia segue

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}m \left( \frac{GM}{R} \right) - \frac{GMm}{R}$$

Il periodo del moto non è altro che la lunghezza della circonferenza divisa per la velocità del satellite

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$$

2. L'energia meccanica totale è pari alla somma di energia cinetica e potenziale

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$$

Il momento angolare, dalla definizione, vale

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mRv \hat{z} = m\sqrt{GMR} \hat{z}$$

dove  $\hat{z}$  è la direzione perpendicolare al piano dell'orbita.

3. L'orbita geostazionaria ha lo stesso periodo della rotazione terrestre (1 giorno). Allora, usando nuovamente la seconda legge di Newton, troviamo

$$m \left( \frac{2\pi}{T_{Giorno}} \right)^2 R_{GEO} = \frac{GMm}{R_{GEO}^2} \rightarrow R_{GEO} = \left( \frac{GMT_{Giorno}^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 42000 \text{ Km}$$

4. La velocità massima sarà assunta in corrispondenza del perielio, mentre la minima all'afelio. I valori desiderati si trovano facilmente uguagliando l'energia totale a  $-\frac{GMm}{2a}$ . Si trova che

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{GMr_{\max}}{ar_{\min}}}$$

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{GMr_{\min}}{ar_{\max}}}$$

5. Il periodo del moto orbitale è semplicemente dato dalla legge di Keplero

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

6. Questa identità segue direttamente dalle due richieste precedenti.

7. Infine, questo ultimo punto non è altro che la dimostrazione della famosa relazione usata in precedenza

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Esistono tanti modi per dimostrarla, uno lo abbiamo visto nella parte di teoria. Un modo alternativo consiste nell'utilizzare un'operazione di media temporale dell'energia meccanica. Abbiamo visto che nel caso di un'orbita circolare

$$E = -\frac{GMm}{2R}$$

Cosa succede se  $R$  non è costante nel tempo? Calcoliamo la media temporale dell'energia

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{GMm}{2r(t)} dt$$

dove  $T$  è il periodo orbitale. Ricordando che  $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$  e che  $r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2(1+\varepsilon \cos \theta)}$  e sostituendo sopra, si ottiene

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{GMm}{2r(t)} dt = -\frac{L}{2T} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = -\frac{GMm}{2a}$$

**Soluzione 2 E2** Posta la sorgente nell'origine, nel formalismo delle coordinate polari la velocità della farfalla, può essere scritta come

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{r} + R\dot{\theta}\hat{\theta} = -v \cos \alpha \hat{r} + v \sin \alpha \hat{\theta}$$

dove  $v$  è il modulo della velocità (non necessariamente costante), e  $\alpha$  è l'angolo fissato tra la direzione del moto e la direzione della sorgente. Da questo segue

$$\begin{aligned} \dot{R} &= v \cos \alpha \\ R\dot{\theta} &= -v \sin \alpha \end{aligned}$$

e quindi

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{R}}{R} \tan \alpha$$

da cui integrando si ha

$$R = R_0 e^{-\frac{\theta}{\tan \alpha}}$$

che per  $\tan \alpha > 0$  rappresenta una spirale logaritmica attorno all'origine. Se  $R_0$  è molto grande possiamo osservare che la traiettoria diventi quasi essenzialmente rettilinea.

### Soluzione 3 E3

1. Nell'approssimazione in cui un pianeta è un corpo sferico di massa  $M$  e raggio  $R$ , con densità  $\rho$ :

$$\begin{aligned} g &= G \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho R \quad ; \quad \frac{1}{2} V_f^2 = G \frac{M}{R} = \frac{4}{3} \pi G \rho R^2 \\ \Rightarrow \frac{V_T^2}{V_M^2} &= \frac{R_T^2}{R_M^2} = \frac{g_T^2}{g_M^2} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{V_T}{V_M} = \frac{1}{k} \approx 2.63 \end{aligned}$$

2. Ci chiediamo innanzitutto quale velocità può raggiungere un razzo come quello descritto dal testo: analizziamo il problema nel sistema tangente (ovvero quello che è inerziale e con la stessa velocità del razzo al tempo  $t$ ). Sia  $\lambda$  la massa rimanente di combustibile. In un istante  $dt$  il razzo perde una massa  $d\lambda$  e prende un impulso  $-wd\lambda$ , da redistribuire su una massa  $\lambda + m$ , per cui prende una velocità  $\frac{-wd\lambda}{\lambda+m}$ . Il valore iniziale di  $\lambda$  è  $M$  e quello finale è 0:

$$\begin{aligned}\Delta V &= \int_M^0 \frac{-wd\lambda}{\lambda+m} = w \int_0^M \frac{1}{\lambda+m} d\lambda = w \log \frac{M+m}{m} \\ &\Rightarrow \frac{M}{m} = e^{\Delta V/w} - 1\end{aligned}$$

Possiamo a questo punto osservare che:

$$\begin{aligned}g &= \frac{GM}{R^2}, \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow R = \frac{g}{\frac{4}{3}\pi\rho G} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}V_f^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho R^2 \Rightarrow V_f = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} g\end{aligned}$$

Richiedendo che il  $\Delta V$  sia proprio  $V_f$ :

$$\begin{aligned}\left(\frac{M}{m}\right)_T &= e^{V_T/w} - 1, \quad V_T = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} g_T \approx 11,2 \text{ km/s} \\ \left(\frac{M}{m}\right)_M &= e^{V_M/w} - 1, \quad V_M = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} g_T k \approx 4,3 \text{ km/s}\end{aligned}$$

#### Soluzione 4 E4

1. Se la traiettoria è parabolica, allora l'energia meccanica totale è nulla

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM_S}{r} = 0$$

Nel punto della parabola più vicino al sole si ha  $r = r_{\min} = p$  e  $\dot{r} = 0$ , quindi sostituendo si trova  $L^2 = 2m^2 p G M_S$ . Per un generico valore di  $r$  si ha che

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{GmM_S}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}$$

Separando le variabili da quest'ultima equazione è possibile integrare entrambi i membri e trovare che

$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \left[ \frac{2}{m} \left( \frac{GmM_S}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2GM_S}} \int_p^R \frac{r dr}{\sqrt{r-p}}$$

Questo integrale è risolvibile operando la sostituzione  $y = \sqrt{r-p}$ . Quello che si ottiene è

$$T = \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2GM_S}} \left( 1 + \frac{2p}{R} \right) \sqrt{1 - \frac{p}{R}}$$

2. Considerando  $T$  come una funzione della variabile  $p$  e annullando la sua derivata prima si trova che il valore massimo viene assunto per  $p = \frac{R}{2}$  ed è

$$T_{Max} = \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2GM_S}} = \frac{2}{3\pi} T_t \simeq 77 \text{ giorni}$$

3. L'energia meccanica della Terra dopo la caduta dell'asteroide sul Sole è

$$-\frac{GM_S(1+\alpha)M_T}{2a} = \frac{GM_S M_T}{2R} - \frac{GM_S(1+\alpha)M_T}{R}$$

dove  $a$  è il semiasse maggiore della nuova orbita. Semplificando si trova

$$a = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}R$$

Come era prevedibile,  $a < R$  perché quello che prima era  $R$  adesso è la distanza massima dal fuoco.

$$R = a + c \longrightarrow e \equiv \frac{c}{a} = \frac{R}{a} - 1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Questa eccentricità è una funzione crescente di  $\alpha$ , limitata superiormente dal valore unitario. Quindi per ogni valore di  $\alpha > 0$  si hanno delle orbite ellittiche.

**Soluzione 5 E5** Essendo i due pianeti identici, basta che una pallina arrivi a metà strada tra i due con una velocità infinitesimale, in modo da cadere sul pianeta di arrivo. Calcoliamo quanto deve essere la velocità di lancio per fare avvenire ciò. Usando la conservazione dell'energia meccanica si trova

$$v_{\text{lancio}} = \sqrt{\frac{9GM}{10R}}$$

D'altra parte, la velocità di rimbalzo della pallina 1 è

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2GMh}{R^2}}$$

dove  $h = 1m$ . Dalla teoria degli urti elastici, sotto le ipotesi date nella traccia, segue che la velocità di rimbalzo della pallina  $n$ -esima vale

$$v_n = (2^n - 1)v_1 = (2^n - 1)\sqrt{\frac{2GMh}{R^2}}$$

Uguagliando la velocità di lancio necessaria affinché la pallina arrivi a metà strada e la velocità di rimbalzo della pallina  $n$ -esima, si trova

$$n = \log_2 \left( 1 + \sqrt{\frac{9R}{20h}} \right) \approx 9.39$$

Il primo intero utile è quindi  $n = 10$ .

**Soluzione 6 E6** Scriviamo l'energia totale del satellite come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \lambda r^\beta$$

per le piccole oscillazioni intorno all'orbita circolare vale  $L = mr_0^2\dot{\theta}$ , con  $r_0$  raggio dell'orbita circolare.

Ricordiamo che possiamo trovare il raggio ponendo a zero la derivata prima del potenziale efficace e la frequenza delle piccole oscillazioni dalla derivata seconda.

$$0 = V'_{\text{eff}} = -\frac{L^2}{mr^3} + \lambda\beta r^{\beta-1} \quad \rightarrow \quad \frac{L^2}{mr^4} = \lambda\beta r_0^{\beta-2}$$

$$V_{\text{eff}}'' = \frac{3L^2}{mr^4} + \lambda\beta(\beta-1)r^{\beta-2}$$

quindi sostituendo  $r_0$  otteniamo:

$$V_{\text{eff}}'' = 3\lambda\beta r_0^{\beta-2} + \lambda\beta(\beta-1)r_0^{\beta-2} = \lambda\beta(\beta+2)r_0^{\beta-2}$$

La condizione che l'orbita abbia  $n$  raggi massimi e  $n$  raggi minimi si traduce come  $\omega_r = n\dot{\theta}$ . Quindi troviamo:

$$\frac{\lambda\beta(\beta+2)}{m}r_0^{\beta-2} = n^2 \frac{\lambda\beta}{m}r_0^{\beta-2}$$

ovvero  $\beta = n^2 - 2$ .

L'unica condizione su  $\lambda$  si trova dalla condizione che esista il minimo del potenziale efficace, per  $n > 1$  si ha  $\beta > 0$  e quindi dalla formula  $\frac{L^2}{mr_0^2} = \lambda\beta r_0^\beta$  si trova che anche  $\lambda$  deve essere positivo, per  $n = 1$  si trova  $\beta = -1$  che è il caso ben noto di potenziale Newtoniano in cui  $\lambda < 0$ .

**Soluzione 7 E7** Vogliamo risolvere l'equazione delle orbite (2.3) per il potenziale dato:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2}(E - \alpha u - \lambda u^2)$$

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2 u^2}{2m} + \alpha u + \lambda u^2$$

L'energia è una costante del moto, quindi possiamo derivare rispetto a  $\theta$  e imporre che la derivata sia nulla.

$$0 = \frac{dE}{d\theta} = \frac{L^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{du}{d\theta} + \frac{L^2 u}{m} \frac{du}{d\theta} + 2\lambda u \frac{du}{d\theta} + \alpha \frac{du}{d\theta}$$

Semplificando il caso  $\frac{du}{d\theta} = 0$  che corrisponde ad orbite circolari otteniamo quindi:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\left(1 + \frac{2m\lambda}{L^2}\right)u - \frac{m\alpha}{L^2} \equiv -\chi^2 u - \frac{m\alpha}{L^2}$$

Le soluzioni dipendono qualitativamente dal segno di  $\chi^2$ .

Per  $\chi^2 = 0$  si trova che  $u(\theta)$  segue una parabola la cui concavità dipende dal segno di  $\alpha$ .

Se  $\chi^2$  è negativo  $u(\theta)$  assume la forma di un esponenziale che può essere divergente o convergente a seconda delle condizioni iniziali.

Nel caso di  $\chi^2$  positivo si hanno le soluzioni oscillanti

$$u = c_1 \cos(\chi\theta + \phi) - \alpha \left(\frac{L^2}{m} + 2\lambda\right)^{-1}$$

e da questa si trova che l'angolo di precessione nel caso di orbita limitata

$$\delta\theta = 2\pi \left(\frac{1}{\chi} - 1\right)$$

quindi vediamo che il verso in cui precedono le orbite dipende dal modulo di  $\chi$  ed in particolare cambia segno per  $\chi = 1$ , che corrisponde al potenziale Newtoniano in cui  $\delta\theta = 0$ .