

Matematica

LEZIONE AVANZATA

Michele Casella *; Giacomo Cervelli †

2 febbraio 2026

Sommario

La prima parte della lezione tratterà in modo generale la risoluzione di ODE lineari a coefficienti costanti; in tale contesto saranno anche fornite a livello intuitivo le nozioni di linearità e spazio vettoriale. Utilizzando questi concetti, forniremo una giustificazione della scrivibilità delle funzioni periodiche come serie di Fourier. Infine, mostreremo alcune applicazioni particolarmente significative delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali, accennando anche all'utilizzo di basi diverse da quella trigonometrica.

*michele.casella@sns.it

†giacomo.cervelli@sns.it

— INDICE —

1	Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti	3
1.1	Equazioni omogenee	3
1.1.1	Radici reali di p	4
1.1.2	Radici complesse di p	4
1.2	Spazi vettoriali	5
1.3	Operatori lineari	7
1.4	Caso non omogeneo	8
1.4.1	Principio di sovrapposizione	8
1.4.2	Metodo degli annichilatori	8
1.4.3	Metodo di variazione delle costanti	9
2	Scrittura di funzioni periodiche come Serie di Fourier	10
2.1	Ortogonalità	11
2.2	Completezza	12
2.3	Variazioni sul tema	12
3	Alcune applicazioni ad equazioni fisiche	13
3.1	Sfruttare la linearità	13
3.2	Equazione di Laplace	13
3.2.1	Commenti sul problema	14
3.3	Equazione del calore	15
3.4	Equazione delle onde	15
3.4.1	Commenti sulle implicazioni fisiche di 3.21 e 3.22	16
3.5	Altre basi	16
3.5.1	Di nuovo Laplace	16
3.6	Armoniche sferiche	17
3.6.1	Altri problemi con le armoniche	18
3.7	Polinomi di Legendre	18
	Esercizi	20

SEZ. 1 — EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Nella prima parte della lezione di occuperemo di equazioni differenziali della forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = f(t). \quad (1.1)$$

Le ragioni di questa scelta sono molteplici:

1. Equazioni di questa forma appaiono spesso nei problemi di Fisica;
2. Si tratta di una delle classi di equazioni più ampie per cui conosciamo metodi risolutivi espliciti e totalmente generali;
3. Le idee che emergeranno dal metodo risolutivo ci guideranno in modo naturale a introdurre i concetti di spazio vettoriale e linearità, utili per il seguito della lezione.

Prima di iniziare, ricordiamo che vale il seguente teorema fondamentale (la cui dimostrazione è oltre gli scopi di questa lezione).

Teorema 1.0.1. (Cauchy-Lipschitz/Esistenza e unicità): Consideriamo un'equazione della forma di (1.1), con f continua, e fissiamo $x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)}$ una n -upla di numeri reali. Esiste una e una sola $x(t)$ che risolve l'equazione differenziale e soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_0^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$.

In sostanza: la soluzione a un'equazione differenziale di ordine n è univocamente determinata se si fissano i valori iniziali di tutte le derivate fino alla $(n-1)$ -esima.

1.1 Equazioni omogenee

Iniziamo a trattare l'equazione (1.1) nel caso **omogeneo**, ossia quello in cui $f \equiv 0$. In questo caso, notiamo che valgono le seguenti proprietà:

1. Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ risolvono l'equazione differenziale, anche $x_1(t) + x_2(t)$ la risolve.
2. Se $x(t)$ risolve l'equazione differenziale e $c \in \mathbb{R}$, anche $cx(t)$ la risolve.

Mettendo insieme queste due proprietà, otteniamo che se x_1, \dots, x_k sono soluzioni di (1.1), per ogni scelta di c_1, \dots, c_k numeri reali, $c_1x_1(t) + \dots + c_kx_k(t)$ è ancora una soluzione: una somma di questo tipo si dice una *combinazione lineare* di x_1, \dots, x_k . La nostra strategia sarà trovare un po' di soluzioni "semplici" (in un senso non ancora chiaro), in modo tale che ogni possibile soluzione si scriva come combinazione lineare di esse. Come faremo a capire che abbiamo trovato un numero sufficiente di soluzioni semplici? Per il Teorema di Cauchy-Lipschitz, basta fare in modo che per ogni n -upla di numeri reali $x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)}$, esista una scelta di c_1, \dots, c_k tale che $x(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_kx_k(t)$ soddisfi le condizioni iniziali $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_0^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$. Intuitivamente, siccome abbiamo a che fare con n gradi di libertà, ci aspettiamo di aver bisogno di $k = n$ soluzioni semplici.

Nel seguito chiameremo p il polinomio associato all'equazione differenziale, definito da

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0;$$

ritorneremo sul significato e sulle proprietà di questo polinomio in seguito. Per il momento, accontentiamoci di osservare che, se proviamo a prendere come soluzione "semplice" $x(t) = e^{\lambda t}$, sostituendo nell'equazione, otteniamo

$$e^{\lambda t}p(\lambda) = 0.$$

§ 1.1.1. **Radici reali di p .** — Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice reale di p , per quanto appena osservato è evidente che $e^{\lambda t}$ è una soluzione dell'equazione differenziale, e quindi può essere una delle soluzioni semplici che cercavamo. Supponiamo ora che λ abbia molteplicità maggiore di 1, ossia che $p(x)$ sia un multiplo di $(x - \lambda)^m$ per qualche $m \geq 2$. In questo caso, si verifica che anche

$$te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale. Quindi, in totale, per le radici reali troviamo un numero di soluzioni semplici pari alla molteplicità.

§ 1.1.2. **Radici complesse di p .** — Supponiamo ora che $\lambda = \alpha + i\beta$ sia una radice complessa di p . Innanzitutto, ricordiamo che si può dare significato all'esponenziale di numeri complessi tramite l'identità di Eulero:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

da cui $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$. Inoltre, si può calcolare la derivata temporale di una funzione $u(t)$ a valori complessi scrivendola come $u(t) = x(t) + iy(t)$ e derivando separatamente x e y : si avrà $\dot{u}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$. Dunque, è facile verificare che la regola

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$$

funziona ancora quando λ è un numero complesso. Pertanto, $e^{\lambda t}$ soddisfa l'equazione differenziale (1.1); l'unico problema è che ha valori complessi, mentre noi vogliamo soluzioni a valori reali. Per risolvere il problema sfruttiamo il fatto che anche $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, ovvero il complesso coniugato di λ , deve essere una radice di p : è un fatto generale che, in un polinomio a coefficienti reali, una radice complessa appare sempre con la stessa molteplicità della sua coniugata. Quindi, anche $e^{\bar{\lambda}t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))$ è una soluzione dell'equazione differenziale, e di conseguenza

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) = \frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda}t}}{2}, \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda}t}}{2i}$$

sono entrambe soluzioni: scegliamo queste come soluzioni semplici nel caso di λ complesso. Se λ ha molteplicità $m \geq 2$, possiamo considerare anche

$$te^{\alpha t} \cos(\beta t), \dots, t^{m-1}e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad te^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, t^{m-1}e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

in analogia con quanto fatto prima. In questo modo, per ogni radice complessa otteniamo $2m$ soluzioni, dove m è la sua molteplicità; notiamo anche che da $\bar{\lambda}$ si ottengono le stesse soluzioni, a meno di cambi di segno.

Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, la somma delle molteplicità delle radici (reali o complesse) di p è n ; dunque, mettendo insieme tutte le soluzioni semplici ottenute dalle radici otteniamo un totale di n soluzioni (ovviamente, senza contare due volte quelle ottenute dalle coniugate).

Esempio 1.1.1 (Oscillatore armonico) Consideriamo l'equazione $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$; essa descrive una vastissima gamma di situazioni fisiche, come ad esempio le piccole oscillazioni di un pendolo. Il polinomio associato a questa equazione è $z^2 + \omega^2$, che ha radici $\pm i\omega$; dunque, siamo nel secondo caso, e la soluzione si scrive come

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

al variare di a, b tra i numeri reali.

1.2 Spazi vettoriali

Prima di passare al caso non omogeneo, vogliamo introdurre alcuni concetti matematici generali, che ci permetteranno di comprendere più a fondo il procedimento adottato nel caso omogeneo. In particolare, vogliamo passare dalla nozione intuitiva di **vettore** come segmento orientato a una nozione più astratta; questo ci permetterà di trattare oggetti di varia natura (ad esempio funzioni) come vettori.

Definizione 1.2.1. Diciamo che un insieme X è uno **spazio vettoriale reale** se i suoi elementi si possono sommare tra di loro e moltiplicare per numeri reali, in modo tale che valgano le proprietà intuitive delle operazioni.

Per essere precisi¹, le operazioni devono soddisfare le seguenti proprietà:

1. la somma è commutativa e associativa, ed esiste un elemento neutro (che chiameremo il vettore nullo o , a volte, per brevità, semplicemente 0);
2. per $v \in X$ esiste il suo opposto $(-v) \in X$, tale che $v + (-v) = 0$;
3. per $v, w \in X$, per $c \in \mathbb{R}$, $c(v + w) = cv + cw$;
4. per $v \in X$, $c, d \in \mathbb{R}$, $(c + d)v = cv + dv$;
5. per $v \in X$, $c, d \in \mathbb{R}$, $(c \cdot d)v = d(dv)$;
6. per $v \in X$, $1v = v$.

Definizione 1.2.2. Un insieme X è uno **spazio vettoriale complesso** se i suoi elementi si possono sommare tra di loro e moltiplicare per numeri complessi.

Iniziamo vedendo che, effettivamente, la nozione geometrica di vettore che già conosciamo si inserisce in questo quadro teorico generale senza problemi.

Esempio 1.2.1 (Vettori nello spazio): fissiamo un punto O dello spazio e prendiamo $X = \{\text{Segmenti orientati nello spazio con punto di applicazione in } O\}$. Tra gli elementi di X conosciamo un'operazione di somma (data dalla regola del parallelogramma) e un'operazione di prodotto per numeri reali (che consiste semplicemente nel moltiplicare la lunghezza del vettore per il valore assoluto del numero reale dato, lasciato invariata la direzione, ed eventualmente cambiando il verso nel caso in cui il numero reale fosse negativo). Non dimostriamo formalmente che sono soddisfatte tutte le proprietà elencate sopra; ad ogni modo, si può verificare che con queste operazioni X è uno spazio vettoriale.

Esempio 1.2.2: consideriamo $X = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, l'insieme delle terne di numeri reali. Possiamo sommare due terne semplicemente eseguendo la somma componente per componente:

$$(x_1, y_1, z_1) +_X (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

e moltiplicare per numeri reali nello stesso modo, componente per componente:

$$\lambda \cdot_X (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Abbiamo usato la notazione $+_X$ e \cdot_X per sottolineare che, formalmente, sommare e moltiplicare vettori non equivale a sommare e moltiplicare numeri reali, anche se con queste definizioni i due concetti sono strettissimamente legati. A priori, la nozione di somma e prodotto che usiamo su uno spazio vettoriale non deve avere nulla a che fare con quella standard che conosciamo per i numeri reali, come si vedrà dal prossimo esempio.

N.B. Abbiamo usato \mathbb{R}^3 perché è il caso più interessante per le applicazioni di base alla fisica, ma questo esempio funziona anche con $X = \mathbb{R}^k$ in modo del tutto analogo.

¹Nel resto della lezione non ci preoccuperemo mai di queste proprietà: le riportiamo solo per completezza.

Esempio 1.2.3: consideriamo $X = \mathbb{R}^+$, l'insieme dei numeri reali strettamente positivi, e definiamo le seguenti operazioni:

$$v +_X w = v \cdot w, \quad \lambda \cdot_X v = v^\lambda.$$

In questo caso, l'operazione di "somma" dello spazio vettoriale non ha nulla a che fare con la somma di numeri reali; al contrario, essa corrisponde al prodotto! Di conseguenza, l'elemento neutro non è 0, ma 1: potremmo dire che, per questo spazio vettoriale, 1 è il vettore nullo, per quanto ciò risulti controintuitivo. Allo stesso modo, l'operazione di "prodotto per un numero reale" dello spazio vettoriale corrisponde all'elevamento a potenza. Esempi del genere non ci serviranno mai più nel corso della lezione, utilizzeremo sempre operazioni ereditate in modo naturale da \mathbb{R} (o \mathbb{C}) come quelle dell'esempio precedente. Tuttavia, è importante rendersi conto che anche costruzioni meno intuitive come quella di questo esempio possono dare luogo a spazi vettoriali.

Esempio 1.2.4 (Spazi vettoriali di funzioni): sia D un qualunque insieme, e consideriamo $X = \{f : D \rightarrow \mathbb{R}\}$ lo spazio delle funzioni da D in \mathbb{R} . Definiamo le operazioni naturali

$$(f +_X g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot_X f)(x) = \lambda f(x),$$

ottenute dalle operazioni standard su \mathbb{R} in modo analogo a quanto visto nell'Esempio 1.2.2. Il vettore nullo di X è semplicemente la funzione che vale 0 in ogni punto di D .

N.B. Prendendo funzioni a valori in \mathbb{C} si ottiene uno spazio vettoriale complesso.

Esempio 1.2.5 (Soluzioni a un'ODE lineare omogenea): consideriamo l'equazione differenziale (1.1) nel caso omogeneo ($f \equiv 0$) e $X = \{x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ risolve (1.1)}\}$. Siccome sommando tra di loro le soluzioni e moltiplicandole per costanti si ottengono ancora soluzioni, X è uno spazio vettoriale reale.

Ritorniamo sugli Esempi 1.2.1 e 1.2.2. Le nozioni di vettore nello spazio come segmento orientato e come terna di numeri reali sono, nella nostra intuizione, pressoché equivalenti. Tuttavia, per passare dall'uno all'altro è necessario compiere una scelta fondamentale, ossia quella del sistema di riferimento; si tratta, quindi, di fissare un'origine O e tre vettori ortogonali di lunghezza 1, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, che soddisfino la regola della mano destra. A questo punto, ogni vettore v con punto di applicazione O si scrive nella forma $v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$, e quindi possiamo identificarlo con la terna di numeri reali (v_x, v_y, v_z) . Diamo adesso alcune definizioni.

Definizione 1.2.3. (Vettori linearmente indipendenti): dato X spazio vettoriale, diciamo che $v_1, \dots, v_k \in X$ sono linearmente indipendenti se nessuno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri, ossia se non esiste nessuna scrittura del tipo

$$v_j = \sum_{i \neq j} c_i v_i$$

(a seconda che lo spazio vettoriale sia reale o complesso, i λ_i in questa definizione vanno presi reali o complessi).

Definizione 1.2.4. (Insieme di generatori): dato X spazio vettoriale, diciamo che $v_1, \dots, v_k \in X$ generano X se ogni $v \in X$ si scrive come loro combinazione lineare (sempre da prendere reale o complessa a seconda di come sia lo spazio vettoriale).

Definizione 1.2.5. (Base): dato X spazio vettoriale, diciamo che v_1, \dots, v_k sono una sua base se sono linearmente indipendenti e lo generano.

Si può dimostrare che tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi; questo numero è chiamato **dimensione** di X . Una base è sostanzialmente un insieme di generatori ottimizzato, nel senso che tutti i suoi elementi sono necessari per generare X . Supponiamo che v_1, \dots, v_k, v_{k+1} siano generatori ma non siano indipendenti, ad esempio che

$$v_{k+1} = \sum_{j=1}^k c_j v_j. \quad (1.2)$$

Prendiamo ora un qualunque $v \in X$: sappiamo che esso si scrive come

$$v = \sum_{j=1}^{k+1} d_j v_j \quad (1.3)$$

e, sostituendo la (1.2) nella (1.3), otteniamo

$$v = \sum_{j=1}^k (d_j + d_{k+1} c_j) v_j,$$

ossia riusciamo ancora a generare un qualunque elemento di X anche senza utilizzare v_{k+1} . Dunque, possiamo rimuovere v_{k+1} e ottenere un insieme di generatori più "ottimale", nel senso di meno ridondante; iterando questo processo possiamo sempre ottenere una base.

Dopo queste definizioni, sembra che abbiamo introdotto un gran numero di concetti nuovi; in realtà, però, sono tutte idee con cui abbiamo già avuto a che fare nel corso della lezione. Ad esempio, l'insieme di soluzioni semplici che volevamo costruire nella sezione precedente era esattamente un insieme di generatori dello spazio delle soluzioni, in quanto volevamo che ogni soluzione si scrivesse come combinazione lineare di soluzioni semplici. Si potrebbe persino dimostrare che, nel modo in cui lo abbiamo costruito, l'insieme di soluzioni semplici è addirittura una base. Un altro esempio di base che abbiamo incontrato nel corso di questa lezione è la terna $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, che definisce i sistemi di riferimento nello spazio.

1.3 Operatori lineari

Siano X, Y due spazi vettoriali (reali o complessi).

Definizione 1.3.1. Diciamo che una funzione $T : X \rightarrow Y$ è un **operatore lineare** se:

1. per $v, w \in X$, $T(v + w) = T(v) + T(w)$;
2. per $v \in X$, $c \in \mathbb{R}$ (oppure \mathbb{C}), $T(cv) = cT(v)$.

Esempio 1.3.1 (Operatore derivata) Consideriamo come dominio e codominio $X = Y = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ derivabile infinite volte}\}$; allora l'operatore $D(f) = f'$ è lineare.

N.B. Il messaggio importante da trarre da questo esempio è che la derivata è un operatore lineare su tutti gli spazi su cui ha senso definirla; potevamo restringere il dominio a un intervallo, oppure considerare funzioni derivabili un numero finito di volte, ma preferiamo non appesantire l'esempio con tutte queste casistiche.

Sia $T : X \rightarrow X$ un operatore lineare e p un polinomio; allora, si può definire l'operatore lineare $p(T) : X \rightarrow X$, come

$$[p(T)](v) = a_n T^n(v) + a_{n-1} T^{n-1}(v) + \dots + a_1 T(v) + a_0 v, \quad \text{dove } p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

(con T^k si intende $T \circ T \circ \dots \circ T$, ossia T applicato k volte, con la convenzione che applicare T zero volte significa lasciare ogni vettore così com'è). Lasciamo per esercizio il fatto che, se p e q sono due polinomi, la composizione degli operatori $p(T)$ e $q(T)$ (che è ancora un operatore

lineare) coincide con $(pq)(T)$, dove (pq) è il prodotto dei due polinomi nel senso abituale del termine.

Ora possiamo utilizzare questo nuovo formalismo per dare una formulazione più compatta delle equazioni differenziali a coefficienti costanti: possiamo riscrivere la (1.1) come

$$[p(D)](x) = f \quad (1.4)$$

dove D è l'operatore derivata e p è il polinomio associato all'equazione differenziale, introdotto in precedenza. Questa riformulazione non sarà soltanto estetica, in quanto ci fornirà un metodo risolutivo per il caso non omogeneo.

1.4 Caso non omogeneo

Consideriamo ora l'equazione nella forma generale

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = f(t)$$

e osserviamo che, se $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ sono soluzioni, la loro differenza $x(t) - \tilde{x}(t)$ è soluzione dell'equazione ottenuta rimuovendo f (ossia esattamente quella omogenea trattata all'inizio). Pertanto, se supponiamo di conoscere una particolare soluzione $\tilde{x}(t)$, presa x_1, \dots, x_n base di soluzioni dell'omogenea, le altre soluzioni della non omogenea sono determinate da

$$\tilde{x}(t) + c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$$

Dunque la chiave diventa saper trovare una soluzione particolare. Nel seguito illustriamo due metodi risolutivi molto generali (e di conseguenza anche relativamente complicati), ma è importante passare il messaggio che, prima di applicare uno di essi, ci sono una serie di considerazioni e manipolazioni preliminari che possono semplificare di molto il lavoro, se non addirittura portare direttamente alla soluzione.

§ 1.4.1. Principio di sovrapposizione. — Vediamo una prima manipolazione che può essere molto utile. Consideriamo l'equazione

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = f(t) + g(t)$$

Per risolverla, ci occorre una soluzione particolare; è immediato verificare che, se $x(t)$ risolve

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = f(t)$$

e $y(t)$ risolve

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = g(t)$$

allora $x(t) + y(t)$ è una soluzione particolare della nostra equazione di partenza. In parole povere, possiamo scomporre la parte non omogenea come somma di funzioni più facili da trattare.

§ 1.4.2. Metodo degli annihilatori. — Chiamiamo $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0$ il polinomio associato alla nostra equazione. Supponiamo che $f(t)$ sia soluzione di un'altra equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti e omogenea:

$$f^{(m)} + b_{m-1}f^{(m-1)} + \dots + b_1\dot{f} + b_0f = 0$$

e sia $q(z) = z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_1z + b_0$ il polinomio ad essa associato. Allora, possiamo cercare la soluzione particolare $\tilde{x}(t)$ tra le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $p(z)q(z)$, il prodotto dei due polinomi. Infatti, se applichiamo l'operatore $q(D)$ a entrambi i membri della

(1.4), il membro di destra si annulla (perché stiamo supponendo che f sia soluzione dell'equazione associata a q), e sappiamo che la composizione di $q(D)$ e $p(D)$ è esattamente $(pq)(D)$. Ci siamo, pertanto, ricondotti a cercare tra le soluzioni di un'equazione omogenea (sebbene un po' più complicata), che sappiamo gestire perfettamente.

Esempio 1.4.1 (Oscillatore armonico forzato, versione 1) studiamo l'equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \alpha \cos(\omega_0 t)$$

Per quanto sappiamo sull'oscillatore armonico, sicuramente $\cos(\omega_0 t)$ è soluzione di $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, che è associata al polinomio $q(z) = z^2 + \omega_0^2$, mentre la nostra equazione iniziale è associata a $p(z) = z^2 + \omega^2$. Dobbiamo studiare l'equazione omogenea associata a $p(z)q(z) = (z^2 + \omega^2)(z^2 + \omega_0^2)$.

Se $\omega \neq \omega_0$, le radici sono $\pm i\omega$, $\pm i\omega_0$ e la soluzione particolare deve essere della forma

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + c \cos(\omega_0 t) + d \sin(\omega_0 t)$$

ma $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ è anche una soluzione dell'equazione omogenea, quindi non influisce: supponiamo $a = b = 0$. Ora, imponiamo che sia soddisfatta l'equazione iniziale:

$$c(\omega^2 \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)) + d(\omega^2 \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)) = \alpha \cos(\omega_0 t)$$

da cui è evidente che una soluzione si abbia per

$$c = \frac{\alpha}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad d = 0.$$

Se $\omega = \omega_0$, le radici sono $\pm i\omega$, entrambe con molteplicità due. La soluzione è della forma

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + ct \cos(\omega t) + dt \sin(\omega t)$$

ma $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ è anche una soluzione dell'equazione omogenea, quindi non influisce: supponiamo $a = b = 0$. Ora, imponiamo che sia soddisfatta l'equazione iniziale

$$\begin{aligned} -2c\omega \sin(\omega t) + 2d\omega \cos(\omega t) - ct\omega^2 \cos(\omega t) - dt\omega^2 \sin(\omega t) + ct\omega^2 \cos(\omega t) + dt\omega^2 \sin(\omega t) = \\ -2c\omega \sin(\omega t) + 2d\omega \cos(\omega t) = \alpha \cos(\omega t) \end{aligned}$$

da cui è evidente che una soluzione si abbia per

$$c = 0 \quad d = -\frac{\alpha}{2\omega}$$

§ 1.4.3. Metodo di variazione delle costanti. — Per questo metodo ci occorre la base di soluzioni dell'equazione omogenea (ottenuta trascurando temporaneamente la f), che abbiamo trovato precedentemente: chiamiamola $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t)$$

dove i c_k che prima erano costanti ora sono funzioni del tempo. Non lo dimostreremo, ma la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)x_1(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n(t) = 0 \\ \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dots + \dot{c}_n(t)\dot{x}_n(t) = 0 \\ \dots \\ \dot{c}_1(t)x_1^{(n-2)}(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ \dot{c}_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

esiste e i $c_k(t)$ così ottenuti danno la soluzione particolare cercata.

Esempio 1.4.2 (Oscillatore armonico forzato, versione 2) torniamo all'equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \alpha \cos(\omega_0 t)$$

La base delle soluzioni dell'omogenea è $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$; cerchiamo pertanto $a(t), b(t)$ tali che

$$\begin{cases} \dot{a}(t) \cos(\omega t) + \dot{b}(t) \sin(\omega t) = 0 \\ -\omega \dot{a}(t) \sin(\omega t) + \omega \dot{b}(t) \cos(\omega t) = \alpha \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

Il sistema è risolto da

$$\dot{a}(t) = -\frac{\alpha \cos(\omega_0 t) \sin(\omega t)}{\omega} \quad \dot{b}(t) = \frac{\alpha \cos(\omega_0 t) \cos(\omega t)}{\omega}$$

Da cui, separando i casi $\omega = \omega_0$ e $\omega \neq \omega_0$, si possono ottenere $a(t)$ e $b(t)$ integrando. Avendo già ricavato la soluzione in altro modo, lasciamo al lettore il compito di verificare che il risultato sia lo stesso anche con questo procedimento.

SEZ. 2 — SCRITTURA DI FUNZIONI PERIODICHE COME SERIE DI FOURIER

L'obiettivo di questa sezione è dare una giustificazione intuitiva del seguente fatto fondamentale.

Teorema 2.0.1. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione 1-periodica. Allora, esistono $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tali che

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2k\pi i x}.$$

Tale scrittura di f prende il nome di **Serie di Fourier**.

Ancor più che nella sezione riguardante gli spazi vettoriali, procederemo in modo molto intuitivo. L'idea di fondo non è nulla di particolarmente nuovo: osserviamo innanzitutto che possiamo considerare lo spazio vettoriale complesso $X = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ 1-periodica}\}$, in quanto somme e riscalamanti di funzioni 1-periodiche sono funzioni 1-periodiche. Ciò che stiamo cercando di dimostrare assomiglia molto ad affermare che l'insieme delle funzioni $\{e^{2k\pi i x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base di X , ma ci sono alcuni dettagli a cui prestare attenzione: nella sezione precedente, abbiamo sempre parlato di basi con un numero finito di elementi. Ora, abbiamo a che fare con famiglie infinite di funzioni e con combinazioni lineari infinite dei loro elementi. Anche a causa di queste complessità, non riusciremo a dare una giustificazione completa del Teorema, ma forniremo alcuni elementi che speriamo possano servire a convincervi, almeno in parte, del fatto che è un risultato ragionevole.

2.1 Ortogonalità

Nella sezione precedente abbiamo visto due esempi di base di uno spazio vettoriale: uno è l'insieme delle soluzioni semplici di un'equazione omogenea, l'altro è la terna $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ nello spazio. Questo secondo esempio rappresenta, come avevamo accennato, una base particolarmente comoda, perché i suoi elementi sono anche ortogonali tra di loro e hanno lunghezza uno: si dice che è una **base ortonormale**. Per convincerci dell'utilità di queste proprietà, ricordiamo che, nella definizione di base, è richiesto che ogni $v \in X$ si possa scrivere come combinazione lineare di elementi della base: $v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$. Inoltre, la lineare indipendenza garantisce che la scelta delle costanti c_1, \dots, c_k sia unica; tuttavia, la definizione delle basi non fornisce un metodo per calcolare esplicitamente questi coefficienti. Invece, nel caso di \mathbb{R}^3 , possiamo avere una caratterizzazione esplicita: se vogliamo scrivere $v = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$, calcolando il prodotto scalare di ambo i membri per \hat{x} otteniamo

$$\langle \hat{x}, v \rangle = v_x \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle + v_y \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle + v_z \langle \hat{x}, \hat{z} \rangle = v_x$$

e analogamente si ottiene $v_y = \langle \hat{y}, v \rangle$, $v_z = \langle \hat{z}, v \rangle$. Per portare la somma e le costanti moltiplicative fuori dal prodotto scalare, abbiamo usato le seguenti proprietà:

1. $\langle w, v_1 + v_2 \rangle = \langle w, v_1 \rangle + \langle w, v_2 \rangle$;
2. $\langle w, cv \rangle = c \langle w, v \rangle$.

In sintesi, fissato w , la funzione che associa a v il suo prodotto scalare con w , ossia $v \mapsto \langle w, v \rangle$, è un operatore lineare. Ricordiamo che, in base al significato geometrico del prodotto scalare di \mathbb{R}^3 , $\langle \hat{x}, v \rangle$ è la lunghezza della proiezione ortogonale di v su \hat{x} , e di conseguenza $v_x \hat{x} = \langle \hat{x}, v \rangle \hat{x}$ è la proiezione ortogonale di v lungo \hat{x} . Potremmo quindi dare una definizione alternativa di base ortonormale nel seguente modo:

Definizione 2.1.1. (Base ortonormale): $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ è una base ortonormale se ogni vettore è uguale alla somma delle sue proiezioni ortogonali su $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

La chiave della dimostrazione del Teorema 2.0.1 sarà introdurre una nozione naturale di prodotto scalare tra funzioni, sotto la quale la famiglia $\{e^{2k\pi i x}\}$ risulterà essere ortonormale, e prendere come termini della Serie di Fourier le proiezioni ortogonali di f sugli elementi della famiglia. Ricordando che il prodotto scalare tra due vettori dello spazio si scrive in coordinate come

$$\langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i;$$

dunque, se vogliamo definire un prodotto scalare tra funzioni, sembra ragionevole definire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

per le funzioni 1-periodiche. A dire il vero, però, questa definizione non ci convince ancora del tutto: uno degli aspetti più rilevanti del concetto di prodotto scalare è che il prodotto di un vettore con se stesso corrisponde alla sua lunghezza al quadrato. Tuttavia, con questa definizione,

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(x)^2 dx,$$

e siccome f ha valori complessi non è detto che questa quantità sia positiva. Per ovviare al problema, modifichiamo leggermente la proposta di prodotto scalare fatta in precedenza:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \implies \langle f, f \rangle = \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Adesso vediamo che, rispetto a questo prodotto scalare, la famiglia $\{e^{2k\pi ix}\}$ è ortonormale, cioè ogni elemento ha prodotto scalare con se stesso 1 e zero con tutti gli altri. Innanzitutto, per quanto appena detto,

$$\langle e^{2k\pi ix}, e^{2k\pi ix} \rangle = \int_0^1 |e^{2k\pi ix}|^2 dx = 1.$$

Inoltre, se $k \neq \ell$,

$$\langle e^{2\ell\pi ix}, e^{2k\pi ix} \rangle = \int_0^1 e^{2(\ell-k)\pi ix} dx = \int_0^1 \cos(2(\ell-k)\pi x) + i \sin(2(\ell-k)\pi x) dx = 0$$

siccome seno e coseno hanno media nulla sul proprio periodo e compiono un numero intero di oscillazioni complete su $[0, 1]$. Sapendo che la famiglia $\{e^{2k\pi ix}\}$ è ortonormale, sembra ragionevole che i coefficienti c_k del Teorema 2.0.1 debbano essere esattamente le proiezioni ortogonali rispetto a questo prodotto scalare:

$$c_k = \langle f, e^{2k\pi ix} \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2k\pi ix} dx.$$

2.2 Completezza

Con questa definizione dei c_k , fissiamo $n \in \mathbb{Z}$ e calcoliamo

$$\left\langle f - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2k\pi ix}, e^{2n\pi ix} \right\rangle = \langle f, e^{2n\pi ix} \rangle - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \langle e^{2k\pi ix}, e^{2n\pi ix} \rangle = 0,$$

dove i termini della somma per $k \neq n$ si annullano per ortogonalità, e per $k = n$ si ottiene $\langle f, e^{2n\pi ix} \rangle - \langle f, e^{2n\pi ix} \rangle = 0$ grazie alla scelta dei c_k .

Naturalmente, questo non è sufficiente a dimostrare che

$$f - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2k\pi ix} = 0:$$

ad esempio, nello spazio, il fatto che un vettore abbia prodotto scalare nullo con \hat{x} e \hat{y} non lo rende nullo. Serve che l'insieme di vettori su cui verifichiamo che il prodotto scalare sia nullo sia "sufficientemente grande": quando ha questa proprietà, si dice che è **completo**. Nel caso di \mathbb{R}^3 , un insieme è completo se e solo se è un insieme di generatori; nello spazio delle funzioni periodiche, si può comunque dire che un insieme completo "genera" X , ma solo se ammettiamo di poter usare combinazioni lineari infinite (come lo è, d'altra parte, la Serie di Fourier). La dimostrazione della completezza non è facile, e va oltre gli scopi di questa lezione; ciò che speriamo sia chiaro è che la Serie di Fourier va interpretata come un limite di proiezioni ortogonali su insiemi di vettori sempre più grandi, anche se a priori questo non garantisce che converga alla funzione iniziale.

2.3 Variazioni sul tema

La scrivibilità di funzioni periodiche come serie di Fourier è un fatto estremamente generale. Ad esempio, se f è p -periodica invece che 1-periodica, si scriverà nella forma

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2k\pi ix}{p}}, \quad c_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-\frac{2k\pi ix}{p}} dx.$$

Se poi preferiamo utilizzare funzioni trigonometriche invece degli esponenziali complessi, possiamo utilizzare l'Identità di Eulero per riscrivere

$$f(x) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}x\right) + b_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}x\right) \right],$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{p}x\right) dx, \quad b_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}x\right) dx.$$

SEZ. 3 — ALCUNE APPLICAZIONI AD EQUAZIONI FISICHE

Una PDE (partial differential equation) è un'equazione funzionale che coinvolge una funzione di più variabili e le sue derivate parziali. Se data qualsiasi coppia di soluzioni la somma di esse è una soluzione, e se data una qualsiasi soluzione riscalata di una costante essa è una soluzione (col linguaggio di prima: se l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale), la PDE si dice "lineare". Quelle che affronteremo oggi (alcune delle più importanti che si incontrano in fisica classica) saranno tutte lineari.

3.1 Sfruttare la linearità

La proprietà di linearità come avrete visto dall'elettromagnetismo è molto potente: permette di sovrapporre configurazioni per sfruttare al massimo la simmetria del problema. Si può però fare di meglio. Avete visto prima che una funzione periodica si può sempre scrivere come somma (infinita) di seni e coseni. Nello stesso modo possiamo restringerci a guardare soluzioni particolari di una PDE (possibilmente per cui sia più semplice trovare una soluzione) e provare a scrivere la soluzione come somma di queste funzioni particolari. Chiameremo queste "soluzioni di base".

3.2 Equazione di Laplace

Ricordiamo che con ∇^2 si intende l'operatore laplaciano, che applicato a una funzione f restituisce la somma delle derivate parziali in ogni direzione applicate due volte:

$$\nabla^2 f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (3.1)$$

L'equazione di Laplace (che rispettano per esempio i potenziali in assenza di carica in elettrostatica) è:

$$\nabla^2 f = 0 \quad (3.2)$$

Vogliamo vedere di esprimere la soluzione come somma di seni e coseni. Si verifica facilmente che è lineare, quindi usiamo il trucco di prima: cerchiamo soluzioni più facili (per fissare le idee poniamo $n = 2$, ma è facilmente generalizzabile pure per $n = 3$: fatelo voi!). Per esempio se diciamo

$$f(x, y) = A(x)B(y) \quad (3.3)$$

l'equazione diventa:

$$A''(x)B(y) + A(x)B''(y) = 0 \quad (3.4)$$

semplificando,

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = -\frac{B''(y)}{B(y)} \quad (3.5)$$

Ora questa sappiamo risolverla: la destra dipende solo da y , la sinistra da x , quindi i due membri devono essere funzioni costanti, diciamo uguali a C^2 , ci riconduciamo a due equazioni differenziali per A e B , che sappiamo risolvere:

$$f = (Ee^{Cx} + Fe^{-Cx})(G \cos(Cy) + H \sin(Cy)) \quad (3.6)$$

So che per ogni costante che ci metto dentro (al posto di C, E, F, G, H) questa f rispetta la nostra PDE. La cosa che rimane da fare è assegnare un po' di valori che ci piacciono a queste costanti, e scrivere la soluzione come somma di queste funzioni di base. Guardiamo il prossimo esempio per capire come funziona.

★☆☆☆☆ **Esercizio 1 Problema tipico** Nel semispazio a z positiva di xyz c'è assenza di cariche. Si tassa il piano $z = 0$ con striscioline infinitamente lunghe e spesse a (coi lati infiniti paralleli a y e con le facce parallele al piano $z = 0$). Sono tenute una a potenziale V_0 , la successiva a potenziale $-V_0$ e così via. Si determini il potenziale in tutto il semispazio, in particolare si trovi un'espressione semplice per z grandi.

Soluzione 1: Diciamo senza perdita di generalità che nell'origine ci sia il bordo di una striscia. Chiaramente il potenziale non dipende da y . Quindi:

$$V(x, y, z) = V(x, z) \quad (3.7)$$

si applica dunque la 3.6:

$$v = (Ee^{Cz} + Fe^{-Cz})(G \cos(Cx) + H \sin(Cx)), \quad (3.8)$$

è soluzione. Come soluzioni di base scegliamo:

$$V_n = e^{-\frac{n\pi z}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (3.9)$$

Dove abbiamo scelto

$$E = 0, \quad G = 0, \quad C = \frac{n\pi}{a} \quad (3.10)$$

Perché il potenziale fa zero all'infinito, è dispari e cambia segno se traslo di a lungo x . La costante davanti si può prendere uguale a 1, perché tanto ci metteremo i coefficienti di Fourier:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi z}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (3.11)$$

In $z = 0$ imponiamo la condizione al bordo per trovare i coefficienti davanti ai V_n :

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (3.12)$$

Come visto nella prima parte se moltiplichiamo per $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ e integriamo entrambi i membri (restano solo 2 termini perché la base è ortonormale) e risolviamo per A_n , otteniamo per n dispari:

$$\frac{2V_0 a}{n\pi} = A_n \frac{a}{2}, \quad (3.13)$$

e 0 se n pari. Quindi:

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)\pi z}{a}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{a}\right), \quad (3.14)$$

per z grandi si ha in buona approssimazione

$$V = \frac{4V_0}{\pi} e^{-\frac{\pi z}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (3.15)$$

§ 3.2.1. **Commenti sul problema.** — La scelta delle funzioni di base di questo esempio può sembrare un po' a caso. La cosa da fare più in generale è provare a scrivere una base di funzioni, scegliendo quelle più opportune affidandosi al proprio senso fisico e alle simmetrie del problema. Se ci troviamo davanti un'equazione di Laplace, e vediamo che il sistema è periodico lungo un'asse con una certa lunghezza "naturale", e che le sorgenti del campo sono locali, e la loro influenza tende a scomparire mano a mano che ci si sposta lungo un'altro asse, non bisogna però avere dubbi su quali costanti scegliere nella 3.6.

3.3 Equazione del calore

Una cosa utile da sapere è la PDE che regola il comportamento di un campo di temperatura nello spazio:

$$\nabla^2 T = k \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.16)$$

dove k è una costante che dipende dal materiale. Un'altra cosa utile da sapere è che per temperature stazionarie nel tempo diventa esattamente l'equazione di Laplace di cui abbiamo parlato prima. All'equilibrio termico vale il principio di sovrapposizione e quello di esistenza e unicità. Se formuliamo il problema di prima con "temperatura" al posto di "potenziale", la soluzione è la stessa. Per il seguente serve una variazione della 3.6 (i.e. serve una base di funzioni che tenga conto pure del tempo, si deve seguire una strategia simile a quella già mostrata per ricavare la 3.6).

★★★☆☆ **Esercizio 2 Variazione sul problema tipico** Formulare il problema con la temperatura, risolverlo di nuovo nel caso in cui T_0 vari sinusoidalmente nel tempo (assumere k uniforme). Vedere che succede alla temperatura a grande distanza nel limite di oscillazioni piccole e grandi.

3.4 Equazione delle onde

L'equazione delle onde, che descrive l'ampiezza di un'onda u che si propaga in un mezzo n -dimensionale, è:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u = \nabla^2 u. \quad (3.17)$$

Per prima cosa notiamo che vedendo il problema nelle variabili x_1, \dots, x_n, ict ci riconduciamo all'equazione di Laplace in $n+1$ dimensioni. Ponendo di nuovo $n=1$, una soluzione è data dalla 3.6 (usando l'esponenziale complesso):

$$f = (Ee^{iCt} + Fe^{-iCt})(G \cos(Cx) + H \sin(Cx)), \quad (3.18)$$

questo tipo di soluzioni sono quindi del tipo (f deve necessariamente essere reale):

$$f = (E \cos(Ct) + F \sin(Ct))(G \cos(Cx) + H \sin(Cx)). \quad (3.19)$$

Troviamo delle funzioni di base di questo tipo per la corda vibrante tra due estremità fissate distanti a (sia c la velocità di propagazione delle onde nella corda). Mettiamo $x=0$ a una delle due estremità. Chiaramente $G=0$ e $Ca = n\pi$ per qualche n (la corda ha le estremità fissate):

$$f_n = \left(E \cos\left(\frac{n\pi}{a} ct\right) + F \sin\left(\frac{n\pi}{a} ct\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right), \quad (3.20)$$

posso ora spezzare questa cosa in due, il termine col seno (f_n) e quello col coseno (v_n):

$$f_n = \sin\left(\frac{n\pi}{a} ct\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right), \quad (3.21)$$

$$v_n = \cos\left(\frac{n\pi}{a} ct\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right), \quad (3.22)$$

dove ancora una volta si possono normalizzare i coefficienti davanti perché tanto scriveremo una combinazione lineare (infinita) di questi con i coefficienti scelti apposta per far tornare le condizioni al bordo.

§ 3.4.1. **Commenti sulle implicazioni fisiche di 3.21 e 3.22.** — Queste soluzioni di base hanno un nome: armoniche naturali. Dalla legittimità della scrittura di una funzione periodica in serie di Fourier viene il famoso fatto che ogni nota prodotta da uno strumento musicale (a corda o a fiato- ricordiamo che un suono è un'onda di pressione, ovvero un campo di pressione u che rispetta la 3.17) può essere scomposta nelle sue armoniche naturali senza perdita di informazioni (i.e. nota la scomposizione in armoniche posso ricostruire il suono iniziale).

★★☆☆☆ **Esercizio 3 Flauto** Un flauto dolce è schematicamente un tubo aperto ai due estremi, lungo a . La pressione è quindi fissata a quella atmosferica vicino a essi. Si soffia a un'estremità fornendo una forza per unità di massa f alle particelle d'aria. Trovare (a meno di un coefficiente dell'ordine dell'unità) la scomposizione in armoniche del suono prodotto dal flauto.

3.5 Altre basi

Fino ad ora la strategia è sempre stata la stessa: abbiamo la nostra PDE, separiamo le variabili per trovare soluzioni più semplici e notando che scegliendo opportunamente le costanti otteniamo una base di funzioni tramite cui riusciamo a scrivere (come somma infinita) la soluzione del problema note le condizioni ai bordi. Addizionalmente la forma delle soluzioni di base rivela dettagli sulla fisica del problema (per esempio in limiti di grandi distanze o prendendo i primi termini della somma). Di fatto però l'unica base che abbiamo visto è quella trigonometrica/esponenziale, che aiuta a risolvere problemi con simmetria lungo gli assi standard. Che succede se usiamo per esempio le coordinate sferiche? Per esempio si voglia trovare il potenziale elettrico nello spazio (privo di cariche) sapendo che in una sfera di raggio R è fissato a V_0 e fa 0 all'infinito. Se provate a risolvere questa cosa col metodo precedentemente esposto noterete che è molto difficile: non è chiaro che base scegliere, quali componenti oscillano e quali sono esponenziali, nemmeno come imporre le condizioni al contorno. La cosa da fare è trovare un analogo della 3.6 che abbiamo usato finora.

§ 3.5.1. **Di nuovo Laplace.** — Vogliamo trovare soluzioni di base per:

$$\nabla^2 f = 0, \quad (3.23)$$

che abbiano simmetria sferica. La cosa da fare ancora una volta è cercare soluzioni del tipo:

$$f(r, \theta, \phi) = A(r)Y(\theta, \phi), \quad (3.24)$$

mentre l'equazione di Laplace in coordinate sferiche è:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0, \quad (3.25)$$

mettendo f dentro la 3.25 si ottengono due equazioni differenziali per A e Y , risolvendole e scegliendo costanti ragionevoli (vi risparmio i calcoli perché sono abbastanza noiosi e vanno oltre il punto) si scopre che una possibile base di soluzioni è la seguente:

$$f_{lm} = r^l Y_{lm}, \quad (3.26)$$

$$v_{lm} = \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}, \quad (3.27)$$

dove le Y_{lm} sono le "armoniche sferiche" (di cui parleremo più approfonditamente in seguito). Da risultati matematici misteriosi per Y_{lm} vale un risultato analogo a quello che garantisce l'esistenza di una scrittura in serie di Fourier per funzioni periodiche. In particolare una soluzione dell'equazione di Laplace si scrive sempre come:

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + B_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}. \quad (3.28)$$

3.6 Armoniche sferiche

ℓ	m	Dipendenza angolare
0	0	1
1	0	$\cos \theta$
1	1	$\sin \theta e^{i\phi}$
2	0	$3 \cos^2 \theta - 1$
2	1	$\sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$
2	2	$\sin^2 \theta e^{2i\phi}$
3	0	$5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$
3	1	$\sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\phi}$
3	2	$\sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\phi}$
3	3	$\sin^3 \theta e^{3i\phi}$
4	0	$35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3$
4	1	$\sin \theta (7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) e^{i\phi}$
4	2	$\sin^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 1) e^{2i\phi}$
4	3	$\sin^3 \theta \cos \theta e^{3i\phi}$
4	4	$\sin^4 \theta e^{4i\phi}$

Tabella 1: Dipendenza angolare delle armoniche sferiche per $\ell \leq 4$

La tabella sopra dà le armoniche sferiche (con coefficiente davanti unitario, potreste non volerlo così in maniera che sia una base ortonormale come seni e coseni, ma a noi non serve). Per m negativi vale:

$$Y_{l(-m)} = (-1)^m \overline{Y_{lm}}, \quad (3.29)$$

dove $\bar{\cdot}$ è il coniugato complesso. Molto importante è sapere che Y_{lm} è una funzione di θ moltiplicata per $e^{im\phi}$. Ora la domanda importante: perché è utile conoscere queste funzioni? Per lo stesso motivo per cui è utile conoscere seno e coseno. Guardiamo un problema semplice per capire.

★☆☆☆☆ **Esercizio 4 Dipolo** Sia xyz lo spazio; un dipolo è un sistema di una carica $+q$ posta in $(0, 0, \frac{d}{2})$ e una carica $-q$ posta in $(0, 0, -\frac{d}{2})$. Si trovi il potenziale a grande distanza.

Soluzione 4: Usiamo la 3.28:

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + B_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}, \quad (3.30)$$

chiaramente $A_{lm} = 0$, perché il potenziale a infinito si annulla. Si vede poi che il potenziale non dipende da ϕ per simmetria rotazionale. Quindi per m diverso da 0 il coefficiente B_{lm} si annulla. Per rotazioni di π lungo θ il potenziale cambia segno, guardando la tabella per $m=0$, il primo l con questa proprietà è $l=1$. Il primo claim è che il potenziale sia della forma:

$$V = \frac{B}{r^2} \cos \theta, \quad (3.31)$$

per qualche costante B . Calcolando il potenziale per $\theta = 0$ si ottiene:

$$\frac{B}{r^2} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad (3.32)$$

da cui $B = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}$, e quindi:

$$V = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta. \quad (3.33)$$

§ 3.6.1. Altri problemi con le armoniche. — Con lo stesso metodo si possono fare tanti problemi simili risparmiandosi molti conti. La strategia è sempre la stessa: simmetrie angolari della soluzione eliminano potenziali dipendenze dalla distanza di essa. Le dipendenze che non si riescono a scartare vanno poi provate (calcolando il potenziale in un punto favorevole) per determinare i loro coefficienti nell'espansione in armoniche.

★★☆☆☆ **Esercizio 5 Quadrupolo, ottupolo** Trovare il potenziale a grande distanza di un quadrato di cariche a segno alterno e di un cubo di cariche a segni alterni (si assumano note tutte le costanti fisiche del caso).

★★☆☆☆ **Esercizio 6 Terra non sferica** Si assuma che la terra sia un ellissoide con due semiassi lunghi a e uno lungo b , di massa M , trovare la prima correzione al campo gravitazionale a grande distanza rispetto al modello in cui è sferica di uguale massa.

★★☆☆☆ **Esercizio 7 Di nuovo dipoli, quadrupoli, ottupoli** Trovare il potenziale elettrico dei problemi di prima, stavolta molto vicino all'origine. Farlo anche con cariche dello stesso segno.

3.7 Polinomi di Legendre

Un caso interessante dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche è quando si assume che non ci sia nessuna dipendenza da ϕ , ovvero il caso di simmetria azimutale. Nel qual caso le uniche armoniche rilevanti sono quelle per $m = 0$ (come succedeva nel dipolo). Esse hanno un nome e rispettano un'identità molto utile:

$$Y_{l0}(\theta) = P_l(\cos(\theta)), \quad (3.34)$$

dove P_l è l' l -esimo polinomio di Legendre, definito da:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad (3.35)$$

Analogamente a quanto succedeva per seni e coseni, i polinomi di Legendre formano una base ortonormale delle funzioni da $[-1, 1]$ ai reali (l'ortonormalità si verifica con un semplice calcolo, che sia una base completa deriva da proprietà dei polinomi che non tratteremo). In particolare tutti gli strumenti sviluppati per trattare la scrittura di funzioni in serie di Fourier si applicano qua. Vale che una soluzione si scrive sempre come:

$$f(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos(\theta)) \quad (3.36)$$

per opportune costanti. Vediamo di nuovo un problema per fare pratica:

★★★☆☆ **Esercizio 8 Sfera uniformemente polarizzata** Una sfera metallica di raggio a è posta in un campo elettrico esterno E costante in uno spazio xyz privo di carica (il campo è diretto verso $+z$). Trovare il potenziale in tutto lo spazio.

Soluzione 8: Chiaramente la soluzione, dentro e fuori la sfera separatamente, rispetta l'equazione di Laplace. Risolviamo fuori, dentro poniamolo a zero, dalla 3.34:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos(\theta)) \quad (3.37)$$

usando $V(R) = 0$ otteniamo:

$$A_l R^l + B_l \frac{1}{R^{l+1}} = 0, \quad (3.38)$$

e quindi:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos(\theta)), \quad (3.39)$$

per r molto grandi resta solo il contributo del campo elettrico esterno, il potenziale è circa $-Ez$:

$$-Er \cos(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos(\theta)), \quad (3.40)$$

quindi è facile vedere che tutti gli A_l fanno 0 a eccezione di $l = 1$, per cui:

$$A_1 = -E, \quad (3.41)$$

concludiamo dunque che il potenziale è:

$$V(r, \theta) = -E_1 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos(\theta) \quad (3.42)$$

— ESERCIZI —

★★★☆☆ **Esercizio 9 Un po' di equazioni lineari** Trovate tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = te^t$$

$$\ddot{x} + 9\dot{x} = t \cos(3t)$$

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 3x - x = e^t - 1$$

$$\ddot{x} - \ddot{x} + 4\dot{x} - 4x = te^t + \sin(2t)$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = t^2 + e^{2t}$$

★★☆☆☆ **Esercizio 10 Metodo di variazione delle costanti** Continuando a dare per buona l'esistenza delle soluzioni del sistema che abbiamo usato nella sezione 1.4.3, mostrate che esse portano effettivamente a una soluzione particolare.

★★★★☆ **Esercizio 11 Oscillatore smorzato**

1. Studiate l'equazione $\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = 0$, detta dell'oscillatore smorzato perché include un termine dovuto all'attrito viscoso, e quindi proporzionale alla velocità ($k > 0$). Dovrete distinguere tre casi: descrivete ciascuno di essi separatamente.
2. Se introduciamo una forzante αt^5 , com'è fatta la soluzione particolare?
3. Se introduciamo una forzante $\alpha \cos(\omega_0 t)$, com'è fatta la soluzione particolare?
4. Come si potrebbe trattare il caso in cui l'intensità della forzante è una funzione periodica qualunque del tempo? (Non svolgete calcoli espliciti, descrivete solo il procedimento in astratto).

★★☆☆☆ **Esercizio 12 Operatore risolvente** Sia p un polinomio; definiamo l'*operatore risolvente*, che associa a una funzione f l'unica soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} [p(D)](x) = f; \\ x(0) = 0; \\ \dot{x}(0) = 0; \\ \dots \\ x^{(n-1)}(0) = 0. \end{array} \right.$$

Dimostrate che si tratta di un operatore lineare. Quale trucco menzionato a lezione si basa su questo fatto?

★★★★☆ **Esercizio 13 Alcune serie di Fourier semplici** Scrivere le serie di Fourier delle seguenti funzioni periodiche:

1. $\sin(2\pi x)^2$

2. $\sin(4\pi x) \cos(2\pi x)^2$

★★★☆☆ **Esercizio 14 Identità di Parseval** Siano $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ i coefficienti di Fourier di una funzione 1-periodica f ; sfruttare l'ortonormalità per dimostrare che

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^2.$$

Nei prossimi esercizi diciamo che una funzione $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ è *prolungata con periodicità* a \mathbb{R} se, quando $x \in \mathbb{R}$ si scrive come $k + y$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq y < 1$, la definiamo come $f(x) = f(y)$. In questo modo, si può far corrispondere in modo intuitivo una funzione 1-periodica a ogni funzione definita su $[0, 1)$, e quindi utilizzare ciò che abbiamo detto sulle serie di Fourier.

★★★★☆ **Esercizio 15 Problema di Basilea, Versione 1**

1. Determinare i coefficienti di Fourier di $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
2. Utilizzare l'identità di Parseval per determinare la somma dei reciproci dei quadrati dei numeri interi positivi.
3. Se sostituite $x = 0$ nella serie di Fourier, che valore ottenete? Il motivo per cui non è $f(0)$ è che f ha una discontinuità in quel punto.

★★★★☆ **Esercizio 16 Problema di Basilea, Versione 2**

1. Determinare i coefficienti di Fourier di f definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

2. Utilizzare l'identità di Parseval per determinare la somma dei reciproci dei quadrati dei numeri interi positivi.
3. Se sostituite $x = 0$ oppure $x = \frac{1}{2}$ nella serie di Fourier, che valore ottenete? Il motivo per cui non è $f(0)$ o $f(\frac{1}{2})$ è che f ha una discontinuità in quei punti.

★★★★☆ **Esercizio 17 Problema di Basilea, Versione 3**

1. Determinare i coefficienti di Fourier di f definita come

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 1 - x & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

2. Eguagliando i valori di f e della sua Serie di Fourier in un punto opportuno, determinare la somma dei reciproci dei quadrati dei numeri interi positivi.

A lezione non abbiamo effettivamente dimostrato che la Serie di Fourier di f coincide con f in tutti i punti; i prossimi esercizi servono come traccia per una dimostrazione guidata di questo fatto. Cercherò di rendere il filo logico il più chiaro possibile, ma si tratta comunque di una dimostrazione non facile, e molti dei passaggi che svolgeremo non sono particolarmente interessanti come esercizi a sé stanti (eccetto per il Lemma di Riemann-Lebesgue): dunque, lasciateli per ultimi, e concentratevi prima sul resto.

★★★★★ **Esercizio 18 Lemma di Riemann-Lebesgue** Sia f una funzione continua e 1-periodica: giustificate il fatto che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \sin(2\pi nx) dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \cos(2\pi nx) dx = 0.$$

Nota: questo fatto non è facile da dimostrare formalmente. Ciò che importa, però, è capire la ragione intuitiva per cui i due integrali scritti sopra devono tendere a zero. La chiave sta nella continuità della funzione f ...

★★☆☆☆ **Esercizio 19 Nuclei di Dirichlet** Sia $N \in \mathbb{N}$ e definiamo i *Nuclei di Dirichlet* come

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{2\pi kix}.$$

1. Osservare che D_N è 1-periodica e pari.
2. Verificare che $\int_0^1 D_N(x) dx = 1$ per ogni N .
3. Dimostrare che $D_N(x) = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin(2\pi Nx) \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} + \cos(2\pi Nx)$.

Hint: vedere D_N come somma di una progressione geometrica, e poi utilizzare identità trigonometriche standard.

4. Sia f una funzione 1-periodica e $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ i suoi coefficienti di Fourier; definiamo

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi kix}.$$

Dimostrare che valgono le identità

$$S_N(x) = \int_0^1 f(y) D_N(x-y) dy = \int_0^1 f(x+y) D_N(y) dy.$$

★★★★☆ **Esercizio 20 Convergenza puntuale delle Serie di Fourier** Supponiamo adesso che f sia derivabile, e mostriamo che $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x)$.

1. Utilizzando i risultati dell'esercizio precedente, mostrare che

$$S_N(x) - f(x) = \int_0^1 [f(x+y) - f(x)] D_N(y) dy$$

2. Sfruttare la formula al punto 3 dell'esercizio precedente per scrivere

$$S_N(x) - f(x) = \int_0^1 g(y) \sin(2\pi Ny) dy + \int_0^1 h(y) \cos(2\pi Ny) dy,$$

con opportune funzioni g, h che non dipendono da N .

3. Verificare che le g, h di cui sopra sono continue e applicare il Lemma di Riemann-Lebesgue per concludere.