

Matematica Base

Giulia Comini*
Nicola Riccardo Marsico

Febbraio 2026

*giulia.comini@sns.it

— INDICE —

1	Espansione in Taylor	4
1.1	α -piccolo	4
1.1.1	Definizione	4
1.1.2	Esempi	4
1.1.3	Osservazione	4
1.1.4	Proposizione	4
1.2	Polinomi di Taylor	5
1.2.1	Teorema	5
1.2.2	Osservazione	5
1.2.3	Osservazione	6
1.2.4	Alcuni esempi più o meno frequenti	6
1.2.5	Osservazione	6
1.2.6	Esempio	6
2	ODE	7
2.1	Classificazione	7
2.2	Variabili separabili	7
2.3	Variabili inseparabili del primo ordine	8
2.4	Oscillatore armonico	9
2.4.1	Oscillatore armonico smorzato	10
2.5	ODE lineari non omogenee	11
2.6	Problemi di Cauchy	11
2.7	Conservazione dell'energia	11
2.7.1	Esempio: forza elastica	12
2.7.2	Esempio: forza gravitazionale	12
2.7.3	Esempio: gravità costante	13
2.8	Non conservazione dell'energia	13
3	Calcolo Multivariabile	14
3.1	Gradiente di una funzione scalare	14
3.2	Derivata di una curva	16
3.2.1	Il vettore velocità	16
3.2.2	La velocità scalare	17
3.2.3	Guardare componente per componente	17
3.2.4	Risultati	17
3.3	Chain Rule	18
3.4	Caso generale	18
4	Integrazione	19
4.1	Integrazione lungo curve	19
4.2	Integrazione su superfici	20
4.2.1	Integrali su rettangoli	20
4.2.2	Integrali su domini di \mathbb{R}^2	21
4.2.3	Integrali su superfici	23
4.3	Integrazione su volumi	24

A	Divergenza e Rotore	26
A.1	Definizioni	26
A.2	Interpretazione intuitiva	26
A.2.1	Divergenza	26
A.2.2	Rotore	26
A.3	Considerazioni aggiuntive	26
	Esercizi	28
	Soluzioni	30

SEZ. 1 — ESPANSIONE IN TAYLOR

1.1 *o*-piccolo

§ 1.1.1. Definizione. — (*o*-piccolo)

Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un reale esteso e sia I un intorno di x_0 . Consideriamo due funzioni $f(x), g(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che $g(x) \neq 0 \forall x \in I \setminus \{x_0\}$.

Diremo che $f(x)$ è un *o*-piccolo di $g(x)$ per x che tende ad x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Per compattezza in tal caso scriveremo $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$.

§ 1.1.2. Esempi. —

- $x = o(1)$ per $x \rightarrow 0$,
- $\ln x = o(e^x)$ per $x \rightarrow \infty$
- $x^{2025} = o(x^{2024})$ per $x \rightarrow 0$,
- $\sin x = o(15\sqrt{x})$ per $x \rightarrow \pi$.

§ 1.1.3. Osservazione. — (*o*-piccolo = "trascurabile")

$f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ ci sta moralmente dicendo che per x "molto vicine" a x_0 possiamo considerare $f(x)$ trascurabile rispetto a $g(x)$.

Concedendoci un leggero abuso di notazione, se in un'espressione troviamo degli *o*-piccolo possiamo sostituire le relative funzioni con la scrittura $o(g(x))$ (stando attenti). Ad esempio $\ln x = o(x^2)$ e $x = o(x^2)$ per $x \rightarrow \infty$ quindi

$$\ln x + 3x^2 - x = o(x^2) + 3x^2 - o(x^2)$$

Qua bisogna stare attenti, è assolutamente vietato semplificare gli *o*-piccolo (ovvero dire $o(x^2) - o(x^2) = 0$), infatti se lo facessimo otterremmo una relazione falsa. La scrittura $o(g(x))$ va vista come insieme di funzioni piuttosto che come singola funzione, infatti esiste sempre più di una funzione che è *o*-piccolo di $g(x)$ ergo $o(g(x)) - o(g(x))$ non è necessariamente 0.

§ 1.1.4. Proposizione. — (Alcune proprietà di *o*-piccolo)

Supponiamo che $f_1(x) = o(g(x))$ e $f_2(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$. Allora

- (**SOMMA** $o \pm o = o$) $f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x))$
- (**MULTIPLIO** $\alpha o = o$) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ vale $\alpha f_1(x) = o(g(x))$
- (**PRODOTTO**) $f_1(x)f_2(x) = o(g(x)^2)$
- (**SEMPLIFICARE** *o*-piccolo) $f_1(x) = o(g(x) + f_2(x)) = o(g(x))$

(La verifica delle proprietà è lasciata come esercizio).

Tornando al nostro esempio possiamo ora dire che per $x \rightarrow \infty$ vale

$$\ln x + 3x^2 - x = o(x^2) + 3x^2 - o(x^2) = 3x^2 + o(x^2)$$

1.2 Polinomi di Taylor

Il sogno di ogni fisico è di poter lavorare con semplici funzioni polinomiali piuttosto che con funzioni brutte e cattive tipo $\sin x$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $e^{\cos x}$... Purtroppo funzioni non polinomiali sbucano molto frequentemente nello studio della fisica ma non per questo dobbiamo rinunciare ai nostri sogni. Potremmo cercare di capire se è possibile approssimare le funzioni con cui dobbiamo lavorare a dei polinomi, almeno nelle vicinanze di un certo valore x_0 . Ad esempio, se volessimo approssimare $\cos x$ nelle vicinanze di $x = 0$ con un polinomio $P_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ di secondo grado vorremmo la seguente condizione soddisfatta

$$\cos x = \alpha x^2 + \beta x + \gamma + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

ovvero vorremmo che l'errore commesso nell'approssimare $\cos x$ con $P_2(x)$ sia un o -piccolo di x^2 , cioè vorremmo che l'errore commesso sia trascurabile rispetto a $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (a patto che $x \rightarrow 0$ ovvero che x sia molto vicino a 0). In questo caso potremmo verificare che $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ svolge il lavoro richiesto ossia

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

immagine

Il sogno dei fisici di poter approssimare una funzione $f(x)$ con un polinomio $P_n(x)$ di grado n è avverato dal seguente Teorema

§ 1.2.1. Teorema. — (Formula di Taylor)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un reale, I un suo intorno e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile almeno n volte con $n \in \mathbb{N}$ allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

dove $f^{(k)}(x_0)$ è la derivata k -esima di f calcolata in x_0 ($f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$).

In parole povere il polinomio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)$$

(P_n è detto espansione di $f(x)$ attorno a x_0 all' n -esimo ordine) è una buona approssimazione di $f(x)$ per x molto vicino a x_0 cioè l'errore commesso nell'approssimare $f(x)$ con $P_n(x)$ è trascurabile (rispetto a $P_n(x)$).

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)$$

per x molto vicino a x_0 .

§ 1.2.2. Osservazione. — (Taylor imita le derivate di f)

Ciò che il polinomio di Taylor fa è imitare il comportamento della funzione $f(x)$ nelle prime n derivate. (Verificare che le prime n derivate di $f(x)$ calcolate in x_0 coincidono con le prime n derivate di $P_n(x)$ calcolate in x_0)

Molto spesso ci interessa approssimare una funzione $f(x)$ nelle vicinanze di $x = 0$. Per $x \rightarrow 0$ Taylor prende la seguente forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) + o(x^n) \approx \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

§ 1.2.3. **Osservazione.** — (Taylor di una funzione composta)

se si sostituisce $x - x_0$ a x nella formula di Taylor per $x \rightarrow 0$ di $f(x)$ si ottiene la formula di Taylor per $x \rightarrow x_0$ di $g(x) = f(x - x_0)$.

§ 1.2.4. **Alcuni esempi più o meno frequenti.** — (tutti per $x \rightarrow 0$)

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$,
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$ (vale $\forall \alpha \in \mathbb{R}!!$)

Dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

§ 1.2.5. **Osservazione.** — (Sostituzioni con gli o -piccolo)

Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_1} h(x) = x_0$ allora $f(h(x)) = o(g(h(x)))$ per $x \rightarrow x_1$ (si tratta di un limite per sostituzione). Questa osservazione può essere utile a scrivere Taylor di funzioni che sono composizioni di altre funzioni più semplici perché ci sta dicendo, ad esempio, che

$$\begin{aligned} \sin(\sin(x)) &= \sin(x) + o(\sin(x)) = x + o(x) + o(x + o(x)) = \\ &= x + o(x) + o(x) = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

perché $\sin(x)$ tende a 0 per $x \rightarrow 0$ (la prima uguaglianza viene da $\sin(t) = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$ e al posto di t abbiamo messo $\sin(x)$, dopo il secondo uguale abbiamo sostituito $\sin(x)$ con $x + o(x)$ e infine abbiamo manovrato gli o -piccolo).

§ 1.2.6. **Esempio.** — (Espansione di $\tan(x)$)

Trovare l'espansione di $\tan(x)$ attorno a $x = 0$ al terzo ordine.

In questo caso usare direttamente la formula di Taylor potrebbe risultare particolarmente contoso poiché le derivate di $\tan(x)$ non sono molto belle. Possiamo però scrivere $\tan(x)$ come composizione di funzioni più semplici:

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1} = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} - o(x^3) + \left(\frac{x^2}{2} - o(x^3)\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - o(x^3)\right)^2\right)\right) = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{2} + xo(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \\ &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

dove per la terza uguaglianza è stata usata l'espansione di $(1+t)^\alpha$ per $t \rightarrow 0$ al secondo ordine con $\alpha = -1$ e $t = \frac{x^2}{2} - o(x^3)$ (gli o -piccolo si semplificano molto facilmente).

SEZ. 2 — ODE

Le equazioni alle derivate ordinarie (ODE) sono delle equazioni in cui compaiono una variabile, una funzione e le sue derivate e in cui l'incognita è la funzione. L'ordine di un'ODE è il massimo tra gli ordini delle derivate che vi compaiono. Indicheremo con y la funzione e con x la variabile. Un esempio semplicissimo di ODE di primo ordine è il seguente:

$$y' = x$$

E ha per soluzione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Dove C è un parametro determinato dalle condizioni iniziali del problema. È importante ricordare che nessuna ODE ha un'unica soluzione, bensì esiste una famiglia di soluzioni. La soluzione generale di un'equazione di n -esimo ordine dipende da n parametri. Nel caso dell'esempio, l'equazione era di primo ordine e la soluzione dipendeva da un solo parametro, C .

Vediamo nelle sezioni seguenti come trovare le soluzioni delle ODE.

2.1 Classificazione

Un'ODE si dice *lineare* se y e le sue derivate compaiono sempre con esponente 1 e mai moltiplicate o divise tra loro. Ad esempio, queste ODE sono lineari:

$$y'' = -y; \quad x^3 y''' + x^2 y + 27 = 0$$

E queste non lo sono:

$$y' = y^2; \quad yy' = x$$

Un'ODE lineare si dice *omogenea* se ogni suo termine è moltiplicato per y o per una sua derivata. Le seguenti ODE sono lineari omogenee:

$$y'' + y' + y = 0; \quad (x^2 + 1)y'' + y \cdot \sin x = 0$$

E le seguenti non lo sono:

$$y' + y = \sqrt{x}; \quad y'' - 2y' + y = \cos x$$

2.2 Variabili separabili

Un'ODE a variabili separabili è un'ODE che può essere espressa nella seguente forma:

$$f(y) \cdot y' = g(x)$$

Dove f e g sono funzioni da un sottoinsieme di \mathbb{R} in \mathbb{R} . L'idea informale per risolvere questo tipo di ODE è pensare $y' = dy/dx$, e dunque moltiplicare i due membri per dx e poi integrare. In pratica, otteniamo:

$$f(y)dy = g(x)dx$$

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

Risolvendo l'integrale e provando a esplicitare y in funzione di x si risolve l'ODE. Vediamo ad esempio come risolvere l'equazione mostrata nel paragrafo precedente:

$$y' = x$$

$$\begin{aligned} dy &= x dx \\ \int dy &= \int x dx \\ y &= \frac{1}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

Si noti come facendo l'integrale indefinito è saltato fuori il parametro. Proviamo ora a risolvere qualcosa di più complicato: dato un certo $k \in \mathbb{R}$, proviamo a risolvere:

$$\begin{aligned} y' - ky &= 0 \\ y' &= ky \end{aligned}$$

Per poter separare le variabili, vorremmo poter dividere i due membri per y . Possiamo farlo, ma dobbiamo stare attenti a verificare se $y = 0$ risolve l'ODE. È facile verificare che la risolve, perciò sappiamo che le funzioni che risolvono l'ODE sono $y = 0$ e quelle che risolvono:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}y' &= k \\ \frac{1}{y}dy &= k dx \\ \int \frac{1}{y}dy &= \int k dx \\ \log |y| &= kx + C \\ |y| &= e^{kx+C} \\ y &= \pm e^C e^{kx} \end{aligned}$$

Osserviamo che e^C può assumere qualunque valore strettamente positivo, per cui $\pm e^C$ può assumere qualunque valore diverso da 0. Detto $A = \pm e^C$, le soluzioni dell'ODE sono quindi:

$$y = 0 \vee y = Ae^{kx} \text{ con } A \neq 0$$

Ovvero:

$$y = Ae^{kx} \text{ con } A \in \mathbb{R}$$

Anche qui, la soluzione dipende da un solo parametro, come ci aspettavamo.

2.3 Variabili inseparabili del primo ordine

Vediamo ora come risolvere le ODE a variabili inseparabili del primo ordine, ovvero le equazioni differenziali della forma

$$y' = ya(x) + b(x)$$

Quando abbiamo derivato e^x abbiamo visto che $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. Aver trovato una funzione che è anche la sua derivata è qualcosa che a noi fa estremamente comodo. In particolare, se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$, otteniamo che

$$\frac{d}{dx}(ye^{-A(x)}) = y'e^{-A(x)} - ya(x)e^{-A(x)}$$

Proviamo a rimaneggiare il testo per ottenere qualcosa del genere

$$\begin{aligned} y' &= ya(x) + b(x) \\ y' - ya(x) &= b(x) \end{aligned}$$

$$e^{-A(x)}y' - e^{-A(x)}ya(x) = e^{-A(x)}b(x)$$

Allora possiamo riscrivere il primo membro

$$\frac{d}{dx}(ye^{-A(x)}) = e^{-A(x)}b(x)$$

Integrando rispetto a x da ambo le parti,

$$ye^{-A(x)} + c_1 = \int (e^{-A(x)}b(x))dx$$

$$ye^{-A(x)} = \int (e^{-A(x)}b(x))dx - c_1$$

Dove c_1 è una costante. Notiamo che l'integrale al secondo membro è un integrale indefinito, quindi è una qualunque primitiva dell'integrando. La famiglia delle primitive di una funzione rimane sé stessa se si aggiunge o toglie una costante. Quindi possiamo riscrivere la soluzione della nostra ODE come

$$ye^{-A(x)} = \int (e^{-A(x)}b(x))dx$$

$$y = e^{A(x)} \int (e^{-A(x)}b(x))dx$$

Osserviamo che questa relazione vale per *qualunque* primitiva $A(x)$ di $a(x)$, quindi nello svolgimento dei calcoli non occorre preoccuparsi della costante da aggiungere ad $A(x)$, ma si può aggiungere quella che più fa comodo (che molto spesso è 0). Anche qui, come ci aspettavamo, abbiamo un solo parametro libero.

2.4 Oscillatore armonico

Concentriamoci ora su alcune equazioni differenziali omogenee di second'ordine ricorrenti in fisica. La più semplice e diffusa è l'equazione dell'oscillatore armonico (che, come suggerito dal nome, caratterizza il moto armonico semplice)

$$y'' = -ky$$

con $k > 0$. Definiamo $\omega_0 = \sqrt{k}$ e dunque:

$$y'' = -\omega_0^2 y \tag{2.1}$$

La soluzione generale è:¹

$$y = A \cos(\omega_0 x) + B \sin(\omega_0 x)$$

perché soddisfa l'equazione (2.1) e ha due parametri reali liberi. Verifichiamo che soddisfa.

$$y' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 x) + B\omega_0 \cos(\omega_0 x)$$

$$y'' = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 x) - B\omega_0^2 \sin(\omega_0 x) = -\omega_0^2 y$$

Infine, osserviamo che la soluzione $y = A \cos(\omega_0 x) + B \sin(\omega_0 x)$ si può riscrivere nella forma:

$$y = D \cos(\omega_0 x + \varphi)$$

infatti:

$$D \cos(\omega_0 x + \varphi) = D[(\cos \varphi)(\cos(\omega_0 x)) + (-\sin \varphi)(\sin(\omega_0 x))]$$

e notando che esistono φ e D tali che $A = D \cos \varphi$ e $B = -D \sin \varphi$, la soluzione dell'ODE diventa $y = D \cos(\omega_0 x + \varphi)$.

¹In generale, combinazioni lineari di $e^{i\omega_0 x}$ ed $e^{-i\omega_0 x}$ soddisfano, ma imponendo che la soluzione sia reale si ottiene questa formula. A tal proposito, proponiamo lo svolgimento dell'esercizio 9, sezione 9.2.

§ 2.4.1. **Oscillatore armonico smorzato.** — Vediamo ora un'ODE più complicata, l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato:

$$y'' = -k_1 y - k_2 y'$$

che, per come comparirà nei problemi di fisica, riscriviamo nella forma

$$y'' + \omega_0^2 y + 2\gamma y' = 0$$

Provando una soluzione del tipo $y = (a + bx)e^{-\alpha x}$ ci accorgiamo che possiamo determinare i parametri a, b, α in modo che soddisfi l'ODE di partenza.

$$y' = be^{-\alpha x} - (a + bx)\alpha e^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}(b - \alpha(a + bx))$$

$$y'' = -\alpha be^{-\alpha x} + \alpha^2(a + bx)e^{-\alpha x} - b\alpha e^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}(-2\alpha b + \alpha^2(a + bx))$$

Sostituendo nell'ODE iniziale,

$$e^{-\alpha x}[-2\alpha b + \alpha^2(a + bx) + 2\gamma b - 2\gamma\alpha(a + bx) + \omega_0^2(a + bx)] = 0$$

Poiché $e^{-\alpha x} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(a + bx)(\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2) + 2b(\gamma - \alpha) = 0$$

- Se $\alpha \neq \gamma$, deve essere $b = 0$, altrimenti nel caso $x = -\frac{a}{b}$ non ottengo 0. Quindi

$$a(\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2) = 0$$

$$\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Poiché sono nel caso $\alpha \neq \gamma$, so che le due soluzioni α_1 e α_2 sono distinte. Ma allora soluzioni del tipo

$$y = ae^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})x}, \quad y = ae^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})x}$$

soddisfano. Quindi, dato che stiamo trattando un'ODE omogenea e la derivata è un operatore lineare, anche una combinazione lineare di queste soluzioni è soluzione. Ottengo così soluzioni del tipo

$$y = e^{-\gamma x} (a_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}x} + a_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}x})$$

che, come ci aspettavamo, hanno due parametri liberi. Notare che se $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ nella soluzione abbiamo degli esponenziali reali, mentre se $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ abbiamo degli esponenziali complessi e in tal caso la soluzione si può riscrivere come:

$$y = e^{-\gamma x} \left(A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}x\right) + B \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}x\right) \right).$$

- Se $\alpha = \gamma$, allora $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma$, e dunque quelle che prima erano soluzioni distinte ora coincidono. Sembrerebbe che si sia perso un parametro libero, ma all'inizio non sarebbe stato necessario porre $b=0$, quindi otteniamo soluzioni della forma

$$y = (a + bx)e^{-\gamma x}$$

che, come ci aspettavamo, hanno due parametri liberi.

2.5 ODE lineari non omogenee

Spendiamo infine qualche riga sulle ODE lineari non omogenee. Esse sono equazioni differenziali della forma

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}f_{n-1}(x) + \dots + yf_0(x) = h(x). \quad (2.2)$$

In questi casi, per la linearità della derivata, al fine di trovare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea è sufficiente trovare una soluzione particolare $y = p(x)$ dell'equazione non omogenea e sommarvi la soluzione generale $y = g(x)$ dell'equazione omogenea associata.

Infatti se dall'equazione (2.2) sottraiamo una soluzione particolare otteniamo:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \dots + yf_0(x) - [p^{(n)}(x) + \dots + p(x)f_0(x)] &= h(x) - h(x) = 0 \\ (y - p(x))^{(n)} + (y - p(x))^{(n-1)}f_{n-1}(x) + \dots + (y - p(x))f_0(x) &= 0 \end{aligned}$$

e questa è l'omogenea associata, risolta da $y - p(x) = g(x)$, quindi otteniamo la soluzione

$$y = p(x) + g(x).$$

2.6 Problemi di Cauchy

Per problema di Cauchy si intende un'ODE messa a sistema con delle condizioni iniziali riguardanti la funzione e le sue derivate². Se per esempio l'ODE è del second'ordine, le condizioni iniziali riguarderanno la funzione e la derivata prima. Un esempio di problema di Cauchy è il seguente:

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Come abbiamo già visto, la soluzione generale dell'ODE riportata è:

$$y = A \cos x + B \sin x$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo i valori di A e B che ci danno la soluzione particolare che cerchiamo:

$$\begin{aligned} y(0) &= A \cos 0 + B \sin 0 = A = 1 \\ y'(x) &= -\sin x + B \cos x \Rightarrow y'(0) = B = 0 \end{aligned}$$

La soluzione particolare è perciò:

$$y(x) = \cos x.$$

2.7 Conservazione dell'energia

Sia data una particella di massa m che si muove, per semplicità, in una dimensione. Supponiamo che se la particella si trova nella posizione x , allora su di essa agisce una forza $f(x)$. Sia $x(t)$ la posizione della particella in funzione del tempo. Ricordando che l'accelerazione è la derivata temporale seconda e applicando il secondo principio della dinamica si ha:

$$m\ddot{x}(t) = f(x(t))$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per la velocità:

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = f(x(t))\dot{x}(t)$$

²In fisica, spesso ci troviamo a risolvere ODE in cui x gioca il ruolo del tempo, la funzione y è la posizione di una particella, y' è la sua velocità e y'' è la sua accelerazione.

Notando ora che $m\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right]$ e che $f(x(t))\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} f(y)dy$, si ha:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right] = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} f(y)dy$$

Cioè:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x(t)} f(y)dy \right] = 0$$

Dato che la derivata si annulla per ogni t , allora la funzione tra parentesi quadre deve essere uguale ad una costante. Chiamiamo *energia* tale costante, che indichiamo con E . Dunque per ogni t si ha:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - \int_{x_0}^{x(t)} f(y)dy = E$$

Il termine $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$ è detto *energia cinetica*, mentre il termine $-\int_{x_0}^{x(t)} f(y)dy$ è detto *energia potenziale* e si indica usualmente con $U(x)$. L'equazione diventa dunque:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + U(x(t)) = E.$$

Il punto x_0 nella definizione di energia potenziale può essere scelto in modo arbitrario. L'energia potenziale è dunque definita a meno di una costante additiva.

Osserviamo che se sappiamo calcolare $U(x)$ (cioè la primitiva della forza $f(x)$), allora dall'equazione precedente possiamo calcolare la velocità della particella in funzione della sua posizione, senza necessariamente conoscere l'espressione esplicita della posizione in funzione del tempo.

Osserviamo che questo è anche un metodo per risolvere equazioni differenziali, infatti l'equazione precedente è a variabili separabili. Dunque se si sanno calcolare le primitive, si può trovare esplicitamente $x(t)$.

§ 2.7.1. Esempio: forza elastica. — Supponiamo che la nostra particella è soggetta ad una forza elastica del tipo $f(x) = -k(x - x_c)$, cioè si ha una molla ideale con lunghezza a riposo nulla, incernierata in $x = x_c$ e con costante elastica k .

L'*energia potenziale* elastica è dunque: (scelgo $x_0 = x_c$)

$$U(x) = - \int_{x_c}^x f(y)dy = \int_{x_c}^x k(y - x_c)dy = \int_0^{x-x_c} kzdz = \frac{1}{2}k(x - x_c)^2$$

Perciò la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_c)^2 = E.$$

§ 2.7.2. Esempio: forza gravitazionale. — Supponiamo di avere una massa M incollata nell'origine $x = 0$ e una massa m vincolata a muoversi nella semiretta $x > 0$. La forza agente sulla massa m è allora $f(x) = -\frac{GmM}{x^2}$.

L'*energia potenziale* gravitazionale è dunque (scegliendo $x_0 = +\infty$):

$$U(x) = - \int_{+\infty}^x f(y)dy = \int_{+\infty}^x \frac{GmM}{y^2}dy = -\frac{GmM}{x}$$

Perciò la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{GmM}{x} = E$$

Un analogo calcolo si può fare nel caso in cui le particelle sono elettricamente cariche.

§ 2.7.3. **Esempio: gravità costante** . — Supponiamo di avere una massa m vincolata a muoversi sull'asse z . Sulla massa m agisce una forza costante $f(z) = -mg$ opposta all'asse z .³ L'energia potenziale gravitazionale è dunque (scegliendo $x_0 = 0$):

$$U(x) = - \int_0^z f(y) dy = \int_0^z mg dy = mgz.$$

Perciò la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = E.$$

2.8 Non conservazione dell'energia

Abbiamo fatto un'ipotesi fondamentale sulla forza: cioè che abbia una forma del tipo $f(x)$, ovvero che non sia funzione esplicita del tempo. Ad esempio, la forza $f(x) = -kx$ non ha dipendenza esplicita dal tempo, ma dipende implicitamente dal tempo perchè la posizione x della particella dipende dal tempo.

Poniamoci ora in un caso particolare. Supponiamo di avere due forze che agiscono sulla particella: una forza che è funzione solo della posizione e un'altra che è funzione solo del tempo. Dunque la forza totale agente sulla massa m , che si trova al tempo t nella posizione x , è del tipo $f(x, t) = F(x) + G(t)$: questa è una forza che dipende esplicitamente dal tempo (a causa della funzione $G(t)$). L'energia si conserva o no?

La seconda legge di Newton dice:

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)) + G(t)$$

Moltiplicando per la velocità e osservando che $m\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right]$ e che $F(x(t))\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} F(y) dy$, si ha:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x(t)} F(y) dy \right] = G(t)\dot{x}(t).$$

Nelle parentesi quadre appare la funzione che prima abbiamo chiamato *energia*. Ora però non è costante: la indichiamo dunque con $E(t)$. Siamo arrivati all'equazione:

$$\frac{d}{dt} E(t) = G(t)\dot{x}(t)$$

Se la forza $G(t)$ è tale che $G(t) = 0$ sempre, allora ci riconduciamo al caso precedente in cui $E(t) = E = \text{costante}$. Dunque diciamo che $G(t)$ è una *forza non conservativa* (perché è sua la colpa della non conservazione dell'energia!). Il termine $G(t)\dot{x}(t)$ si dice *potenza della forza G* e si indica usualmente con $P(t)$. Abbiamo dunque dimostrato che:

$$\frac{d}{dt} E(t) = P(t),$$

cioè che la derivata temporale dell'energia è uguale alla potenza fatta dalle forze non conservative.⁴

³Si può immaginare, ad esempio, una situazione fisica in cui c'è una pallina soggetta alla gravità terrestre vincolata a muoversi su un'asta verticale incernierata al pavimento.

⁴Ricordiamo che ci siamo posti nel caso particolare $f(x, t) = F(x) + G(t)$. In generale possiamo avere anche forze che mischiano la posizione e il tempo, ad esempio forze del tipo $f(x, t) = k \cdot tx$ con k costante.

SEZ. 3 — CALCOLO MULTIVARIABILE

3.1 Gradiente di una funzione scalare

In questa sezione ci occuperemo di generalizzare la nozione di *derivata* al caso di funzioni $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Per semplicità considereremo solo le funzioni $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Queste hanno infatti il pregio di poter essere rappresentate con il disegno del loro *grafico*, ovvero l'insieme delle terne $(x, y, V(x, y))$ al variare di $x, y \in \mathbb{R}$. Rappresentiamone qualcuna. Procedendo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso troviamo $z = x + y, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \cos x, z = xe^{-y^2}$.

immagine immagine immagine immagine

Figura 1: Esempi di grafici di funzioni.

Come per il calcolo in una variabile, vediamo cosa si ottiene se proviamo a calcolare il primo ordine di $dV = dV(x, y) = V(x + dx, y + dy) - V(x, y)$:

- per $V(x, y) = x + y$ abbiamo $dV = dx + dy$.

- per $V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ abbiamo

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{(x + dx)^2 + (y + dy)^2} - \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2xdx + 2ydy} - \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \end{aligned}$$

dove evidentemente ci sono dei problemi se $(x, y) = (0, 0)$. Ci torneremo in seguito.

- per $V(x, y) = \cos x$ abbiamo $dV = -\sin x dx$.

- per $V(x, y) = xe^{-y^2}$ abbiamo

$$\begin{aligned} dV &= (x + dx)e^{-(y+dy)^2} - xe^{-y^2} = (x + dx)e^{-y^2 - 2ydy} - xe^{-y^2} = \\ &= (x + dx)e^{-y^2} (1 - 2ydy) - xe^{-y^2} = xe^{-y^2} + e^{-y^2} dx - 2xye^{-y^2} dy - xe^{-y^2} = \\ &= e^{-y^2} dx - 2xye^{-y^2} dy \end{aligned}$$

Cosa abbiamo imparato da questi esempi? Abbiamo scoperto che generalmente una funzione $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ammette *un'espansione al primo ordine* attorno al punto (x, y) del tipo

$$dV = a(x, y)dx + b(x, y)dy \quad (3.1)$$

dove $a(x, y), b(x, y)$ sono dei numeri che in generale dipendono dal punto (x, y) . Come abbiamo ricavato in generale questi numeri $a(x, y)$ e $b(x, y)$? Essenzialmente abbiamo usato tutte le espansioni al primo ordine in una variabile che conoscevamo e lì dove le operazioni ci generavano dei termini $(dx)^2$ o $(dy)^2$ o ancora $dx dy$ li abbiamo buttati via. In effetti se avessimo considerato l'espressione $V(x + dx, y) - V(x, y)$ avremmo ottenuto

$$V(x + dx, y) - V(x, y) = a(x, y)dx \quad (3.2)$$

che a posteriori torna perché corrisponde a considerare $dy = 0$ in (3.1). Di conseguenza sappiamo calcolare $a(x, y)$, visto che

$$V(x + dx, y) - V(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad (3.3)$$

dove $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y)$ è la derivata di V rispetto a x tenendo fissata y , altresì detta *derivata parziale di V rispetto a x* . Eguagliando (3.2) e (3.3) si ottiene $a(x, y)dx = \frac{\partial V}{\partial x} dx$ e di conseguenza $a(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}$.

Teorema 3.1. *Sia $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare. Allora attorno ad ogni suo punto (x_1, x_2, \dots, x_n) ammette un'espansione al primo ordine del tipo*

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n \quad (3.4)$$

dove $\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ denota la derivata parziale i -esima, ovvero la derivata di V nella variabile x_i avendo fissate le altre.

L'interpretazione grafica dell'espansione (3.1) è che in un intorno del punto (x, y) la funzione V è ben approssimata da un piano, detto *piano tangente* al grafico. Il problema che avevamo riscontrato con la funzione $V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $(0, 0)$ si spiega geometricamente con l'assenza di un piano tangente, matematicamente con la non esistenza delle derivate parziali nell'origine.

Osserviamo ora che la relazione (3.4) si può riscrivere in termini di un *prodotto scalare* come

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \cdot ds = \nabla V \cdot ds \quad (3.5)$$

dove abbiamo posto $ds = (dx, dy)$ lo spostamento vettoriale infinitesimo, $\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)$ e per semplicità ci siamo ristretti al caso $n = 2$. Il vettore $\nabla V = \nabla V(x, y)$ è detto *gradiente* della funzione V in (x, y) . Dalla relazione (3.5) si ricava equivalentemente che

$$dV = |\nabla V| ds \cos \theta$$

dove θ è l'angolo formato da ∇V e ds . Una conseguenza di questo fatto è che ∇V punta nella direzione di massima crescita della funzione V . Un'altra conseguenza è che il primo ordine di espansione di V si annulla solo per $\theta = 90^\circ$, ovvero il gradiente è *ortogonale* alle direzioni lungo cui V è stabile al primo ordine.

Quanto visto è sufficiente per giustificare molti risultati matematici elementari utili per la fisica. Vediamone uno per esempio.

Esempio 3.1 (Campi conservativi). Sia \mathbf{F} un campo di forze conservativo. Sappiamo che per un tale campo di forze è possibile parlare di un *potenziale*, ossia una funzione $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni percorso γ

$$L = -dV \quad (3.6)$$

dove L è il lavoro fatto dal campo \mathbf{F} lungo il percorso γ . Per percorsi infinitesimali la precedente relazione diventa

$$\mathbf{F} \cdot ds = dL = -dV = -\nabla V \cdot ds$$

ricavando così l'identità $\mathbf{F} = -\nabla V$. Abbiamo quindi verificato che un campo conservativo è sempre il gradiente di una funzione scalare. E proprio poiché il gradiente di una funzione è ortogonale alle direzioni di stabilità al primo ordine, le superfici equipotenziali devono risultare ortogonali a \mathbf{F} in ogni loro punto.

Con un minimo di conoscenza del calcolo integrale, sarebbe immediato verificare che

- un campo è conservativo se e solo se è il gradiente di una funzione scalare;

- una superficie connessa è equipotenziale se e solo se è in ogni punto ortogonale al campo gradiente.

Come per le funzioni in una variabile, ha senso parlare di *punti critici* per una funzione $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Questi sono i punti (x, y) per cui $\nabla V(x, y) = 0$, ovvero quei punti per cui il corrispondente piano tangente è parallelo al piano xy . Sono questi i punti in cui possiamo avere una qualche speranza di trovare dei massimi e minimi locali per la funzione V . Come al solito un punto critico può non essere né di massimo né di minimo. Prima di capire come comportarci di fronte ad un *punto critico* è necessario riportare il seguente risultato detto **Teorema di Schwarz**:

$$\frac{\partial \partial V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \partial V}{\partial y \partial x}$$

dove V è una funzione sufficientemente regolare (Fare la derivata prima rispetto a x e poi rispetto a y o viceversa è indifferente).

Torniamo al nostro obiettivo. Per discriminare se un punto critico è di massimo, di minimo o nessuno dei precedenti, come nel caso unidimensionale bisogna studiare il segno del primo ordine non nullo. Cominciamo studiando il segno del secondo ordine considerando la superficie di secondo grado che imita le derivate seconde di V in (x_0, y_0) .

$$f(x, y) = \frac{1}{2} V_{xx}(x - x_0)^2 + V_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} V_{yy}(y - y_0)^2$$

Dove $V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $V_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ e $V_{yy} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x_0, y_0)$. Nell'ipotesi in cui (x_0, y_0) sia un punto critico di V (ovvero $\nabla V(x_0, y_0) = (0, 0)$) avremo che il comportamento di V , in un intorno di (x_0, y_0) , è (al secondo ordine) come quello di f . Notiamo che ponendo $t = \frac{x - x_0}{y - y_0}$ abbiamo

$$f(x, y) = (y - y_0)^2 \left(\frac{1}{2} V_{xx} t^2 + V_{xy} t + \frac{1}{2} V_{yy} \right)$$

dunque si avrà un minimo nel caso in cui $f \geq 0$ per ogni t ovvero se $\Delta = V_{xy}^2 - V_{xx} V_{yy} < 0$ e $V_{xx} > 0$, un massimo se $f \leq 0$ per ogni t ovvero se $\Delta < 0$ e $V_{xx} < 0$, una cosiddetta sella se $\Delta > 0$ mentre sarà necessario approfondire lo studio di V all'ordine successivo nel caso in cui $\Delta = 0$.

Nelle figura 3.1 troviamo riassunti i quattro casi. Le funzioni rappresentate sono nell'ordine $z = -x^2 - 2y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, $z = x^2 - 2y^2$, $z = x^3 - 2y^3$.

immagine Figura 3.1: Procedendo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso, troviamo delle funzioni con punto critico nell'origine di tipo minimo, massimo, sella e nessuno dei precedenti.

3.2 Derivata di una curva

In questa sezione ci occuperemo di generalizzare la nozione di derivata al caso di funzioni $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ovvero le cosiddette curve. Supporremo per semplicità che $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Potremmo immaginare che γ descriva la legge oraria di una particella newtoniana: in quest'ottica la rappresentazione di γ come una traiettoria con delle frecce che ne indichino il verso di percorrenza è più che sufficiente. Proprio alla luce di questa interpretazione meccanica diremo che γ è funzione della variabile indipendente t che evochi la nozione di *tempo*.

Come nel caso in una variabile, siamo interessati ad espandere la funzione γ al primo ordine di dt . Ci sono più modi matematicamente equivalenti di arrivare alle medesime conclusioni.

§ 3.2.1. **Il vettore velocità.** — Un primo modo consiste nel farsi guidare dall'intuizione fisica: se γ descrive la legge oraria di una particella, può risultare abbastanza chiaro che

$$d\gamma = \mathbf{v} dt$$

dove $d\gamma = d\gamma(t) = \gamma(t+dt) - \gamma(t)$ è lo spostamento vettoriale infinitesimo lungo la curva e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ è la velocità istantanea della particella all'istante t .

§ 3.2.2. **La velocità scalare.** — Un secondo modo per arrivare allo stesso tipo di espansione è osservare che in ogni punto t una curva civile ammette un versore tangente $\hat{\mathbf{u}}$ che punta nella direzione del moto e che

$$d\gamma = \frac{d\ell}{dt} \hat{\mathbf{u}} dt$$

dove $\frac{d\ell}{dt} = \frac{d\ell}{dt}(t)$ è la velocità scalare della particella nell'istante t .

§ 3.2.3. **Guardare componente per componente.** — L'ultimo modo che presentiamo per ottenere un'espansione al primo ordine della funzione γ è vederla come una terna di funzioni $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di una variabile a valori reali, ovvero scriveremo che

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

e quindi

$$d\gamma = (d\gamma_1, d\gamma_2, d\gamma_3) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right) dt$$

§ 3.2.4. **Risultati.** — L'equivalenza dei metodi presentati ci conduce alle seguenti identità:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\ell}{dt} \hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right)$$

Per comodità di notazione si suole scrivere $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$. L'ultimo dei tre metodi si basa sul fatto che la variazione infinitesima di γ si esprime in termini delle variazioni di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Di conseguenza è abbastanza chiaro che per le curve vale Taylor all'ordine n nella sua forma usuale, ovvero

$$d\gamma = \dot{\gamma} dt + \frac{1}{2} \ddot{\gamma} (dt)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n \gamma}{dt^n} (dt)^n$$

Vediamo ora un esempio molto semplice dove intervengono tutti i concetti appena visti.

Esempio 3.2 (Moto circolare uniforme). Sia $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$\gamma(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t))$$

la legge oraria di un moto circolare uniforme di frequenza ω e raggio r . Determiniamo con considerazioni geometriche il vettore velocità. A meno di rotazione possiamo supporre che $t = 0$. In questo caso

$$\begin{aligned} ds &= (r \cos(\omega dt), r \sin(\omega dt)) - (r, 0) = (r(\cos(\omega dt) - 1), r \sin(\omega dt)) = \\ &= (0, r\omega dt) = r\omega(0, 1) dt \end{aligned}$$

Nel caso generale avremo che $\mathbf{v}(t) = r\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$, in quanto $\|\mathbf{v}(t)\| = r\omega$ e $\hat{\mathbf{v}}(t)$ deve essere un versore ortogonale a $\gamma(t)$ e $\hat{\gamma}(t) \times \hat{\mathbf{v}}(t) = \hat{\mathbf{z}}$ (se li vediamo come vettori sul piano xy in \mathbb{R}^3). Chiaramente la velocità scalare è la stessa in ogni istante di tempo t . Se la denotiamo con \dot{s} , risulta che

$$\dot{s} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \dot{s} T = 2\pi r$$

da cui segue che $\dot{s} = r\omega$. Inoltre $\hat{\mathbf{v}}(t)$ è in ogni istante tangente alla traiettoria. Notiamo infine che le componenti del vettore $\mathbf{v}(t)$ sono le derivate delle rispettive componenti $\gamma(t)$.

immagine Figura 3.2: Moto circolare uniforme.

3.3 Chain Rule

In questa sezione ci occupiamo di generalizzare la regola della derivata composta nel suo caso più semplice. Sia $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva e $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare. A titolo di esempio possiamo pensare che γ sia la legge oraria di una particella e V l'energia potenziale gravitazionale. Ci chiediamo quale sia la derivata di $V(\gamma(t))$. Analogamente a quanto fatto nelle sezioni precedenti, interpretiamo questo problema come *determiniamo l'espansione al primo ordine di $V(\gamma(t))$* . La risposta è un facile conto:

$$dV(t) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot ds(t) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt} dt = \nabla V \cdot \dot{\gamma} dt$$

da cui otteniamo $\frac{dV(\gamma(t))}{dt} = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}$, la cosiddetta chain rule. Quanto appena trovato ha una semplice interpretazione fisica. Infatti sappiamo che $dV = -dL = -\mathbf{F} \cdot d\gamma = \nabla V \cdot \dot{\gamma} dt$ dove dL è il lavoro infinitesimo fatto dalla forza di gravità \mathbf{F} . In definitiva abbiamo scoperto che

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (3.7)$$

Perché abbiamo scritto $V(t)$ e non $dV(\gamma(t))$? Da un punto di vista matematico la notazione usata è impropria e sarebbe più corretto scrivere $dV(\gamma(t))$. Da un punto di vista fisico invece ha un significato ben preciso. Noi ci stiamo ponendo il problema di capire come varia l'energia potenziale della nostra particella al variare del tempo t . Chiaramente quello che vorremmo chiamare $V(t)$ corrisponde formalmente alla funzione V valutata nel punto $\gamma(t)$, però questa precisione formale non deve sviarci dalla comprensione della chain rule. Del resto, la filosofia è la stessa di quando scriviamo

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (3.8)$$

per funzioni di una variabile. Siamo ben consapevoli che la funzione che noi deriviamo rispetto alla y è *matematicamente* diversa da quella che deriviamo per la x . Il senso è che però leggiamo la y come un'altra variabile naturale in cui una stessa quantità fisica z (quale un'energia, una distanza, ecc.) può essere espressa, e con quest'ottica diamo il giusto significato alle derivate al membro di destra della (3.8).

3.4 Caso generale

In questa sezione discutiamo il caso generale di funzioni $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Il problema è sempre quello di determinare un'espansione al primo ordine della funzione F rispetto alle variabili x_1, x_2, \dots, x_n . Come nel caso delle curve, un'idea che funziona è quella di scrivere

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$$

e di conseguenza

$$dF = (dF_1, dF_2, \dots, dF_m)$$

Se denotiamo con $ds = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, per quanto visto sulle funzioni scalari possiamo scrivere

$$dF = (\nabla F_1 \cdot ds, \nabla F_2 \cdot ds, \dots, \nabla F_m \cdot ds)$$

Ricaviamo ora la chain rule in generale: sia $G: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$, con variabili indipendenti y_1, y_2, \dots, y_l . Se lavoriamo sulle componenti del campo F otteniamo

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_k}$$

dove abbiamo usato l'espressione (3.7).

SEZ. 4 — INTEGRAZIONE

Ricordiamo rapidamente che cosa significa integrare una funzione f su un intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} : considerata una suddivisione dell'intervallo $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$, scegliamo un punto $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ all'interno di ciascun intervallo, e calcoliamo la somma di Riemann

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

ossia moltiplichiamo i valori della funzione nei punti che abbiamo scelto per le lunghezze degli intervalli a cui appartengono, e sommiamo tutto. Più è fine la suddivisione che scegliamo, più il valore di questa somma si avvicina a ciò che conosciamo come integrale di f su $[a, b]$, $\int_a^b f dx$.

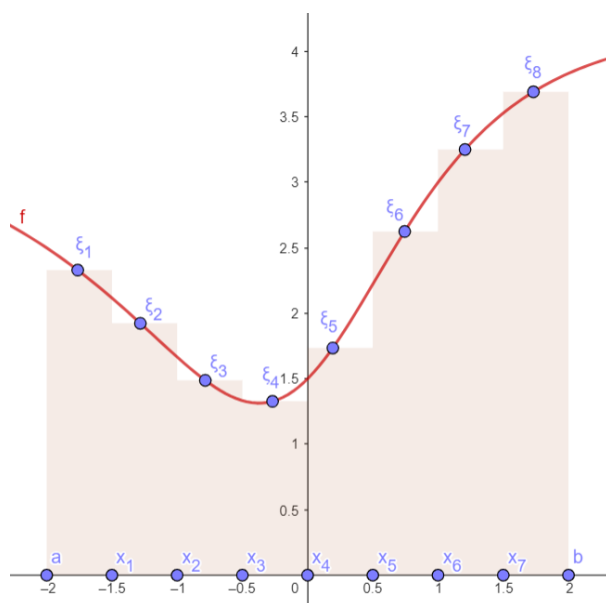


Figura 2: La rappresentazione grafica del procedimento appena descritto. L'area evidenziata corrisponde al valore della somma.

Adesso ci interessa definire l'integrale di funzioni in contesti più generali, ma è importante ricordare l'intuizione con cui siamo partiti: l'integrale è il limite di una somma pesata che tiene conto sia del valore della funzione in una certa regione, sia della “misura” di quella regione. Su un intervallo quella che stiamo chiamando misura non era altro che la lunghezza; sulle superfici diventerà l'area, negli integrali tridimensionali il volume. Non è immediato definire questi concetti di misura in generale, ma la nostra capacità di calcolare integrali dipende da essi in modo fondamentale. Nel seguito ne faremo uso, ma soltanto a un livello intuitivo che non dovrebbe creare eccessiva confusione.

4.1 Integrazione lungo curve

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva, e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione; definiamo l'integrale di f lungo γ come

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Il fatto che debba esserci $f(\gamma(t))$ è abbastanza intuitivo; quello che sul momento potrebbe creare confusione è il $\|\dot{\gamma}(t)\|$. Come possiamo spiegarcelo? Ora non stiamo facendo l'integrale su $[a, b]$, ma sulla curva; di conseguenza, quando partizioniamo l'intervallo e facciamo la somma pesata dei valori della funzione, non dobbiamo usare le lunghezze degli intervalli, ma dei corrispondenti

tratti di curva. Se gli intervalli sono abbastanza piccoli, la distanza percorsa dalla curva è ben approssimata dal modulo della sua velocità in un punto (che è proprio $\|\dot{\gamma}\|$) moltiplicato per la lunghezza dell'intervallo. Dunque, il ds che abbiamo scritto al membro di sinistra non è altro che $\|\dot{\gamma}(t)\|dt$, ossia la distanza percorsa dalla curva nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$. Un'altra definizione che ha senso dare è quella di lavoro di un campo vettoriale lungo una curva: dato $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, poniamo

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Si tratta dell'integrale della funzione $\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ (ossia la proiezione di \mathbf{F} sul vettore velocità di γ) lungo γ . In questo caso, ds assume un significato leggermente diverso: non dobbiamo più immaginarlo come un valore infinitesimo, ma come un vettore di lunghezza infinitesima che ha la stessa direzione e verso della velocità della curva, $ds = \dot{\gamma}(t)dt$.

Esempio 4.1 (Lunghezza di una curva) Abbiamo detto che $ds = \|\dot{\gamma}(t)\|dt$ è la distanza percorsa dalla curva nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$. Pertanto, la lunghezza totale della curva è data da

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

che corrisponde all'integrale della funzione identicamente uguale a 1 lungo γ .

Esempio 4.2 (Teorema delle forze vive) Sia γ la legge oraria di un punto materiale di massa m su cui agisce una forza \mathbf{F} . Dalla seconda legge di Newton $\mathbf{F}(\gamma(t)) = m\ddot{\gamma}(t)$; il lavoro di \mathbf{F} lungo γ , quindi, è

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_a^b m\ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \right) dt = \frac{1}{2} m \|\dot{\gamma}(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\dot{\gamma}(a)\|^2$$

che è esattamente la differenza delle energie cinetiche agli istanti b e a . Abbiamo utilizzato la relazione $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)$ e il comportamento del prodotto scalare sotto derivazione:

$$\frac{d}{dt}(v(t) \cdot w(t)) = \dot{v}(t) \cdot w(t) + v(t) \cdot \dot{w}(t)$$

4.2 Integrazione su superfici

La trattazione generale dell'integrazione su superfici è più impegnativa rispetto al caso delle curve; vedremo dapprima il caso di sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 , per capire l'idea, poi mostreremo come si applica ad alcune superfici particolari.

§ 4.2.1. Integrali su rettangoli. — Sia $D = [a, b] \times [c, d]$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Ricordando l'intuizione che abbiamo dato a inizio capitolo, vogliamo dividere D in pezzetti sempre più piccoli. Un modo naturale per farlo è dividere i suoi lati e creare una griglia: prendiamo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$. I rettangoli $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ al variare di $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ sono una suddivisione di D . Scelti $\xi_{i,j} = (x_i, y_j)$, sommiamo le aree dei rettangoli moltiplicate per i valori di f :

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Per quanto abbiamo detto prima, ha senso definire l'integrale di f su D come il limite di questa somma a mano a mano che le suddivisioni si fanno più fini :

$$\int_D f dS = \lim \sum_{i,j} f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Ovviamente, l'ordine con cui sommiamo non importa; quindi, possiamo riscrivere la somma come

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j)(y_j - y_{j-1})$$

in cui sommiamo prima su ogni colonna e poi sommiamo al variare delle colonne. Sofferamoci sulla somma all'interno: siccome x_i è fissato, è esattamente la somma di Riemann della funzione $y \rightarrow f(x_i, y)$ sull'intervallo $[c, d]$. Dunque, più le suddivisioni sono fini, più la somma che abbiamo scritto è vicina a

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \int_c^d f(x_i, y) dy$$

Ma ora notiamo che $\int_c^d f(x, y) dy$ si può vedere come una funzione di x ; in quest'ottica, quella che abbiamo appena scritto è la sua somma di Riemann. Ricordando la definizione data prima, quindi,

$$\int_D f dS = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Facciamo il punto della situazione: abbiamo dato una nozione di integrale $\int_D f dx dy$ che corrispondesse alla nostra intuizione, e abbiamo mostrato che si può calcolare facilmente con due integrali unidimensionali, almeno nel caso dei rettangoli. Ovviamente, vale anche

$$\int_D f dS = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

siccome la situazione che stiamo studiando è simmetrica in x e y . Nella pratica, è utile saper riconoscere quale ordine di integrazione rende più facili i conti.

§ 4.2.2. Integrali su domini di \mathbb{R}^2 . — Supponiamo ora che D sia un generico sottoinsieme di \mathbb{R}^2 ; esattamente come prima, possiamo definire l'integrale di $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ come limite di somme di Riemann, a mano a mano che l'area delle regioni in cui suddividiamo diventa più piccola. Nel caso precedente, le suddivisioni più comode erano quelle in rettangoli; in generale, questo non è sempre vero. Prendiamo per esempio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco unitario: possiamo ricoprirlo con dei quadrati, oppure dividerlo in "spicchi" tracciando dei raggi, e sezionare gli spicchi con circonferenze concentriche (questa seconda scelta corrisponde a suddividere gli intervalli $[0, 1]$ e $[0, 2\pi]$ e creare una griglia analoga a prima, se vediamo la situazione in coordinate polari). Ora calcoliamo l'integrale di $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ usando queste due scomposizioni:

Esempio 4.3 (Integrazione sul cerchio in coordinate cartesiane) La ragione per cui questa scomposizione non è così comoda è che, quando scriviamo l'integrale doppio, gli estremi dell'integrale interno non sono più costanti, ma dipendono dalle coordinate! Dobbiamo calcolare

$$\int_D f dS = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

poiché, se fissiamo x , l'intersezione di D con $\{x\} \times \mathbb{R}$ si ha proprio per $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$.

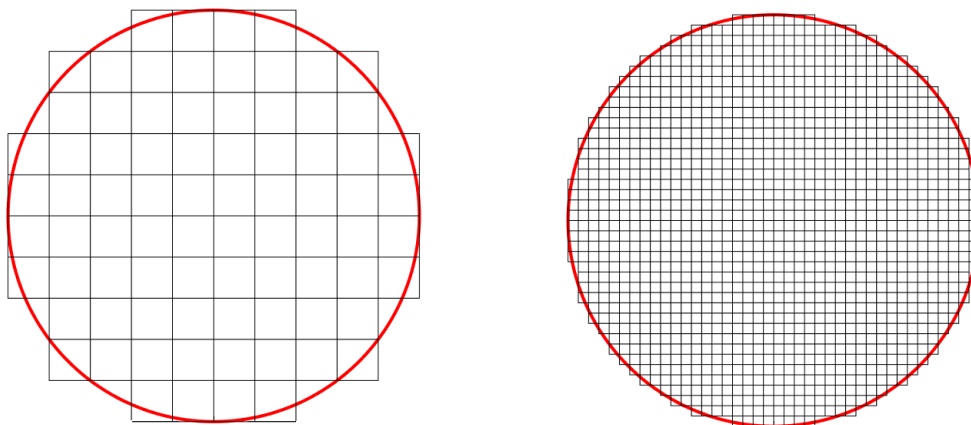


Figura 3: Alcune suddivisioni del cerchio con quadrati

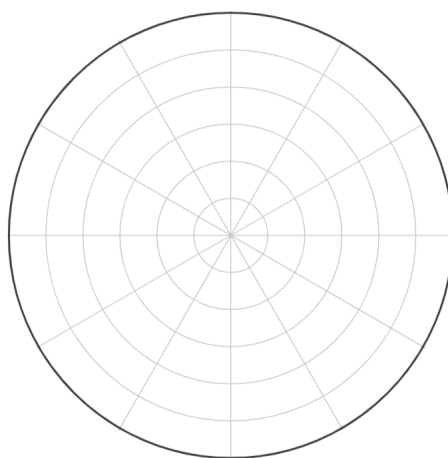


Figura 4: Una suddivisione del cerchio data dalle coordinate polari

Esempio 4.4 (Integrazione sul cerchio in coordinate polari) Consideriamo $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = 1$ e $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = 2\pi$ suddivisioni. Per scrivere la somma di Riemann, ci serve l'area della regione definita in coordinate polari (ρ, ϕ) da $r \leq \rho \leq r + \Delta r$, $\theta \leq \phi \leq \theta + \Delta\theta$. Essa vale $\frac{\Delta\theta}{2}((r + \Delta r)^2 - r^2)$, che al primo ordine di approssimazione per Δr , $\Delta\theta$ piccoli diventa $r\Delta r\Delta\theta$; pertanto, si dice che $rdrd\theta$ è l'elemento infinitesimo di area in coordinate polari. Riordinando la somma in modo analogo a prima e utilizzando questa approssimazione, otteniamo che

$$\int_D f dS = \int_0^1 r \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta dr$$

Abbiamo eliminato la dipendenza dalle coordinate negli estremi di integrazione: ci siamo riusciti perché, portato in coordinate polari, D corrisponde al rettangolo $([0, 1] \times [0, 2\pi])$. Nel caso di una regione qualunque, esattamente come prima per il cerchio in cartesiane, avremmo dovuto determinare la sua intersezione con le circonferenze di raggio r centrate nell'origine, e restringere ad esse l'integrale interno (oppure l'intersezione con le semirette, se avessimo voluto integrare prima in r).

Per ricapitolare, dato $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, se il dominio e la funzione hanno proprietà ragionevoli possiamo sempre, in astratto, integrare con la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{D_x} f(x, y) dy dx$$

dove $D_x = \{y \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (x, y) \in D\}$ è la sezione di D lungo la retta verticale di ascissa x (Ovviamente x e y si possono scambiare). Tuttavia, per ottenere conti meno pesanti (e fattibili esplicitamente) può essere utile studiare eventuali simmetrie di D e di f che le rendano adatte a essere trattate meglio in un sistema di coordinate opportuno.

§ 4.2.3. Integrali su superfici. — Sebbene esistano formule generali per gli integrali di superficie, ricavarle (o anche solo dare una buona euristica del perché funzionino) non è immediato. Oltretutto, è raro che nei problemi di fisica compaiano superfici diverse da un cilindro, una sfera o altri casi particolarmente convenienti; ci limiteremo quindi a dare qualche esempio. Data $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo $\int_{\Sigma} f dS$ come il solito limite delle somme di Riemann per suddivisioni sempre più fini (dS è detto elemento infinitesimo di superficie). Come prima, quello che si può fare per semplificare la situazione è scegliere suddivisioni che si scrivono bene nel giusto sistema di coordinate, sfruttando le simmetrie di Σ . Vediamo esplicitamente due casi:

Esempio 4.5 (Integrazione su un cilindro) Se Σ è la superficie laterale di un cilindro di raggio di base r e altezza h , possiamo utilizzare un sistema di coordinate cilindriche (ρ, θ, z) . In queste coordinate, Σ è descritta dalle condizioni $\rho = r$, $0 \leq z \leq h$, e dS è dato da $rd\theta dz$:

$$\int_{\Sigma} f dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) d\theta dz$$

Esempio 4.6 (Integrazione su una sfera) Se Σ è la sfera di raggio R , possiamo utilizzare le coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , in cui Σ è banalmente descritta dalla condizione $r = R$ e $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ (questo elemento infinitesimo è meno immediato degli altri, provate a convincervene graficamente):

$$\int_{\Sigma} f dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) d\phi d\theta$$

Un'ultima definizione importante è quella di flusso di un campo vettoriale \mathbf{F} lungo una superficie: esso si definisce come

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma} (\mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{N}(x)) dS$$

dove $\mathbf{N}(x)$ è il versore con direzione ortogonale alla superficie nel punto $x \in \Sigma$. Per questo versore ci sono due possibili scelte, che determinano la cosiddetta orientazione di Σ ; l'integrale che si ottiene è lo stesso a meno di un cambio di segno. Se la superficie è chiusa, la scelta canonica del versore normale è quella che punta verso l'esterno. Esattamente come nel caso delle curve, quindi, $d\mathbf{S}$ non è altro che un vettore diretto lungo \mathbf{N} , e di modulo pari all'elemento infinitesimo di superficie.

Esempio 4.7 (Interpretazione intuitiva del flusso in fluidodinamica) Consideriamo un fluido che si muove all'interno di un condotto attraversando una superficie Σ ; possiamo definire, supponendo che la situazione sia stazionaria, il campo $\mathbf{v}(x)$ che associa a ogni punto la velocità del fluido in corrispondenza di esso. Così facendo, il flusso di \mathbf{v} attraverso Σ rappresenta il volume di fluido che attraversa Σ in un'unità di tempo.

Se invece Σ è una superficie chiusa, e $\mathbf{v}(x, t)$ è il campo delle velocità del fluido, il flusso di \mathbf{v} attraverso Σ all'istante t è il bilancio totale tra il volume di fluido che esce da Σ (con segno positivo) e quello che entra (con segno negativo) per unità di tempo. Di conseguenza, se $V(t)$ è il volume di fluido contenuto in Σ , vale la relazione

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v}(x, t) \cdot d\mathbf{S} = -\dot{V}(t)$$

Osserviamo, infine, che se il fluido è incomprimibile, $V(t)$ è costante, dunque il flusso di \mathbf{v} attraverso qualunque superficie chiusa è nullo.

Esempio 4.8 (Conservazione della carica in forma globale) Consideriamo una distribuzione di carica che dipende dal tempo e una superficie chiusa Σ ; siano $Q(t)$ la carica totale contenuta in Σ e $\mathbf{J}(x, t)$ la densità di corrente per unità di superficie. Allora, in totale analogia con quanto detto sopra riguardo al moto dei fluidi,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J}(x, t) \cdot d\mathbf{S} = -\dot{Q}(t)$$

4.3 Integrazione su volumi

Come ultimo argomento, vogliamo dare una nozione di integrale per funzioni $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definite su una regione di \mathbb{R}^3 . L'idea è la solita: suddividiamo V in cubetti, e definiamo $\int_V f dV$ come il limite delle somme di Riemann. Riprendendo il procedimento utilizzato nel caso dei rettangoli di \mathbb{R}^3 , si dimostra che un tale integrale si può calcolare con tre integrali unidimensionali (invece dei due che ci erano serviti in precedenza). Tuttavia, la regione V potrebbe non essere descrivibile comodamente in coordinate cartesiane: pertanto, è utile conoscere gli elementi di volume in coordinate cilindriche ($dV = \rho d\rho d\theta dz$) e sferiche ($dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$)

Esempio 4.9 (Integrazione su un cilindro) Sia V un cilindro con raggio di base r e altezza h ; invece che calcolare

$$\int_0^h \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y, z) dy dx dz$$

possiamo utilizzare le coordinate cilindriche e scrivere

$$\int_V f dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) d\rho d\theta dz$$

NOTA: questo secondo metodo è tendenzialmente più comodo perché sfrutta meglio la simmetria di V . Tuttavia, se per esempio sapessimo che f non dipende da y , l'integrale in cartesiane potrebbe meritare di essere rivalutato. In generale, questi esempi sono dati per fornire diversi metodi risolutivi, in modo tale da poter selezionare quello più conveniente nel momento del bisogno, non per designare l'unico procedimento corretto.

Esempio 4.10 (Integrazione su una palla) Se V è la palla di raggio R (ossia $V = \{(x, y, z) \text{ t.c. } x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$), si può scrivere

$$\int_V f dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) d\phi d\theta dr$$

SEZ. A — DIVERGENZA E ROTORE

A.1 Definizioni

Sia \mathbf{F} un campo vettoriale e F_x, F_y, F_z le sue componenti: definiamo la divergenza di \mathbf{F} come

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

e definiamo il rotore di \mathbf{F} come

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Un modo per ricordare queste definizioni è utilizzare la scrittura formale $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ (chiamato *Nabla*) e vedere divergenza e rotore come un prodotto scalare e un prodotto vettoriale tra ∇ e \mathbf{F} rispettivamente. Se il campo è definito su una regione $V \subseteq \mathbb{R}^3$, la divergenza è una funzione scalare $\nabla \cdot \mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}$, mentre il rotore è un campo vettoriale $\nabla \times \mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$.

A.2 Interpretazione intuitiva

§ A.2.1. Divergenza. — Possiamo dire che la divergenza di un campo \mathbf{F} nel punto \mathbf{x} “misura la presenza di sorgenti di \mathbf{F} in \mathbf{x} ”: nel caso del campo elettrico è pari alla densità di carica, nel caso del campo magnetico è nulla perché sappiamo che non esistono monopoli magnetici, quindi un campo magnetico non potrà mai ammettere una sorgente localizzata in un punto. Ovviamente, il concetto di sorgente non è ben definito in generale, ma, almeno graficamente, se le linee di un campo vettoriale tendono a “scaturire” da un certo punto, possiamo aspettarci che in quel punto la divergenza sia positiva. Se invece le linee di campo convergono verso un certo punto, ci aspettiamo che la divergenza sia negativa.

§ A.2.2. Rotore. — Dato \mathbf{F} un campo vettoriale possiamo dire che $(\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{p})$ esprime con la propria direzione l’asse (se esiste) attorno al quale \mathbf{F} tende ad avvolgersi vicino al punto \mathbf{p} , con il proprio verso la direzione di rotazione, e con il proprio modulo l’entità dell’avvolgimento.

A.3 Considerazioni aggiuntive

Sappiamo che, presa $V \subseteq \mathbb{R}^3$, un campo vettoriale $\mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice conservativo se esiste una funzione $U : V \rightarrow \mathbb{R}$, detta potenziale, tale che $\mathbf{F} = -\nabla U$ (o, equivalentemente, se l’integrale lungo ogni cammino chiuso è nullo). Si dice invece che \mathbf{F} è irrotazionale (ricordando l’intuizione sul rotore data prima) se $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

In generale conservativo implica sempre irrotazionale: se $\mathbf{F} = -\nabla U$ e calcoliamo per esempio la prima componente del rotore, si ha

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0$$

poiché sappiamo che sotto opportune ipotesi di regolarità si possono scambiare le derivate parziali (teorema di Schwarz) (il calcolo delle altre componenti del rotore è analogo).

Possiamo, invece, dire che ogni campo irrotazionale è conservativo? Se il dominio V è \mathbb{R}^3 , questo è vero (il motivo di ciò fa utilizzo del teorema di Stokes che non vedremo).

Tuttavia, se consideriamo il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

definito su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \text{ t.c. } x = y = 0\}$, possiamo verificare che è irrotazionale, ma il suo integrale lungo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ è non nullo, pertanto non è conservativo.

— ESERCIZI —

★★★★★ **Esercizio 1 Superfici di rotazione** Molte superfici di rotazione possono essere descritte in coordinate cilindriche come $\{(f(z), \theta, z) \text{ t.c. } \theta \in [0, 2\pi], z \in I\}$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $f : I \rightarrow [0, \infty)$ è una funzione non negativa e derivabile. Date una formula per l'elemento infinitesimo di superficie.

★★☆☆☆☆ **Esercizio 2 Campo indivergente e irrotazionale** Date un esempio di campo vettoriale definito su \mathbb{R}^3 non nullo, che abbia rotore e divergenza entrambi nulli.

★★★★☆ **Esercizio 3 Nabla-calcolo** Data $V \subseteq \mathbb{R}^3$ una regione e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo il suo laplaciano $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Se $\mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di componenti (F_x, F_y, F_z) , definiamo il suo laplaciano come il vettore $\Delta \mathbf{F} = (\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z)$.

- Mostrate che $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$
- Mostrate che $\nabla \times (\nabla f) = 0$
- Mostrate che $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- Mostrate che $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$
- Mostrate che $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$

★★★★☆ **Esercizio 4** Consideriamo una massa m posta all'estremità di un pendolo ideale, dimostrare che per angoli $\theta \ll 1$ che il pendolo descrive vale la seguente equazione del moto

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

dove l è la lunghezza del pendolo e g l'accelerazione gravitazionale. risolvere dunque l'equazione con i metodi visti a lezione.

★★☆☆☆☆ **Esercizio 5** Calcolare al sesto ordine in x la funzione $e^{x^2+\alpha x}$ attorno ad $x_0 = 0$.

★★☆☆☆☆ **Esercizio 6** Data $y^5 - y = x$ calcolare fino al quart'ordine non banale $y(x)$. (Soluzione: $y \approx -x - x^5 - 5x^9 - 35x^{13}$)

★★☆☆☆☆ **Esercizio 7** Calcolare al sesto ordine $e^{x^2+\alpha x}$ in α .

★★☆☆☆☆ **Esercizio 8** Calcolare al second'ordine $\frac{1}{\sqrt{1-2x \cos \theta + x^2}}$ in x .

★★☆☆☆☆ **Esercizio 9** Trovare l'espansione in Taylor dell'arcoseno, sapendo la sua derivata.

★★★★☆☆ **Esercizio 10** Trovare l'espansione in serie di Taylor dell'arcoseno in un intorno di 0. (Hint: Partire dall'espansione in serie della derivata dell'arcoseno)

★★★★☆ **Esercizio 11 Oscillatore armonico con forzante sinusoidale**

Considerare la seguente ODE:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) + f \cos(\omega t).$$

dove ω , ω_0 e f sono delle costanti.

a) Supponendo $|\omega| \neq |\omega_0|$, trovare tutte le soluzioni.

b) Supponendo $\omega = \omega_0$, trovare tutte le soluzioni.

Hint per la domanda b): Provare come soluzione particolare un qualche polinomio di grado basso moltiplicato per coseno e seno della frequenza che vi aspettate e vedere se funziona.

★★★☆☆ **Esercizio 12** Una palla viene lanciata in aria in verticale. L'attrito è $F = -\gamma v$. Trovare velocità e altezza in funzione del tempo.

★★★☆☆ **Esercizio 13** si consideri un circuito LC, si scriva e si risolva l'equazione differenziale associata. si faccia lo stesso per un circuito RC e per un circuito RLC.

— SOLUZIONI —

Soluzione 1: Quando vogliamo calcolare il volume di un solido di rotazione, immaginiamo di suddividerlo in cilindri molto sottili; analogamente, per calcolare la superficie, la vediamo come somma delle superfici laterali di tronchi di cono molto sottili. Fissato z in I , consideriamo un tronco di cono di altezza dz , le cui basi hanno raggi $f(z)$ e $f(z + dz)$: per una nota formula di geometria solida, la sua superficie laterale è data da $\pi(f(z) + f(z + dz))a \sim 2\pi a f(z)$, dove a è l'apotema. Inoltre,

$$a = \sqrt{(dz)^2 + (f(z + dz) - f(z))^2} \sim \sqrt{(dz)^2(1 + f'(z)^2)} = dz\sqrt{1 + f'(z)^2}$$

da cui sostituendo si ottiene che la superficie laterale del tronco di cono è

$$2\pi f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}dz.$$

Infine, suddividendo questo tronco di cono in spicchi, siccome è simmetrico per rotazioni attorno al proprio asse, la superficie di uno spicchio di ampiezza $d\theta$ dovrà essere

$$f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}dzd\theta.$$

Soluzione 2: Un'osservazione utile è che, quando calcoliamo il rotore di un campo \mathbf{F} , non appare la derivata della componente F_x rispetto a x , e analogamente per F_y in y e F_z in z . Cerchiamo, quindi, un campo in cui ogni componente dipende solo dalla rispettiva coordinata, per assicurarci a priori che il rotore sia nullo. Un tentativo molto ragionevole (e che effettivamente funziona) è $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$, che ha divergenza $1 + 1 - 2 = 0$.

Soluzione 3:

- Immediato scrivendo le definizioni di divergenza e gradiente:

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$$

- Vediamo che la prima componente del rotore è nulla: essa è uguale a

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che si può scambiare l'ordine delle derivate parziali doppie. Il caso delle altre due componenti è del tutto analogo.

Per le prossime identità, che riguardano campi vettoriali, facciamo un'osservazione fondamentale: se \mathbf{F}, \mathbf{G} sono due campi vettoriali, $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$, e $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$. In effetti, per chi ha letto la sezione relativa di questa lezione, si può verificare facilmente che gradiente, rotore e divergenza sono tutti operatori lineari, in quanto la derivata lo è. Siccome ogni campo \mathbf{F} si può scrivere come $F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$, basta verificare le identità seguenti nel caso in cui \mathbf{F} ha una sola componente non nulla. Assumiamo che si tratti di F_x : gli altri due casi sono identici.

- Grazie all'assunzione appena fatta il membro di sinistra è soltanto

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0$$

dove come prima abbiamo scambiato le derivate parziali doppie.

- Grazie all'assunzione spiegata sopra, si tratta semplicemente della regola di Leibniz per la derivata di un prodotto di funzioni:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(fF_x) = \frac{\partial f}{\partial x}F_x + f\frac{\partial F_x}{\partial x} = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato di nuovo il fatto che F_y e F_z sono nulli.

- Sempre sotto l'assunzione che soltanto F_x sia non nulla, si ha

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(0, \frac{\partial F_x}{\partial z}, -\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Calcolando nuovamente il rotore, si ottiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \left(-\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial z}\right).$$

Inoltre, $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x}$, e quindi il suo gradiente è uguale a

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial x}\right)$$

dove notiamo che la seconda e la terza componente sono le stesse che abbiamo trovato in precedenza (scambiando le derivate parziali), mentre facendo la differenza nella prima componente appare il Laplaciano di F_x come volevamo.