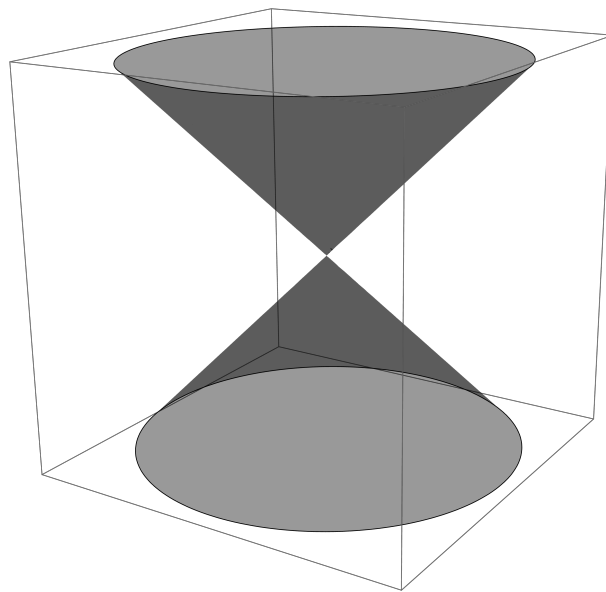


Relatività Ristretta

MODULO 1

Martino Barbieri¹

6 febbraio 2026



Sommario

L'obiettivo della lezione è introdurre i concetti essenziali della relatività ristretta, con esempi concreti di effetti fisici come l'effetto Doppler, la perdita di simultaneità o la trasformazione relativistica del campo elettromagnetico.

Introdurremo brevemente alcune nozioni matematiche utili alla comprensione della teoria, come elementi di geometria differenziale (vettori, covettori, tensori e tensore metrico). Seguirà poi un ripasso della relatività galileiana. Introducendo i postulati di corrispondenza e di invarianza della velocità della luce, arriveremo quindi alla relatività ristretta. Verranno trattate trasformazioni di Lorentz (infinitesime e finite, con effetti di contrazione/dilatazione relativistici), esempi di 4-vettori e 4-scalari rilevanti ai fini di soluzione dei problemi; infine si accennerà brevemente alla dinamica relativistica.

¹martino.barbieri@sns.it

— INDICE —

1. Cenni di Geometria Differenziale	4
1.1. Vettori	4
1.1.i. Spazio tangente e vettori	4
1.1.ii. Trasformazione dei vettori sotto cambio di coordinate	6
1.2. Covettori	6
1.3. Tensori	7
1.3.i. Tensori notevoli	7
1.4. Note conclusive	8
2. La Teoria della relatività	9
2.1. Relatività Galileiana	9
2.2. Relatività Ristretta: introduzione	9
2.2.i. Boost standard	10
2.2.ii. Alcune definizioni comunemente usate	12
3. Relatività Ristretta: applicazioni	13
3.1. Dilatazione dei tempi	13
3.2. Contrazione delle lunghezze	14
3.3. Intervallo invariante	16
3.4. A caccia di 4-vettori	16
3.5. Elettromagnetismo	20
4. Cenni di Relatività Generale	21
4.1. Postulati generali	21
4.2. Derivata covariante	22
4.3. Le equazioni del moto di particella libera	24
4.4. Le equazioni di campo di Einstein	25
5 ESERCIZI E PROBLEMI	26

La relatività è una teoria fisica fondata sul **principio di relatività** (o principio di covarianza):

Le leggi della Natura sono eguali in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Le descrizioni che diamo di alcune grandezze possono variare cambiando sistema di riferimento: per esempio la quantità di moto \mathbf{p} di un corpo o la risultante delle forze \mathbf{F} sul medesimo, in un altro sistema di riferimento saranno in generale diverse; chiamiamole rispettivamente \mathbf{p}' e \mathbf{F}' .

Ma in entrambi i sistemi di riferimento **deve** essere soddisfatta la seconda legge di Newton, che è una legge della Fisica:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}, \quad (1)$$

ovverosia questa relazione che lega due grandezze diverse **deve** essere rispettata.

In questa lezione ci concentreremo sulla relatività ristretta (o speciale). Perciò occorre ora sviluppare il linguaggio per descrivere *in primis* come le grandezze fisiche trasformano al cambiare del sistema di riferimento; fatto questo, sarà naturale applicare tali trasformazioni alle leggi.

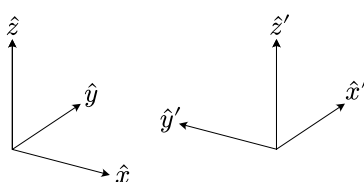
Osserviamo che, di tutte le leggi fisiche possibili, solo alcune soddisfano al principio di relatività. Se la relatività è vera, queste sono le uniche eligibili.

Esempio

Il sistema di equazioni

$$F_1 = \frac{dp_2}{dt}, \quad F_2 = \frac{dp_1}{dt}, \quad F_3 = \frac{dp_3}{dt}, \quad (2)$$

dove con v_i intendiamo l' i -esima componente del vettore \mathbf{v} , per il principio di relatività, **non può** rappresentare una legge fisica: facciamo infatti un esperimento mentale in cui si verifica la suddetta legge. Immaginatoci due osservatori che usano lo stesso orologio ma guardano il sistema da una prospettiva diversa, in modo che i versori $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ del primo osservatore corrispondano rispettivamente ai versori $-\hat{y}', \hat{x}', \hat{z}'$ del secondo.



Questo significa che

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

e, manifestamente, l'Equazione 2 non può essere rispettata per entrambi gli osservatori. Guardiamo per esempio l'equazione per la prima componente di \mathbf{F} :

$$F_1 = \frac{dp_2}{dt} = -F'_2 = -\frac{dp'_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt}. \quad (4)$$

Ne segue che l'Equazione 2 non può essere una legge fisica.

SEZ. 1. — CENNI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE —

Da un punto di vista formale, il linguaggio naturale per descrivere come le grandezze fisiche trasformano cambiando sistema di riferimento è la geometria differenziale.

In questa lezione introdurremo solo la terminologia utilizzata. Non daremo definizioni formali, prediligendo concetti intuitivi ed eviteremo dimostrazioni che, quando sarete all'Università, avrete abbondante tempo e risorse per approfondire.

Ogni evento avviene in un determinato punto \mathbf{x} nello spazio (che indicheremo con Σ) e a un determinato istante t nel tempo. L'insieme $\mathcal{M} = \{(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \text{spazio}, t \in \text{tempo}\}$ viene detto *spazio-tempo*. I punti nello spazio-tempo vengono detti *eventi*.

Ciascun osservatore, al fine di effettuare delle misure, deve scegliere un modo di indicare ciascun punto in \mathcal{M} , ossia una funzione $P: \mathbb{R}^D \rightarrow \mathcal{M}$. Talvolta si restringe il dominio a un sottoinsieme di \mathbb{R}^D . Questa scelta è detta *sistema di coordinate* e D è detta *dimensione* dello spazio-tempo. A questo punto è necessario fare qualche precisazione:

- la funzione $P(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^D)$ deve essere una funzione continua². I numeri $\theta^1, \dots, \theta^D$ vengono detti *coordinate*³;
- non abbiamo preso “troppe” coordinate, quindi per ogni punto $P(\theta^1, \dots, \theta^D)$ e per ogni spostamento infinitesimo $d\theta^1, \dots, d\theta^D$, lo spostamento infinitesimo dP associato è non nullo. Per esempio, non possiamo prendere quattro coordinate per \mathbb{R}^3 : la ridondanza verrebbe mostrata da uno spostamento infinitesimo delle coordinate che non corrisponde a uno spostamento fisico;
- viceversa, non abbiamo preso “poche” coordinate: serve richiedere che, per ogni punto $P(\theta^1, \dots, \theta^D)$, le coordinate siano in grado di identificare tutti i punti “abbastanza vicini”. La mancanza di una coordinata si manifesterebbe come l'impossibilità di esplorare una direzione nello spazio-tempo.

Quanto detto finora e anche più avanti si adatta identicamente nel caso in cui si considera lo spazio Σ al posto dello spazio-tempo \mathcal{M} . Nel seguito, utilizzeremo D come dimensione dello spazio-tempo e d come dimensione dello spazio. Nei casi usuali $D = d + 1$.

Attenzione: la funzione P non deve essere necessariamente surgettiva, ossia non è in generale richiesto che le coordinate descrivano tutto lo spazio-tempo. A titolo di esempio, quando si considera come spazio il piano e si adotta un set di coordinate polari (r, θ) , il punto $r = 0$ è singolare (infatti, per ogni θ il punto $P(r, \theta)$ corrisponde all'origine). Quindi, a rigore, andrebbe escluso dal dominio. Perciò le coordinate polari descrivono tutto lo spazio meno un punto.

Avendo ora uno spazio-tempo, un osservatore e un sistema di coordinate, possiamo introdurre le grandezze misurabili.

1.1. Vettori

Un vettore non è semplicemente una d -upla di numeri, ma è un oggetto geometrico.

Un vettore, a rigore, “vive” in un punto dello spazio. Per esempio la velocità \mathbf{v} di un corpo che a un certo istante ha posizione \mathbf{x} è un vettore che “vive” nel punto \mathbf{x} . La risultante delle forze sul corpo \mathbf{F} è un altro vettore che “vive” nel medesimo punto.

§ 1.1.i. Spazio tangente e vettori — Consideriamo un punto $\mathbf{x} \in \Sigma$. Lo **spazio tangente** in \mathbf{x} è l'insieme delle possibili velocità di una traiettoria $\gamma(t)$ all'istante t^* in cui $\gamma(t^*) = \mathbf{x}$; informalmente, è l'insieme degli spostamenti infinitesimi al primo ordine che si possono fare rimanendo nello spazio.

²Formalmente, è quindi necessaria *a priori* una nozione di vicinanza o lontananza intrinseca nello spazio-tempo. Nei casi comuni, questo è vero.

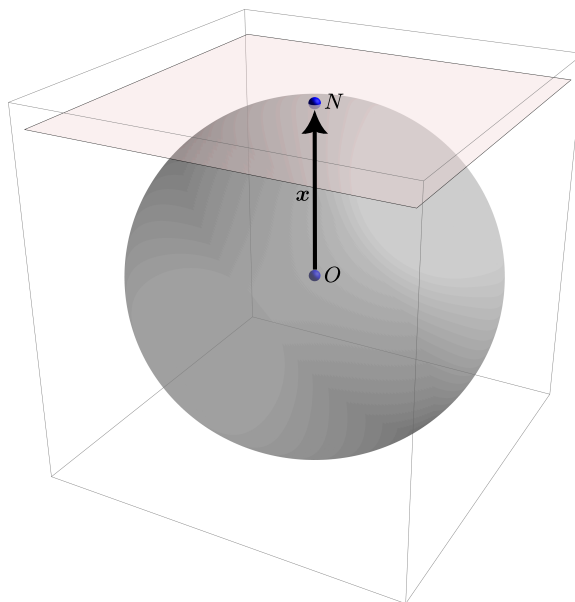
³Notate che abbiamo messo “in alto” gli indici delle coordinate.

I vettori sono multipli di elementi nello spazio tangente.

Esempio

Supponiamo che lo spazio Σ sia una sfera bidimensionale (S^2).

Lo spazio tangente nel polo nord N è un piano tangente la sfera e corrisponde agli spostamenti infinitesimi al primo ordine che da N possiamo fare restando sulla sfera.



Il “vettore posizione” x non è quindi formalmente un vero vettore. Infatti è ortogonale al piano tangente.

Scelto un set di coordinate $\theta^1, \dots, \theta^d$ (che da questo punto in poi indichiamo collettivamente con θ) e un punto nello spazio, una base dello spazio tangente in quel punto è data dai vettori

$$e_1 := \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta^1}, \quad e_2 := \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta^2}, \quad \dots, \quad e_d := \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta^d}. \quad (5)$$

Ciò significa che ogni vettore v (che vive in quel punto) può essere scritto come

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \dots + v^d e_d, \quad (6)$$

dove i coefficienti v^i vengono chiamati **componenti** del vettore v . Si noti l'utilizzo del grassetto e degli indici.

Notate che nell'espressione

$$v = \sum_{i=1}^d v^i e_i \quad (7)$$

l'indice i all'interno della sommatoria appare una volta “sopra” e una volta “sotto” e che la sommatoria è performata con l'indice che scorre da 1 a d . Nel seguito, al fine di semplificare la notazione, ogni volta che un indice in un'espressione appare una volta “sopra” e una “sotto”, si intende implicitamente che l'espressione va sommata per ogni valore dell'indice da 1 a d . Questa convenzione viene chiamata **notazione degli indici sommati di Einstein**. In questa notazione, scriveremo quindi

$$v = v^i e_i. \quad (8)$$

§ 1.1.ii. **Trasformazione dei vettori sotto cambio di coordinate** — Studiamo ora come due osservatori diversi descrivono un esperimento.

Un vettore è una grandezza fisica osservabile, quindi non può dipendere dal sistema di riferimento. Ciò che può cambiare è la descrizione che ciascuno degli osservatori fornisce, ossia le componenti di quel vettore.

Supponiamo che due osservatori usino ciascuno un set di coordinate, θ e ξ , e che li usino per misurare le componenti di un vettore v . Deve valere allora che

$$v = v_{(\theta)}^i \frac{\partial P}{\partial \theta^i} = v_{(\xi)}^a \frac{\partial P}{\partial \xi^a}. \quad (9)$$

Le diverse coordinate sono solo un modo diverso di chiamare gli stessi punti nello spazio, quindi esiste un modo per “tradurre” le coordinate di un osservatore in quelle dell’altro. Chiamiamo queste mappe $\xi(\theta)$ e $\theta(\xi)$.

Per la regola della catena, deve valere che

$$\frac{\partial P}{\partial \xi^a} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \xi^a} \frac{\partial P}{\partial \theta^i}, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \xi^a}{\partial \theta^i} \frac{\partial P}{\partial \xi^a} \quad (10)$$

e, richiedendo che l’Equazione 9 sia soddisfatta, si ottiene la relazione di consistenza

$$v_{(\xi)}^a = v_{(\theta)}^i \frac{\partial \xi^a}{\partial \theta^i}, \quad (11)$$

che descrive come, cambiando coordinate, variano le componenti dei vettori. Questa relazione è così importante che talvolta viene presa come definizione di un vettore, tramite il mantra

Un vettore è un oggetto di d componenti che sotto cambio di coordinate trasformano come prescritto dall’Equazione 11.

Le componenti che trasformano in questo modo vengono dette *componenti controvarianti*.

Questa definizione, seppur meno fondamentale, è operativa e semplice. Pertanto nel seguito useremo definizioni che seguono la stessa impronta.

1.2. Covettori

C’è un’altra categoria di oggetti che emerge spesso in fisica: le derivate spaziali. Se per esempio abbiamo nello spazio un campo scalare $\phi(P)$, ha senso considerarne il gradiente $\nabla\phi$.

A un primo sguardo potremmo pensare che sia un vettore. Guardando meglio come trasformano le componenti, ci accorgiamo che non è così:

$$(\nabla_{(\theta)}\phi)_i = \frac{\partial \phi}{\partial \theta^i}, \quad (\nabla_{(\xi)}\phi)_a = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^a}. \quad (12)$$

Per la regola della catena deve essere quindi⁴

$$(\nabla_{(\xi)}\phi)_a = \frac{\partial \theta^i}{\partial \xi^a} (\nabla_{(\theta)}\phi)_i. \quad (13)$$

⁴Notate che, in questo caso, abbiamo posto gli indici delle componenti del gradiente in basso.

È importante sottolineare che la matrice di trasformazione delle componenti è l'inversa di quella delle componenti controvarianti. È questo che motiva la seguente definizione:

Un covettore è un oggetto di d componenti che sotto cambio di coordinate trasformano come prescritto dall'Equazione 14:

$$v_{(\xi)a} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \xi^a} v_{(\theta)i}. \quad (14)$$

Le componenti che trasformano in questo modo vengono dette *covarianti*.

Vettori e covettori formano gli elementi di base con cui possiamo costruire tutti gli oggetti più complessi di cui avremo bisogno per il resto della lezione.

1.3. Tensori

L'insieme dei tensori contiene quelli di vettori e covettori e, in generale, racchiude tutte le grandezze fisiche osservabili.

Le grandezze fisiche possono essere catalogate in base a quante componenti sono necessarie per descriverle e alle leggi di trasformazione a cui obbediscono tali componenti. Diremo:

Un (r, s) -tensore è un oggetto di d^{r+s} componenti che sotto cambio di coordinate trasformano come prescritto dall'Equazione 15:

$$T_{(\xi)}^{a_1 \dots a_r}_{a_{r+1} \dots a_{r+s}} = T_{(\theta)}^{i_1 \dots i_r}_{i_{r+1} \dots i_{r+s}} \frac{\partial \xi^{a_1}}{\partial \theta^{i_1}} \dots \frac{\partial \xi^{a_r}}{\partial \theta^{i_r}} \frac{\partial \theta^{i_{r+1}}}{\partial \xi^{a_{r+1}}} \dots \frac{\partial \theta^{i_{r+s}}}{\partial \xi^{a_{r+s}}}. \quad (15)$$

(r, s) viene detto **rango** di tale tensore.

Uno **scalare** è un oggetto le cui componenti non trasformano. È quindi uno $(0, 0)$ -tensore. Un vettore e un covettore sono invece, rispettivamente, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ -tensori.

§ 1.3.i. **Tensori notevoli** — Nella famiglia dei tensori, alcuni rivestono un ruolo particolare e li incontreremo successivamente. Qui li presento brevemente:

- lo **$(0, 2)$ -tensore metrico** g_{ij} codifica il modo in cui si calcolano le distanze infinitesime e i prodotti scalari tra i vettori. È simmetrico sotto scambio degli indici ($g_{ij} = g_{ji}$).

Per esempio, nell'usuale spazio bidimensionale euclideo con le coordinate standard, le distanze infinitesime si calcolano col teorema di Pitagora:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (16)$$

Il tensore metrico euclideo è

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}_{ij}. \quad (17)$$

Scrivendo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, notiamo che la distanza si può scrivere anche, tramite il tensore metrico come

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (18)$$

ovvero come *contrazione* degli indici covarianti di g con quelli controvarianti dei differenziali.

Una definizione equivalente è

$$g_{ij} = \frac{\partial P}{\partial \theta^i} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta^j}, \quad (19)$$

dove (\cdot) è il prodotto scalare dei vettori da cui si calcola la distanza. Infatti,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^i \mathbf{e}_i \cdot v^j \mathbf{e}_j = v^i w^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = v^i w^j g_{ij}. \quad (20)$$

Se invece adottassimo un set di coordinate polari

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad (21)$$

la distanza (sempre in virtù del teorema di Pitagora) si scriverebbe

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (22)$$

e perciò il tensore metrico sarebbe

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{pmatrix}_{ij}. \quad (23)$$

Viene lasciato al lettore l'esercizio di verificare che il tensore metrico rispetta la giusta legge di trasformazione.

- Il **(1,1)–tensore identità** δ^i_j (detto anche **delta di Kronecker**) vale

$$\delta^i_j = \begin{cases} i = j: & 1 \\ i \neq j: & 0. \end{cases} \quad (24)$$

Si dimostri per esercizio che questo è davvero un tensore (ovvero cambiando coordinate e usando la legge di trasformazione degli (1, 1)–tensori le nuove componenti rispecchiano la definizione in Equazione 24), ossia le componenti del tensore identità sono indipendenti dalle coordinate.

- L'**inverso del tensore metrico** g^{ij} è un tensore doppiamente controvariante. Esso è simmetrico e soddisfa all'equazione

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j. \quad (25)$$

La contrazione di g_{ij} con un vettore è un covettore, mentre la contrazione di un covettore con g^{ij} è un vettore. Si dimostri questa affermazione calcolando come trasformano le componenti dei suddetti tensori.

1.4. Note conclusive

Avendo il linguaggio matematico, possiamo ora dare un altro enunciato del **principio di relatività**:

Tutte le leggi della Fisica devono essere eguaglianze tra grandezze tensoriali di medesimo rango.

È importante sottolineare che, restringendosi a set di coordinate ortogonali, la legge di trasformazione delle coordinate (x, y) corrisponde a quella delle componenti dei vettori: se infatti

$$y^i = M^i_j x^j \quad (26)$$

vale che le componenti di un vettore \mathbf{v} trasformano secondo

$$v^i_y = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} v^j_x = M^i_j v^j_x. \quad (27)$$

Questo è il motivo per cui solitamente si usa l'abuso di linguaggio "vettore posizione". Nel seguito della lezione useremo esclusivamente coordinate cartesiane e sfrutteremo varie volte questo "trucco".

SEZ. 2. — LA TEORIA DELLA RELATIVITÀ

Il principio di relatività ha origini che possono essere rintracciate già negli scritti di Galileo Galilei.

2.1. Relatività Galileiana

La Fisica sette–ottocentesca fu guidata dal principio di relatività: due sistemi di riferimento inerziali descrivono la Fisica con le stesse equazioni.

Per semplicità di esposizione, da questo momento in poi useremo coordinate cartesiane ortogonali. Diciamo x^1, \dots, x^3, t le coordinate usate da un primo osservatore per lo spazio-tempo e y_1, \dots, y_3, t' quelle di un secondo. Nella meccanica di Newton, il tempo scorre in modo assoluto, indipendentemente dall'osservatore, ossia

$$t' = t. \quad (28)$$

Se i due osservatori usano coordinate cartesiane ortogonali, la relazione che lega le x e le y è la composizione di una rotazione fissa e di una traslazione lineare nel tempo (se la velocità relativa degli osservatori è non nulla):

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 - \mathbf{v}t + R(\mathbf{x}). \quad (29)$$

Da queste considerazioni segue che se un corpo ha velocità \mathbf{u} in un sistema di riferimento, in un altro in moto con velocità \mathbf{v} rispetto al primo avrà velocità $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Le distanze, invece, non dipendono dal sistema di riferimento.

2.2. Relatività Ristretta: introduzione

Tra le leggi della Fisica meglio sperimentalmente verificate, appaiono le quattro equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{c\epsilon_0}(c\rho), \quad (30.1)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(c\mathbf{B}), \quad (30.2)$$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{B}) = 0, \quad (30.3)$$

$$\nabla \wedge (c\mathbf{B}) = \frac{1}{c\epsilon_0} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad (30.4)$$

dove $c \approx 3.0 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ è una costante della Natura. Queste equazioni implicano⁵ che le onde elettromagnetiche (che oggi sappiamo essere luce) viaggiano sempre con modulo della velocità pari a c , in ogni sistema di riferimento inerziale, in contrasto con la relatività galileiana.

Vennero effettuati numerosi esperimenti, tutti confermarono questa previsione.

Questo rese necessaria una revisione del modello sette–ottocentesco utilizzato per lo spazio-tempo, non più esaustivo per descrivere l'elettromagnetismo. Senza dilungarci nei dettagli storici, i fisici si resero conto che lo scorrere del tempo dipende dall'osservatore e questa dipendenza è tale da rendere costante la velocità della luce.

Costruiamo ora esplicitamente la relatività ristretta.

Se richiediamo che la luce viaggia di moto rettilineo a velocità c , deve essere, per un raggio luminoso,

$$c^2 dt^2 - dx^2 = 0. \quad (31)$$

⁵In modo non banale.

Notiamo che questa equazione può essere riscritta, introducendo una notazione 4-vettoriale per lo spazio-tempo

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (32)$$

e introducendo il tensore metrico di Minkowski⁶

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)_{\mu\nu} \quad (33)$$

come

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (34)$$

Enfatizziamo che questa equazione, talvolta riparafrasata dicendo che gli spostamenti dei raggi luminosi sono *null-like*, è equivalente a richiedere che la luce viaggia a velocità c .

Inoltre, bisogna richiedere che tale cambio di coordinate mandi rette in rette. Infatti, la prima legge di Newton è una legge fisica e deve essere verificata in ogni sistema di riferimento inerziale.

Un teorema matematico assicura che trasformazioni di coordinate che mandano rette in rette e spostamenti *null-like* in spostamenti *null-like* sono lineari, a meno di traslazioni, e inoltre tale trasformazione lascia invariato il tensore di Minkowski.

Sfruttando questo fatto, possiamo ricavare la forma esplicita dei cambi di sistema di riferimento, ovvero quei cambi di coordinate che preservano la forma del tensore di Minkowski. Tali trasformazioni vengono dette *trasformazioni di Lorentz*.

Scriviamo allora $x' = \Lambda x$, ossia in notazione di Einstein

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (35)$$

Dobbiamo quindi richiedere (ricordando che $\eta_{\mu\nu}$ è uno $(0, 2)$ -tensore)

$$\Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \eta_{\rho\sigma} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}, \quad (36)$$

dove Ω viene detto fattore conforme. A meno di riscalamenti, chiediamo che $\Omega = 1$.

Le matrici Λ che soddisfano all'Equazione 36 vengono dette appunto **trasformazioni di Lorentz** e sono essenzialmente di tre tipologie:

- le **pure rotazioni**, del tutto equivalenti al caso galileiano;
- i **puri boosts**, ossia un cambio di sistema di riferimento che si ottiene accelerando per un tempo finito in una direzione fissa;
- le **trasformazioni generiche**, che possono sempre essere scritte come un opportuno boost seguito da una rotazione.

§ 2.2.i. Boost standard — Un boost in una direzione generica è equivalente a un boost lungo la direzione \hat{z} con delle pure rotazioni. Per semplicità studiamo dunque ora puri boosts lungo l'asse \hat{z} .

⁶Gli indici di spazio-tempo solitamente si indicano con lettere greche e scorrono da 0 a $d = D - 1$.

Prima di procedere con i calcoli, chiediamoci: le coordinate perpendicolari alla direzione del boost (nel nostro caso x e y) cambiano? Immaginatoci il seguente esperimento mentale: una nave venezuelana entra, muovendosi di moto rettilineo uniforme, in uno stretto. Quando la nave e lo stretto sono fermi (in un sistema di riferimento), entrambi hanno larghezza L , quindi la nave passa “a filo”. Ora immaginatoci due osservatori, uno sulla nave e uno di fianco allo stretto. Supponiamo che, in un boost, le direzioni longitudinali si contraggano. L’osservatore a terra vedrebbe la larghezza della nave, quindi vedrebbe la nave passare con successo nello stretto. Ma viceversa, il comandante della nave vedrebbe lo stretto di larghezza inferiore a L e pertanto assisterebbe a un tragico incidente.

L’avvenire oppure no dell’incidente **non può** dipendere dal sistema di riferimento. Perciò facendo un boost le direzioni longitudinali non possono contrarsi. Similmente si dimostra che non possono neppure espandersi. Arriviamo dunque alla seguente conclusione:

In un puro boost le componenti trasversali delle coordinate non variano.

Pertanto assumiamo che $x' = x$ e $y' = y$. Ne segue che le componenti $\eta_{\mu 1}$ e $\eta_{\mu 2}$ del tensore di Minkowski non cambiano.

Le uniche componenti che si mescolano sono il tempo t e la coordinata longitudinale z . Con qualche conto, richiedendo l’invarianza di $\eta_{\mu\nu}$ anche sulle altre componenti, si arriva alle condizioni

$$\eta_{00} = 1 = \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 - \Lambda^3_0 \Lambda^3_0, \quad (37.1)$$

$$\eta_{30} = \eta_{03} = 0 = \Lambda^0_0 \Lambda^0_3 - \Lambda^3_0 \Lambda^3_3, \quad (37.2)$$

$$\eta_{33} = -1 = \Lambda^0_3 \Lambda^0_3 - \Lambda^3_3 \Lambda^3_3. \quad (37.3)$$

Dalla seconda si ottiene

$$\Lambda^0_0 = \frac{\Lambda^3_0 \Lambda^3_3}{\Lambda^0_3} \quad (38)$$

e, sostituendo nella prima e usando la terza

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^0_3)^2 = 1, \quad (39.1)$$

$$\Lambda^0_3 = \pm \Lambda^3_0, \quad (39.2)$$

da cui segue

$$\Lambda^0_0 = \pm \Lambda^3_3. \quad (40)$$

Possiamo quindi parametrizzare la matrice in questo modo:

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} T \cosh \chi & 0 & 0 & -TP \sinh \chi \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ -TP \sinh \chi & 0 & 0 & P \cosh \chi \end{pmatrix} \begin{matrix} \mu \\ \\ \\ \nu \end{matrix} \quad (41)$$

dove $T, P = \pm 1$ vengono prese negative rispettivamente se si applicano le simmetrie classiche di parità e di inversione temporale. Per tutto il resto della trattazione le prendiamo positive.

Le funzioni iperboliche

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (42)$$

sono le “sorelle” delle usuali funzioni goniometriche, che al posto di soddisfare l’equazione

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad (43)$$

soddisfano

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad (44)$$

(esercizio: verificatelo esplicitamente). Soddisfano una serie di identità del tutto analoghe a quelle del caso goniometrico e forniscono la giusta parametrizzazione in questo caso.

La grandezza χ viene detta **rapidità**. Notate che è additiva, ovvero

$$\Lambda(\chi)\Lambda(\chi') = \Lambda(\chi + \chi'). \quad (45)$$

§ 2.2.ii. Alcune definizioni comunemente usate — Collegiamoci a grandezze fisiche. Prendo due osservatori con set di coordinate $x, y = \Lambda(\chi) x$. Prendiamo un oggetto fermo nel secondo sistema di riferimento e vediamo quanto velocemente si muove nel primo. La sua *world-line*⁷ è data dagli eventi

$$y(t) = (t', 0, 0, 0). \quad (46)$$

Questi eventi, nel primo sistema di riferimento, saranno

$$x(t') = \Lambda(-\chi)y(t') = (\cosh \chi ct', 0, 0, \sinh \chi ct'). \quad (47)$$

Questo vuol dire che, quando il corpo sarà al tempo t nel sistema di coordinate x , ossia quando

$$t = \cosh \chi t', \quad (48)$$

il corpo sarà nella posizione $\mathbf{x} = c \tanh \chi t \hat{z}$, ossia si sta muovendo di velocità

$$v = c \tanh \chi. \quad (49)$$

È utile definire anche

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh \chi, \quad \gamma = \cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (50)$$

in questo modo la matrice di Lorentz diventa

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^\mu{}_\nu. \quad (51)$$

⁷La *world-line* di un punto materiale è l’insieme dei punti all’interno dello spazio-tempo (cioè degli eventi) attraversati dalla particella.

SEZ. 3. — RELATIVITÀ RISTRETTA: APPLICAZIONI —

Esaminiamo ora qualche immediata conseguenza di quanto introdotto. Procediamo con esempi che manifestano conseguenze importanti della teoria.

3.1. Dilatazione dei tempi

Un orologio in movimento batte il tempo più lentamente rispetto a uno fermo.

Dimostriamolo con un esperimento mentale: Sinner e Musetti fanno una partita di tennis usando, al posto della pallina, un fotone, cioè una particella di luce. Al posto delle racchette, usano degli specchi. La distanza tra i due giocatori è L , come mostrato in Figura 1. Nel sistema in cui gli sportivi sono in quiete, il tempo di un botta-risposta è $\Delta t = 2L/c$. Invece, in un sistema di riferimento in cui il campo si muove trasversalmente con velocità v , il fotone deve percorrere una traiettoria diagonale più lunga. Poiché c è costante, impiegherà più tempo. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo formato dallo spostamento, otteniamo:

$$(2L)^2 + v^2 \Delta t'^2 = c^2 \Delta t'^2, \quad (52.1)$$

$$\therefore \Delta t' = \gamma_v \Delta t. \quad (52.2)$$

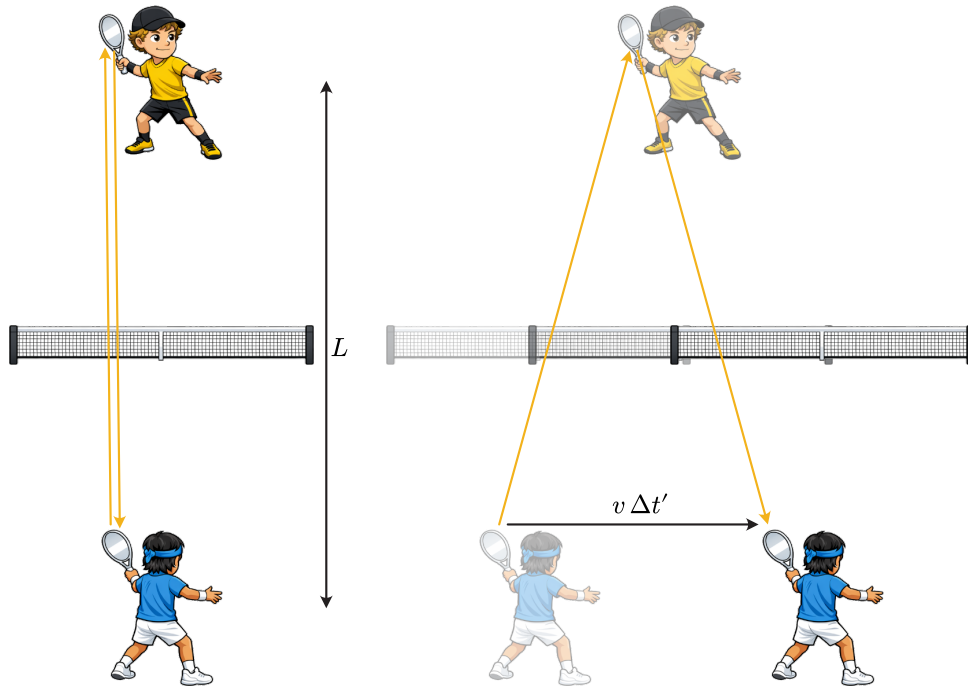


Figura 1: Esperimento mentale per la dilatazione dei tempi.

Attenzione: questa variazione di tempo non è un effetto dovuto al ritardo nella propagazione dell'informazione, ma a una trasformazione geometrica dello spazio-tempo. Immaginiamo per esempio che, sulla racchetta-specchio di Sinner, ci sia un sensore che emette un segnale luminoso ogni volta che il raggio di luce vi si scontra. Potremmo pensare erroneamente che la dilatazione dei tempi sia causata dal fatto che, mentre il campo si allontana, la luce prodotta dal sensore della racchetta deve percorrere più spazio e per questo gli intervalli che noi misuriamo tra un battito e l'altro sono rallentati. **Non** è questo che si intende quando si parla di dilatazione dei tempi: anche sottraendo il contributo dovuto alla finitezza della velocità di diffusione dell'informazione, sussisterebbe la dilatazione temporale, ed è quella propriamente che la relatività ristretta descrive.

Attenzione: la formula in Equazione 52 vale quando Δt è l'intervallo di tempo misurato **nel sistema di riferimento di quiete**, ossia da quell'osservatore che vede l'evento di inizio e quello di termine nella stessa posizione spaziale.

Ricaviamo questo effetto con la notazione dei 4-vettori: nel sistema di riferimento dei due giocatori, gli eventi in cui il raggio rimbalza contro la racchetta di Sinner hanno coordinate

$$x_n = \begin{pmatrix} 2Ln \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (53)$$

Nel sistema di riferimento in cui il campo si muove a velocità v , questi eventi sono descritti dalle coordinate⁸

$$y_n = \Lambda_v x_n = \begin{pmatrix} 2L\gamma_v n \\ 2L\beta_v\gamma_v n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (54)$$

pertanto in questo sistema di riferimento gli eventi avvengono a intervalli temporali di $\Delta t' = 2L/c\gamma_v$. Quando l'evento avviene, il sensore emetterà un segnale luminoso che impiega un tempo $vn(\Delta t')/c$ a raggiungere l'osservatore posto nell'origine. Questo significa che l'osservatore vedrà un segnale ogni

$$\Delta t'' = \gamma\Delta t(1 + \beta_v). \quad (55)$$

3.2. Contrazione delle lunghezze

Anche le lunghezze parallele alla direzione del boost subiscono un'alterazione geometrica in relatività ristretta, contraria a quella degli intervalli temporali: una contrazione.

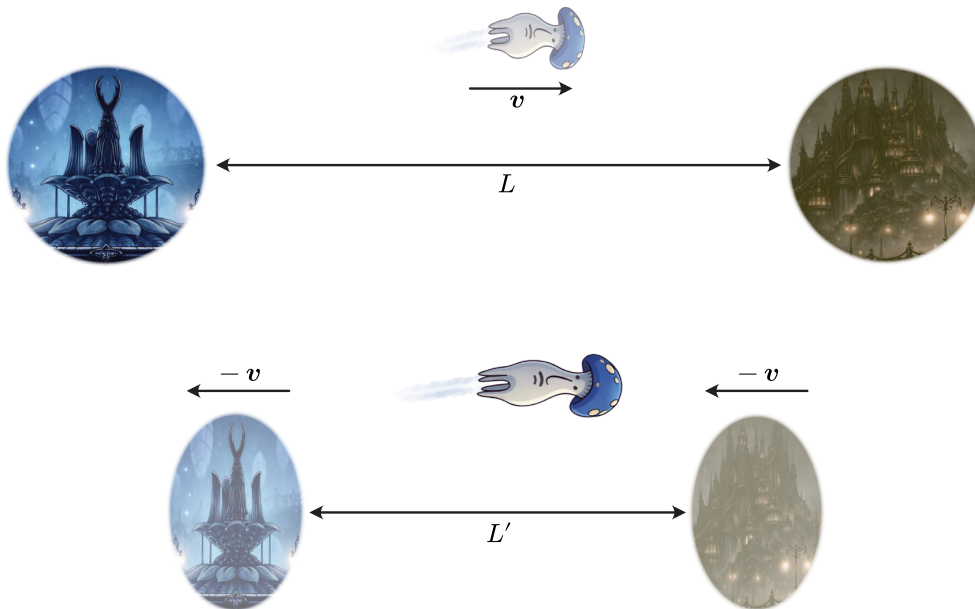


Figura 2: Esperimento mentale per la contrazione delle lunghezze.

Facciamo un altro esperimento mentale. Monsieur Champignon sta viaggiando di moto rettilineo uniforme dal regno di Hallownest alle terre di Telalejana, come mostrato in Figura 2. Viaggia a una

⁸Notate che in questo caso abbiamo effettuato un boost lungo l'asse \hat{x} .

velocità $v = \beta c$. Impiega un tempo $\Delta t'$ a completare il suo viaggio. Dunque, nel suo sistema di riferimento, la distanza tra i due regni è di $v \cdot \Delta t'$. Nel sistema di riferimento della terra, invece, Monsieur Champignon impiega un tempo $\Delta t = \gamma \Delta t'$ a completare il suo viaggio, per quanto visto nel paragrafo precedente. Perciò, siccome la velocità relativa tra due sistemi di riferimento è la medesima in modulo se misurata in ciascuno dei due (esercizio: verificarlo con le trasformazioni di Lorentz, ossia un boost di v seguito da un boost di $-v$ porta all'identità, cioè è come non fare nulla), nel sistema di riferimento in cui i due regni sono fermi, la distanza è maggiore di un fattore γ rispetto al sistema di riferimento di Monsieur Champignon.

Detto in altri termini, un corpo che ha lunghezza a riposo L , in un sistema di riferimento in cui si muove a velocità v , ha lunghezza L/γ_v .

Vediamo come ricavare formalmente questo risultato con le trasformazioni di Lorentz. Misurare la lunghezza di un oggetto, operativamente, significa avere la *world-line* dell'"inizio" $x_{(i)}$ e della "fine" $x_{(f)}$ del corpo e, **a tempo fissato**, calcolare $|x_f - x_i|$. Nel sistema di riferimento in cui la terra è ferma, le *world-lines* del punto di partenza e della destinazione del viaggio siano

$$x_{(i)}(t) = \begin{pmatrix} ct \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{(f)}(t) = \begin{pmatrix} ct \\ L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Nel sistema di riferimento di Monsieur Champignon, questi eventi prendono coordinate

$$y_{(i)}(t) = \begin{pmatrix} \gamma ct \\ -\beta\gamma ct \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_{(f)}(t) = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta\gamma L \\ \gamma L - \beta\gamma ct \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Ora bisogna prestare attenzione alla definizione. t , in queste coordinate, parametrizza il punto sulla *world-line*, **non** ha il significato fisico di tempo: il tempo è y^0/c nel nuovo sistema di coordinate. Calcoliamo dunque la lunghezza a un istante t^* generico. Per fare questo, dobbiamo prendere parametri t diversi nelle due *world-line*:

$$t_{(i)} = \frac{t^*}{\gamma}, \quad t_{(f)} = \frac{t^*}{\gamma} + \frac{\beta L}{c}. \quad (58)$$

Ora possiamo calcolare la distanza tra le città nel sistema di riferimento di Monsieur Champignon, a tempo t^* :

$$L' = \left[\gamma L - \beta\gamma c \left(\frac{t^*}{\gamma} + \frac{\beta L}{c} \right) \right] - \left[-\beta\gamma c \frac{t^*}{c} \right]. \quad (59)$$

Notiamo preliminarmente che la dipendenza da t^* si elide. Effettuando il calcolo risulta poi

$$L' = \gamma L (1 - \beta^2) = \frac{L}{\gamma}. \quad (60)$$

Notate che, per avere eventi a stesso istante temporale nel nuovo sistema di riferimento, abbiamo dovuto considerare eventi che, nel vecchio sistema di riferimento, erano a tempi diversi! Questo fatto si chiama **perdita della contemporaneità**, ovvero la contemporaneità non è, in relatività ristretta, una proprietà di una coppia di eventi indipendente dal sistema di riferimento. Anzi, se due eventi non coincidono, il fatto che siano contemporanei in un sistema di riferimento implica che non lo sono in altri sistemi di riferimento.

Notate anche che se non avessimo preso eventi a tempi uguali nel nuovo sistema di riferimento, ma avessimo preso eventi a stesso t , avremmo ottenuto un risultato sbagliato, in contrasto con l'esperimento mentale effettuato prima.

3.3. Intervallo invariante

Abbiamo visto che Δt e Δx cambiano. Tuttavia, la quantità

$$c^2 \Delta\tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (61)$$

rimane identica per tutti gli osservatori, siccome le coordinate trasformano come vettori. Possiamo classificare gli intervalli tra due eventi in tre tipi:

- **time-like** ($\Delta\tau^2 > 0$): c'è "più tempo che spazio". È possibile andare da un evento all'altro con velocità minore di c . Esiste un sistema di riferimento in cui avvengono nello stesso luogo. L'ordine temporale (causa-effetto) è preservato per tutti gli osservatori (lo si verifichi facendo boost di rapidità arbitrarie).
- **Space-like** ($\Delta\tau^2 < 0$): c'è "più spazio che tempo". Nemmeno la luce può connetterli. L'ordine temporale non è assoluto (in alcuni sistemi un evento avviene prima dell'altro, in altri viceversa. Lo si verifichi esplicitamente). Affinché una teoria fisica sia causale (ovvero affinché tutti gli osservatori, in ogni sistema di riferimento, conoscendo le leggi fisiche sono in grado di predire perfettamente cosa succederà) è necessario che non ci sia relazione di causalità tra eventi *space-like*, ovvero **nessuna informazione o particella può propagare più velocemente della luce.**
- **Null-like** ($\Delta\tau^2 = 0$): eventi connessi da un raggio di luce.

Per intervalli *time-like*, ogni particella massiva in moto rettilineo uniforme può passare dagli estremi dell'intervallo. In questo caso l'intervallo invariante $c\Delta\tau$ corrisponde al tempo passato nel sistema di riferimento della massa. Di conseguenza, in ogni altro sistema di riferimento, si ha

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau. \quad (62)$$

3.4. A caccia di 4-vettori

La gran parte dei problemi di relatività si risolve facendo trasformazioni di Lorentz. Conviene dunque avere in mente un po' di zoologia di grandezze tensoriali, di cui conosciamo le leggi di trasformazione.

Sappiamo già che, per definizione, dx^μ è un 4-vettore infinitesimo. Per ottenere l'analogo della velocità, dobbiamo derivare per un differenziale di tempo che dev'essere però invariante. Nella sezione precedente abbiamo costruito un ottimo candidato⁹: $d\tau = \sqrt{dx^\mu dx_\mu}$.

Possiamo quindi costruire la **4-velocità**:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (64)$$

Nel sistema di riferimento del corpo, la sua 4-velocità è $(c, 0, 0, 0)$. Ne segue (tramite un boost di Lorentz) che nel sistema di riferimento in cui il corpo ha velocità \mathbf{v} , vale

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Si noti che¹⁰ $u^\mu u_\mu = c^2$ in ogni sistema di riferimento.

⁹Formalmente, lo possiamo definire come

$$d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt. \quad (63)$$

¹⁰Con u_μ intendiamo $g_{\mu\nu} u^\nu$.

Vorremmo costruire la versione 4-dimensionale dell'impulso. Per farlo, usiamo il **principio di corrispondenza**: la relatività ristretta ha come obiettivo spiegare la fisica degli oggetti che si muovono a grandi velocità; essa deve **estendere** la fisica a basse energie, dove abbiamo già tantissima evidenza sperimentale, senza contraddirla. Le differenze tra la nuova teoria e la vecchia teoria devono emergere solo dove la vecchia teoria non è in grado di spiegare gli esperimenti.

Useremo poi un altro lemma: un tensore è nullo in un sistema di riferimento se e solo se è nullo in ogni altro¹¹.

Notiamo ora che in meccanica newtoniana, vale $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Ma per estendere questa legge alla relatività ristretta dovremmo scriverla come uguaglianza tra 4-tensori, in particolare tra 4-vettori in questo caso. Il candidato più naturale è

$$p^\mu = mu^\mu. \quad (66)$$

Dimostriamo formalmente questo fatto. Nel sistema di riferimento del corpo, per simmetria di rotazione spaziale, le componenti spaziali di p e di u devono annullarsi, dunque, entrambi i 4-vettori in tale sistema di riferimento hanno forma

$$p = \begin{pmatrix} p_r^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Perciò, il vettore

$$cp - p_r^0 u \quad (68)$$

si annulla in quel sistema di riferimento. Ne segue che si annulla in ogni altro sistema di riferimento, ossia

$$p = \frac{p_r^0}{c} u. \quad (69)$$

Rimane da capire quanto vale la costante p^0/c . Per far ciò, guardiamo le componenti spaziali in un sistema di riferimento in cui il corpo si muove a una velocità molto minore di quella della luce, per cui $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \simeq 1$. Otteniamo

$$\mathbf{p} = \frac{p_r^0}{c} \mathbf{c} \quad (70)$$

e, usando il principio di corrispondenza, arriviamo a concludere che deve essere $p_r^0 = mc$. Segue anche che $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$, ossia la massa è uno scalare¹².

Ne segue che

$$p = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Rimane da capire il significato fisico della componente temporale. Ci torneremo tra poco.

¹¹Infatti le trasformazioni di Lorentz sono funzioni invertibili e lineari. La linearità implica che il vettore nullo venga mappato nel vettore nullo. L'invertibilità assicura che solo il vettore nullo ci venga mappato.

¹²Un tempo si utilizzavano concetti come "massa relativistica" γm , "massa trasversale" γm e "massa longitudinale" $\gamma^3 m$. Queste definizioni, oltre a non rendere la massa uno scalare, sono parecchio confusionarie: consiglio quindi di non adottarle.

Vogliamo ora scrivere le equazioni della dinamica. A basse velocità sappiamo che la seconda legge di Newton si scrive

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (72)$$

L'ansatz naturale è sostituire $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\tau}$ per avere un 4-vettore a destra. Questo **definirà** la 4-forza:

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}, \quad (73)$$

dove f^μ è un 4-vettore che a piccole velocità deve ridursi alle usuali espressioni per la forza.

Consideriamo ora l'equazione Equazione 73 contratta con u_μ :

$$u \cdot f = u_\mu f^\mu = m u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau}. \quad (74)$$

Analizziamo il membro di destra:

$$m u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = m g_{\mu\nu} u^\nu \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \frac{d(u^\mu u^\nu)}{d\tau} = \frac{1}{2} m \frac{d(g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu)}{d\tau} = \frac{1}{2} m \frac{dc^2}{d\tau} = 0. \quad (75)$$

Il sistema di riferimento del corpo, subendo esso una forza, è chiaramente non inerziale. Ma a un istante fissato t^* , possiamo metterci nel sistema di riferimento inerziale che, in quell'istante, ha origine nella posizione del corpo e stessa sua velocità. Questo viene detto *sistema di riferimento tangente*.

Osserviamo l'Equazione 74 nel sistema di riferimento tangente:

$$u^\mu = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow c f^0 = 0. \quad (76)$$

Quindi, nel sistema di riferimento tangente, la 4-forza è

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad (77)$$

dove \mathbf{F} è la forza Newtoniana.

Guardiamo quindi la componente temporale della seconda legge di Newton relativistica in un sistema di riferimento in cui il corpo ha velocità non relativistiche:

$$t \simeq \tau, \quad f^0 \simeq \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{F}, \quad (78.1)$$

$$\frac{dp^0}{dt} \simeq \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c}, \quad (78.2)$$

da cui, tramite il principio di corrispondenza, si arriva a dire che p^0 è l'energia del corpo divisa per un fattore c .

Ricapitolando:

$$p = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \gamma m \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (79.1)$$

$$f = \frac{dp}{d\tau}, \quad (79.2)$$

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (79.3)$$

Ne segue che la massa è l'energia a riposo di un corpo. Attenzione: $E = mc^2$, l'equazione che trovate sulle magliette, è vera solo se $\mathbf{p} = 0$, ovvero per corpi fermi. L'equazione vera è $E = \gamma mc^2$. Si noti dunque che in un sistema composto, la massa non è data semplicemente dalla somma dei costituenti: a essa va aggiunta l'energia di legame divisa per c^2 . Il caso più evidente è quello dei nucleoni (protoni e neutroni), che sono stati legati di tre quark (ciascuno dalla massa di pochi MeV/c^2) più gluoni (le particelle che mediano la forza forte, sono particelle *massless* molto simili ai fotoni, che invece mediano la forza elettromagnetica) e hanno massa di circa $1 \text{ GeV}/c^2$.

L'energia cinetica di un corpo, ossia l'energia dovuta al moto dello stesso, è quindi

$$K = E - mc^2. \quad (80)$$

Come esercizio, si verifichi che a piccole velocità corrisponde all'usuale forma newtoniana.

Si noti anche che

$$\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{p}}{E}. \quad (81)$$

L'ultimo 4-vettore su cui ci concentriamo è il 4-vettore d'onda. Un'onda piana di frequenza ν e lunghezza d'onda λ che propaga nella direzione $\hat{\mathbf{k}}$ ha la forma

$$\psi \sim \psi_0 \exp[-2\nu\pi it + 2\pi i \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{k}}/\lambda]. \quad (82)$$

Definendo il 4-vettore d'onda

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{2\pi\nu}{c} \\ \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix}, \quad (83)$$

l'Equazione 82 si può scrivere tramite il formalismo dei 4-vettori nella forma

$$\psi \sim \psi_0 \exp[-ik \cdot x]. \quad (84)$$

Per comodità, definiamo \mathbf{k} e ω nel seguente modo:

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}. \quad (85)$$

L'ipotesi di De Broglie, che lega l'impulso di una particella alla sua lunghezza d'onda, è

$$\mathbf{p} = \frac{h}{\lambda} \hat{\mathbf{k}} = \hbar \mathbf{k}. \quad (86)$$

Estendendo quest'equazione, per il principio di corrispondenza, all'intero 4-vettore, si arriva a una relazione che lega l'energia di un corpo alla frequenza dell'onda associata:

$$p^\mu = \hbar k^\mu, \quad E = \hbar\omega = h\nu. \quad (87)$$

Prendendo il quadrato di Minkowski di quest'equazione, si arriva alla **relazione di dispersione** delle onde relativistiche:

$$\omega^2 - \mathbf{k}^2 c^2 = \frac{c^4}{\hbar^2} m^2. \quad (88)$$

In particolare, per particelle *massless* come i fotoni, vale

$$\omega = |\mathbf{k}|c. \quad (89)$$

Da queste relazioni, si può ricavare l'effetto Doppler, longitudinale e trasverso.

Come curiosità, osserviamo che, per le onde piane, $k_\mu = i\partial_\mu$, nel senso che

$$k_\mu \psi = i\partial_\mu \psi. \quad (90)$$

Da questo è possibile ricavare l'equazione di Schrödinger (ossia l'equazione che descrive la dinamica quantistica) per particelle non relativistiche:

$$E\psi = \frac{p^2}{2m}\psi \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (91)$$

3.5. Elettromagnetismo

Si può procedere in modo del tutto analogo a quanto fatto finora, tramite il principio di corrispondenza, per costruire l'elettrodinamica relativistica. Se ci pensate, la relatività ristretta è nata dall'elettrodinamica. È perciò naturale che queste due teorie si conoscano naturalmente "out of the box". Per brevità, qui lascio direttamente le equazioni dell'elettrodinamica. Se volete, potete procedere a dimostrarle per esercizio.

Definiamo per prima cosa il tensore dei campi, che è definito come uno $(0, 2)$ -tensore antisimmetrico:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Questo è davvero un tensore, quindi ci dice come trasformano i campi (si veda l'Esercizio 5.2).

La carica elettrica è uno scalare. Con una distribuzione ρ di carica, che si muove a 4-velocità $u^\mu(x)$, definiamo il 4-vettore di corrente

$$J^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} = \rho u^\mu. \quad (93)$$

L'equazione di continuità della carica assume una forma molto elegante:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (94)$$

Le equazioni di Maxwell diventano semplicemente:

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0, \quad (95.1)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (95.2)$$

e, una carica puntiforme con 4-velocità u , sottoposta a un campo F , subisce una 4-forza

$$f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu. \quad (96)$$

La cosa importante da ricordare, è che l'espressione della forza di Lorentz è la stessa non relativistica¹³:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge (c\mathbf{B}) \right]. \quad (97)$$

¹³Mi riferisco alla forza, non alla 4-forza. Dunque la derivata è nel tempo t , non in τ .

SEZ. 4. — CENNI DI RELATIVITÀ GENERALE

Premetto che alcune definizioni che qui esporrò sono state superate in ottica di una descrizione più generale, seppur complicata. Al fine di garantire l'accessibilità a un pubblico più vasto, ho preferito definizioni più antiquate, seppur più facilmente assimilabili.

4.1. Postulati generali

La relatività generale è la generalizzazione naturale della relatività ristretta. Nasce da due postulati fondamentali:

1. **postulato della general covarianza:** le leggi della Fisica possono tutte essere scritte come relazioni tensoriali, vere in ogni sistema di riferimento.
2. **Principio di equivalenza:** in ogni punto dello spazio-tempo, esiste un sistema di riferimento (detto "localmente inerziale") in cui le leggi fisiche (in quel punto) assumono la stessa forma che assumerebbero nello spazio-tempo di Minkowski.

Il principio di equivalenza è ben verificato sperimentalmente da qualche evidenza:

- la massa inerziale (quella che appare nella seconda legge di Newton) è indistinguibile dalla carica gravitazionale (proporzionale alla forza di gravità). Detto in altre parole, ogni corpo subisce la stessa accelerazione in un campo di gravità. Questo giustifica l'assunzione che le equazioni della dinamica dei corpi liberi siano le stesse del caso Minkowskiano, almeno localmente, ossia che la forza di gravità appaia come una "forza apparente" dovuta alle coordinate adottate;
- la massa inerziale, per particelle composte, dipende dalle interazioni, ma la massa è uno scalare. Sarebbe molto strano, dunque, se le interazioni cambiassero in presenza di gravità: dovrebbero infatti variare senza alterare la massa delle particelle composte.

Vediamo ora come scrivere equazioni in un sistema di coordinate arbitrario. La prima cosa che dobbiamo generalizzare è la seconda legge di Newton, per ora in assenza di forze esterne:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0. \quad (98)$$

In questa equazione c'è una sottigliezza geometrica: $p^\mu(\tau)$ e $p^\mu(\tau + d\tau)$ sono due vettori, ma vivono in punti diversi. Non ha quindi senso prenderne la differenza per calcolare il differenziale dp^μ , anche perché quella quantità **non** è un vettore: effettuiamo infatti un generico cambio di coordinate $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\theta^\mu)$.

Nella mia convenzione, le componenti con indici $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono riferiti al sistema di riferimento "nuovo", con coordinate ξ , mentre le componenti con indici μ, ν, ρ, σ sono da intendersi come riferiti alle coordinate θ .

$$p^\alpha(\tau) = \left. \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta(\tau)} p^\mu(\tau), \quad (99)$$

pertanto, al primo ordine,

$$dp^\alpha = \left[\left. \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta(\tau+d\tau)} p^\mu(\tau+d\tau) \right] - \left[\left. \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta(\tau)} p^\mu(\tau) \right] \quad (100.1)$$

$$= \left. \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta(\tau)} dp^\mu + \left[\left. \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \theta^\mu \partial \theta^\nu} d\theta^\nu \right] \right|_{\theta(\tau)} p^\mu(\tau), \quad (100.2)$$

ossia, oltre al primo termine “omogeneo”, che ci aspetteremmo in modo *naive*, ne appare un altro geometrico, dovuto al fatto che lo spazio geometrico è curvo.

4.2. Derivata covariante

La prima cosa che dobbiamo costruire è la **derivata covariante**, ovvero la generalizzazione del concetto di derivata che ci permette, derivando un tensore, di ottenere un altro tensore. Nello spazio-tempo di Minkowski, le trasformazioni di Lorentz sono lineari, quindi il contributo

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \theta^\mu \partial \theta^\nu} \quad (101)$$

si annulla. Le equazioni in relatività generale si otterranno quindi sostituendo, nelle equazioni della relatività ristretta, le derivate covarianti alle derivate ordinarie.

Per capire come costruire le derivate covarianti, partiamo dal calcolare il gradiente di un vettore, non delle sole sue componenti:

$$\partial_\mu (v^\nu e_\nu) = (\partial_\mu v^\nu) e_\nu + v^\nu (\partial_\mu e_\nu). \quad (102)$$

Questo è ciò che intendiamo con derivata covariante.

In un set di coordinate cartesiane, siccome gli e_μ non dipendono dal punto, il secondo contributo si annulla; ma in generale questo non succede, ed è proprio da quel contributo che emerge il contributo inomogeneo presente in Equazione 100.

Definiamo i simboli di Christoffel Γ (talvolta, impropriamente, “connessione di Levi-Civita”):

$$\partial_\rho e_\sigma = \Gamma^\mu_{\rho\sigma} e_\mu, \quad (103)$$

ossia quanto variano gli elementi di base dello spazio tangente al variare delle coordinate. Ricordando la definizione di e in Equazione 5, possiamo anche scrivere

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} e_\mu = \frac{\partial^2 P(\theta)}{\partial \theta^\rho \partial \theta^\sigma}, \quad (104)$$

da cui è manifesta la simmetria per $\rho \leftrightarrow \sigma$ dei simboli di Christoffel.

Ricordando la definizione di tensore metrico in Equazione 19, si ha che

$$\partial_\mu g_{\rho\sigma} = \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^\mu \partial \theta^\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta^\sigma} + \frac{\partial P}{\partial \theta^\rho} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^\mu \partial \theta^\sigma} = \Gamma^\nu_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}. \quad (105)$$

Considerando ora la combinazione

$$\partial_\mu g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\rho} \quad (106)$$

e invertendo si arriva a

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\rho\nu}]. \quad (107)$$

Nota importante: i simboli di Christoffel **non** sono tensori. Lo si verifichi esplicitamente facendo una trasformazione di coordinate e calcolando il pezzo inomogeneo che ne emerge.

Le componenti della derivata in Equazione 102, con i simboli di Christoffel, possono essere scritte come

$$\partial v_\mu{}^\nu = \partial_\mu v^\nu + v^\rho \Gamma^\nu_{\mu\rho}. \quad (108)$$

Si noti (esercizio lasciato al lettore) che la derivata di un vettore, effettuata in questo modo, trasforma come un $(1, 1)$ -tensore. Solitamente, la derivata covariante, si scrive con la lettera ∇ (pronunciata “nabla”):

$$\nabla_{\mu} v^{\nu} = \partial_{\mu} v^{\nu} + v^{\rho} \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}. \quad (109)$$

La derivata covariante di un $(n, 0)$ -tensore $T = T^{\mu_1 \dots \mu_n} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_n}$ avrà, oltre al termine *naive*, le derivate degli n elementi di base. Le componenti della derivata covariante saranno quindi

$$\nabla_{\rho} T^{\mu_1 \dots \mu_n} = \partial_{\rho} T^{\mu_1 \dots \mu_n} + T^{\sigma \dots \mu_n} \Gamma^{\mu_1}_{\rho\sigma} + \dots + T^{\mu_1 \dots \sigma} \Gamma^{\mu_n}_{\rho\sigma}. \quad (110)$$

Rimane da capire come costruire le derivate covarianti di tensori con indici in basso. Per far questo si passa da un piccolo trucco: tramite il tensore metrico si alzano gli indici, si calcola la derivata covariante e poi si riabbassano gli indici.

Per farlo, abbiamo bisogno di un passaggio intermedio:

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (111)$$

Come notato in Sezione 1.3.i, il tensore identità è costante, nel senso che le sue componenti sono universali in qualsiasi set di coordinate. È quindi

$$\nabla_{\rho} \delta^{\mu}_{\nu} = 0. \quad (112)$$

Da questo deriva che¹⁴

$$\nabla_{\mu} (g_{\rho\nu} g^{\nu\sigma}) = (\nabla_{\mu} g_{\rho\nu}) g^{\nu\sigma} + g_{\rho\nu} \nabla_{\mu} (g^{\nu\sigma}) = 0. \quad (113)$$

Inoltre, da

$$\partial_{\mu} (g_{\rho\nu} g^{\nu\sigma}) = 0 \quad (114)$$

segue che

$$\partial_{\mu} g^{\rho\sigma} = -\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} g^{\lambda\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} g^{\rho\lambda}, \quad (115)$$

ossia che

$$\nabla_{\mu} g^{\rho\sigma} = 0, \quad (116)$$

da cui banalmente

$$\nabla_{\mu} g_{\rho\sigma} = 0. \quad (117)$$

Ne segue che

$$\nabla_{\mu} v_{\rho} = \nabla_{\mu} (g_{\rho\sigma} v^{\sigma}) = g_{\rho\sigma} \nabla_{\mu} v^{\sigma} = g_{\rho\sigma} [\partial_{\mu} v^{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} v^{\lambda}] \quad (118.1)$$

$$= g_{\rho\sigma} [\partial_{\mu} (g^{\sigma\lambda} v_{\lambda}) + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} v_{\kappa} g^{\lambda\kappa}] \quad (118.2)$$

$$= g_{\rho\sigma} \left[-\Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} g^{\kappa\lambda} v_{\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} g^{\sigma\kappa} v_{\lambda} + g^{\sigma\lambda} \partial_{\mu} v_{\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} v_{\kappa} g^{\lambda\kappa} \right] \quad (118.3)$$

$$= \partial_{\mu} v_{\rho} - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} v_{\nu}. \quad (118.4)$$

Chiaramente, avete un termine inhomogeneo per ogni indice in basso nel tensore. Per riassumere, la derivata covariante di un (r, s) -tensore è

¹⁴Si ricordi che la derivata covariante è una derivata sui vettori anziché sulle sole componenti. Dunque deve soddisfare la proprietà di Leibnitz delle derivate.

$$\nabla_{\mu} T^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} = \partial_{\mu} T^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} + \quad (119.1)$$

$$+ T^{\nu \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \Gamma^{\rho_1}_{\mu\nu} + \dots + T^{\rho_1 \dots \nu}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \Gamma^{\rho_n}_{\mu\nu} + \quad (119.2)$$

$$- T^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\nu \dots \sigma_s} \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma_1} - \dots - T^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \nu} \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma_s}. \quad (119.3)$$

4.3. Le equazioni del moto di particella libera

In relatività generale, la seconda legge di Newton afferma che la derivata rispetto al tempo proprio del 4-vettore p (e non delle sue componenti!) è pari alla 4-forza. Ricaviamo le componenti in modo analogo a quanto fatto in Equazione 102:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{d(p^{\mu} e_{\mu})}{d\tau} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} e_{\mu} + p^{\mu} \frac{d\theta^{\nu}}{d\tau} \partial_{\nu} e_{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} e_{\mu} + p^{\rho} u^{\sigma} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} e_{\mu}. \quad (120)$$

In componenti, l'equazione della dinamica relativistica di punti materiali è quindi

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} + p^{\rho} u^{\sigma} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = f^{\mu}, \quad (121)$$

che in assenza di forze si traduce quindi in

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = -p^{\rho} u^{\sigma} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}, \quad (122)$$

equivalente a

$$\frac{du^{\mu}}{d\tau} = -u^{\rho} u^{\sigma} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}. \quad (123)$$

Vedete che questa equazione, nata dalla semplice richiesta che la seconda legge di Newton venisse scritta in forma generalmente covariante, predice traiettorie che non dipendono dalla massa del corpo, come dev'essere per il principio di equivalenza: questo suggerisce che la gravità abbia origine dall'effetto geometrico dovuto ai simboli di Christoffel Γ .

Usiamo ora il principio di corrispondenza. In uno spazio quasi-piatto, la gravità newtoniana funziona bene; quindi le equazioni devono ridursi a quelle newtoniane, che descrivono:

- la forza che il campo gravitazionale esercita sulle particelle:

$$m \frac{dv}{dt} \simeq -m \nabla \phi, \quad (124)$$

con ϕ potenziale gravitazionale;

- l'effetto che le masse esercitano sul potenziale gravitazionale:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (125)$$

con ρ densità di massa.

Occupiamoci per ora del primo punto. Le componenti spaziali di Equazione 122, per piccole Γ , velocità molto minori di c (per cui dominano solo le componenti temporali di p e u) e coordinate quasi-cartesiane, si riducono a

$$m \frac{dv^i}{dt} \simeq -mc^2 \Gamma^i_{00} = \frac{mc^2}{2} g^{i\mu} (\partial_{\mu} g_{00} - 2\partial_0 g_{\mu 0}). \quad (126)$$

Nell'approssimazione di spazio quasi-minkowskiano, $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$. L'unico contributo non nullo è quindi

$$m \frac{dv^i}{dt} \simeq -\frac{mc^2}{2} \partial_i g_{00}, \quad (127)$$

da cui deduciamo

$$\phi \simeq \frac{c^2}{2} (g_{00} - 1) \Rightarrow g_{00} \simeq 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (128)$$

4.4. Le equazioni di campo di Einstein

Occorrerebbe ora sviscerare il secondo punto, ovvero come la materia agisce sul campo di gravità, che ci aspettiamo dunque, in generale, essere $g_{\mu\nu}$ a questo punto. Vorremmo un'uguaglianza tensoriale che si riduca alla Equazione 125, nel limite non relativistico.

La derivazione è piuttosto lunga e tediosa, ma sfruttando tecniche identiche a quelle utilizzate finora si arriva all'equazione di campo di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (129)$$

dove

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (130)$$

è il tensore di campo di Einstein, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ è la curvatura scalare, $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ è il tensore di curvatura di Ricci e, infine,

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \quad (131)$$

è il tensore di curvatura di Riemann. $T_{\mu\nu}$ è invece il tensore di stress-energia, un tensore simmetrico che descrive il flusso di densità energia e di quantità di moto per lo spazio-tempo.

C'è un altro termine possibile che si può aggiungere all'equazione di campo di Einstein, il così chiamato *termine di Costante Cosmologica*, che descrive la densità di energia del vuoto:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (132)$$

I conti sono sicuramente pesanti, ma il significato fisico di quest'equazione è chiaro:

$$G_{\mu\nu} \sim \partial\Gamma \sim \partial^2 g_{\mu\nu} \sim \frac{4\pi G}{c^2} \rho \sim \frac{4\pi G}{c^2} \frac{T_{\mu\nu}}{c^2}. \quad (133)$$

I fattori numerici e la struttura tensoriale dell'Equazione 132 li approfondirete all'università. La cosa che davvero ha senso portarvi a casa è il significato fisico, che è completamente contenuto nello schema in Equazione 133.

— ESERCIZI E PROBLEMI —

In questa sezione trovate esercizi e problemi propedeutici allo studio della relatività. Accanto a ciascun titolo è indicato un punteggio da 0 (☆☆☆☆☆) a 5 (★★★★★) che indica l'utilità dell'esercizio.

Attenzione: gli esercizi con cinque stelle sono da considerarsi parte integrante della lezione.

5.1 ★★★★★ Recupera gli esercizi dispersi tra la teoria

Come da oggetto,
cordiali saluti.

5.2 ★☆☆☆☆ Trasformazioni relativistiche dei campi

In questo esercizio dimostriamo che la matrice in Equazione 92 è un tensore.

§ 5.2.1 **Pure rotazioni** — Sotto pure rotazioni, ossia per trasformazioni che lasciano invariato il tempo, la trasformazione tensoriale è equivalente alle usuali rotazioni per \mathbf{E} , \mathbf{B} . Si dimostri questo fatto.

Hint: si considerino solo trasformazioni infinitesime. Queste sono necessarie e sufficienti a classificare la natura tensoriale degli oggetti¹⁵.

§ 5.2.1.1 **Soluzione** — Cominciamo a trovare la generica rotazione infinitesima. Non vogliamo alterare il tempo, quindi la matrice Λ deve avere forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{21} & 1 + \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1 + \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \varepsilon, \quad (134)$$

con ε una matrice infinitesima. Una rotazione è (per definizione) una trasformazione che non altera le distanze. Quindi deve essere $\eta' = \eta$, ossia

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\lambda\kappa} \Lambda^\lambda{}_\mu \Lambda^\kappa{}_\nu = \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\kappa} \varepsilon^\kappa{}_\nu + \eta_{\lambda\nu} \varepsilon^\lambda{}_\mu + O(\varepsilon^2). \quad (135)$$

Sfruttando il fatto che ε ha solo componenti spaziali e la forma esplicita di $\eta_{\mu\nu}$, che ha elementi solo sulla diagonale principale, si ottiene

$$\varepsilon^\mu{}_\nu = -\varepsilon^\nu{}_\mu. \quad (136)$$

La generica rotazione infinitesima è dunque

$$\Lambda = \mathbb{1} + \theta_x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} + \theta_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \theta_z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (137)$$

dove per i segni abbiamo utilizzato la regola della mano destra e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ ha come direzione l'asse di rotazione e come modulo l'angolo della trasformazione.

Per brevità, trattiamo esplicitamente solo una rotazione infinitesima attorno all'asse \hat{z} . Il caso generico è del tutto analogo ed è lasciato come esercizio per il lettore.

¹⁵A meno di sottigliezze di cui potreste aver sentito, come il fatto che un campo fermionico sotto rotazioni di 360° cambia segno. Per oggetti tensoriali, un teorema matematico avanzato (teorema di Bargmann) ci assicura che queste sottigliezze non si manifestano.

$$\Lambda = \mathbb{1} + \theta_z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (138)$$

Se $F_{\mu\nu}$ fosse un tensore, avremmo¹⁶

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \begin{pmatrix} 0 & -E_y/c & E_x/c & 0 \\ E_y/c & 0 & 0 & B_x \\ -E_x/c & 0 & 0 & B_y \\ 0 & -B_x & -B_y & 0 \end{pmatrix} \theta_z, \quad (139)$$

ossia

$$\delta \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} \theta_z, \quad \delta \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -B_y \\ B_x \\ 0 \end{pmatrix} \theta_z, \quad (140)$$

che è la corretta rotazione infinitesima per un vettore. Rimane da verificare che pure sotto *boosts* i campi soddisfino le corrette trasformazioni.

§ 5.2.2 Limite non relativistico — Consideriamo una particella di massa $m \neq 0$ e carica q si sta muovendo in un campo elettromagnetico \mathbf{E}, \mathbf{B} .

Lavoriamo, per questo punto, nella meccanica di Newton, che ricordiamo essere l'espansione in Taylor all'ordine 1 in v/c della relatività ristretta.

La forza è un invariante di Galileo. Dunque non dipende dal sistema di riferimento. Si usi questo fatto per ricavare la trasformazione non relativistica dei campi.

§ 5.2.2.1 Soluzione — La forza di Lorentz è

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge c\mathbf{B} \right). \quad (141)$$

Andiamo in un sistema di riferimento in velocità $-\mathbf{w}$ (con $\mathbf{w} \sim \mathbf{v} \ll c$) rispetto al precedente. Si ha dunque

$$\frac{\mathbf{v}'}{c} = \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\mathbf{w}}{c} + O\left(\frac{w^2}{c^2}\right), \quad (142)$$

$$\mathbf{F}' = q \left(\mathbf{E}' + \frac{\mathbf{v}'}{c} \wedge c\mathbf{B}' \right) = q \left(\mathbf{E}' + \frac{\mathbf{w}}{c} \wedge c\mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge c\mathbf{B}' \right) + O\left(\frac{w^2}{c^2}\right) \quad (143.1)$$

$$= \mathbf{F} + O\left(\frac{w^2}{c^2}\right). \quad (143.2)$$

Per l'arbitrarietà di \mathbf{v} se ne deduce

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{\mathbf{w}}{c} \wedge c\mathbf{B}' + O\left(\frac{w^2}{c^2}\right), \quad (144.1)$$

¹⁶Si presti attenzione al fatto che $F_{\mu\nu}$ trasforma con $\Lambda_\mu^\lambda \Lambda_\nu^\kappa$, dove $\Lambda_\mu^\lambda = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha\beta} \eta^{\beta\lambda}$.

$$c\mathbf{B} = c\mathbf{B}' + O\left(\frac{w}{c}\right). \quad (144.2)$$

§ 5.2.3 **Confronto con la formula relativistica** — Si ricavi la trasformazione dei campi nell'ipotesi in cui $F_{\mu\nu}$, definito in Equazione 92, abbia natura tensoriale.

Lo si confronti poi con quanto ottenuto nel punto precedente. Cosa se ne deduce?

Hint: si proceda sempre tramite *boosts* infinitesimi.

§ 5.2.3.1 **Soluzione** — Procedendo similmente a quanto fatto in Esercizio 5.2.1.1, si trova che i *boosts* infinitesimi hanno forma¹⁷

$$\Lambda = \mathbb{1} + \chi_x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \chi_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \chi_z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (145)$$

Come nell'Esercizio 5.2.1.1, trattiamo per semplicità esplicitamente solo il caso per un *boost* puramente lungo l'asse \hat{z} , lasciando al lettore il caso generale.

Da questa forma, si ricava

$$\delta F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_y & -B_x & 0 \\ -B_y & 0 & 0 & E_x/c \\ B_x & 0 & 0 & E_y/c \\ 0 & -E_x/c & -E_y/c & 0 \end{pmatrix} \chi_z, \quad (146)$$

ossia

$$\delta \mathbf{E} = \begin{pmatrix} cB_y \\ -cB_x \\ 0 \end{pmatrix} \chi_z, \quad \delta \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -E_y/c \\ E_x/c \\ 0 \end{pmatrix} \chi_z, \quad (147)$$

e, ricordando che al primo ordine $\chi \sim w/c$, si nota come queste formule siano in accordo con l'Equazione 144.

Per concludere, dalle trasformazioni infinitesime ci siamo assicurati che i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} siano ben rappresentati dal tensore $F_{\mu\nu}$, ossia abbiamo scelto la giusta rappresentazione tensoriale.

§ 5.2.4 **Boost finiti** — Si dimostri che sotto un boost finito, la legge di trasformazione dei campi è

$$\mathbf{E} = \gamma(\mathbf{E}' + \boldsymbol{\beta} \wedge c\mathbf{B}') - (\gamma - 1)(\mathbf{E}' \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad (148.1)$$

$$c\mathbf{B} = \gamma(c\mathbf{B}' - \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{E}') - (\gamma - 1)(\mathbf{B}' \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}. \quad (148.2)$$

Hint: si considerino indipendentemente le componenti parallele e perpendicolari del *boost*. Sfruttando l'invarianza sotto rotazioni della teoria, potete fare un boost lungo la vostra direzione preferita.

5.3 ★★★★★ Composizione delle velocità

È in corso un'importante gara di velocità. Al primo posto appare Toothless, al secondo Cloudjumper e al terzo Meatlug. Tutti si stanno muovendo nella stessa direzione.

¹⁷Si noti la differenza tra il segno di χ in questa definizione e in quella data in Equazione 41. Questa deriva da un diverso punto di vista della trasformazione. Durante lo sviluppo della teoria, abbiamo tenuto fisso il vettore fisico e abbiamo cambiato sistema di riferimento (**trasformazione passiva**). Qui stiamo immaginando di *boost*-are il sistema mantenendo lo stesso sistema di riferimento, che è l'approccio duale (**trasformazioni attive**).

Cloudjumper vede Toothless superarlo di una velocità di $\frac{2}{3}c$, ma sa che, nel suo sistema di riferimento, sta andando $\frac{1}{2}c$ più veloce di Meatlug.

A quale velocità sta viaggiando Toothless nel sistema di riferimento di Meatlug?

§ 5.3.1 **Soluzione** — Ci basta applicare due *boosts* di Lorentz successivi. Sapendo che $\beta = \tanh \chi$ e che la rapidità è additiva per *boost* collineari, ci basta usare la formula dell'addizione per la tangente iperbolica:

$$\chi_{\text{TM}} = \chi_{\text{TC}} + \chi_{\text{CM}}. \quad (149.1)$$

$$\beta_{\text{TM}} = \tanh \chi_{\text{TM}} = \frac{\tanh \chi_{\text{TC}} + \tanh \chi_{\text{CM}}}{1 + \tanh \chi_{\text{TC}} \tanh \chi_{\text{CM}}}, \quad (149.2)$$

ossia

$$\beta_{\text{TM}} = \frac{\beta_{\text{TC}} + \beta_{\text{CM}}}{1 + \beta_{\text{TC}} \beta_{\text{CM}}}. \quad (150)$$

Questa formula è detta **formula della composizione delle velocità**. Notate che un corpo che va a velocità inferiore, uguale o maggiore di c in un sistema di riferimento inerziale, fa lo stesso in ogni altro in moto rettilineo uniforme rispetto al primo.

5.4 ★★★★★☆ Una partita fotonica

Rimettendoci nel setup della Sezione 3.1 e adottando il sistema di riferimento in cui Sinner e Musetti sono fermi, ci chiediamo come cambia nel tempo l'energia del fotone che i due si scambiano.

Assumiamo che, nel punto di contatto fotone-racchetta, rispetto al suolo, la racchetta si muova di 150 km h^{-1} , in parallelamente alla direzione di arrivo del raggio di luce.

Si assuma che la lunghezza d'onda iniziale del raggio sia di $\nu_0 = 630 \text{ nm}$. Se ne determini l'energia all' n -esimo rimbalzo.

5.5 ★★★★★☆☆ Redshift gravitazionale

Si consideri un campo gravitazionale statico $g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ in presenza di una stella di massa M .

A una distanza $R \gg (2GM)/c^2 = R_S$, dove vale l'approssimazione di campo newtoniana

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \quad (151)$$

sta un potente LASER, fermo, che emette un'onda luminosa monocromatica.

In assenza di campi gravitazionali, la luce del LASER ha una frequenza ν .

Un osservatore molto lontano dalla stella e fermo rispetto a essa riceve il segnale del LASER. Quale frequenza misura?

Hint: si ricorda che $d\tau$ è il tempo proprio, ossia il tempo che un osservatore in quel punto misura scorrere.

Si noti che il risultato è lo stesso che si sarebbe ottenuto attribuendo al fotone una piccola massa μ e applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica.

5.6 ★★★★★☆☆ Senti che scatterare questi!

In un laboratorio c'è un elettrone fermo. Un fotone lo urta elasticamente¹⁸.

¹⁸In Fisica delle Particelle, per urto elastico si intende un processo di *scattering* in cui le particelle entranti sono della stessa specie di quelle uscenti. L'urto in questione, $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$, è chiaramente elastico.

Si dimostri che

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\varphi), \quad (152)$$

dove $\Delta\lambda$ è la variazione della lunghezza d'onda del fotone, φ è l'angolo di scattering del fotone e

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \quad (153)$$

è detta **lunghezza Compton** dell'elettrone.

5.7 ★★★★★ $F = ma$

Dimostrare che un corpo in moto a velocità v sottoposto a una forza

$$\mathbf{F} = F_{\parallel}\hat{v} + \mathbf{F}_{\perp} \quad (154)$$

tale che $\mathbf{F}_{\perp} \cdot \hat{v}$, subisce un'accelerazione

$$m\mathbf{a} = \frac{F_{\parallel}}{\gamma_v^3}\hat{v} + \frac{\mathbf{F}_{\perp}}{\gamma_v}. \quad (155)$$

§ 5.7.1 **Frequenza di ciclotrone** — Una particella di massa m e carica q si sta muovendo ortogonalmente a un campo magnetico di intensità B .

Trovare la relazione tra il modulo della velocità v della particella al tempo iniziale e il periodo del moto.

§ 5.7.2 **Acceleratore lineare** — Una particella di massa m e carica q è inizialmente ferma. Viene sottoposta a un campo elettrico omogeneo di intensità E , fin quando non raggiunge una distanza dalla posizione iniziale di modulo ℓ .

1. Quanto vale la sua velocità quando viene spento il campo elettrico? Per ottenere la risposta, usare l'Equazione 155.
2. C'è un modo più veloce per rispondere alla domanda?

5.8 ★★☆☆☆ GPS

Un satellite artificiale in orbita geostazionaria emette un segnale luminoso che, nel suo sistema di riferimento, ha frequenza ν . Qual è la frequenza del segnale misurato sulla Terra? Si trascuri il moto di rivoluzione della Terra, ma non il suo moto di rotazione.

Si consideri sia l'effetto della relatività ristretta, sia l'effetto (al primo ordine, in approssimazione di Newton) della gravità. Si noti che in relatività esiste un **effetto Doppler trasversale**.

— Esercizi tratti dalle precedenti edizioni —

6.1 ★★★★★ Un treno di fisici (T. Marini, 2023)

Un gruppo di fisici sta andando in treno all'inaugurazione del nuovo acceleratore di particelle che sicuramente scoprirà la Supersimmetria.

Un gruppo di ingegneri, gelosi dei fisici, decide di fare un attentato al treno e piazza due bombe all'ingresso e all'uscita di una galleria in cui dovrà passare il treno dei fisici.

Il treno ha lunghezza L mentre la galleria ha lunghezza $L/2$. Gli ingegneri decidono di far esplodere entrambe le bombe quando l'inizio del treno è all'uscita della galleria.

Per fortuna gli ingegneri non conoscono la relatività ristretta e i fisici riescono a salvarsi andando abbastanza veloci.

1. Scrivere i quadrivettori corrispondenti all'esplosione delle due bombe nel sistema degli ingegneri. Specificare l'origine spaziale e temporale utilizzata.
2. Scrivere gli stessi quadrivettori nel sistema dei fisici, supponendo che il treno vada a velocità v .
3. Qual è la minima velocità v con la quale i fisici si salvano?
4. Secondo gli ingegneri come hanno fatto i fisici a salvarsi? E secondo i fisici?

6.2 ★★☆☆☆ Scossa? (T. Marini, 2023)

In un filo, una densità di carica lineare ρ (in un pezzo lungo l di filo c'è una carica $Q = \rho l$) si muove a velocità v_ρ . Parallelamente al filo, a una distanza d , si muove un elettrone a velocità v , che subisce una forza.

1. Trovare l'espressione della corrente I nel filo in funzione di ρ e di v_ρ .
2. Trovare le densità a riposo ρ_0 delle cariche che percorrono il filo in funzione di ρ .
3. Notate che la corrente $I = \rho v_\rho = \rho_0 \gamma_v v_\rho$ è la componente spaziale di un quadrivettore. Giustificate che:

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho v_\rho \end{pmatrix} \quad (156)$$

trasforma come un quadrivettore, detto quadricorrente. La componente temporale è la densità (lineare) di carica, la componente spaziale è la corrente.

4. Scrivere la quadricorrente che agisce sull'elettrone nel sistema di riferimento in cui il filo è fermo. Trovare la forza che agisce sull'elettrone. Cosa la causa?
5. Trovare la quadricorrente che agisce sull'elettrone nel sistema di riferimento in cui l'elettrone è fermo. Trovare la forza che agisce sull'elettrone. Cosa la causa?
6. Trovare la quadricorrente che agisce sull'elettrone nel sistema di riferimento in cui la densità di carica è ferma. Trovare la forza che agisce sull'elettrone. Cosa la causa?

6.3 ★★★★★☆ God bless America (T. Marini, 2023)

In questo esercizio "risolviamo" il paradosso dei gemelli.

L'America organizza una missione spaziale per esportare democrazia, con una navicella che si inoltra nello spazio profondo (che sappiamo essere pieno di petrolio) e torna indietro. La traiettoria della navicella vista dalla Terra e supposta in una dimensione per semplicità, è:

$$x(t) = \begin{cases} vt & 0 \leq t < T - a \\ \frac{v}{2a}(t - T)^2 + v(T - a) + \frac{av}{2} & T - a \leq t < T + a \\ v(2T - t) & T - a \leq t \leq 2T. \end{cases} \quad (157)$$

Le costanti v e a sono parametri della traiettoria che inizialmente supponiamo dati. La comandante della missione è Alice, mentre suo fratello gemello Bob rimane a Terra. La missione dura in totale $2T = 1$ anno terrestre.

1. Quanto è il tempo proprio passato per Bob quando Alice torna dalla missione?
2. Per Alice invece? date la risposta in funzione dei parametri a e v ?
3. Alice è stanca di Bob, così prende i comandi della navicella e modifica i parametri a e v . Che valori deve utilizzare affinché un anno sulla navicella corrisponda a 80 anni sulla Terra? Può essere utile sapere che il corpo umano può sopportare accelerazioni fino a $5g$.

6.4 ★★★★★☆☆ Aberrazione degli angoli (P. Tognini, 2020)

Si calcoli come cambiano gli angoli tra due sistemi di riferimento O e O' legati da un boost. Quindi un'astronave che si muove a $v \lesssim c$, dove vedrà quasi tutte le stelle del cielo? Inoltre, le vedrà rosse o blu?

6.5 ★★★★★ Pan di Quasar (M. Costa, F. Zoratti, 2018)

Consideriamo una pasta per biscotti su un nastro trasportatore che si muove a velocità v (comparabile con quella della luce) in una data direzione. Sopra di questo c'è uno stampo di forma circolare (diametro L a riposo). Quando azionato, questo scende perpendicolarmente sul nastro e taglia nella pasta un biscotto. Quando poi il nastro si ferma, quale sarà nel sistema a riposo la forma del biscotto?

6.6 ★★★★★☆ Decadimento del π^0 (M. Costa, F. Zoratti, 2018)

Consideriamo ora un pione π^0 , di massa $m_\pi \approx 140 \text{ MeV}/c^2$. Questa particella decade in due fotoni. Si assuma che nel riferimento in cui il π^0 è a riposo, la probabilità di decadimento in funzione della direzione sia uniforme. Nel riferimento del laboratorio il π^0 si muove con una velocità βc lungo l'asse \hat{x} .

1. Si calcoli qual è l'angolo minimo possibile fra i due fotoni nel riferimento del laboratorio.
2. Si ricavi la distribuzione in energia dei prodotti di decadimento nel sistema di riferimento del laboratorio, ovvero la distribuzione di probabilità che uno dei due fotoni abbia una certa energia.
3. Si calcoli la distribuzione di probabilità in funzione dell'angolo α compreso fra i due fotoni nel riferimento del laboratorio.

6.7 ★★☆☆☆☆ Esperimento di Fizeau (M. Costa, F. Zoratti, 2018)

Consideriamo l'esperimento di interferenza in Figura 3: una sorgente di luce coerente emette luce di lunghezza d'onda λ che segue il percorso di specchi indicato in figura. Dentro al tubo vi è un liquido di indice di rifrazione n che si muove a velocità costante u rispetto al tubo.

Si supponga che gli unici tratti che contribuiscono ad accumulare differenza di cammino ottico siano quelli orizzontali dentro al fluido. Si supponga che il lato del tubo orizzontale sia lungo L .

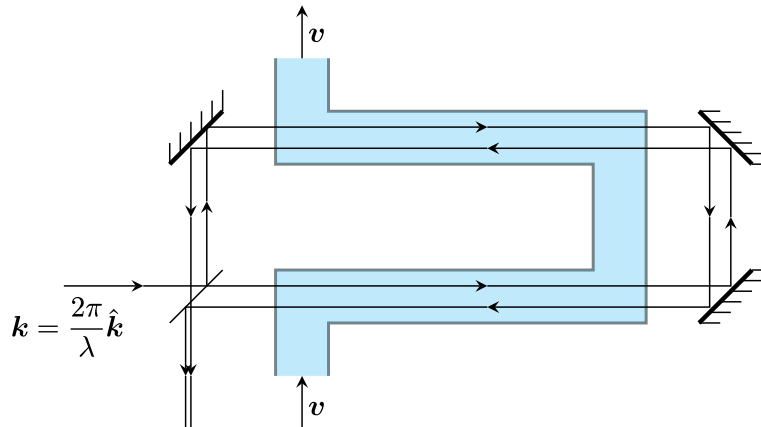


Figura 3: Schema dell'esperimento di Fizeau

Si mostri che la differenza di fase $\Delta\phi$ fra i due raggi che seguono i due percorsi diversi vale

$$\Delta\phi = \frac{8\pi Lc u(n^2 - 1)}{\lambda (c^2 - n^2 u^2)}. \quad (158)$$