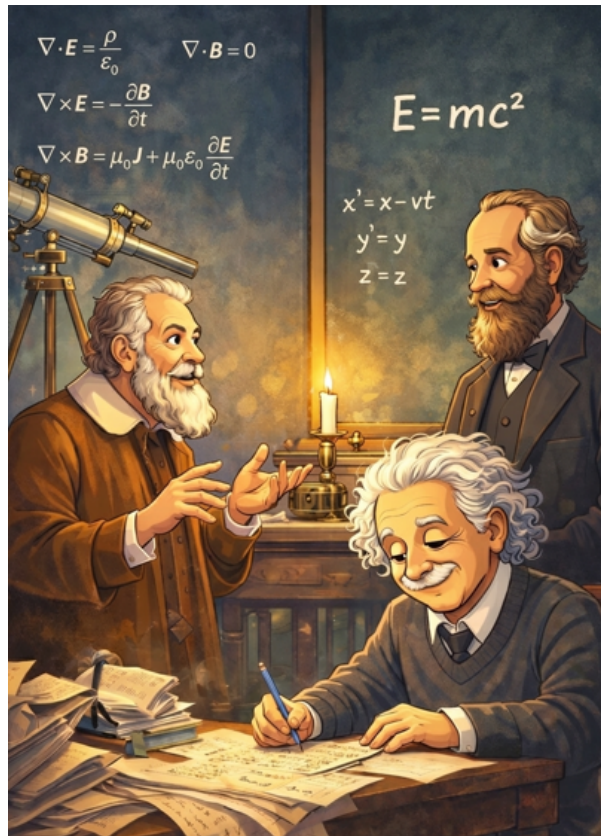


Relatività Avanzata

Edoardo Perri*



Sommario

La lezione è improntata su un approccio geometrico e visivo alla teoria della relatività ristretta, con numerose applicazioni alla risoluzione di apparenti paradossi che emergono studiandola. Si motiveranno inizialmente i postulati della relatività ristretta, richiedendo che le equazioni di Maxwell rispettino il principio di relatività e di covarianza. Successivamente si studierà in dettaglio la geometria dello spaziotempo, introducendo sia strumenti più astratti, come la nozione di metrica, sia strumenti visivi per sviluppare maggiore intuizione, come i diagrammi di Minkowski, i quali verranno usati numerose volte nel corso della lezione. Si passerà poi ad analizzare il moto uniformemente accelerato in relatività ristretta, introducendo le coordinate di Rindler ed affrontando esempi concreti, quali il paradosso di Bell. Infine, si concluderà accennando come sia possibile applicare il formalismo della relatività ristretta alle equazioni di Maxwell, che possono essere riscritte in forma manifestamente covariante. Saranno discussi numerosi esempi, arricchiti da altrettanti esercizi in fondo alle dispense, che fungono come ulteriore approfondimento agli argomenti trattati.

*edoardo.perri@sns.it

— INDICE —

1	Il Caro Principio di Relatività	3
1.1	La relatività secondo Galileo	3
1.2	Galileo si scontra con Maxwell	3
1.3	L'avvento della relatività ristretta: da Lorentz a Einstein	4
2	La Geometria dello Spazio-Tempo	5
2.1	Quadrivettori, basi e trasformazioni tra sistemi inerziali	6
2.2	Metrica dello Spazio-Tempo	7
2.2.1	Invarianti di Lorentz	9
2.3	Riparametizzazioni dello spaziotempo	9
2.3.1	Un esempio concreto: coordinate di Rindler	10
2.4	Visualizzazione grafica: Diagrammi di Minkowski	11
2.4.1	Sistemi di riferimento diversi, unità diverse	13
2.4.2	Da angoli euclidei ad angoli iperbolici	14
2.4.3	Esempio grafico: il Paradosso del fienile	16
3	Sistemi accelerati	17
3.1	Preludio: quadriaccelerazione e quadrivelocità	17
3.2	Moto rettilineo uniformemente accelerato: soluzione analitica	18
3.3	Intepretazione grafica e coordinate di Rindler	19
3.4	Il paradosso di Bell e la rigidità di Born	21
3.5	Orizzonte degli eventi per il moto uniformemente accelerato	23
4	Di nuovo Maxwell: L'Elettrodinamica in formalismo covariante	24
4.1	Legge di trasformazione del campo elettromagnetico	26
4.2	Campi della carica puntiforme in moto rettilineo uniforme	26
4.2.1	Intuizione visiva per le linee di campo elettrico	27
A	Appendice: Paradosso di Ehrenfest e Metrica di un Sistema Rotante	29
	Esercizi	33
	Soluzioni	35

SEZ. 1 — IL CARO PRINCIPIO DI RELATIVITÀ —

1.1 La relatività secondo Galileo

Il principio di relatività fu enunciato esplicitamente per la prima volta da Galileo. Egli fece notare che ogni fenomeno fisico, osservato in un sistema di riferimento immobile S o in un sistema S' in moto rettilineo uniforme rispetto ad S , obbedisce alle stesse leggi. Come si legge nel *Dialogo sui Massimi Sistemi*, infatti:

"Riscuratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio... voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti il nominati effetti, nè da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma..."

L'affermazione di Galileo equivale a dire che, indicando con A, B, C, \dots le grandezze fisiche nel sistema S , e con A', B', C', \dots le corrispondenti grandezze nel sistema S' , in moto rispetto al primo con velocità v costante, ogni legge fisica

$$f(A, B, C) = 0 \quad (1.1)$$

è covariante, ossia assume la stessa forma (con la stessa f)

$$f(A', B', C') = 0 \quad (1.2)$$

nel sistema di riferimento S' , in cui le coordinate si ottengono da quelle in S mediante la trasformazione

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad (1.3)$$

ove abbiamo scelto gli assi primati paralleli ai non primati con la velocità v lungo x , e abbiamo posto che le origini coincidono al tempo $t = t' = 0$.

Nel caso delle equazioni di Newton, in cui le forze dipendono solo dalle posizioni relative delle particelle che interagiscono, il principio di relatività galileiana è verificato in senso restrittivo, in quanto sia le forze che le accelerazioni sono invarianti sotto trasformazioni di tipo (1.3), e quindi anche le equazioni del moto sono invarianti.

1.2 Galileo si scontra con Maxwell

Consideriamo ora la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.4)$$

Questa equazione non è manifestamente covariante, visto che dipende dalla velocità misurata in un certo sistema di riferimento. Se fosse solo la dipendenza esplicita dalla velocità a creare problemi, sarebbe comunque un problema apparentemente risolvibile, infatti, anche in meccanica newtoniana, in presenza di attriti, abbiamo forze $f_{\text{attrito}} \sim \gamma v$ dove v è la velocità relativa tra il corpo e il mezzo materiale (ad esempio l'aria) in cui questo si muove.

Un occhio più attento noterà anche che i campi stessi devono avere una qualche dipendenza dal sistema di riferimento scelto, infatti $B \propto I$ perciò dipende esplicitamente in modo lineare dalla velocità delle cariche in moto. Quindi potremmo pensare di postulare, in analogia al caso

newtoniano, che tali velocità siano relative ad un mezzo materiale ignoto, chiamato *etere*, che permea lo spazio.

La necessità di un tale mezzo in cui si propaghi il campo elettromagnetico è evidente anche dalla forma delle equazioni di Maxwell. Infatti, in assenza di cariche e sorgenti, sappiamo che i campi soddisfano le equazioni d'onda¹

$$\square \vec{E} = 0, \quad \square \vec{B} = 0 \quad (1.5)$$

Come potete verificare nell'Esercizio 1, l'operatore \square non è invariante sotto trasformazioni di Galileo, quindi ci troviamo di fronte a tre alternative:

1. Le equazioni di Maxwell non sono leggi fisiche.
2. Il principio di covarianza non vale e c'è un sistema privilegiato, l'*etere*.
3. Le trasformazioni di Galileo non sono il modo giusto per passare da un sistema all'altro.

I fisici di fine Ottocento elaborarono ingegnosi esperimenti volti a mostrare l'esistenza dell'*etere*, tuttavia non ottennero alcun risultato. Postuliamo dunque che non esista un mezzo privilegiato in cui si propaga il campo elettromagnetico, perciò c è una costante universale che non dipende dal sistema di riferimento, e che le trasformazioni di Galileo siano solo corrette nel limite $v \ll c$. Guidati dal principio di covarianza, siamo portati a credere che in un nuovo sistema di riferimento le equazioni di Maxwell abbiano la forma

$$\square' \vec{E}' = 0, \quad \square' \vec{B}' = 0 \quad (1.6)$$

dove l'indice $'$ indica il fatto che l'operatore è considerato rispetto alle variabili prese nel nuovo sistema di riferimento e \vec{E}', \vec{B}' sono quelli che un osservatore nel nuovo sistema di riferimento chiamerà campo elettrico e campo magnetico e in generale ci aspettiamo possano non coincidere con i campi in un altro sistema rispetto alle nuove variabili, ossia $\vec{E}'(x', t') \neq \vec{E}(x'(x, t), t'(x, t))$.

1.3 L'avvento della relatività ristretta: da Lorentz a Einstein

Passando da un sistema di riferimento inerziale ad un altro, il modo più semplice per verificare (1.6) è pensare che l'operatore \square risulti invariato nel cambio di sistema di riferimento e che il campo elettrico e il campo magnetico nel nuovo sistema siano funzioni lineari dei campi nel sistema di partenza, ossia $E', B' = f(E, B)$ con f lineare in E, B e indipendente da posizione e tempo per omogeneità dello spazio e isotropia temporale.

Alla fine del XIX secolo il fisico Hendrik Lorentz propose un set di trasformazioni (che ancora oggi portano il suo nome) che lasciano invariato in forma l'operatore \square . Quando egli le propose, tuttavia, non sviluppò le implicazioni che queste dovevano avere sul modo ordinario di concepire lo spazio ed il tempo.

Ci volle l'articolo del 1905 da parte di Einstein per delucidare gli effetti cinematici che seguivano dall'accettare un nuovo modo di concepire lo spazio ed il tempo tale da preservare il principio di covarianza nell'elettromagnetismo classico. Ora prefiggiamoci il compito di trovare esplicitamente quale debba essere la legge di trasformazione $(x'(x, t), t'(t, x))$.

Dovendo trasformare sistemi inerziali in sistemi inerziali, tale legge di trasformazione deve essere evidentemente lineare e indipendente dalla posizione e dal tempo; altrimenti avremmo risultati incompatibili con l'isotropia spaziale e l'omogeneità temporale, come il fatto che la durata di un certo intervallo di tempo dipenderebbe dalla posizione scelta per l'origine del sistema di coordinate. Poi potremmo chiederci come mai Galileo non si fosse reso conto di tali effetti ai suoi tempi. Quello che notiamo è che le velocità da lui considerate erano piccole rispetto alla nuova velocità universale che emerge nella teoria della relatività, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; vogliamo dunque delle trasformazioni che si riducano a quelle galileiane per $v \ll c$.

Supponiamo che il sistema di nostro interesse sia in moto a velocità $\vec{v} = v\hat{x}$ rispetto a noi.

¹si ricorda che $\square \equiv \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$

Scriviamo dunque²

$$\begin{aligned}t' &= At + Bx \\x' &= C(x - vt) \\y' &= Dy \\z' &= Ez\end{aligned}$$

Imponiamo ora $\square' = \square$ (ricordandoci che stiamo assumendo la velocità della luce invariante) e con delle semplici manipolazioni algebriche lasciate come esercizio si trova

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1.7)$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad (1.8)$$

$$y' = y \quad (1.9)$$

$$z' = z \quad (1.10)$$

dove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ è il fattore di Lorentz.

Osserviamo che avendo imposto l'invarianza di \square , una qualsiasi trasformazione indipendente da posizione e tempo (per le stesse motivazioni che ci hanno portato a trasformare in questo modo le coordinate spaziali e temporali) che leghi i campi in un sistema ai campi in un altro sistema di riferimento in modo lineare soddisfa automaticamente il principio di covarianza, esplicitamente, vale

$$\square' \vec{E}' = \square[f(\vec{E}, \vec{B})] = \alpha \square \vec{E} + \beta \square \vec{B} = 0 + 0 = 0 \quad (1.11)$$

per ogni scelta di costanti α e β .

Ispirati da queste trasformazioni come legge fisica che mette in relazione due qualsiasi sistemi inerziali, passeremo la prossima sezione a delucidare gli aspetti geometrici contenuti in queste trasformazioni, assumendo che il lettore sia già a conoscenza degli effetti fondamentali (e controintuitivi) che esse comportano.

SEZ. 2 — LA GEOMETRIA DELLO SPAZIO-TEMPO

Guidati dal principio di covarianza e di omogeneità dello spazio e del tempo, siamo stati portati a dedurre che la velocità della luce è una costante universale e che l'operatore differenziale \square è invariante in forma passando da un sistema di riferimento a un altro.

Come nello spazio euclideo tridimensionale la lunghezza di un generico spostamento è invariante sotto rotazioni, esplicitamente

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

così sotto trasformazioni di Lorentz, come potete intuire e facilmente verificare, identifichiamo l'invariante

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Quindi possiamo intuire che le trasformazioni di Lorentz abbiano un contenuto geometrico, che esploreremo più nel dettaglio in questa sezione. Inoltre, per comodità, d'ora in poi lavoreremo in

²A priori potremmo provare un Ansatz ancora più generale assumendo dipendenza di t da y, z ; tuttavia potete facilmente verificare che i coefficienti di accoppiamento in tale caso risultano essere nulli se assumiamo che le coordinate non si mischino tra loro (ossia che x' non dipenda da y, z e così via, che è molto ragionevole se pensiamo a quali relazioni debbano sussistere tra due terne di assi cartesiani in moto relativo). Inoltre l'origine degli assi dell'osservatore in moto rispetto a noi si trova in $x = vt$, perciò $x' \propto x - vt$

unità naturali, ossia faremo in modo che lo spazio e il tempo abbiano le stesse unità di misura ponendo $c = 1$. Prima di addentrarci ulteriormente nei dettagli della geometria dello spazio-tempo ci serve fare qualche richiamo sulle nozioni di vettore, coordinate e le loro leggi di trasformazione, per poi introdurre il concetto di metrica.

2.1 Quadrivettori, basi e trasformazioni tra sistemi inerziali

Immaginiamo di trovarci nello spazio vuoto, senza punti di riferimento e con nulla in mano tranne una terna di assi ortogonali e un orologio. Usando solo questi strumenti vogliamo catalogare quello che vediamo, o meglio, quello che sappiamo che accade nell'universo.³ Assegniamo dunque un vettore astratto ad ogni evento che avviene nell'universo partendo da un'origine degli assi spaziali e uno zero arbitrario dei tempi, che fissiamo. Un tale vettore è detto *evento* e l'insieme di tutti i vettori così costruiti forma lo *spazio-tempo*. Possiamo immaginare dunque un evento come una lista di 4 numeri (t, x, y, z) oppure in modo più astratto come ad un vettore in uno spazio quadri-dimensionale, cosa che ci tornerà più comoda per il seguito⁴.

$$\vec{x} = t\vec{e}_t + x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \vec{e}_\mu$$

Sappiamo come trasformano le componenti di tale oggetto sotto trasformazioni di Lorentz, inoltre dal nostro formalismo astratto che abbiamo sviluppato sappiamo che questo vettore è un evento che ha delle coordinate con cui scegliamo di rappresentarlo ma è indipendente dalle coordinate che ho scelto, perciò, preso un altro osservatore, questo dirà che $\vec{x} = x'^\mu \vec{e}'_\mu$.

Quanto detto finora ovviamente si estende a un qualsiasi oggetto che ha le stesse proprietà di trasformazione di x^μ sotto cambio di sistema di riferimento, come ad esempio il *quadri-impulso* o la *quadri-corrente*. Ogni tale oggetto avrà il nome di quadrivettore.

Osserviamo ora qual è la legge di trasformazione delle componenti di un quadrivettore rispetto alla trasformazione dei vettori di base.

Per costruzione di trasformazione di Lorentz, vale

$$x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu \quad (2.1)$$

e visto che questo definisce i coefficienti della trasformazione di Lorentz, questo dovrà valere anche per un generico quadrivettore A , ossia

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (2.2)$$

Questa è la generica legge di trasformazione di un quadrivettore sotto cambio di coordinate. Al contrario, i vettori di base dovranno trasformare con $\partial x^\nu / \partial x'^\mu$: questo si vede in modo esplicito imponendo

$$A'^\mu \vec{e}'_\mu = A^\mu \vec{e}_\mu \quad (2.3)$$

sviluppando il membro di sinistra dopo aver cambiato l'indice muto da μ a ν si ottiene

$$A^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \vec{e}'_\nu = A^\mu \vec{e}_\mu \quad (2.4)$$

³L'atto di vedere presuppone il raggiungimento dell'informazione ai vostri occhi e ciò non accade istantaneamente, ma richiede almeno un tempo pari alla vostra distanza dal punto in cui avviene l'evento diviso per la velocità della luce.

⁴D'ora in poi useremo la convezione di Einstein degli indici ripetuti: ogni qualvolta vediate un indice alto e il corrispondente indice basso, vuol dire che stiamo sommando su tale indice al variare dei valori che esso può assumere (per i nostri casi tale indice varia da 0 a 3).

Questa relazione deve valere per ogni quadrivettore A^μ perciò, dopo aver usato la relazione⁵

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^v} \frac{\partial x^v}{\partial x'^k} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^k} = \delta_k^\mu = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{si ottiene}$$

$$\vec{e}'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \vec{e}_\nu \quad (2.5)$$

Vediamo ora come mettere in relazione le nostre conoscenze di prodotto scalare dalla geometria euclidea per estenderlo al caso in questione.

2.2 Metrica dello Spazio-Tempo

Partiamo da una semplice considerazione nello spazio euclideo tridimensionale. L'invarianza della lunghezza infinitesima dl^2 si può esprimere in forma di prodotto scalare euclideo, ossia possiamo scrivere

$$dl^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = dx^i dx^j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (2.6)$$

essendo i vettori di base nello spazio tridimensionale ortogonali nel senso della geometria euclidea, definiamo il loro prodotto scalare

$$g_{ij} \equiv \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La nozione di prodotto scalare (o equivalentemente per i nostri scopi, di *metrica*) gioca un ruolo fondamentale nella scomposizione di un generico vettore in componenti. Infatti

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i \implies v^i = \vec{e}_i \cdot \vec{v} \quad (2.7)$$

Estendiamo tutto ciò alla metrica dello spaziotempo, che in questo caso non ha lo stesso significato geometrico del prodotto scalare euclideo (che senso avrebbe interpretare $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = -1$ come la lunghezza di un vettore?) ma per nostra fortuna ci permette allo stesso modo di decomporre un vettore nelle sue componenti, con l'aggiunta di un elemento che nel caso euclideo era nascosto. Estendiamo quanto fatto nel caso euclideo all'intervallo invariante relativistico ds^2 , determinando così la metrica dello spaziotempo⁶

$$g_{\mu\nu} \equiv \langle e_\mu | e_\nu \rangle$$

si ha dunque per costruzione

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \\ g_{0i} &= 0 \\ g_{ij} &= -\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Questa metrica è molto simile a quella euclidea tranne per un segno alle componenti spaziali, dunque per trovare le componenti, nel caso della componente 0 non cambia nulla, mentre per le componenti spaziali bisogna cambiare di segno il risultato del prodotto scalare standard tra i vettori di base.

Sebbene questo sia in principio abbastanza facile da fare, è più comodo introdurre un tipo di formalismo che vi seguirà nel futuro e che risulta molto comodo quando trattate delle basi che non costruite a partire da vettori ortogonali tra loro. Ad esempio, potreste avere una metrica

⁵Questa relazione, che segue dalla regola della catena, ci dice semplicemente che le coordinate associate a indici diversi sono indipendenti, ad esempio $\partial x' / \partial y' = 0$, mentre ad esempio $\partial x' / \partial x' = 1$.

⁶Per differenziare il prodotto scalare da quello euclideo, lo indichiamo con $\langle | \rangle$ al posto di \cdot . Inoltre, per alleggerire la notazione, eviterò di scrivere la freccia sopra ai vettori di base quando questo è superfluo.

(che è dettata dalla fisica, così come abbiamo ricavato la metrica dello spaziotempo a partire dall'invarianza di \square) che è descritta dall'invariante⁷

$$ds^2 = dt^2(1 - a^2) - 2adxdt - dx^2 - dy^2$$

Un caso che vi può sembrare più concreto in questo momento potrebbe essere un semplice passaggio in coordinate polari, in questo caso la metrica non è invariata, infatti $dx^2 + dy^2 \rightarrow dr^2 + r^2 d\theta^2$ dunque la coordinata θ è accompagnata da un fattore moltiplicativo, ossia $g_{22} \rightarrow r^2$.

Un altro caso a voi noto in cui la metrica non è banalmente preservata è il caso in cui usiate dei vettori di base non ortogonali nella metrica euclidea, ad esempio usando come vettori di base $\{e_x, e_y, e_y + e_z\}$

Quindi abbiamo buone ragioni di cercare un modo sistematico per trovare le componenti di un vettore che ci permetta di trattare anche basi non ortonormali. Cerchiamo dunque dei nuovi vettori⁸ $\{\bar{e}^\mu\}_{\mu=0,\dots,3}$ ⁹ che soddisfano

$$\langle \bar{e}^\mu | \bar{e}_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu \quad (2.8)$$

Nel caso della metrica della relatività ristretta, questo ci direbbe direttamente $\{\bar{e}^\mu\}_{\mu=0,\dots,3} = \{e_t, -e_x, -e_y, -e_z\}$ dunque siamo sulla strada giusta per quanto si era già detto sul cambio di segno per le componenti spaziali. Scriviamo ora un generico vettore dello spaziotempo

$$\bar{v} = v^\mu \bar{e}_\mu \implies v^\mu = \langle \bar{v} | e^\mu \rangle \quad (2.9)$$

Prendiamo come vettore $\bar{v} = e^\mu$, allora la decomposizione fornisce

$$\bar{e}^\mu = \langle \bar{e}^\mu | \bar{e}^\nu \rangle \bar{e}_\nu \quad (2.10)$$

dalla definizione di e^μ si ha allora

$$\langle e^\mu | e^\nu \rangle \langle e_\nu | e_\alpha \rangle = \langle e^\mu | e^\nu \rangle g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu \quad (2.11)$$

da cui riconosciamo al membro di sinistra la legge del prodotto tra matrici (ricordiamo che l'indice ripetuto sottintende una somma al variare di tale indice, perciò non stiamo facendo altro che prodotti riga per colonna a riga e colonna fissate), da cui segue

$$\langle e^\mu | e^\nu \rangle = (g^{-1})_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Possiamo fare di più: la base così ottenuta è una legittima base rispetto a cui decomporre i vettori, perciò vale

$$v_\mu \bar{e}^\mu = v^\mu \bar{e}_\mu = \bar{v} \quad (2.13)$$

perciò, prendendo il prodotto scalare con \bar{e}_α ad entrambi i membri, otteniamo

$$\langle \bar{v} | \bar{e}_\alpha \rangle = v_\alpha = g_{\alpha\mu} v^\mu \quad (2.14)$$

Ricordando la definizione $g^{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}^{-1}$ otteniamo dunque

$$v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu \quad (2.15)$$

Nel caso in cui consideriamo trasformazioni di Lorentz, l'unica differenza tra componenti con indice in alto e componenti con indice in basso è un segno nella parte spaziale, mentre quella temporale è invariata nei due casi.

Abbiamo già visto che se cambiamo sistema di riferimento le componenti con l'indice in alto (dette anche *controvarianti*) di un quadrivettore trasformano secondo (2.2). Per quanto riguarda le componenti con indice in basso (dette anche *covarianti*) esse trasformano come i vettori di base, come si può facilmente dedurre da $v_\mu = \langle \bar{v} | \bar{e}_\mu \rangle$. Quindi la comodità di usare gli indici in alto o in basso è la loro potenza nel rivelare a occhio come trasforma quell'oggetto quando cambiamo sistema di riferimento.

⁷Questo tipo di metrica compare ad esempio nello studio di sistemi rotanti. Un esempio notevole è riportato nell'Appendice, in cui è discusso il paradosso di Ehrenfest

⁸Questi sono anche detti *covettori* e la base da loro formata è detta *base duale*.

⁹Per ora le posizioni degli indici sono una convenzione, vedremo alla fine di questa discussione come siano comodi per tener conto del tipo di trasformazione che rispettano

§ 2.2.1. **Invarianti di Lorentz.** — Consideriamo il generico prodotto scalare tra due vettori con la metrica dello spaziotempo. Questo si può scrivere come

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = v^\mu w^\nu \langle e_\mu | e_\nu \rangle = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = v^\mu w_\mu \quad (2.16)$$

Il prodotto scalare è per costruzione indipendente dal sistema scelto per calcolarlo, perciò è un invariante di Lorentz.

Con le leggi di trasformazione ricavate sia per le componenti covarianti sia per quelle controvarianti potete anche mostrarlo esplicitamente lavorando sul membro di destra. Un prodotto scalare tra due quadrivettori, che è indipendente dal sistema di riferimento scelto per calcolarlo, è anche detto *scalare di Lorentz*.

2.3 Riparametrizzazioni dello spaziotempo

Cerchiamo di capire la validità di quanto fatto finora nel caso di una generica riparametrizzazione dello spaziotempo (o, in altri termini, di un cambio di coordinate generico che non preservi necessariamente la forma della metrica, come ad esempio il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari nel piano). In questo caso $x'^\mu \neq \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu$ a meno che (come nel caso delle trasformazioni di Lorentz) il cambio di coordinate sia omogeneo.

Per nostra fortuna, non molto deve cambiare, se non che ora la relazione tra vettori sussiste solo localmente, mentre quella tra vettori di base è sempre valida, come si può vedere con il seguente argomento:

Un vettore di base associato ad una certa coordinata si trova valutando lo spostamento $d\vec{x}$ a seguito di una variazione infinitesima della coordinata x^μ . In altre parole definiamo

$$d\vec{x}|_{x^i = \text{const. } \forall i \neq \mu} = e_\mu dx^\mu \quad (2.17)$$

Specifico che nell'equazione appena scritta il membro di destra NON è inteso secondo la convenzione di Einstein ma rappresenta solo la componente μ . Troviamo dunque una definizione operativa di vettore di base e_μ :

$$e_\mu = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^\mu} \quad (2.18)$$

Riferendoci nuovamente al paragone con le coordinate polari, questi vettori di base dipendono dal punto che ci indicano in che direzione muoverci per effettuare la variazione della coordinata x^μ . Perciò a seguito di un cambio di coordinate scriveremo

$$e'_\mu = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e_\nu \quad (2.19)$$

Ora costruiamo i vettori e'^μ . Per farlo usiamo la loro proprietà caratterizzante, ovvero

$$\langle e'^\mu | e'_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu \quad (2.20)$$

Usando l'equazione 2.19 si ottiene

$$\left\langle e'^\mu \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} e_\alpha \right. \right\rangle = \delta^\mu_\nu \quad (2.21)$$

Da questa equazione, dopo aver moltiplicato per $\partial x'^\nu / \partial x^\beta$ e sommato sull'indice ν , ricaviamo

$$\delta^\alpha_\beta \langle e'^\mu | e_\alpha \rangle = \langle e'^\mu | e_\beta \rangle = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \quad (2.22)$$

perciò, ricordandoci che possiamo usare qualsiasi lettera quando sommiamo su un certo indice, scriviamo:

$$e'^\mu = \langle e'^\mu | e_\nu \rangle e^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} e^\nu \quad (2.23)$$

Per quanto riguarda le componenti di un certo vettore, usiamo nuovamente le definizioni:

$$v'^{\mu} = \langle \vec{v} | e'^{\mu} \rangle = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \langle \vec{v} | e^{\nu} \rangle = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} v^{\nu} \quad (2.24)$$

ed analogamente

$$v'_{\mu} = \langle \vec{v} | e'_{\mu} \rangle = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} v_{\nu} \quad (2.25)$$

Spesso, per il calcolo esplicito delle componenti, è più comodo usare la prima delle definizioni, ovvero quella che si ottiene valutando direttamente il prodotto scalare.

Per ora, a meno di lavorare localmente nella definizione dei vettori (infatti i vettori di base presi dipenderanno dal punto scelto), tutto sembra essere identico a quanto già visto nel caso di trasformazioni di Lorentz. Tuttavia, questo non è del tutto vero, in particolare notiamo che a seguito del cambio di coordinate la metrica non è necessariamente invariata. Infatti, potete facilmente verificare usando la definizione di metrica che nelle nuove coordinate essa ha la forma

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} \quad (2.26)$$

Notiamo che questo non altera quanto detto sul prodotto scalare tra due generici vettori, infatti ora vale $v'_{\mu} = g'_{\mu\nu} v'^{\nu} = \langle \vec{v} | e'_{\nu} \rangle$ come potete verificare esplicitamente.

Le trasformazioni di Lorentz sono caratterizzate dal fatto di lasciare invariate le componenti della metrica, che è data da $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$ in ogni sistema di riferimento inerziale¹⁰ ma questo non ha motivo di essere vero per una generica riparametrizzazione dello spaziotempo.

§ 2.3.1. Un esempio concreto: coordinate di Rindler. — Concludiamo questa sezione con un esempio che ritroveremo nelle sezioni successive quando parleremo dei sistemi accelerati. Introduciamo il cambio di coordinate valido nella regione dello spaziotempo per cui $X^2 > T^2$:

$$T = x \sinh(g\tau) \quad (2.27)$$

$$X = x \cosh(g\tau) \quad (2.28)$$

I nuovi vettori di base sono

$$e_{\tau} = e'_0 = \partial_{\tau} \vec{x} = \partial \tau \left(x \sinh(g\tau), x \cosh(g\tau) \right) = gx \left(\cosh(g\tau), \sinh(g\tau) \right) \quad (2.29)$$

e

$$e_x = e'_1 = \partial_x \vec{x} = \left(\sinh(g\tau), \cosh(g\tau) \right) \quad (2.30)$$

I due vettori di base sono ortogonali, nel senso che $\langle e_x | e_{\tau} \rangle = 0$. Inoltre, calcolando il prodotto scalare dei vettori di base con loro stessi, si vede facilmente che ds^2 assume la forma

$$ds^2 = (gx)^2 d\tau^2 - dx^2$$

Visto che la metrica è diagonale anche nelle nuove coordinate e i due vettori di base sono ortogonali, è chiaro che i nuovi vettori della base duale dovranno essere multipli dei vettori di base iniziali, con la condizione che $\langle e'^{\mu} | e'_{\nu} \rangle = \delta^{\mu}_{\nu}$. Si trova dunque

$$e^{\tau} = e'^0 = e_0 / (gx)^2 = \frac{1}{gx} \left(\cosh(g\tau), \sinh(g\tau) \right) \quad (2.31)$$

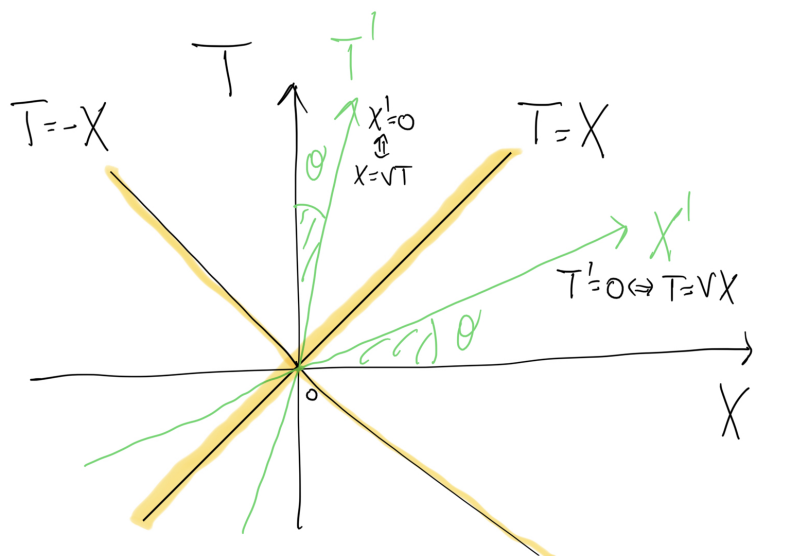
$$e^x = e'^1 = -e_x \quad (2.32)$$

¹⁰Le proprietà delle trasformazioni di Lorentz possono infatti essere ricavate definendo queste trasformazioni in senso astratto come quei cambi di coordinate che preservano la forma della metrica secondo (2.26).

2.4 Visualizzazione grafica: Diagrammi di Minkowski

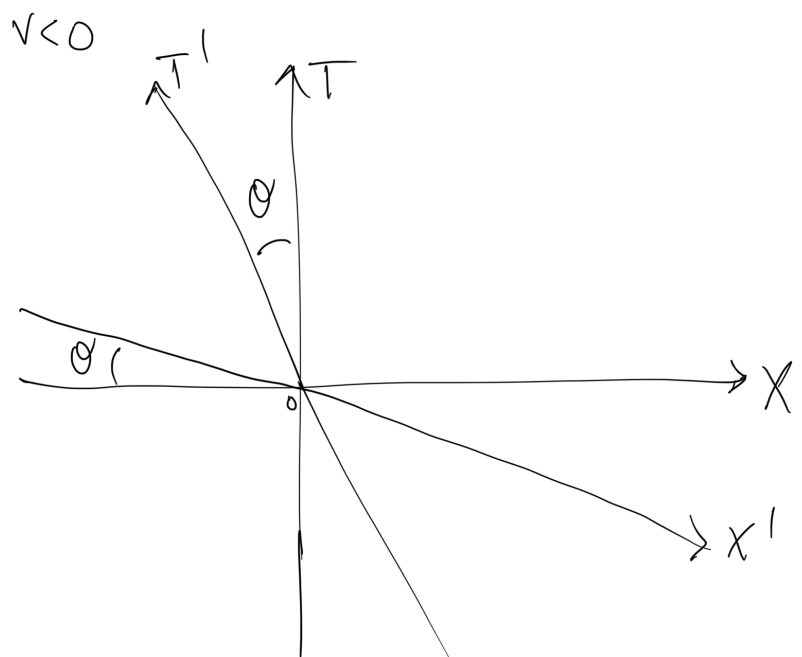
Una domanda legittima a cui tenteremo di dare una risposta soddisfacente in questa sezione è come convertire la nostra intuizione per la scomposizione di vettori nello spazio euclideo in quello di quadrivettori nello spaziotempo. Il modo in cui lo faremo sarà utilizzando i *diagrammi di Minkowski*: questi ci daranno anche un'idea di quello che accade in moltissimi scenari fisici senza dover svolgere alcun calcolo.

Costruiamo innanzitutto un diagramma T, X . Notiamo innanzitutto che in un tale diagramma la traiettoria di un fotone tra due punti è data da un segmento parallelo ad una delle bisettrici dei quadranti. Costruiamo gli assi associati al moto di un secondo osservatore avente velocità pari a $V > 0$ rispetto al primo. Individuiamo l'asse T' come il luogo dei punti in cui $X' = 0 \implies X = VT$ dalle trasformazioni di Lorentz. E analogamente per l'asse X' imponiamo $T' = 0 \implies T = VX$. Da questo si vede che entrambi gli assi sono inclinati dello stesso angolo θ come in figura¹¹.

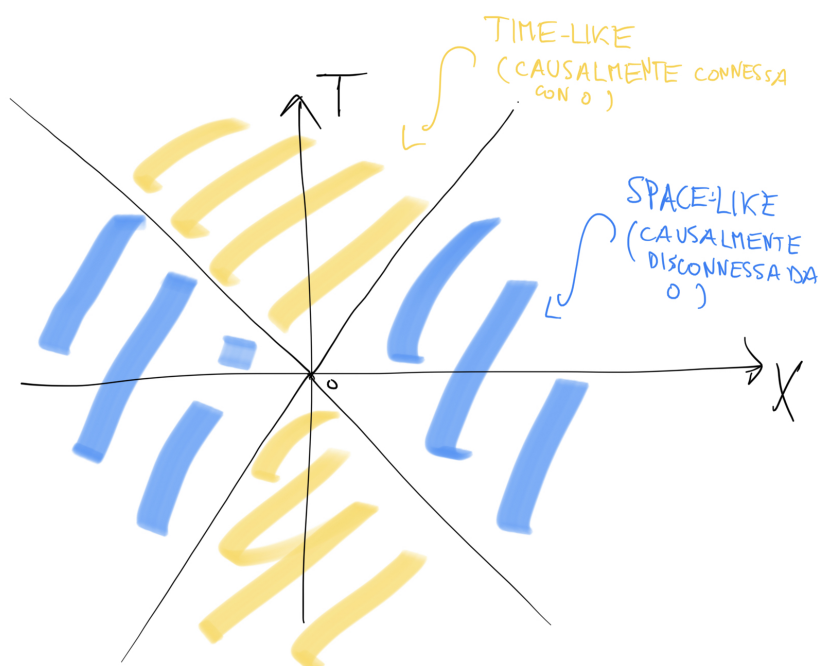


Il caso $V < 0$ è analogo, solo che ora l'osservatore in moto si muoverà per tempi positivi nella direzione delle X negative. Per considerare il verso dell'asse di simultaneità, facciamo la seguente considerazione: se invertissimo il segno di entrambi gli assi spaziali, il sistema sarebbe equivalente al moto in direzione $x > 0$ di un sistema con velocità positiva, perciò l'unica possibilità è che gli assi siano disposti come in figura:

¹¹Sempre in ottica di avere quanta più intuizione e familiarità con l'argomento, vi invito a ricavare lo stesso risultato in modo geometrico, come sviluppato in dettaglio nell'Esercizio 2.



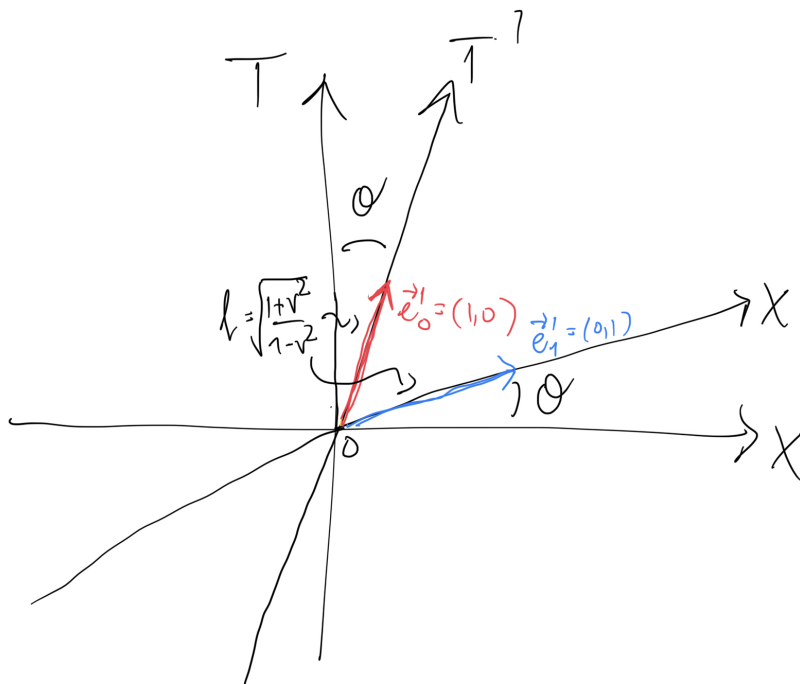
Costruiamo ora un diagramma di Minkowski 'completo', disegnando le traiettorie di fasci luminosi che partono dall'origine e gli assi coordinati per due osservatori in moto relativo a velocità V . Le bisettrici dei quadranti dividono il diagramma (dimentichiamoci per un attimo degli assi T' e X') in quattro regioni distinte, simmetriche a due a due, una per inversione della coordinata temporale e l'altra per inversione della coordinata spaziale.



La regione colorata in giallo è detta regione temporale (*timelike* in inglese): essa è la regione connessa causalmente con l'origine. Questo vuol dire che un evento situato all'interno di tale cono in $T > 0$ può ricevere un messaggio da un osservatore fermo nell'origine inviato a qualche tempo $t < T$. Tale evento è nel futuro di A, in quanto A lo può influenzare. Viceversa, considerando un

evento all'interno del cono per $T < 0$, esso può comunicare con A inviandogli un segnale luminoso, che raggiungerà A ad un tempo $t > T$. In tale caso B è nel passato di A. Un altro modo per caratterizzare eventi in questa regione è affermare che esiste un sistema di riferimento inerziale in cui i due eventi hanno luogo nella stessa posizione ma ad istanti diversi. Questo è impossibile per eventi al di fuori di tale regione per l'impossibilità da parte di un corpo di eccedere la velocità della luce. Per tale motivo, la seconda regione, colorata in blu, è detta regione spaziale (*spacelike* in inglese). In tale regione, è possibile trovare un sistema di riferimento inerziale in cui i due eventi sono simultanei. In funzione del segno di ds^2 , le regioni timelike sono caratterizzate da $ds^2 > 0$, mentre quelle spacelike $ds^2 < 0$.

§ 2.4.1. Sistemi di riferimento diversi, unità diverse. — Cerchiamo ora di capire come tradurre l'intuizione che abbiamo per scomporre vettori nel piano cartesiano quando si tratta di scomporre un vettore tra due sistemi di riferimento in un diagramma di Minkowski. Per linearità, basta vedere come trasformano i vettori di base scritti in coordinate. Facciamo caso al seguente fatto: nonostante gli assi T', X' siano disegnati sullo stesso piano degli assi T, X , le loro unità di lunghezza non corrispondono alle unità di lunghezza nel piano: è come se la lettura degli assi sia diversa di un certo fattore di scala, che ora determineremo. Considero dapprima il vettore di base associato all'asse T' , che chiamo e'_0 e che vedete rappresentato in figura.



Per definizione, in coordinate (T', X') si ha

$$e'_0 = (1, 0)$$

Tuttavia in funzione dei vettori di base e_0, e_1 si ha, usando (2.19)

$$e'^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial t'} = (\partial_{t'} t, \partial_{t'} x) = (\gamma, \gamma v) \quad (2.33)$$

Perciò abbiamo che sul foglio vale la seguente uguaglianza.

$$1 \cdot \text{unit}(T') = 1 \cdot \text{unit}(T) \sqrt{\frac{1+v^2}{1-v^2}}$$

Perciò se vogliamo convertire il vettore letto in unità T' in un vettore letto in unità T dobbiamo applicare tale fattore di conversione e usare le usuali regole di scomposizione dei vettori.

§ 2.4.2. **Da angoli euclidei ad angoli iperbolici.** — Dalla geometria degli assi vediamo che si ha

$$\tan(\theta) = v$$

da cui otteniamo

$$\sin(\theta) = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$$

Notiamo ora un fatto interessante: se scomponiamo un generico vettore scritto nelle coordinate primarie in modo usuale tenendo conto del fattore di conversione otteniamo (facciamolo ora per il vettore e'_0 , potete verificare facilmente che tutte le considerazioni fatte valgono in modo del tutto analogo per il vettore e'_1):

$$(e'_0) = \cos(\theta)\sqrt{\frac{1+v^2}{1-v^2}}e_T + \sin(\theta)\sqrt{\frac{1+v^2}{1-v^2}}e_X = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}e_T + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}e_X$$

queste sono proprio le formule relative al coseno iperbolico e seno iperbolico in funzione della tangente iperbolica. Infatti, possiamo identificare $\tan\theta = v = \tanh(U)$ e dunque possiamo scomporre il vettore come se fosse un vettore ordinario, sostituendo alle variabili naturali di seno e coseno le loro controparti iperboliche, in quanto vale

$$\cosh(U) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\tanh(U))^2}}$$

e

$$\sinh(U) = \frac{\tanh(U)}{\sqrt{1 - (\tanh(U))^2}}$$

Questo è molto utile a livello pratico per scomporre vettori nel piano di Minkowski. D'ora in poi, per rendere più forte l'analogia con angoli iperbolici, indicherò con θ l'angolo iperbolico corrispondente all'angolo cartaceo sul nostro foglio (e quindi nel caso precedente di e'_0 avrei usato la lettera U). Vediamo che un generico vettore¹² si può scrivere in coordinate iperboliche nel modo seguente, a seconda che sia spacelike o timelike: Nel primo caso

$$E^\mu_{\text{spacelike}} = \sqrt{X^2 - T^2}(\sinh(\theta), \cosh(\theta)) \quad (2.34)$$

che rispetta le leggi intuitive della scomposizione vettoriale rispetto all'angolo definito con l'asse X come mostrato in figura, a patto di sostituire $|E| \rightarrow \sqrt{-E^\mu E_\mu}$ e le variabili goniometriche con le controparti iperboliche. Il caso timelike non è molto diverso, se non per il fatto che l'angolo in questione deve essere considerato rispetto all'asse verticale T . Si ha dunque

$$E^\mu_{\text{timelike}} = \sqrt{T^2 - X^2}(\cosh(\theta), \sinh(\theta)) \quad (2.35)$$

Questa scomposizione verifica la proprietà transitiva, cosicché un cambio di sistema di riferimento può essere visto in tali coordinate come una 'rotazione' di angolo iperbolico, completando la corrispondenza tra il modulo e l'intervallo invariante (che d'ora in poi indicherò come $s \equiv \sqrt{|E^\mu E_\mu|}$) e tra funzioni goniometriche e funzioni iperboliche.

Mostriamo quanto appena affermato nel caso di un evento timelike. Per vedere lo stesso evento in

¹²Spesso, visto che in relatività si parla di *eventi* nello spaziotempo, indicherò un generico evento dello spaziotempo con la lettera E .

un sistema di riferimento che si muove rispetto al primo di velocità V , basta applicare la stessa analisi fatta finora con la sostituzione $U \rightarrow -U$. Un modo equivalente e più visivo per chi non fosse soddisfatto di tale giustificazione segue dal considerare il diagramma di Minkowski in cui si scambiano i ruoli di T, X e T', X' . In tale modo si scomporrà tale vettore in modo usuale con le regole appena citate, solo che in questo caso gli assi di T, X saranno come quelli della figura mostrata precedentemente per $V < 0$. Abbiamo dunque

$$E_{X'} = E_X \cosh(U) - E_T \sinh(U) \quad (2.36)$$

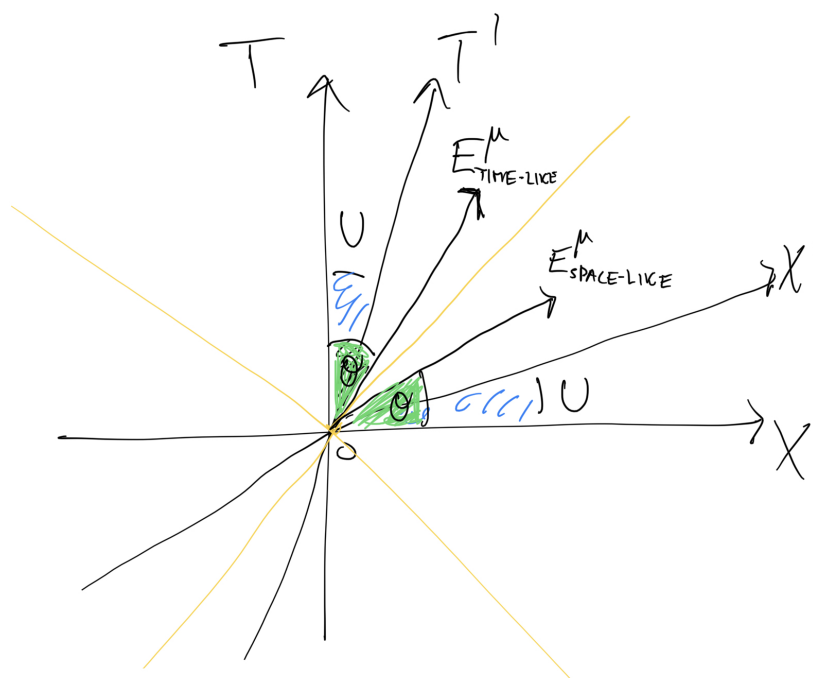
$$E_{T'} = -E_X \sinh(U) + E_T \cosh(U) \quad (2.37)$$

sostituendo le espressioni di E_X ed E_T ed usando le formule di addizione delle funzioni iperboliche si ha

$$E'^{\mu}_{timelike} = s(\cosh(\theta - U), \sinh(\theta - U)) \quad (2.38)$$

Potete verificare agevolmente che l'analogia relazione per un evento spacelike è

$$E'^{\mu}_{spacelike} = s(\sinh(\theta - U), \cosh(\theta - U)) \quad (2.39)$$



A titolo di esempio possiamo notare che tale legge di composizione permette di ricavare in modo rapido la composizione di velocità. Ricordiamo che se un oggetto si muove con velocità V_2 rispetto a un sistema di riferimento S' in moto a velocità V_1 rispetto a S , allora la velocità dell'oggetto rispetto a S è data da

$$V = dX/dT = \frac{dX' + V_1 dT'}{dT' + V_1 dX'} = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2} \quad (2.40)$$

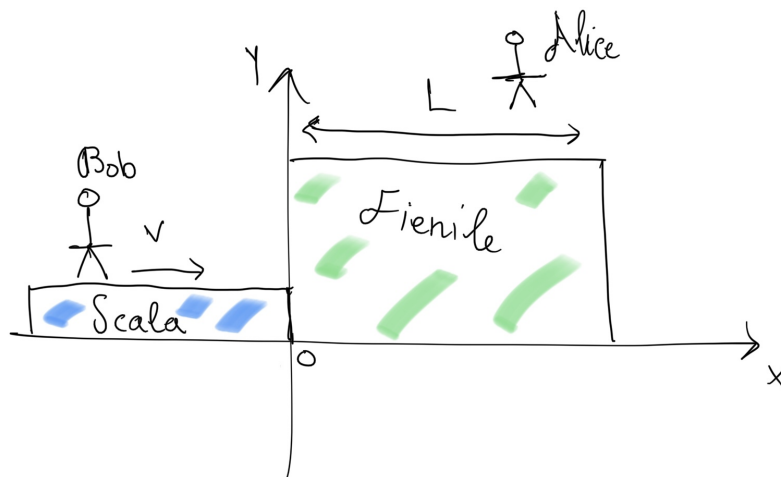
Graficamente, consideriamo due sistemi di riferimento, il primo avente l'asse T' ad un angolo iperbolico U_1 rispetto all'asse T ed un secondo avente l'asse T'' ad un angolo iperbolico U_2 rispetto a T' possiamo ricavare l'angolo iperbolico di T'' rispetto a T . Dalla relazione $\tanh(U) = V$ infatti abbiamo

$$V = \tanh(U_1 + U_2) = \frac{\tanh(U_1) + \tanh(U_2)}{1 + \tanh(U_1)\tanh(U_2)} = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2} \quad (2.41)$$

Dunque la formula apparentemente strana per l'addizione delle velocità viene dalla semplice addizione di angoli iperbolici se lo si interpreta con i diagrammi di Minkowski.

§ 2.4.3. **Esempio grafico: il Paradosso del fienile.** — Forniamo un primo esempio concreto che mostri l'immediatezza dell'utilizzo dei diagrammi di Minkowski per la risoluzione di apparenti paradossi che spesso sorgono dall'applicare alcuni risultati della relatività ristretta senza tenere in conto altri effetti, arrivando così a conclusioni paradossali.

Consideriamo lo scenario mostrato in figura:



Bob è seduto su una scala di lunghezza a riposo L che si muove a velocità v verso un fienile, anch'esso lungo L nel suo sistema di quiete ed avente due porte, ciascuna posta ad una delle due estremità del fienile. Alice, a cui piace fare scherzi, ha in mente di far spaventare Bob per un istante, chiudendo le porte per un intervallo di tempo piccolissimo e poi riaprendole, facendolo passare indisturbato.

Il suo piano è chiudere con un meccanismo entrambe le porte ad un tempo $T = L/v$, riaprendole immediatamente. Visto che la scala è contratta, l'estremità di sinistra è ben oltre l'estremità sinistra del fienile e non sarà influenzata in alcun modo dalla chiusura delle porte. Bob, tuttavia, pensa che la chiusura delle porte distruggerà la sua scala, perché dal suo punto di vista è il fienile ad essere contratto, mentre la scala ha la sua lunghezza a riposo, quindi quando verranno chiuse le porte l'estremità di sinistra della scala verrà tranciata dalla porta chiusa da Alice.

Come risolvere questa apparente contraddizione?

Il fatto sta nel considerare la simultaneità degli eventi nei due sistemi di riferimento. Potremmo procedere a fare il calcolo (Esercizio 3) tuttavia è molto più comodo in questo caso disegnare un diagramma di Minkowski per avere idea del perché non sussiste alcun paradosso.

Nel sistema istantaneamente a riposo, l'equazione 3.3 assume la forma

$$a^\mu = (0, \bar{a}_0) \quad (3.5)$$

dove \bar{a}_0 indica per l'appunto l'accelerazione nel sistema a riposo. Notiamo inoltre che $a_0 = \sqrt{-a^\mu a_\mu}$ perciò è un invariante relativistico. D'ora in poi lavoreremo sempre in casi in cui l'accelerazione è diretta ad ogni tempo lungo un unico asse spaziale, che per convenzione sarà sempre l'asse \hat{x} . Mettiamo in relazione l'accelerazione in un sistema inerziale generico con quella nel sistema a riposo.

Usando le trasformazioni di Lorentz per il quadrivettore a^μ si ottiene trasformando dal sistema a riposo la componente a^1

$$a^1 = \gamma a_{0x} \quad (3.6)$$

Scriviamo ora l'equazione del moto, ossia per definizione

$$\frac{du^1}{d\tau} = a^1 \quad (3.7)$$

che si può scrivere anche nella forma

$$\gamma \frac{d}{dt}(\gamma v) = a^1 = \gamma a_0 \quad (3.8)$$

perciò si ha:

$$\frac{d}{dt}(\gamma v) = a_0 \quad (3.9)$$

Questo è il punto di partenza per studiare il moto uniformemente accelerato. Notiamo anche che se moltiplichiamo entrambi i membri per la massa a riposo otteniamo

$$\frac{dp}{dt} = ma_0 \quad (3.10)$$

quindi, nel caso in cui l'accelerazione sia parallela alla velocità del corpo in moto, anche in relatività ristretta posso pensare al moto uniformemente accelerato come un moto sostenuto da una forza costante $f = ma_0$.

3.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato: soluzione analitica

Risolviamo formalmente l'equazione del moto appena ricavata. D'ora in poi indicherò l'accelerazione nel sistema proprio¹³ $a_0 \equiv g$. Imponendo $v(0) = 0$ Risolviamo 3.9:

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = gt \quad (3.11)$$

da cui

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt)^2}} \quad (3.12)$$

Integriamo nuovamente questa equazione ed otteniamo

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{g} + \frac{1}{g} \sqrt{1+(gt)^2} \quad (3.13)$$

Questo risolve il problema interamente. Notiamo che la traiettoria percorsa è un'iperbole di equazione

$$(x - x_0 + 1/g)^2 - t^2 = 1/g^2 \quad (3.14)$$

¹³Non ci sarà mai ambiguità con la notazione utilizzata per indicare la metrica, tranquilli!

Essa ha il vertice in $(t, x) = (0, x_0 - 1/g)$. L'asintoto di tale iperbole è una linea di universo parallela ai coni di luce, avente equazione $T(X) = X - x_0 + 1/g$. Il problema è interamente risolto a livello analitico. Tuttavia, per quanto segue, è interessante valutare le stesse quantità in funzione del tempo misurato dall'osservatore in moto: ponendoci nel sistema comovente con l'osservatore, otteniamo dall'invarianza di ds^2 :

$$d\tau^2 = dt^2(1 - v^2) = \frac{dt^2}{1 + (gt)^2} \quad (3.15)$$

risolvendo per $\tau(t)$ si ha

$$\tau(t) = \frac{1}{g} \sinh^{-1}(gt) \quad (3.16)$$

da cui otteniamo infine

$$t(\tau) = \frac{1}{g} \sinh(g\tau) \quad (3.17)$$

Semplici manipolazioni portano infine a scrivere

$$x(\tau) = x_0 - \frac{1}{g} + \frac{1}{g} \cosh(g\tau) \quad (3.18)$$

$$v(\tau) = \tanh(g\tau) \quad (3.19)$$

Notiamo che nel limite di tempi piccoli $g\tau \ll 1$, $x(t) \simeq x_0 + \frac{1}{2}gt^2$ e $v \simeq gt$ come ci aspettavamo.

Infine calcoliamo anche γ , che in questo caso assume la semplice forma

$$\gamma = \cosh(g\tau) \quad (3.20)$$

Perciò possiamo scrivere anche

$$x(\tau) = x_0 + \frac{\gamma - 1}{g}$$

Siete invitati a ricavare le stesse formule utilizzando l'addizione delle velocità nell'Esercizio 4.

3.3 Interpretazione grafica e coordinate di Rindler

Interpretiamo visivamente ciò che abbiamo appena ricavato risolvendo l'equazione differenziale del moto relativistico uniformemente accelerato. Per farlo, ricorriamo ai diagrammi di Minkowski. Questo ci permetterà di elucidare con maggiore chiarezza il significato fisico di certe grandezze che definiremo a breve. Innanzitutto, per comodità, lavoriamo in un sistema di assi in cui l'asintoto dell'iperbole coincida con la retta $T = X$. Questo è possibile scegliendo l'origine degli assi in modo tale che l'astronave si trovi in $X = 1/g$ in $T = 0$. Questa è la scelta naturale per far sì che la legge oraria non presenti termini costanti additivi, come si vede direttamente dall'equazione 3.18. L'equazione per tale iperbole è dunque

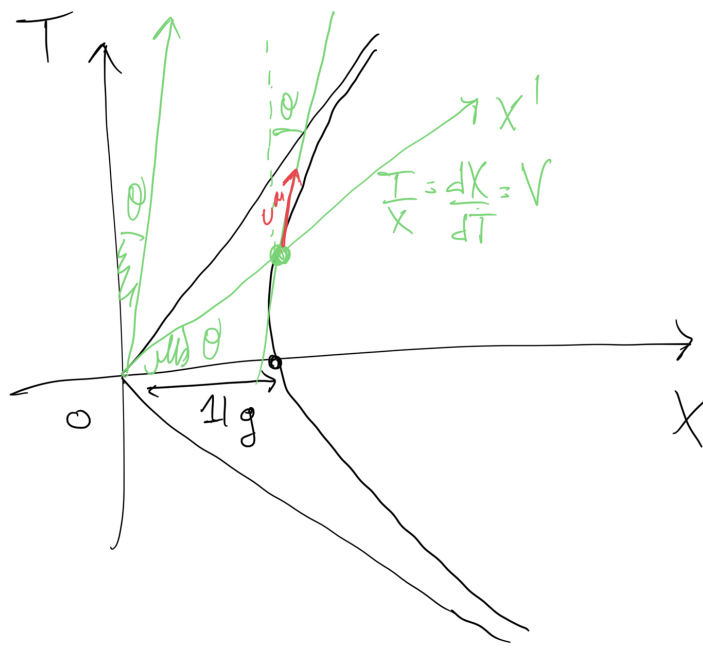
$$X^2 - T^2 = 1/g^2 \quad (3.21)$$

Differenziando ambo i membri si ottiene dunque la seguente equazione

$$\frac{T}{X} = \frac{dX}{dT} \equiv V \quad (3.22)$$

Cosa vuol dire questo visivamente? Il significato è evidente se si guarda il diagramma di Minkowski: infatti, $T/X = V$ è per definizione la retta di simultaneità per un osservatore avente velocità V , ovvero l'osservatore comovente con l'astronave. Questa retta definisce dunque la simultaneità locale di un osservatore comovente con l'astronave. In altre parole, se l'osservatore in moto decide di misurare delle distanze, lo farà usando tale retta. Inoltre, localmente l'astronave

procede a velocità V perciò la tangente alla curva dell'iperbole punta nella direzione della linea di universo dell'astronave. Questo ci permette di disegnare il diagramma di Minkowski mostrato in figura.



Le due direzioni appena trovate si ottengono a partire dal sistema a Terra 'ruotando' gli assi in modo da far coincidere il sistema localmente inerziale con quello in cui l'astronave ha velocità V .

Usando le trasformazioni di Lorentz dal sistema (T, X) al sistema comovente con l'astronave, ricaviamo

$$x_{/A} = \gamma(X - VT) = \gamma X(1 - V^2) = X/\gamma \quad (3.23)$$

Per quanto ricavato nell'equazione 3.22, si ha

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (T/X)^2}} = \frac{X}{\sqrt{X^2 - T^2}} \quad (3.24)$$

perciò ricaviamo

$$x_{/A} = \sqrt{X^2 - T^2} \equiv x \quad (3.25)$$

Notiamo che nel caso dell'astronave, si misura $x' = 1/g = \text{costante}$ dunque la misura della posizione con x' coincide con quella fatta dall'astronave A a patto di traslare ogni misura di $x'_A = 1/g$. Quindi abbiamo trovato un significato fisico alla quantità x , perciò è naturale invertire (3.23) e scrivere

$$X = \sqrt{X^2 - T^2} \cosh(g\tau) \equiv x \cosh(g\tau) \quad (3.26)$$

Per misurare il tempo trascorso sull'astronave, invece, non possiamo utilizzare le trasformazioni di Lorentz in quanto il sistema comovente varia ad ogni istante e la linea di simultaneità è sempre costruita in modo tale che gli eventi misurati dall'osservatore comoventi abbiano coordinate $t' = 0$. Si è visto però come il tempo misurato a bordo dell'astronave sia dato da

$$d\tau = dT\sqrt{1 - V^2} \quad (3.27)$$

Perciò il tempo trascorso a Terra e quello trascorso sull'astronave sono legati da $T = \frac{1}{g} \sinh(g\tau)$. Cosa posso dire per un evento generico, di cui ho misurato la distanza da A ad un certo tempo

τ ? Sicuramente in questo caso l'evento in questione (B, in figura) ha coordinate $B^\mu = (VX, X)$, perciò si ottiene

$$T = VX = \tanh(g\tau) x \cosh(g\tau) = x \sinh(g\tau) = \sqrt{X^2 - T^2} \sinh(g\tau) \quad (3.28)$$

Perciò se voglio capire a quale coordinata temporale locale per l'astronave viene assegnato un evento che avviene al tempo T , basta trovare l'intersezione con l'iperbole della retta che passa per tale evento e l'origine, questo determina univocamente un certo tempo τ che l'astronave assegna all'evento B. Questo ci permette di giustificare la riparametrizzazione della regione spacelike dello spaziotempo in funzione delle coordinate spaziali e temporali dell'astronave (τ, x) . Questa parametrizzazione definisce le cosiddette coordinate di Rindler. Riassumendo, queste sono date da:

$$T = x \sinh(g\tau) \quad (3.29)$$

$$X = x \cosh(g\tau) \quad (3.30)$$

$$x = \sqrt{X^2 - T^2} \quad (3.31)$$

$$\frac{T}{X} = \tanh(g\tau) \equiv V(\tau) \quad (3.32)$$

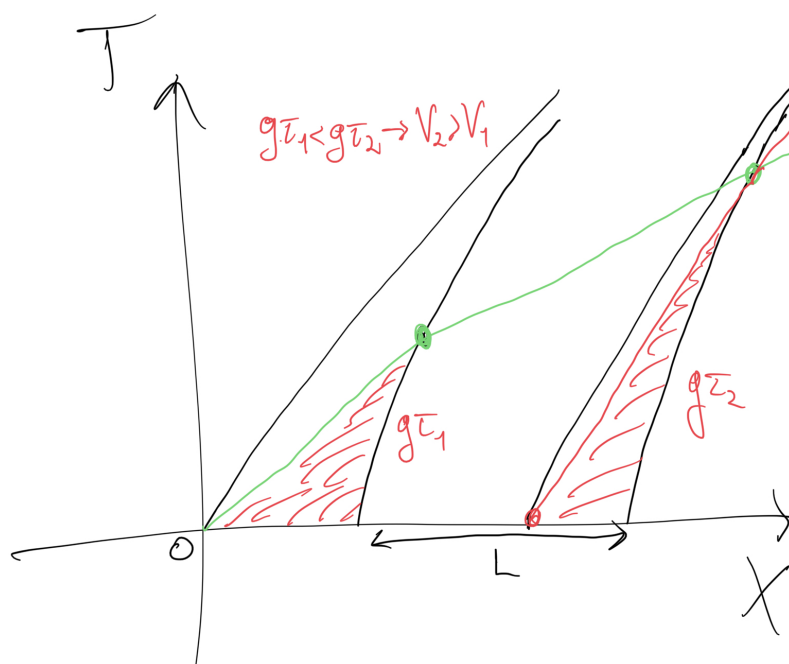
3.4 Il paradosso di Bell e la rigidità di Born

Consideriamo due astronavi che a $t = 0$ sono separate da una distanza L e iniziano ad accelerare simultaneamente con accelerazione propria pari a g . Esse sono collegate da un sottile filo che sopporta una tensione molto piccola. La domanda che ci poniamo è: il filo si rompe nel moto successivo delle due astronavi?

L'idea iniziale sarebbe di dire che il filo non si rompe, in quanto le astronavi mantengono la stessa distanza. Tuttavia, se crediamo alla contrazione delle lunghezze come effetto fisico, quando la corda acquista una certa velocità essa dovrebbe andare incontro a una contrazione delle lunghezze misurata da un osservatore a Terra. Ma le astronavi sono sempre distanti L , perciò questo non avviene: la corda non può rimanere rigida, quindi si deve spezzare.

Resta da capire cosa succede dal punto di vista di un osservatore a bordo, ad esempio, dell'astronave in coda.

A seguito di quanto fatto fino ad ora, è molto interessante studiare graficamente tale situazione e poi calcolare, ad esempio, $x(\tau_1 \equiv \tau)$ rispetto all'osservatore in coda. Per comodità, facciamo in modo che l'asintoto dell'osservatore in coda sia $T = X$, così che il diagramma di Minkowski appaia come quello in figura.



Si nota dalla figura come a parità di tempi nel sistema del laboratorio, questo corrisponda ad una differenza temporale per l'osservatore in coda. Si vede inoltre che al crescere di τ , la linea di simultaneità di A interseca la traiettoria di B in un punto che, misurando τ_2 dal suo asintoto, ha velocità maggiore, tanto più quanto aumenta τ . Quindi è per colpa della simultaneità che l'osservatore in coda vede la corda rompersi, ossia nel suo presente l'altra astronave sta andando molto più veloce!

Passiamo ora ad essere quantitativi e calcoliamo $x(\tau)$. Per fare ciò uguagliamo le leggi orarie parametrizzate con la metrica di Rindler:

$$(X - L)^2 - T^2 = 1/g^2 \quad (3.33)$$

scrivendo $X = x \cosh(g\tau)$, $T = x \sinh(g\tau)$ si ottiene dall'equazione appena scritta

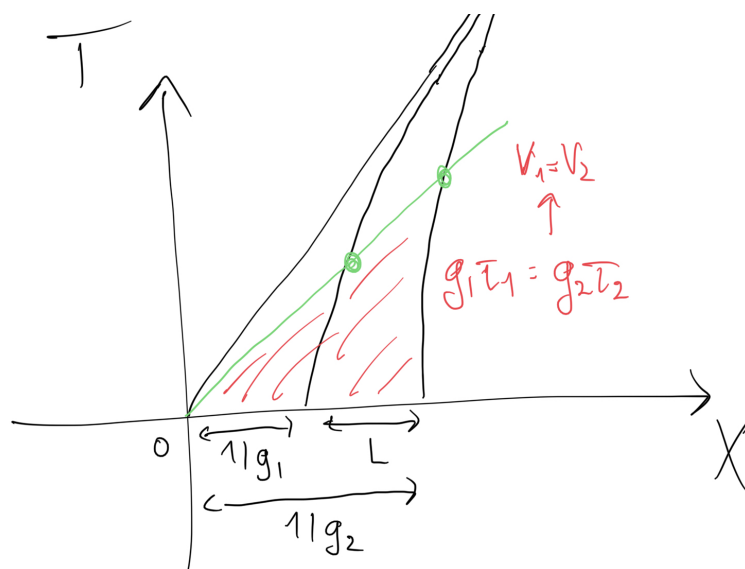
$$x^2 - 2xL \cosh(g\tau) + L^2 - 1/g^2 = 0 \quad (3.34)$$

da cui, dopo aver scelto la soluzione che si riduce a $x(\tau = 0) = L + 1/g$, troviamo

$$x = L \cosh(g\tau) + \sqrt{L^2 \sinh^2(g\tau) + 1/g^2} \quad (3.35)$$

da cui si vede che per $g\tau \gg 1$, $x \sim Le^{g\tau} \gg L$. Presi due punti della corda distanti ΔX , allora $\Delta x(\tau) = \Delta X e^{g\tau}$ perciò la corda si rompe. Notiamo che la velocità relativa tra le astronavi, misurata dall'osservatore in coda in funzione di τ , è nulla solo al momento della loro partenza. L'osservatore in coda ha buoni motivi per pensare che la corda si debba rompere, sembra che il suo amico in testa stia cercando di allontanarsi da lui!

Studiamo ora sotto quale condizione tra le accelerazioni si riesce a fare in modo che la corda non si spezzi, ovvero $x(\tau) = \text{costante}$. Anche in questo caso, se osserviamo attentamente il diagramma di Minkowski mostrato, esso ci rivela già quale deve essere la soluzione senza dover fare alcun calcolo: infatti ci convinciamo facilmente che l'unico modo in cui la distanza non aumenta indefinitamente è fare in modo che le linee di simultaneità delle due astronavi coincidano, ovvero la velocità relativa sia nulla quando A misura la velocità di B.



Come facciamo a fare ciò? Semplice, imponiamo che l'asintoto delle due astronavi coincida, questo vuol dire che l'area spazzata dall'iperbole nell'istante in cui A effettua la misura deve essere uguale a quella spazzata da B ¹⁴questo si traduce in

$$g_1 \tau_1 = g_2 \tau_2 \quad (3.36)$$

La condizione tra le accelerazioni è dunque

$$1/g_1 + L = 1/g_2 \quad (3.37)$$

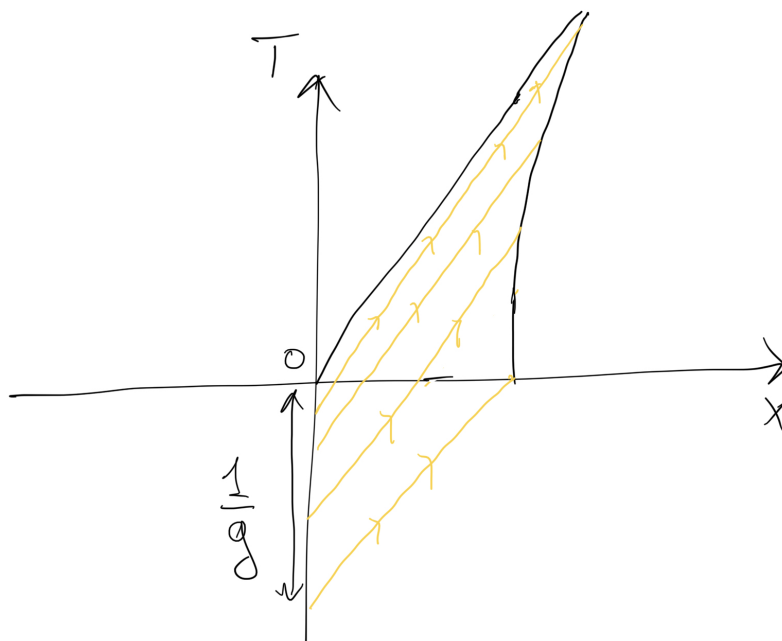
Tale equazione definisce un sistema rigido in relatività ristretta, ovvero uno tale per cui due punti che partono a distanza L restano a tale distanza durante il moto.

Facciamo un'ultima considerazione: l'equazione 3.36 ci fornisce una condizione sullo scorrere del tempo proprio dei due osservatori. In particolare, dalla condizione di rigidità notiamo che $g_2 < g_1$ perciò $\tau_2 > \tau_1$: l'osservatore in testa invecchia di più dell'osservatore in coda rispetto all'osservatore in coda.

3.5 Orizzonte degli eventi per il moto uniformemente accelerato

Studiamo l'effetto Doppler per il moto rettilineo accelerato, usando come d'abitudine l'approccio grafico attraverso i diagrammi di Minkowski per intuire cosa sta succedendo senza dover svolgere alcun calcolo. Osserviamo scenario rappresentato in figura. Bob manda dei segnali luminosi ad Alice partendo da $t = -1/g$ fino a $t = 0$. Si vede infatti bene dal diagramma che solo in tale regione i fotoni inviati da Bob raggiungeranno Alice.

¹⁴se volete, questo si può interpretare anche dal fatto che volendo velocità relativa nulla ed essendo l'asintoto la bisettrice del primo e terzo quadrante per entrambe le astronavi, si ha $\tanh(g_1 \tau_1) = \tanh(g_2 \tau_2)$



Calcoliamo ora la frequenza osservata. Per farlo, lavoriamo nella parametrizzazione di Rindler e calcoliamo $dT/d\tau = \omega'/\omega$. Il fotone emesso da Bob al tempo t ha legge oraria nel piano di Minkowski per $T > t$ data da

$$E^\mu(\gamma) = (T, T - t) \quad (3.38)$$

Quando il fotone raggiunge Alice, $x_\gamma = 1/g$, perciò, scrivendo $T = \sinh(g\tau)/g$ all'arrivo del fotone e risolvendo

$$(T - t)^2 - T^2 = 1/g^2$$

otteniamo come soluzione accettabile

$$1/g = -te^{g\tau} \quad (3.39)$$

Questo mostra analiticamente due cose: la prima, che avevamo intuito con molto meno sforzo in forma grafica, è che l'informazione può raggiungere Alice solo per $t < 0$. La seconda, che ha motivato questo calcolo, è che ci permette di ricavare $dt/d\tau$. Dall'equazione 3.39 ricaviamo dunque

$$\omega' = \omega e^{-g\tau} \quad (3.40)$$

Al crescere di τ , Alice vede Bob a frequenze che passano dal visibile all'infrarosso, risultando gradualmente inaccessibili alla sua vista, finché il suo amico non sparisce lentamente nel buio che Alice lascia dietro di sé avvicinandosi alla velocità della luce.

SEZ. 4 — DI NUOVO MAXWELL: L'ELETTRODINAMICA IN FORMALISMO COVARIANTE —

L'intera teoria della relatività è stata elaborata per accomodare la teoria elettromagnetica sviluppata a fine Ottocento. Infatti, siamo partiti proprio dall'invarianza di \square per ricavare i postulati della relatività ristretta. Sarebbe incompleto lasciare irrisolti i dubbi iniziali su come effettivamente trasformano i campi da un sistema di riferimento ad un altro. In particolare l'obiettivo sarà capire qual è il campo di una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme.

L'intero elettromagnetismo classico è contenuto nelle seguenti quattro equazioni (le equazioni di Maxwell) unite all'equazione che regola l'interazione del campo elettromagnetico con le cariche, che è fornito dalla forza di Lorentz:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}\end{aligned}\quad (4.1)$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.2)$$

Le equazioni, scritte come in 4.1, non sono manifestamente covarianti (esse dipendono da derivate spaziali e temporali in un dato sistema di riferimento), quindi cerchiamo di formularle in tale modo. Questa fu la motivazione principale che motivò Einstein a pubblicare il suo primo articolo sulla Relatività ristretta nel 1905.

Partiamo mostrando che possiamo costruire un quadrivettore a partire dalla densità di carica e la densità di corrente. Per farlo usiamo l'invarianza della carica in sistemi di riferimento diversi. scriviamo $dq = \rho d^3x = \rho' d^3x'$. Poiché $dt d^3x^{15}$ è invariante, segue che

$$\rho' = \rho dt'/dt = \gamma(\rho - v\rho dx/dt) = \gamma(\rho - V J_x/c^2) \quad (4.3)$$

Analogamente, per la densità di corrente dovuta al movimento di cariche, che supponiamo essere dirette lungo l'asse \hat{x} $J_x = \rho v$.

$$J'_x = \rho' v'_x = \rho \frac{dt'}{dt} \frac{dx'}{dt'} = \rho \frac{dx'}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dx} J_x = \gamma(J_x - V\rho) \quad (4.4)$$

Questo mostra che:

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}) \quad (4.5)$$

è un quadrivettore. Il fattore dimensionale davanti alla componente 0 assicura che le componenti del quadri vettore abbiano le stesse unità di misura. Passiamo ora a scrivere le equazioni di Maxwell in funzione del potenziale scalare ϕ e del potenziale vettore \vec{A} . Dalla seconda equazione di Maxwell, essendo nulla la divergenza di \vec{B} , sappiamo che esiste un potenziale \vec{A} tale che:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (4.6)$$

Dalla terza equazione di Maxwell, vediamo che il rotore di $\vec{E} + \partial_t \vec{A}$ è nullo, perciò deve esistere un potenziale scalare ϕ tale che:

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi \quad (4.7)$$

Sostituendo tali relazioni nella prima e nella quarta equazione, dopo aver svolto delle manipolazioni algebriche e qualche identità vettoriale, si ottengono due equazioni: Dalla prima si ha

$$\square \phi - \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi) = \frac{c\rho}{\epsilon_0} \quad (4.8)$$

mentre dalla seconda abbiamo:

$$\square \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi) = \mu_0 \vec{J} = \frac{\vec{J}}{\epsilon_0 c^2} \quad (4.9)$$

¹⁵L'elemento di volume trasforma sotto cambi di coordinate con il determinante della matrice del cambio di coordinate, e nel caso delle trasformazioni di Lorentz è facile verificare che tale determinante è 1.

Prima di proseguire notiamo che i potenziali sono definiti a meno di una Gauge, ovvero una funzione ausiliaria che sommata al potenziale di partenza lascia inalterati i campi. Dall'equazione 4.6 si vede che il potenziale vettore è definito a meno di un gradiente, ovvero la sua Gauge è

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla} f \quad (4.10)$$

Poiché la modifica del potenziale vettore modifica il campo elettrico, imponiamo come gauge per ϕ :

$$\phi = \phi_0 - \partial_t f \quad (4.11)$$

Grazie ad un'opportuna scelta di Gauge è sempre possibile far sì che $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi = 0$. Questa scelta non è obbligata ma ci semplifica la risoluzione delle equazioni di Maxwell.¹⁶

A seguito di tale scelta di Gauge le equazioni di Maxwell hanno una forma più semplice: in particolare si possono scrivere finalmente in forma manifestamente covariante:

$$\square A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} J^\mu = \mu_0 J^\mu \quad (4.12)$$

dove ho definito $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$. Come mai è un quadrivettore? Perché trasforma come tale, infatti \square è invariante e il membro di destra trasforma come un quadrivettore.

In questo formalismo, la scelta di Gauge equivale a imporre $\partial_\mu A^\mu = 0$, che è invariante per trasformazioni di Lorentz.

4.1 Legge di trasformazione del campo elettromagnetico

Ci chiediamo come trasformano i campi elettromagnetici a seguito di un cambio di sistema inerziale. A tale scopo basta usare la legge di trasformazione del quadripotenziale, e a partire da esso trovare le espressioni dei campi trasformati. Il calcolo è piuttosto noioso e poco illuminante, perciò riporto direttamente i risultati in forma vettoriale:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= E_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\parallel} &= B_{\parallel} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}/c \times \vec{B}) \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{v}/c \times \vec{E}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Notiamo che c'è un modo rapido per ricordare il segno della velocità passando da un sistema di riferimento all'altro. Nel sistema a riposo, la forza su una carica è pari a $\vec{F}' = q\vec{E}'$. Nel sistema in cui la carica ha velocità \vec{v} , tale forza è pari alla forza di Lorentz. Perciò, considerando la componente della forza ortogonale a \vec{v} e usando la legge di trasformazione della forza, otteniamo $\vec{F}'_{\perp} = \vec{F}_{\perp}/\gamma = q(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}/c \times \vec{B})$. Una volta fatto ciò, basta ricordare che il segno per la trasformazione del campo magnetico ha segno opposto.

4.2 Campi della carica puntiforme in moto rettilineo uniforme

Determiniamo finalmente il campo prodotto da una carica puntiforme in moto rettilineo a velocità \vec{v} .

Nel sistema di riferimento S' solidale con la particella di carica e , i campi nella posizione \vec{R}' sono dati dalle espressioni

$$\vec{E}' = e \frac{\vec{R}'}{4\pi\epsilon_0 R'^3}, \quad \vec{B}' = 0. \quad (4.15)$$

¹⁶Per mostrare che tale scelta è sempre possibile, si vede dalle equazioni appena scritte che ciò equivale a trovare una funzione f che risolve $(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2)f = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \frac{1}{c} \partial_t \phi_0$.

Nel sistema S in cui la particella si muove con velocità \vec{v} sono presenti sia un campo elettrico che un campo magnetico, le cui componenti sono date da

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}, \quad \vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}. \quad (4.16)$$

Le coordinate della particella nei due sistemi S ed S' sono legate dalle relazioni

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (4.17)$$

Esplicitamente si ha allora

$$R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2} \quad (4.18)$$

$$= \gamma \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2)}, \quad (4.19)$$

ed è conveniente introdurre R^* definito da $R' = \gamma R^*$, in modo da scrivere le componenti del campo elettrico in S nella forma

$$E_x = E'_x = \frac{e(x - vt)}{\gamma^2 R^{*3}}, \quad E_y = \frac{ey}{\gamma^2 R^{*3}}, \quad E_z = \frac{ez}{\gamma^2 R^{*3}}. \quad (4.20)$$

Quindi in forma vettoriale

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{e\vec{R}_i}{R^{*3}}, \quad (4.21)$$

dove \vec{R}_i è la posizione del punto di osservazione rispetto alla particella:

$$\vec{R}_i = (x - vt, y, z). \quad (4.22)$$

Se chiamiamo θ l'angolo tra \vec{R}_i e la direzione del moto (asse \hat{x}), si ha

$$(x - vt)^2 = R_i^2 \cos^2 \theta, \quad y^2 + z^2 = R_i^2 \sin^2 \theta, \quad (4.23)$$

da cui

$$R^* = R_i \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.24)$$

Quindi infine

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}_i}{\gamma^2 R_i^3 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2 \theta\right)^{3/2}}. \quad (4.25)$$

Dalla legge di trasformazione dei campi e da $\vec{B}' = 0$ segue poi

$$\vec{B} = \vec{v} \times \vec{E} \quad (4.26)$$

§ 4.2.1. Intuizione visiva per le linee di campo elettrico. — Mostriamo ora un modo intuitivo per capire come vengono modificate le linee di campo di una carica puntiforme in moto. Quello che si mostrerà non rivela nulla di nuovo sulla fisica ma può essere interessante da notare e un buono strumento per avere un'immagine intuitiva di cosa succede.

Affermo che le linee di campo nel caso in cui la carica è in moto si ottengono da quelle nel caso stazionario muovendo il foglio su cui sta la carica ed applicando la contrazione delle lunghezze. Passiamo a giustificare questa affermazione.

Consideriamo θ e θ_1 rispettivamente angoli nel sistema in cui la carica è in moto e quello in cui è a riposo. Troviamo la relazione che lega i due angoli solidi $d\Omega$ e $d\Omega_1$. Dalla contrazione delle lunghezze vale evidentemente $\tan \theta_1 = \tan \theta / \gamma$.

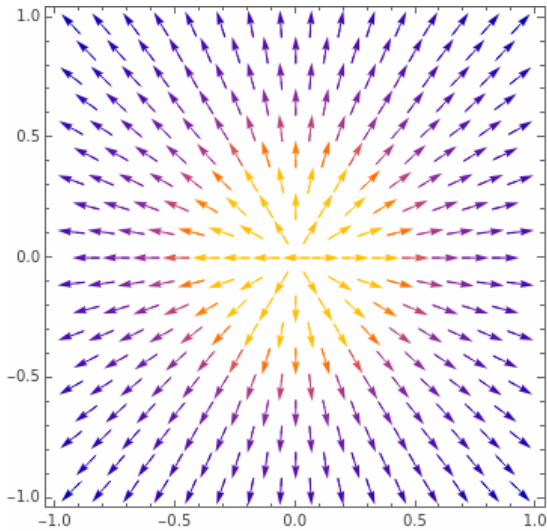
$$d\Omega_1 = 2\pi |d(\cos \theta_1)| \quad (4.27)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \tan^2 \theta}} \tag{4.28}$$

derivando tale espressione si ottiene facilmente

$$|d(\cos \theta_1)| = \frac{|d(\cos \theta)|}{\gamma^2 (1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{3/2}} \tag{4.29}$$

Perciò si vede da quanto già trovato che $E = E_1 \frac{d\Omega_1}{d\Omega}$. Questo risultato si può giustificare dicendo quello che affermavo all'inizio, ovvero che le linee di campo vengono schiacciate come se fossero disegnate su un foglio che si muove.



(a) Campo EM nel sistema comovente.

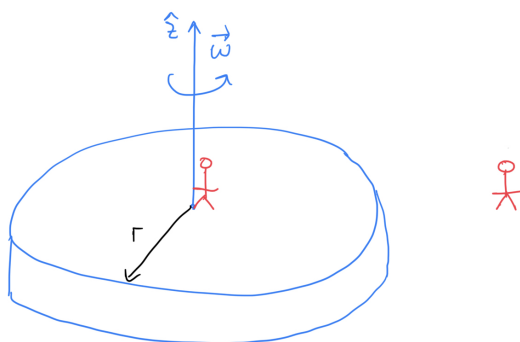
(b) Campo EM nel sistema fisso.

SEZ. A — APPENDICE: PARADOSSO DI EHRENFEST E METRICA DI UN SISTEMA ROTANTE

Questa sezione può essere vista come un preludio alla teoria della relatività generale, in quanto verranno introdotte numerose idee che non hanno modo di essere evidenti in un'esposizione di relatività ristretta. L'obiettivo è solo quello di fornire un assaggio di quello che vuol dire lavorare con metriche diverse da $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$ restando tuttavia sempre nel framework della relatività ristretta. Infatti, la nuova metrica con cui lavoreremo sarà ottenuta riparametrizzando lo spaziotempo piatto della relatività ristretta (non entreremo ad esempio in discussioni riguardanti la curvatura dello spaziotempo, in quanto esula dai nostri scopi).

Il problema che affronteremo è stato un punto di partenza per lo stesso Einstein nella formulazione della teoria della relatività generale. Esso mette in luce alcuni aspetti non banali che emergono considerando il punto di vista di un osservatore in moto a velocità angolare costante, come sarà spiegato in quanto segue.

Consideriamo una piattaforma rotante avente velocità angolare ω e centro nell'origine. Essa è posta in rotazione attorno al suo asse (che nei calcoli successivi sarà preso come asse z) come schematizzato in figura.



Studiamo il rapporto tra la sua circonferenza ed il suo diametro. Per contrazione delle lunghezze lungo la circonferenza, questa deve essere contratta di un fattore $1/\gamma$, mentre il raggio, che è ad ogni istante ortogonale alla velocità di un punto sul bordo della piattaforma, non subisce alcuna contrazione. Saremmo dunque portati a concludere che il rapporto della circonferenza con il suo raggio è minore di π , ma questo è assurdo! Un risultato del genere indurrebbe a pensare che la geometria dello spazio non è euclidea, in contrasto con le assunzioni della relatività ristretta. Questo paradosso prende il nome di *Paradosso di Ehrenfest*, che lo sollevò per la prima volta nel 1909.

Il problema non è affatto banale e la sua soluzione si basa su una sottigliezza che solitamente è sempre data per scontata in relatività ristretta, ossia la possibilità di trovare un frame che abbia un unico tempo globale. Infatti, ciò che è andato storto nel ragionamento che porta al paradosso è l'assunzione non giustificata a priori di poter trovare un tempo globale che ci permetta di sommare, a tempo fissato, tanti dl_0 da parte dei righelli adiacenti posti da un osservatore solidale con la piattaforma e tutti calcolati allo stesso tempo, ottenendo come risultato la lunghezza propria della circonferenza (che intuitivamente avevamo considerato essere l'usuale $2\pi r$).

Quando qualcosa sembra essere sbagliato, è una motivazione per andare ad indagare; cerchiamo dunque un cambio di coordinate, analogo a quello fatto nello studio dei sistemi di moto rettilineo

uniformemente accelerato, che fornisca un insight maggiore in questo scenario.

Le coordinate naturali da utilizzare per capire cosa succede dall'interno della piattaforma rotante sono quelle co-rotanti di un osservatore fermo al centro della piattaforma¹⁷:

$$t' = t \quad (\text{A.1})$$

$$r' = r \quad (\text{A.2})$$

$$\phi' = \phi - \omega t \quad (\text{A.3})$$

$$z' = z \quad (\text{A.4})$$

La metrica è ovviamente sempre quella della relatività ristretta, ma ora la scriviamo in funzione delle nuove variabili appena definite. Per alleggerire la notazione non scriverò più il ' vicino alle nuove quantità e porrò $c = 1$. Si ha dunque

$$ds^2 = dt^2(1 - \omega^2 r^2) - 2\omega r^2 d\phi dt - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2 \quad (\text{A.5})$$

L'aspetto nuovo della metrica scritta in queste coordinate è la comparsa di un accoppiamento non nullo tra coordinate temporali e spaziali. In altri termini $g_{02} \neq 0$. Vedremo a breve che questo fatto avrà delle conseguenze inaspettate.

Misuriamo la distanza tra due punti infinitesimamente vicini A e B . Per consistenza e chiarezza, mostrerò entrambi i metodi possibili per determinare tale distanza secondo le convenzioni della relatività ristretta.

Il primo è la distanza radar, il secondo la misura della differenza tra le coordinate spaziali a *tempi sincroni*. Partiamo dal primo metodo.

Assumiamo per semplicità che le coordinate spaziali di A siano date da (r, ϕ, z) e quelle di B da $(r, \phi + d\phi, z)$ dunque stiamo guardando due punti sulla circonferenza separati solo da un piccolo angolo. Per fissare le idee poniamo $d\phi > 0$.

Poniamo uno specchio in B e misuriamo il tempo proprio trascorso durante l'intero viaggio, visto che la velocità della luce è sempre pari a $c = 1$ e durante i singoli tragitti $ds^2 = 0$ (ricordiamoci che ds^2 in fondo è sempre $dt^2 - dx^2$ e tale quantità è zero per un raggio di luce), allora

$$dl = d\tau_{tot}/2 \quad (\text{A.6})$$

dove ho indicato con $d\tau_{tot}$ il tempo proprio trascorso per un osservatore fisso in A dall'emissione del raggio di luce al suo ritorno nello stesso punto. Osserviamo che tale intervallo è dato da

$$d\tau^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0i}dtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j = g_{00}dt^2$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che i due eventi (emissione e ricezione del fotone emesso) avvengono spazialmente nello stesso luogo, dunque solo il primo termine non si annulla.

Risolviamo l'equazione $ds^2 = 0$, una per ciascun percorso (cambia dall'uno all'altro solo di segno di $d\phi$), e otteniamo le due espressioni seguenti:

$$dt_{A \rightarrow B} = \frac{\omega r^2 d\phi + r d\phi}{1 - \omega^2 r^2} \quad (\text{A.7})$$

e

$$dt_{B \rightarrow A} = \frac{-\omega r^2 d\phi + r d\phi}{1 - \omega^2 r^2} \quad (\text{A.8})$$

perciò troviamo

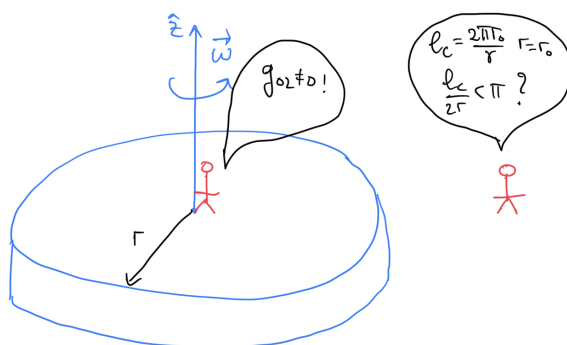
$$dl = r d\phi / \sqrt{1 - \omega^2 r^2} \quad (\text{A.9})$$

¹⁷Questa ultima affermazione giustifica il porre $t' = t$ nella coordinata temporale

Nel caso generale, in cui A e B non sono entrambi sul bordo della circonferenza, potete verificare ripetendo gli stessi passaggi che l'espressione generale per l'elemento di lunghezza dl è

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\phi^2}{1 - \omega^2 r^2} \quad (\text{A.10})$$

Questo sembra sorprendente: l'elemento di lunghezza è diverso da quello calcolato usando $dt = 0$ nell'intervallo invariante. Questo è una conseguenza della contrazione delle lunghezze, infatti se l'osservatore nel laboratorio vede una lunghezza infinitesima $dl = r d\phi$, allora quella nel sistema a riposo deve essere dilatata di un fattore γ . Notiamo che questo effetto è dovuto proprio alla presenza del termine $g_{02} \neq 0$ nella metrica. La geometria della piattaforma descritta da un osservatore ad essa solidale non è euclidea!



Al fine di mostrare l'impossibilità di definire un tempo globale per un osservatore solidale alla piattaforma rotante, mostriamo come ricavare il risultato appena ottenuto usando la cosiddetta "sincronizzazione degli orologi". La lunghezza è misurata a tempi simultanei, dunque vediamo se è possibile (anzi, mostreremo che non è possibile) ottenere una sincronizzazione globale degli orologi sulla piattaforma.

Immaginiamo che A voglia sincronizzare il suo orologio con B e per farlo usi la convenzione di Einstein sulla sincronizzazione degli orologi. Allora A e B eseguono la seguente procedura: A invia ad un certo istante a cui assegniamo la coordinata t un fotone verso B. Per convenzione, all'arrivo del fotone B assegna al suo orologio il tempo $t + \frac{1}{2}(dt_{A \rightarrow B} + dt_{B \rightarrow A})$. Dal punto di vista di B, il suo orologio deve avere la stessa lettura dell'orologio di A, però sappiamo che il fotone ci mette $dt_{A \rightarrow B}$ ad arrivare a B, perciò dobbiamo assumere (per salvare l'ipotesi che il fotone si muova alla velocità della luce) che l'orologio di A abbia un ritardo rispetto a quello di B, in particolare deve valere l'equazione

$$\Delta t_{A/B} + t + dt_{A \rightarrow B} = t + \frac{1}{2}(dt_{A \rightarrow B} + dt_{B \rightarrow A}) \quad (\text{A.11})$$

da cui deduciamo

$$\Delta t_{A \rightarrow B} = -\frac{\omega r^2 d\phi}{1 - \omega^2 r^2} \quad (\text{A.12})$$

ovviamente il ragionamento si poteva anche applicare al contrario e avremmo trovato lo stesso risultato cambiato di segno, come potete convincervi. Osserviamo che $\Delta t \neq 0$ è dovuta alla presenza del termine non diagonale $g_{02} \neq 0$.

Questo ci dice che non possiamo avere una coordinata temporale globale all'interno della piattaforma. Per concludere quanto si era detto di voler mostrare, è facile vedere che se si inserisce $\Delta t_{B/A} = -\Delta t_{A/B}$ nella metrica si ottiene la stessa espressione per dl^2 già ottenuta con il metodo della distanza radar. Dunque le distanze tra punti vicini vanno prese sì a tempi simultanei, ma tale nozione non implica sempre $\Delta t = 0$ tra gli orologi, come abbiamo mostrato.

Per esercizio, svolgendo i passaggi svolti in questa sezione in un caso più generale, potete mostrare quanto segue: In una metrica generica in cui

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.13})$$

la metrica spaziale indotta è data da

$$dl^2 = \left(\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta \quad (\text{A.14})$$

con $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$. Notiamo come tale metrica si riconduca all'usuale distanza euclidea ottenuta ponendo $t = 0$ nel caso in cui $g_{0\alpha} = 0$. Inoltre si mostra in modo del tutto identico a quanto fatto nel nostro caso particolare che punti infinitesimamente vicini hanno un ritardo pari a

$$\Delta x_{x^\alpha + dx^\alpha / x^\alpha}^0 = - \frac{g_{0\beta} dx^\beta}{g_{00}} \quad (\text{A.15})$$

Questo implica che in un tale sistema non ha senso parlare di tempo associato globalmente e t assume solo il ruolo di una pura coordinata: l'unica quantità fisica che misura una cosa veramente associabile ad un tempo è il tempo proprio, che ora però, per osservatori a riposo separati da una certa distanza, piccola a piacere, è comunque diverso. La lunghezza propria corretta da associare nel caso dell'apparente paradosso è dunque

$$dl = \frac{rd\phi}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2}} \quad (\text{A.16})$$

perciò, nel sistema inerziale del laboratorio, la lunghezza della circonferenza è salva ed il rapporto è π , in quanto la lunghezza propria è dilatata di un fattore γ .

Come ultima osservazione, è interessante interpretare nuovamente lo sfasamento della coordinata temporale in un giro 2π . La differenza di tempo tra un raggio di luce che percorre la circonferenza in senso orario e uno che la percorre in verso antiorario si trova facilmente nel sistema del laboratorio dalla legge oraria del fotone ed è data da

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{1 - \omega r} - \frac{2\pi r}{1 + \omega r} = \frac{4\pi\omega r^2}{1 - \omega^2 r^2} \quad (\text{A.17})$$

Tale risultato si ottiene in modo analogo nel sistema rotante, dove apparentemente il fotone dovrebbe impiegare lo stesso tempo a percorrere la circonferenza. Tuttavia, l'impossibilità di avere una coordinata globale t fa sì che per un giro in verso antiorario rispetto ad un giro in verso orario si abbia

$$\Delta t = \frac{2\pi\omega r^2}{1 - \omega^2 r^2} - \left(-\frac{2\pi\omega r^2}{1 - \omega^2 r^2} \right) = \frac{4\pi\omega r^2}{1 - \omega^2 r^2}$$

Reintroducendo la velocità della luce, notiamo che per $\omega r > c$ l'intervallo di tempo diventa negativo. Sembrerebbe dunque che la luce resti indietro rispetto alla piattaforma.

Questo mostra i limiti della costruzione che abbiamo fatto: abbiamo infatti modellizzato la piattaforma come un corpo rigido che ruota (immaginiamo sotto l'azione di un agente esterno che ha applicato un momento torcente per metterla in moto), tuttavia se la piattaforma è sufficientemente grande, allora non è possibile metterla in moto a tale velocità angolare, in quanto un punto materiale posto al bordo di tale piattaforma dovrebbe ricevere energia infinita. Quello che succede, invece, è che la piattaforma si rompe ben prima che i suoi estremi possano raggiungere velocità confrontabili con quella della luce. Per tutti i nostri calcoli, ci siamo comunque messi in un regime in cui la forza intermolecolare dei costituenti della piattaforma può essere presa sufficientemente elevata da garantire il moto descritto.

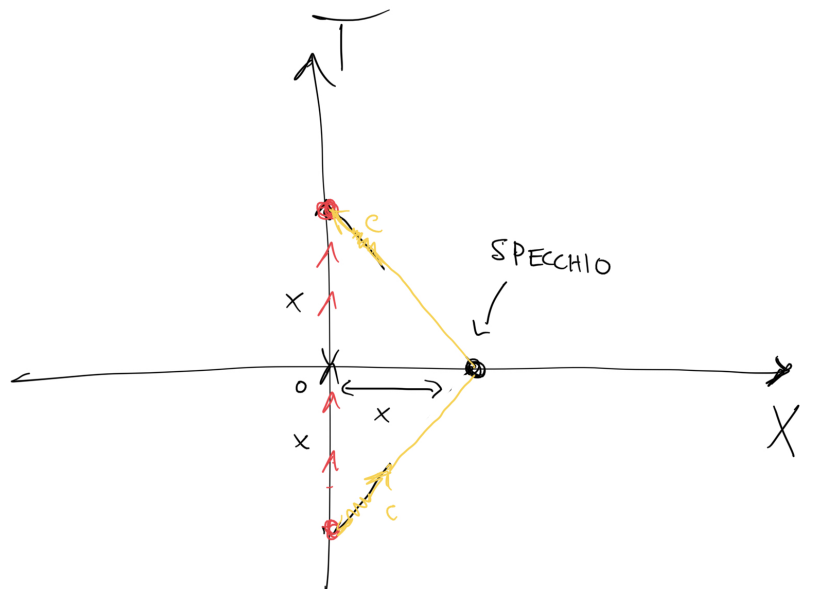
— ESERCIZI —

★★☆☆☆ **Esercizio 1 L'equazione d'onda e Galileo** Mostrate esplicitamente che l'equazione d'onda non è invariante sotto trasformazioni di Galileo in una dimensione (ossia assumete un'unica coordinata spaziale x per sola comodità).

In particolare, mostrate che $\square = \square' - 2v/c^2 \partial_{tx}^2 + v^2/c^2 \partial_x^2$ e che una soluzione ad onda piana della nuova equazione trasformata ha come relazione di dispersione $\omega/k = c - v$, perciò è un'onda che si propaga con velocità trasformata pari alla nuova velocità secondo la trasformazione di Galileo.

★★★★☆☆ **Esercizio 2 Linee di simultaneità** Questo esercizio vuole farvi riflettere sulla definizione di simultaneità dal punto di vista grafico.

Supponiamo di inviare un raggio di luce a $t = -x$ dall'origine verso uno specchio posto in x e dunque di ricevere nuovamente tale fotone in $t = x$. Per definizione di sincronizzazione degli orologi, l'evento del fotone che viene riflesso dallo specchio posto in x è simultaneo all'evento che accade nell'origine a $t = 0$. Definiamo perciò l'asse x come asse di simultaneità per $t = 0$. Tale procedimento per determinare la retta di simultaneità è mostrato in figura.



Ricavate l'asse X' di un sistema inerziale in moto rispetto al primo con velocità V in modo grafico, usando le stesse considerazioni appena fatte ma applicandole nel sistema in moto a velocità V .

★★★★☆☆ **Esercizio 3 Paradosso del fienile *in all its gory detail***

Ricavate analiticamente a quale tempo la porta di sinistra si chiude nel sistema di riferimento della scala e confrontatelo con tempo in cui si chiude la porta di destra nello stesso sistema di riferimento.

Extra: Supponiamo ora che la porta del fienile resti chiusa e la scala sbatta su di essa. Appena l'estremo destro della scala colpisce la porta, esso si ferma istantaneamente e invia un fotone verso i punti retrostanti, che appena arriva ad un altro punto della scala fa sì che tale punto si arresti immediatamente (se volete, potete pensare a questo modello come una semplificazione di un'onda d'urto che si muove alla velocità della luce, anche se potremmo imporre senza variazioni sostanziali una velocità di propagazione $U < c$ per un modello leggermente più realistico).

Quanto è lunga la scala una volta che ogni suo punto è fermo? Risolvete il problema aiutandovi con un diagramma di Minkowski.

★☆☆☆☆ **Esercizio 4 Moto accelerato ricavato in modo alternativo** Determinate direttamente $v(\tau)$ usando la composizione di velocità tra il sistema del laboratorio, il sistema istantaneamente solidale e quello che accelera per un breve intervallo temporale $d\tau$ rispetto a quest'ultimo.

★★★★★ **Esercizio 5 Paradosso dei gemelli** Bob parte per una spedizione spaziale verso una galassia molto lontana. Alessio, il suo gemello, resta a Terra e misura il tempo che passa prima del ritorno di Bob. Bob mantiene una velocità costante pari a v per metà del tragitto, poi inverte istantaneamente la rotta e torna verso la Terra con velocità in modulo sempre pari a v . Alessio misura un tempo T al momento del ritorno di suo gemello. Per la dilatazione dei tempi il tempo passato per Bob è $\tau = T/\gamma = T\sqrt{1-v^2/c^2}$. Dal punto di vista di Bob, però, è Alessio ad aver percorso il viaggio, perciò secondo Bob il tempo trascorso per Alessio è $T = \tau/\gamma$. Come risolvere questo paradosso?

Hint: usate un diagramma di Minkowski prima di avventarvi a fare calcoli e cercate di capire chi dei due ha ragione e perché

★★★☆☆ **Esercizio 6 Paradosso dei gemelli in moto uniformemente accelerato** Bob parte per una spedizione spaziale verso una galassia molto lontana. Alessio, il suo gemello, resta a Terra e misura il tempo che passa prima del ritorno di Bob. Assumiamo che Bob acceleri di moto uniformemente accelerato con accelerazione propria g per esattamente metà del viaggio e decelerì per l'altra metà con la stessa accelerazione propria in modulo. Quando Bob finalmente torna a casa, il tempo totale del suo viaggio, misurato da Alessio, è T . Chi è invecchiato di più? Mostratelo con un calcolo esplicito!

★★★☆☆ **Esercizio 7 Una scatola e la formula più famosa del mondo** Consideriamo una scatola di massa M , per semplificare le idee immaginiamo due pareti molto pesanti libere di traslare sul piano e collegate da delle aste orizzontali di massa trascurabile. La distanza tra le pareti è pari a L ed il sistema è inizialmente a riposo. Supponiamo ora che la parete di destra emetta un fotone verso quella di sinistra. Considerando la conservazione dell'impulso totale concludete che la scatola deve aver perso una quantità di massa pari a E_{fotone}/c^2

★★★☆☆ **Esercizio 8 Effetto Doppler 1D** Consideriamo l'effetto Doppler relativistico, ovvero la differenza tra le frequenze emesse e osservate di radiazione luminosa da parte di osservatori in moto relativo a velocità costante. L'emissione di radiazione è modellizzata inviando due fotoni a una distanza temporale dt nel sistema di riferimento dell'emettitore. L'inverso di tale tempo determina la frequenza di emissione. Misurando poi il tempo dt' tra l'arrivo dei due fotoni nel sistema di O otteniamo $dt/dt' = \omega'/\omega$. Determinate tale rapporto per una coppia osservatore-emettitore in moto relativo uno rispetto all'altro con velocità v . Risolvete l'esercizio in due modi diversi, uno analitico (ossia risolvendo leggi orarie e usando effetti cinematici) e uno che utilizzi un diagramma di Minkowski e delle semplici considerazioni geometriche.

★★★☆☆ **Esercizio 9 Effetto Doppler 2D** Svolgete lo stesso esercizio di prima, ma ora supponete che l'osservatore sia in moto e abbia legge oraria $(d \sin \theta_0 + vt, d \cos \theta_0, 0)$. L'emettitore si trova nell'origine e al tempo $t=0$ il primo fotone inviato dall'emettitore a un tempo $t' = -d/c$ raggiunge l'osservatore.

★★★★☆ **Esercizio 10 Effetto Doppler in moto circolare** Il moto circolare

è un esempio di scenario in cui è possibile scambiare segnali luminosi senza alcuna variazione di frequenza tra emettitore e ricevitore. Mostrate che per due osservatori A,B in moto su una circonferenza di raggio R con velocità angolare Ω vale

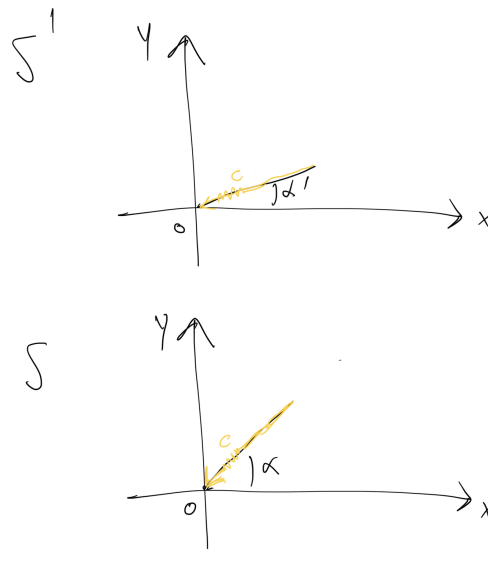
$$\omega_A = \omega_B$$

Estendete il risultato al caso in cui gli osservatori abbiano la stessa velocità angolare ma siano su circonferenze concentriche di raggi R_1, R_2 . In questo caso mostrate che vale

$$\omega_1 \sqrt{1 - \Omega^2 R_1^2} = \omega_2 \sqrt{1 - \Omega^2 R_2^2}$$

★★★★☆ **Esercizio 11 Una massa solitaria e due fotoni** Usando la relazione $E = mc^2$ a riposo per una particella di massa m , $E = \hbar\omega$, $p = \hbar\omega/c$ per un fotone e le relazioni per la trasformazione della frequenza ottenute per effetto Doppler è possibile ricavare $p = m\gamma v$. Per farlo, considerate un decadimento di una particella di massa m in due fotoni e proseguite da lì.

★★★★☆ **Esercizio 12 Aberrazione relativistica**



Consideriamo lo scenario rappresentato in figura, dove Alice (sistema S) e Bob (sistema S') ricevono un raggio di luce (ad esempio proveniente da una stella molto lontana) e valutano quanto esso è alto all'orizzonte. Per Alice, l'angolo rispetto all'orizzontale, come rappresentato in figura, è pari ad α , mentre per Bob, che si muove a velocità $\vec{v} = v\hat{x}$ rispetto ad Alice, esso è pari ad α' . Che relazione sussiste tra i due angoli?

★★★★☆ **Esercizio 13 Correzioni relativistiche a un GPS** Problema 2 delle APho 2013. Si rimanda al sito ufficiale della gara per il testo completo. [APho 2013](#)

— SOLUZIONI —

Soluzione 1: Equazione d'onda e Galileo Il calcolo esplicito per arrivare al risultato si basa

semplicemente sull'uso della regola della catena. Ad esempio:

$$\partial_t = \partial_{t'} \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)_x + \partial_{x'} \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)_x = \partial_{t'} - v \partial_{x'}$$

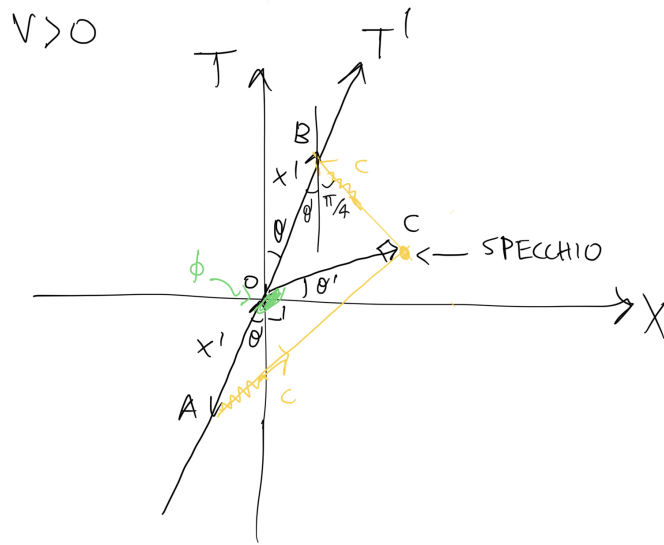
La nuova soluzione all'equazione d'onda riscritta in termini delle nuove variabili soddisfa

$$(\partial_{t'} - v \partial_{x'})^2 f(x', t') = c^2 \partial_{x'}^2 f(x', t')$$

da cui potete convincervi facilmente che per una soluzione del tipo $f \sim e^{ikx - i\omega t}$ gli operatori $\partial_{t'} \rightarrow -i\omega$, $\partial_{x'} \rightarrow ik$ perciò si trova la relazione ω/k cercata.

Soluzione 2: Linee di simultaneità

In tale caso devo porre uno specchio da qualche parte in modo tale che per un segnale luminoso emesso a $t' = -x'$, esso venga riflesso e ritorni in $X' = 0$ in $T' = +x'$. La figura mostra più chiaramente quello che cerchiamo.



Dal fatto che la luce si propaga parallelamente alle bisettrici, concludiamo che l'angolo $\widehat{ACB} = \pi/2$, dunque il triangolo ACB è inscritto in una circonferenza avente raggio $r = x'$. Dalla figura è evidente che $\theta' + \theta + \pi/2 = \phi$ e $\widehat{OBC} = \theta + \pi/4$. Usiamo ora il teorema della corda sulla corda AC per ottenere

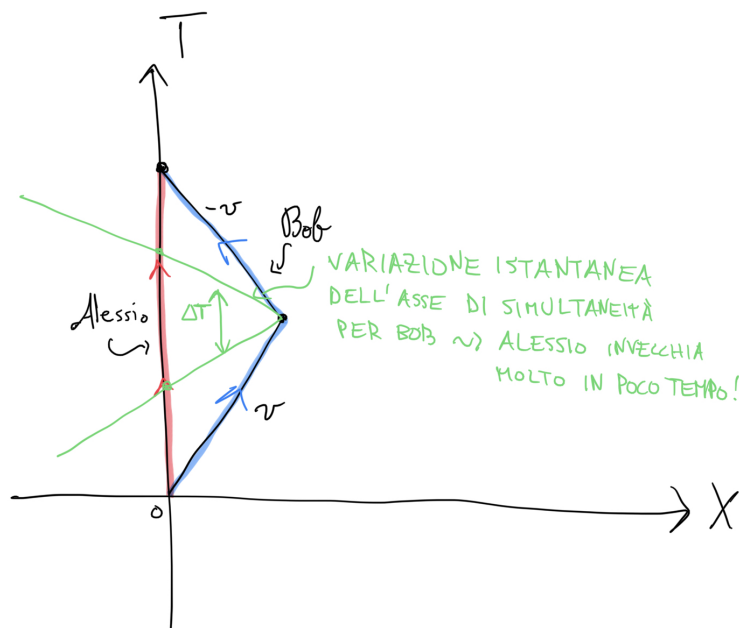
$$\phi = 2(\theta + \pi/4)$$

Uguagliando le due espressioni per ϕ si ottiene $\theta = \theta'$.

Soluzione 3: Paradosso del finile in all its gory detail

Usiamo degli argomenti fisici per trovare il tempo di chiusura delle due porte nel sistema di riferimento della scala.

Per la porta di destra, l'osservatore sulla scala vede i tempi dilatati, dunque se Alice misura un tempo L/v nel finile, per Bob sarà passato un tempo $t' = L/(\gamma v)$. Per quanto riguarda la porta di sinistra, la sua chiusura avviene a distanza L da quella di destra nel sistema di Alice. Bob, invece, sa che a $t' = 0$ la porta si trova in $x' = 0$ per costruzione e che essa si muove a velocità v , perciò $x' = -vt'$. Per determinare x' , notiamo che se Alice afferma che la sua misura della lunghezza fornisce L , allora per me la stessa misura dovrà fornire $x' = -\gamma L$ perché io vedo ogni apparecchio di misura che Alice ha usato per misurare tale lunghezza è contratto di un fattore γ .



Guardando il diagramma di Minkowski, ci accorgiamo subito che la linea di simultaneità per Bob subisce un salto nel momento in cui questo inverte la sua velocità. Perciò, capiamo subito che per un istante brevissimo (mentre subisce un'accelerazione istantanea che gli permette di invertire il suo moto) Bob vede invecchiare molto velocemente Alessio.

Passiamo ora a calcolare in modo esplicito tale invecchiamento.

Il tempo passato per Alessio, visto dal punto di vista di Bob, è evidentemente

$$T = \tau/\gamma + \Delta T$$

dove il primo termine è quello che otterremmo in modo ingenuo se consideriamo solo la simmetria del problema tra i due gemelli, e il secondo termine è dovuto all'invecchiamento che Bob vede quando inverte la sua velocità. Per calcolare il secondo termine, notiamo che nel cambiare la linea di simultaneità, Alessio si trova comunque sempre a distanza $x' = -v\tau/2$ nel frame di Bob. inoltre, per simultaneità di eventi, questi sono sempre allo stesso τ per Bob. Quindi scriviamo per la linea di simultaneità una volta che Bob inverte la velocità

$$t_+ = \gamma(\tau - v(-v\tau/2))$$

mentre per l'istante appena prima di invertire la velocità

$$t_- = \gamma(\tau + v(-v\tau/2))$$

da cui troviamo

$$\Delta T = t_+ - t_- = \gamma v^2 \tau$$

perciò

$$T = \tau/\gamma + \gamma v^2 \tau = \gamma \tau$$

questo risultato conferma l'analisi svolta nel frame di Alessio.

Soluzione 6: Paradosso dei gemelli in moto uniformemente accelerato

Per simmetria, il tempo totale trascorso per Bob è quattro volte il tempo trascorso dalla partenza al momento in cui per la prima volta decelera, che è $T/4$ per Alice. Scriviamo dunque

$$T/4 = \frac{1}{g} \sinh(g\tau/4) \quad (\text{E.20})$$

Da cui ricaviamo $\tau(T)$, che può essere espresso in forma più illuminante usando la relazione $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Si ottiene dunque

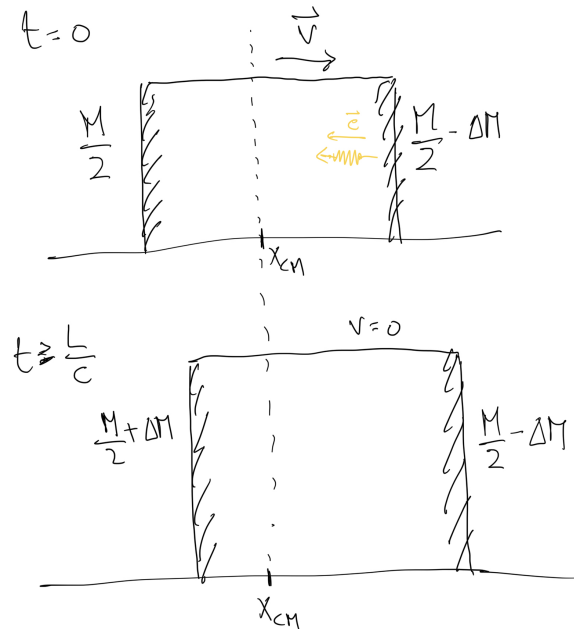
$$\tau = \frac{\ln\left(\frac{gT}{4} + \sqrt{1 + \left(\frac{gT}{4}\right)^2}\right)}{g} \quad (\text{E.21})$$

Per $gT \gg 1$ (un viaggio abbastanza lungo), possiamo approssimare tale espressione come

$$\tau \simeq \frac{\ln(gT/2)}{g} \ll T \quad (\text{E.22})$$

Soluzione 7: Una scatola e la formula più famosa del mondo

La situazione è schematizzata in figura.



Essendo il sistema isolato, la quantità di moto della scatola è ora pari a (almeno in prima approssimazione sappiamo che vale la meccanica Newtoniana) $Mv = E/c$ dove E è l'energia del fotone emesso. Essendo il sistema isolato e le velocità in questione piccole, valgono le leggi della meccanica newtoniana perciò il centro di massa del sistema deve rimanere globalmente fermo nel momento in cui il fotone viene riassorbito dal muro di sinistra ed il sistema torna in uno stato di quiete. Questo tuttavia è impossibile a meno che non supponiamo che all'emissione del fotone sia associata anche una perdita di massa ΔM da parte del muro di destra e un conseguente aumento di tale massa sul muro di sinistra al momento dell'assorbimento del fotone. In questo modo la scatola si è spostata verso destra ma allo stesso tempo la massa si è spostata verso sinistra in modo tale che il centro di massa resti fermo. Svolgiamo ora i calcoli: il tempo impiegato dal fotone per raggiungere il muro di sinistra è in prima approssimazione ($v/c \ll 1$) pari a $t = L/c$, durante il quale la scatola si è mossa di moto rettilineo uniforme a velocità v , percorrendo dunque

una distanza pari a vL/c . Scriviamo dunque la posizione finale (al momento dell'assorbimento del fotone da parte del muro di sinistra) del centro di massa del sistema ed uguagliamola a quella iniziale:

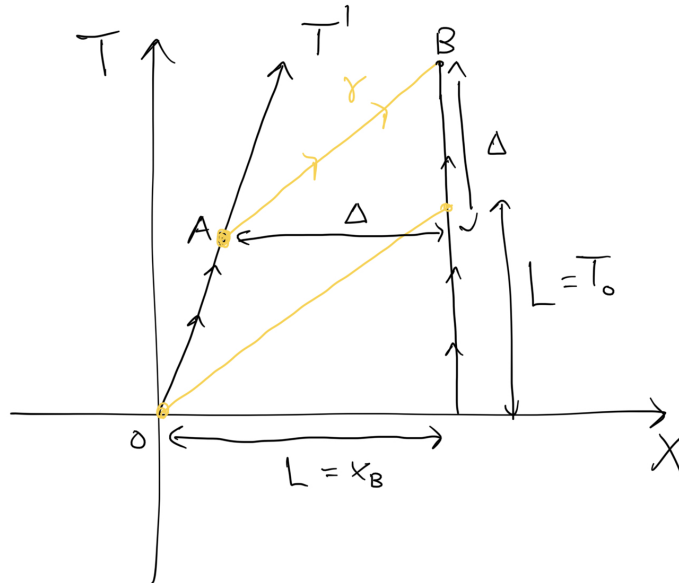
$$Mx_{CM(finale)} = \left(\frac{M}{2} - \Delta M\right)(L + vL/c) + (M/2 + \Delta M)vL/c = ML/2 \quad (\text{E.23})$$

da cui, dopo aver sostituito $v = \frac{E}{Mc}$, ricaviamo la famosa relazione

$$E = \Delta Mc^2 \quad (\text{E.24})$$

Soluzione 8: Effetto Doppler 1D

Partiamo dalla soluzione grafica, in linea con lo spirito di questa lezione.



Supponiamo che l'osservatore si trovi in posizione $x = L$ e l'emettitore, che si muove con velocità V come in figura, emetta il primo fotone quando si trova in $(T, X) = (T', X') = (0, 0)$. Detto A l'evento in cui viene emesso il secondo fotone, che avviene ad un tempo T_A . Detto τ il tempo di emissione nel frame solidale con l'emettitore, vale evidentemente

$$\tau^2 = T_A^2 - X_A^2$$

Poiché il fotone viaggia parallelo alla bisettrice del primo e terzo quadrante, il suo spostamento verticale nel piano di Minkowski è pari al suo spostamento orizzontale, perciò detto T_B il tempo al quale arriva il secondo fotone all'osservatore, allora

$$\Delta \equiv T_B - T_A = X_B - X_A$$

lo stesso discorso vale per il primo fotone emesso dall'origine, perciò

$$T_0 = X_B$$

La differenza dei tempi di arrivo è data dunque da

$$\Delta T = T_A + \Delta - T_0 = T_A - X_A$$

ora, usando $X_A = VT_A$ e $\tau^2 = T_A^2 - X_A^2$ ricaviamo facilmente la relazione

$$\tau/\Delta T = \omega/\omega_0 = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}}$$

Passiamo ora alla soluzione analitica.

Chiamo E l'emettitore di radiazione e O l'osservatore in moto con velocità \vec{v} rispetto al primo. L'emissione di radiazione è modellizzata inviando due fotoni a una distanza temporale dt nel sistema di riferimento dell'emettitore. L'inverso di tale tempo determina la frequenza di emissione. Misurando poi il tempo dt' tra l'arrivo dei due fotoni nel sistema di O otteniamo $dt/dt' = \omega'/\omega$.

Consideriamo l'arrivo del primo fotone all'osservatore O come l'istante $t = 0$. Il secondo fotone è cdt indietro rispetto al primo fotone, perciò esso arriverà all'osservatore O al tempo

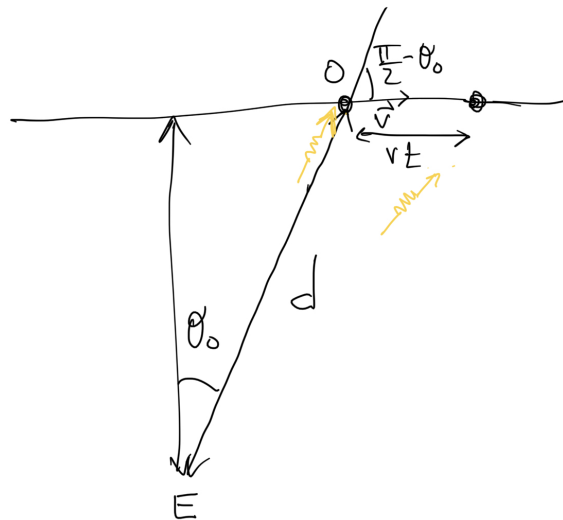
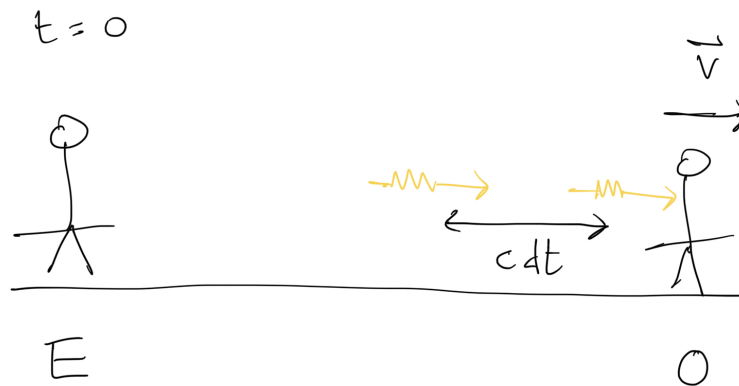
$$t_2 = \frac{cdt}{c-v} = \frac{dt}{1-v/c}$$

perciò, dalla dilatazione dei tempi, vale $t_2 = \gamma dt'$, dunque

$$dt' = \frac{dt}{\gamma(1-v/c)}$$

Otteniamo infine

$$\omega' = \omega\gamma(1-v/c)$$



Soluzione 9: Effetto Doppler 2D

Il caso generale, in cui il moto tra l'emettitore e l'osservatore è ad un certo angolo θ come in figura è concettualmente identico alla soluzione analitica del problema precedente, con la sola differenza che ora il secondo fotone, affinché possa raggiungere l'osservatore, deve essere inviato in una direzione leggermente deviata rispetto al primo fotone, in modo da compensare lo spostamento dell'osservatore durante l'intervallo dt . Riferendoci alla figura nel caso generale, uguagliamo le leggi orarie supponendo che l'angolo di deviazione $\delta\theta$ sia piccolo rispetto a θ_0 . In questo modo possiamo scrivere le leggi orarie lungo le due direzioni ed ottenere le seguenti equazioni:

$$c\cos(\theta_0 + \delta\theta)(t - (dt - d/c)) = d\cos\theta_0 \quad (\text{E.25})$$

$$c\sin(\theta_0 + \delta\theta)(t - (dt - d/c)) = vt + d\sin\theta_0 \quad (\text{E.26})$$

Poiché il primo fotone arriva per costruzione all'osservatore in $t = 0$, il tempo di arrivo del secondo fotone è proporzionale a dt e $\delta\theta$ perciò è anch'esso piccolo. Sviluppando le due equazioni appena scritte al primo ordine in dt e $\delta\theta$ si ottiene dalla seconda equazione

$$\delta\theta = \frac{vt - c\sin\theta_0(t - dt)}{d\cos\theta_0}$$

che sostituito nella prima equazione fornisce

$$t = \frac{dt}{1 - \frac{v}{c}\sin\theta_0} = \frac{dt}{1 - \hat{k} \cdot \vec{v}/c}$$

troviamo perciò

$$t' = t/\gamma = \frac{dt}{\gamma(1 - \hat{k} \cdot \vec{v}/c)}$$

da cui otteniamo

$$\omega' = \gamma(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \quad (\text{E.27})$$

dove ho usato la relazione $|\vec{k}| = \omega/c$.

Notiamo in particolare che per $\theta_0 = \pi/2$, si ha, al contrario del caso newtoniano, un blueshift della frequenza osservata, in particolare $\omega' = \gamma\omega$.

Soluzione 10: Effetto Doppler in moto circolare

Consideriamo l'emissione di un fotone da parte di Alice, che senza perdita di generalità facciamo sì che avvenga quando essa si trova sull'asse \hat{x} . Dalla figura, si vede che essa invierà a Bob il fotone in modo tale che esso lo raggiunga in un certo punto dell'orbita di questo. L'espressione dell'angolo a cui il fotone è emesso affinché sia ricevuto da Bob sembra essere molto difficile da calcolare, ed infatti lo è, tuttavia non serve farlo al fine di calcolare la frequenza misurata da Bob. Notiamo dalla costruzione geometrica che l'angolo formato dal vettore d'onda nel lab con il vettore velocità di Alice nel momento dell'emissione è lo stesso dell'angolo formato con Bob nel momento del ricevimento. Scriviamo ora le frequenze rispetto ad Alice e Bob in funzione della frequenza osservata nel laboratorio.

Si ha

$$\omega_{/A} = \gamma\omega_{/lab}(1 - \hat{k} \cdot \vec{v}) \quad (\text{E.28})$$

Per la frequenza ricevuta abbiamo poi

$$\omega_{/B} = \gamma\omega_{/lab}(1 - \hat{k} \cdot \vec{v}) \quad (\text{E.29})$$

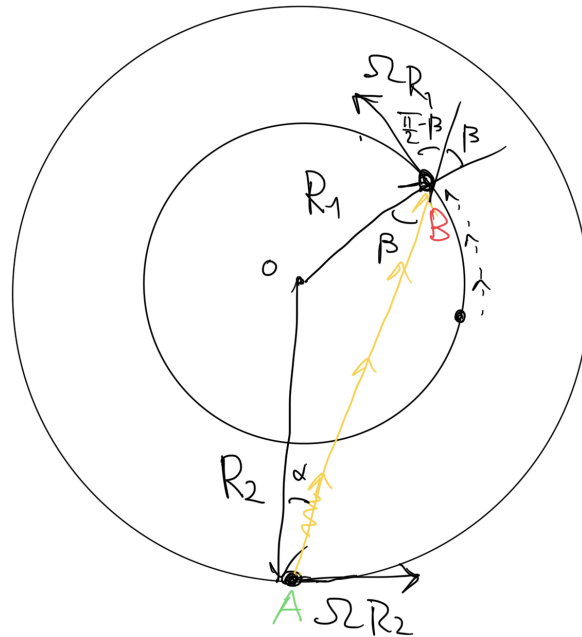
Da cui comparando le due equazioni ed usando la considerazione iniziale sugli angoli si vede che vale

$$\omega_{/A} = \omega_{/B} \tag{E.30}$$

Un procedimento del tutto analogo si può fare nel caso in cui i due amici ruotino con velocità angolare fissa Ω a raggi R_1, R_2 rispettivamente. In tal caso si può mostrare con una costruzione identica a quella appena fatta che il rapporto tra le due frequenze dipende solo dal rapporto γ_2/γ_1 . In particolare, riferendovi alla figura in basso, potete facilmente mostrare che vale

$$\omega_A \sqrt{1 - \Omega^2 R_2^2} = \omega_B \sqrt{1 - \Omega^2 R_1^2} \tag{E.31}$$

che si riduce correttamente al caso in cui i due osservatori sono sulla stessa circonferenza.



$$\frac{R_2}{\sin \beta} = \frac{R_1}{\sin \alpha} \quad \hat{k} \cdot \vec{v}_A = \Omega R_2 \sin \alpha$$

$$\hat{k} \cdot \vec{v}_B = \Omega R_1 \sin \beta$$

Soluzione 11: Una massa solitaria e due fotoni

Consideriamo il seguente esperimento mentale: Una massa m a riposo viene convertita in due fotoni, che viaggiano lungo l'asse \hat{x} in verso opposto. Per conservazione della quantità di moto, i due fotoni avranno impulsi uguali e opposti, dunque dalla relazione impulso-energia per il fotone ricaviamo che le loro energie sono uguali: i fotoni viaggiano alla stessa frequenza. Abbiamo perciò $2\hbar\omega = mc^2$ per la conservazione dell'energia.

Studiamo ora lo stesso decadimento visto in un sistema di riferimento in cui la massa m ha velocità $\vec{v} = v\hat{x}$. Questo vuol dire considerare un sistema di riferimento in moto con velocità $-v\hat{x}$ rispetto a quello in cui la massa m è a riposo. Trasformiamo ora la frequenza dei due fotoni in questo sistema di riferimento: il fotone che si muove verso destra è ha subito blueshift, mentre quello che si muove verso sinistra ha subito redshift. Perciò, indicando con l'indice 1 il fotone che si muove verso destra e 2 quello che si muove verso sinistra, otteniamo $p'_1 = \hbar\gamma \frac{\omega}{c} (1 + v/c)$,

$p'_2 = \hbar\gamma\frac{\omega}{c}(-1 + v/c)$ da cui otteniamo

$$p'_m = p'_1 + p'_2 = 2\gamma\hbar\omega v/c^2 = m\gamma v \quad (\text{E.32})$$

L'ultima uguaglianza viene dalla conservazione dell'energia nel sistema a riposo, $2\hbar\omega = mc^2$. Procedendo in modo del tutto analogo per l'energia (d'altronde si tratta di nuovo di considerare redshift e blueshift dei fotoni e usare la conservazione dell'energia svolgendo esattamente gli stessi passaggi) si ottiene

$$E'_m = \gamma mc^2 \quad (\text{E.33})$$

Perciò una massa m in moto ha energia e impulso pari a $(\gamma mc^2, \gamma m\vec{v})$.

Soluzione 12: Aberrazione relativistica

Il principio di relatività afferma l'invarianza della velocità della luce in ogni sistema inerziale, perciò scriviamo le due componenti della velocità nel sistema di Bob usando le formule di addizione della velocità già ricavate in precedenza:

$$c'_y = -\sin\alpha' = -\frac{\sin\alpha}{\gamma(1 + v\cos\alpha)} \quad (\text{E.34})$$

$$c'_x = -\cos\alpha' = \frac{-\cos\alpha - v}{1 + v\cos\alpha} \quad (\text{E.35})$$

da cui otteniamo, con semplici manipolazioni algebriche, una formula piuttosto semplice:

$$\tan(\alpha'/2) = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \tan(\alpha/2) \quad (\text{E.36})$$

Per angoli piccoli, come è il caso per oggetti situati molto lontani, otteniamo direttamente

$$\alpha' \simeq \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \alpha \quad (\text{E.37})$$

Il principio di relatività afferma l'invarianza della velocità della luce in ogni sistema inerziale, perciò scriviamo le due componenti della velocità nel sistema di Bob usando le formule di addizione della velocità già ricavate in precedenza:

$$c'_y = -\sin\alpha' = -\frac{\sin\alpha}{\gamma(1 + v\cos\alpha)} \quad (\text{E.38})$$

$$c'_x = -\cos\alpha' = \frac{-\cos\alpha - v}{1 + v\cos\alpha} \quad (\text{E.39})$$

da cui otteniamo, con semplici manipolazioni algebriche, una formula piuttosto semplice:

$$\tan(\alpha'/2) = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \tan(\alpha/2) \quad (\text{E.40})$$

Per angoli piccoli, come è il caso per oggetti situati molto lontani, otteniamo direttamente

$$\alpha' \simeq \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \alpha \quad (\text{E.41})$$

Questo mostra come l'oggetto in questione risulta schiacciato dal punto di vista di un osservatore in moto. Potete verificare facilmente ripercorrendo i passaggi che invece un raggio di luce proveniente da sinistra verso destra risulta avere una pendenza maggiore visto dall'osservatore in moto.