Relatività Avanzata

Relatività Generale

Bruno Bucciotti*

7 Febbraio 2025

Sommario

Quali sono i problemi della gravitazione di Newton? Dopo aver risposto a questa domanda, faremo dei richiami di relatività ristretta (dilatazione dei tempi e redshift) per introdurre la metrica come strumento per misurare distanze e tempi. Saremo quindi pronti per la relatività generale, che discuteremo da un punto di vista applicativo, concentrandoci sulla cosmologia.

*bruno.bucciotti@sns.it

Indice

sez. 1 — Introduzione

Notazione:

Gli indici ci dicono a quali componenti siamo interessati quando parliamo di oggetti complicati, come (quadri-)vettori. Sono genericamente indicati con indici greci, che rappresentano t, x, y, z in coordinate cartesiane oppure t, r, θ, ϕ in coordinate sferice.

Vale la convenzione di Einstein secondo cui gli indici ripetuti, uno alto e uno basso, sono sommati

$$T^{\alpha}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4} T^{\alpha}_{\alpha} \tag{1.1}$$

1.1 What is wrong with (Newton)?

La teoria gravitazionale di Newton, formulata nel XVII secolo, è straordinariamente precisa in molti contesti, come nel calcolo delle orbite planetarie e nella descrizione della gravità terrestre. Tuttavia, presenta alcuni limiti concettuali e sperimentali che richiedono una teoria più generale: la Relatività Generale.

La gravità Newtoniana si basa sull'idea che una massa M generi un campo gravitazionale descritto dal potenziale ϕ, tale che la forza su una massa m è:

$$\vec{F} = -m\vec{\nabla}\phi, \quad \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{1.2}$$

dove ρ è la densità di massa. Tuttavia, questa descrizione implica una azione a distanza istantanea, che è incompatibile con la relatività ristretta, secondo cui nessuna informazione può propagarsi più velocemente della luce.

Il secondo punto è più sottile. La formula $\vec{F} = m\vec{g} = m\vec{a}$ mostra che la massa m si cancella nel calcolo dell'accelerazione: tutti gli oggetti cadono con la stessa accelerazione indipendentemente dalla loro massa. Questo solleva una domanda fondamentale: *la luce, che non ha massa, cade sotto l'effetto della gravità?*

Einstein rispose a questa domanda con il principio di equivalenza, che asserisce che possiamo simulare localmente la gravità mettendoci in un sistema di riferimento accelerato rispetto ad uno inerziale. Presentiamo ora un esperimento mentale noto come l'ascensore di Einstein:

- Se una persona in un ascensore chiuso nello spazio profondo accende una torcia, la luce viaggerà in linea retta.
- Tuttavia, se l'ascensore accelera verso l'alto, l'osservatore vedrà la luce piegarsi verso il basso, poiché il pavimento dell'ascensore "sale" rispetto al raggio di luce.
- Per il principio di equivalenza, un osservatore sulla Terra in un campo gravitazionale non può distinguere questa seconda situazione da quella di un ascensore fermo sulla Terra.

La conclusione è che la luce è attratta dalla gravità. Esperimenti come quello di Eddington (1919) hanno confermato questa previsione osservando la deflessione della luce stellare da parte del Sole.

Se la luce è attratta gravitazionalmente, allora è plausibile che debba attrarre gravitazionalmente a sua volta, per il principio di azione e reazione. Questo implica che non solo la massa, ma anche l'energia (che la luce possiede) contribuisce al campo gravitazionale.

Tuttavia, c'è un problema concettuale: l'energia non è un'invariante relativistico. La densità di energia in un sistema di riferimento può trasformarsi in quantità di moto o pressione in un altro sistema, secondo le trasformazioni di Lorentz. Ciò richiede una descrizione più generale della sorgente del campo gravitazionale: il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$.

Il tensore $T_{\mu\nu}$ descrive la densità di energia, quantità di moto e pressione in un modo compatibile con la relatività. Per includere correttamente questi contributi nel campo gravitazionale, dobbiamo generalizzare ρ in $T_{\mu\nu}$, ma ora c'è un secondo problema concettuale: cosa mettiamo a sinistra al posto di $\nabla^2\phi$? Risponderemo a questa domanda nella sezione 2.

1.2 Richiami di relatività ristretta

In questa sezione richiamiamo alcuni concetti di relatività ristretta, ma dalla parte sul redshift in poi iniziamo a collegarci alla relatività generale introducendo la metrica. Il lettore poco familiare con i richiami della prima parte può vedere la lezione di relatività base.

§ 1.2.1. Dilatazione dei tempi. — Un orologio in moto rispetto a un osservatore inerziale sembra rallentare, rispetto a quando l'orologio è visto fermo. Se il tempo fra due eventi è Δt_0 nel sistema di riferimento in cui avvengono nello stesso posto, un osservatore che vede il sistema muoversi a velocità v misurerà un intervallo di tempo più lungo Δt, dato da:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.3}$$

§ 1.2.2. Contrazione delle lunghezze. — Un oggetto in movimento rispetto a un osservatore inerziale appare accorciato nella direzione del moto. Se un oggetto ha una lunghezza propria L_0 misurata nel sistema di riferimento in cui è a riposo, un osservatore che vede l'oggetto muoversi a velocità v misurerà una lunghezza L ridotta

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.4}$$

1.3 Redshift

Spieghiamo ora cosa sia il redshift, fenomeno che potreste non conoscere nel contesto della relatività ma di cui avete esperienza perché spiega la modulazione della frequenza della sirena di un'ambulanza che vi passa davanti. Mentre in acustica la frequenza del suono è associata a quanto esso sia alto o basso, in ottica la frequenza della luce ci dice il suo colore: vediamo frequenze alte blu e frequenze basse rosse.

Per un raggio di luce emesso da una sorgente che si allontana dall'osservatore a velocità v, c'è una differenza fra la frequenza ν misurata dall'emettitore e la frequenza ν' misurata dal recettore. La loro relazione è

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \tag{1.5}$$

§ 1.3.1. Redshift Gravitazionale. — Ci interroghiamo ora su cosa accada alla frequenza di un fotone che sale lungo un potenziale gravitazionale. Questa domanda sembra difficile, perché non abbiamo ancora una teoria della gravità relativistica, ma diventa affrontabile se ci limitiamo a un campo gravitazionale uniforme, perché questo è del tutto equivalente all'osservare un sistema inerziale senza gravità dal punto di vista di un osservatore accelerato. Quest'ultima affermazione è detta principio di Equivalenza, ed è stata formulata da Einstein ragionando su ascensori in caduta libera sulla terra e nello spazio vuoto.

L'anno scorso è stata svolta una analisi abbastanza dettagliata di questo problema nella lezione di relatività, quindi quest'anno ci limitiamo a dare un argomento più sbrigativo ma che arriva subito al punto.

Immaginiamo di lasciar cadere una pallina di massa m da ferma dalla cima di una torre alta h, con energia interna iniziale $E = mc^2$. Quando arriva a terra, la sua energia cinetica sarà aumentata di mgh. Immaginiamo di convertire la pallina in un fotone di energia $E' = E + mgh$

(per conservazione dell'energia) diretto verso l'alto. Il fotone risale la torre e, arrivato in cima, è convertito di nuovo in una pallina di massa m ed energia $E = mc^2$ (stessa massa ed energia iniziali perché il ciclo, in cui ogni passaggio è reversibile, deve potersi chiudere). Concludiamo allora che il fotone deve avere perso una energia mgh nel risalire la torre, ovvero il rapporto fra la variazione di energia e l'energia iniziale è

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{-mgh}{mc^2} = -\frac{gh}{c^2} \tag{1.6}$$

Ricordando infine che l'energia di un fotone è proporzionale alla sua frequenza (con costante di proporzionalità detta costante di Planck), e che gh corrisponde all'aumento del potenziale gravitazionale ΔV, si ottiene che

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta V}{c^2} \tag{1.7}$$

Questo *redshift gravitazionale* fu misurato sperimentalmente per la prima volta da Pound e Rebka nel 1959 presso i laboratori Jefferson dell'università di Harvard.

§ 1.3.2. Introduzione alla metrica. — In questa parte cerchiamo di motivare l'introduzione della metrica, l'oggetto che ci dice come interpretare le coordinate in relatività generale per ottenere quantità fisiche. Ma perché ci serve introdurre coordinate non fisiche in primo luogo? Il motivo ha a che fare con la curvatura dello spazio.

Ad esempio, su una sfera di raggio 1 possiamo definire la distanza r_D fra due punti A, B come la lunghezza dell'arco che collega A e B. Ma potremmo anche definire la distanza $r_P = \frac{p}{2\pi}$ dove p è la lunghezza della circonferenza centrata in A e passante per B. Le due coincidono in spazio piatto, ma vanno distinte in spazio curvo. Per fare un esempio, la metrica che descrive un buco nero di Schwarzschild fa uso di una coordinata r definita in modo tale che il luogo dei punti a r assegnato è una sfera di raggio $4\pi r^2$.

Discutiamo ora lo spazio intorno a una stella di massa M, come il sole, e immaginiamo un osservatore fermo rispetto ad essa. La situazione è completamente stazionaria, cioè non c'è nessun cambiamento nel tempo. La luce emessa dalla stella al tempo t_e ha una certa fase ϕ. Questa luce arriva all'osservatore al tempo t_0, con medesima fase ϕ. Non sappiamo di preciso che traiettoria nello spazio-tempo segua la luce, ma certamente ha senso pensare che la luce emessa a un tempo successivo $t_e + T_e$, diciamo dopo un periodo completo quando la fase torna ϕ, segua una traiettoria nello spazio-tempo identica alla precedente (per ipotesi di stazionarietà) ma traslata avanti nel tempo. Tuttavia ora sorge un paradosso, perché il nuovo raggio di luce arriverà all'osservatore a un tempo $t_0 + T_e$, mentre dovrebbe arrivare a un tempo $t_0 + T_0$ con T_0 e T_e legati dalla relazione del redshift vista prima. Cosa sta succedendo?

La risposta è che dobbiamo distinguere il tempo coordinata t, che è quello che resta uguale ovunque, e il tempo fisico τ che passa fra due eventi time-like separated. In questo caso il tempo coordinata ha una sua qualche ragione d'essere (coincide con il tempo fisico misurato da un osservatore a grandissima distanza, dove il campo gravitazionale è nullo e lo spazio è piatto), ma in generale solo τ avrà una vera interpretazione fisica, mentre le coordinate non ce l'hanno.

Scriviamo la relazione fra $\mathrm{d}\tau$ e $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}\tau = f(r)\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

dove $f(r)$ è al momento incognita. Prendiamo $f(\infty) = 1$, in modo da dare a t l'interpretazione immediata di tempo fisico per osservatori a infinito (senza un fattore costante di proporzionalità, che avremmo potuto introdurre perché le coordinate non hanno significato fisico).

Ora cerchiamo di capire come sia fatta $f(r)$ facendo uso della formula 1.7. Sia ν_∞ la frequenza della luce a infinito, e sia $T_\infty = \nu_\infty^{-1}$. L'equazione 1.7 ci dice che

$$\frac{\nu_r - \nu_\infty}{\nu_\infty} = \frac{GM}{c^2 r} \tag{1.9}$$

Possiamo però calcolare i periodi fisici (cioè l'inverso delle frequenze) a diverse distanze facendo uso dell'equazione 1.8. In particolare,

$$\nu_r^{-1} = T_r = f(r)\Delta t = f(r)T_\infty = f(r)\nu_\infty^{-1} \tag{1.10}$$

dove abbiamo usato che il tempo fisico T_r è legato al tempo coordinata Δt da un fattore $f(r)$; abbiamo poi ricordato che Δt è lo stesso a ogni r, scegliendo in particolare $r = \infty$ per collegare il risultato al periodo a infinito. La conclusione sostituendo in equazione 1.9 è

$$\frac{\frac{\nu_\infty}{f(r)} - \nu_\infty}{\nu_\infty} = \frac{GM}{c^2 r} \tag{1.11}$$

da cui

$$f(r) = \frac{1}{1 + \frac{GM}{c^2 r}} \tag{1.12}$$

Questa risposta è corretta entro i limiti di validità della formula del potenziale gravitazionale che abbiamo utilizzato $V = -\frac{GM}{c^2 r}$, valida a grande r ($r \gg \frac{GM}{c^2}$), e fra poco commenteremo meglio su quale sia il risultato completo in relatività generale.

Veniamo ora alla metrica. Osserviamo che la formula 1.8 ci consente di misurare il tempo proprio, che in relatività ristretta calcolavamo con la formula

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{c^2} \tag{1.13}$$

Per rendere più confrontabili le due formule, conviene prendere il quadrato di entrambi i membri di 1.8

$$\mathrm{d}\tau^2 = f^2(r)\mathrm{d}t^2 \tag{1.14}$$

Quest'ultima formula, così come 1.8, calcola il tempo proprio fra eventi a stesse coordinate x, y, z, da cui $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$. Le due formule possono essere quindi combinate provando a indovinare che

$$\mathrm{d}\tau^2 = f^2(r)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{c^2} \tag{1.15}$$

Questa espressione (che in realtà non è completamente corretta) cattura però un punto importante. La *metrica*, cioè l'espressione di $\mathrm{d}\tau$ qui sopra, non è la solita a cui siamo abituati nello spazio piatto di Minkowski. Vedremo nella prossima sezione un esempio di metrica, quella della sfera, che descrive uno spazio curvo.

Per completezza, presentiamo al lettore la metrica corretta all'esterno di una distribuzione di massa a simmetria sferica, valida anche per descrivere un buco nero non rotante. Per prima cosa ridefiniamo $f(r)$ come

$$f^2(r) \equiv 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \tag{1.16}$$

Notiamo che questa definizione coincide con la precedente per $r \gg \frac{GM}{c^2}$. Per il sole, $\frac{GM}{c^2}$ è circa un kilometro, mentre la metrica che stiamo per dare è valida solo all'esterno del sole, il cui raggio $r_\odot$ è quasi un milione di kilometri. Si ha quindi $r \geq r_\odot \gg \frac{GM}{c^2}$. La metrica corretta è

$$\mathrm{d}\tau^2 = f^2(r)\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2 f^2(r)}\mathrm{d}r^2 - \frac{r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2}{c^2} \tag{1.17}$$

La conclusione fisica è che la geometria dello spazio-tempo, che è la geometria di Minkowski in relatività ristretta, è ora cambiata in qualcosa di nuovo. Il motivo del cambiamento è che lo spazio-tempo è curvo. Più avanti quantificheremo la curvatura, utilizzando opportune derivate seconde della metrica. Quanto fisicamente sia curvo lo spazio-tempo è dettato dalla materia, cioè dal tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$.

sez. 2 — La Relatività Generale

La discussione fino a questo punto motiva uno studio (rapido) delle geometrie curve, come quella della sfera. L'idea sarà che la metrica ci informa sulla distanza/tempo proprio fra eventi molto vicini fra loro, mentre per eventi finitamente lontani servirà sommare i contributi infinitesimi con un integrale.

Uno dei contributi principali di Einstein fu di intuire ciò che John Wheeler sintetizzerà come "La materia dice allo spazio-tempo come curvarsi, mentre lo spazio-tempo dice alla materia come muoversi". Nella seconda parte della sezione spiegheremo a parole quali elementi entrano in gioco nelle equazioni della Relatività Generale, senza entrare nei particolari.

2.1 Geometria dalla sfera in poi

Faremo un po'di allenamento sulla geometria della sfera, per la quale sapete già tutti i risultati.

Questa è la metrica della sfera di raggio r con gli angoli

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{2.1}$$

Possiamo riesprimere questa formula scrivendo la tabella

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r^2 & \\ & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

dove μ, ν sono θ, ϕ; θ è la prima riga/colonna mentre ϕ la seconda. La tabella ci dice che il coefficiente di $\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}\theta$ in equazione 2.1 è r^2, etc.

La distanza fra due punti allo stesso meridiano (mettete $\mathrm{d}\phi = 0$) è $r\Delta\theta$ con $\Delta\theta$ l'angolo fra i due punti, mentre per due punti allo stesso parallelo (mettete $\mathrm{d}\theta = 0$) è $r\sin\theta\Delta\phi$, con θ l'angolo polare di entrambi i punti, separati ora da un angolo $\Delta\phi$. Notate che l'estensione da distanze infinitesime a finite passa dal fare i seguenti integrali banali

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} r\mathrm{d}\theta = r\Delta\theta, \tag{2.3}$$

$$\int_{\phi_0}^{\phi_0+\Delta\phi} r\sin\theta\mathrm{d}\phi = r\sin\theta\Delta\phi \tag{2.4}$$

Vogliamo ora calcolare l'area della sfera, sommando l'area di tanti tasselli infinitesimi. Un tassello bidimensionale si ottiene prendendo un punto (θ, ϕ) e variando o θ a fisso ϕ, ottenendo un segmentino di lunghezza $r\mathrm{d}\theta$, o variando ϕ a fisso θ ottenendo un segmentino di lunghezza $r\sin\theta\mathrm{d}\phi$. L'area del rettangolo è ora il prodotto:

$$\mathrm{d}A = r\mathrm{d}\theta \times r\sin\theta\mathrm{d}\phi = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{2.5}$$

L'area della sfera si ottiene facendo l'integrale doppio in θ e ϕ con gli opportuni estremi.

2.2 Equazioni di campo e moto delle particelle

Abbiamo visto nella parte del redshift gravitazionale che la metrica può non essere quella di Minkowski, in presenza di gravità. Il desiderio di Einstein era quindi di legare il fatto che la metrica non sia Minkowski alla presenza di materia, ma questo desiderio sembra ostacolato dal fatto che possiamo simulare localmente la gravità, anche in totale assenza di materia, accelerando rispetto ai sistemi inerziali. Qual è dunque la proprietà che deve avere una metrica per descrivere uno spazio-tempo che contiene davvero materia?

La risposta può essere raggiunta in modo intuitivo come segue, e tutto parte enfatizzando la parola ‘localmente’ quando parliamo di simulare la gravità. La caratteristica principale della gravità fittizia generata accelerando in uno spazio vuto è che essa è perfettamente uniforme. La gravità di oggetti fisici invece tende a non essere uniforme, per esempio gli oggetti cadono verso il centro della terra, quindi nel loro moto la loro accelerazione aumenta e le loro traiettorie convergono. La quantità geometrica che ci interessa non può quindi essere completamente legata puramente a un punto dello spazio-tempo, e questo si può ottenere considerando derivate della metrica poiché queste relazionano la metrica a punti (infinitesimalmente) distanti.

Questa intuizione unita a considerazioni più matematiche ci porta a valutare i tensore di Einstein, costruito con derivate della metrica. Questo oggetto viene infine eguagliato al tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ che quantifica la materia, arrivando a

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

dove la costante di proporzionalità sulla destra è fissata in modo da ottenere il corretto limite Newtoniano.

Il problema successivo è capire come si muovono le particelle data una metrica. Questo problema è (in parte) risolto affermando che le particelle si muovono lungo le curve “più dritte” possibili nello spazio-tempo, dette geodetiche. Scrivere l’equazione non è particolarmente interessante, ma è interessante osservare che per particelle senza massa vale la regola che conosciamo già dalla relatività ristretta

Osservazione. I raggi di luce (e in generale le particelle senza massa) si muovono lungo curve di tipo luce, cioè curve con $\mathrm{d}s^2 = 0$.

SEZ. 3 — COSMOLOGIA

In questa sezione ci interesseremo dell’universo su grande scala, interessandoci alla cosmologia. Osserviamo per esempio che le galassie lontane recedono da noi e che l’universo si sta espandendo, quindi dovremo misurare distanze e saremo spinti a considerare la metrica. Partiremo da alcune ipotesi per costruire una candidata metrica (ansatz) che dipenderà da un solo parametro, che governerà l’evoluzione dell’universo.

L’ansatz parte osservando che l’universo su grande scala è omogeneo e isotropo, per esempio ogni punto x, y, z nello spazio ha la stessa densità media di materia in media. Questo suggerisce di mantenere la parte spaziale della metrica di Minkowski, che è a sua volta omogenea e isotropa. Le distanze fisiche dipendono però dal tempo, poiché l’universo si espande, quindi rispetto alla metrica di Minkowski aggiungeremo un prefattore $a(t)$ detto *fattore di scala*

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{a^2(t)}{c^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) \tag{3.1}$$

Questa semplice modifica è sufficiente per fare quasi tutta la cosmologia (l’unica limitazione è che le sezioni spaziali sono state assunte piatte, mentre potrebbero avere curvatura positiva o negativa). Convenzionalmente si prende a con dimensioni di lunghezza, mentre x, y, z senza dimensioni.

Una riscrittura di 3.1 è con la parte spaziale scritta in coordinate sferiche. Scrivendo la parte spaziale della metrica usando 2.1 e aggiungendo $\mathrm{d}r^2$ per tener conto anche degli spostamenti radiali, si ha

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{3.2}$$

da cui la metrica 3.1 si riscrive come

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{a^2(t)}{c^2}(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2) \tag{3.3}$$

3.1 Equazioni di Friedmann

Inserendo questa metrica nelle equazioni di Einstein si ottengono due equazioni per l'evoluzione di $a(t)$ nel tempo, dette equazioni di Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{3.4}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \tag{3.5}$$

dove ρ e p sono la densità di energia e pressione medie nell'universo al tempo t. Diversi universi emergeranno a seconda delle nostre scelte sul contenuto di energia.

Si definisce $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ la costante di Hubble, che come vedremo non sarà quasi mai costante, se non nell'universo che effettivamente abitiamo oggi.

3.2 Distanze et cetera

Procediamo ora ad applicare quanto visto in 2.1 per calcolare distanze e tempi. La parte tempo della metrica è uguale a quella in spazio piatto, quindi gli intervalli Δt della coordinata t rappresentano il tempo fisico che trascorre fra due eventi che avvengono nello stesso luogo.

Al contrario, la parte spaziale della metrica ha un prefattore $a(t)$, dunque le coordinate x, y, z non hanno un immediato significato fisico. Fissata la distanza coordinata Δx, la distanza fisica Δx_F fra due eventi è

$$\Delta x_F = \int a(t)\mathrm{d}x = a(t)\Delta x \tag{3.6}$$

Osservazione. La distanza fisica fra due eventi dipende da quando avvengono!

Convinciamoci ora che un osservatore in caduta libera mantiene fissa la sua posizione coordinata x, y, z al variare del tempo t. È sufficiente notare che messo l'osservatore fermo all'origine $x = y = z = 0$, questi non ha motivo di scegliere una direzione particolare $\hat{n}$ verso cui spostarsi, se è in caduta libera. Ma ogni punto dello spazio è equivalente, quindi questo si applica per ogni osservatore indipendentemente dalla posizione.

Ragioniamo infine sulla velocità a cui sembrano recedere le galassie lontane. Il concetto di velocità non è immediato in relatività generale, perché le uniche velocità che hanno davvero senso sono quelle misurate rispetto a oggetti *vicini* a ciò che vogliamo studiare. Sorvolando però su questa difficoltà concettuale, prendiamo la derivata nel tempo della distanza fisica in equazione 3.6, ottenendo

$$v \equiv \frac{\mathrm{d}\Delta x_F}{\mathrm{d}t} = \dot{a}\Delta x = \frac{\dot{a}}{a}\Delta x_F \equiv H\Delta x_F \tag{3.7}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo ricordato la definizione di costante di Hubble. Vediamo quindi che le galassie si allontanano da noi a velocità proporzionale alla distanza, e sembrano allontanarsi alla velocità della luce per distanze fisiche

$$R_U = cH^{-1} \tag{3.8}$$

Possiamo interpretare R_U come il raggio dell'universo che per noi è visible. Oltre questa distanza c'è ancora universo, ma regioni che non sono in contatto causale con noi.

3.3 The Big Bang 

Studiamo ora che tipo di cosmologia emerge se pensiamo a un universo completamente riempito di polvere fredda, cioè un gas senza pressione.

Immaginiamo una scatola le cui pareti siano in caduta libera. Ciascuna parete procede a fissa distanza comovente dalle altre, ma la distanza fisica cresce come $a(t)$ nel tempo, e perciò il volume come $a^3(t)$. Sapendo che l'energia nella scatola è mN dove m è la massa di ogni particella del gas, e N il numero (conservato) di particelle, deduciamo che per un universo riempito di materia

$$\rho(t) \propto a^{-3}(t) \Rightarrow \rho(t) = \frac{a_0^3}{a^3(t)}\rho_0 \tag{3.9}$$

dove la costante di proporzionalità $a_0^3\rho_0$ è stata scelta in modo che al tempo t_0 (convenzionalmente scelto come il tempo della nostra osservazione) si abbia $a(t_0) = a_0$, $\rho(t_0) = \rho_0$. Sostituiamo questa $\rho(t)$ nella prima equazione di Friedmann 3.4 e otteniamo

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\frac{a_0^3}{a^3}\rho_0 \tag{3.10}$$

Equazioni come questa della forma $\dot{a}(t) = ka^n(t)$, k, n costanti, sono risolubili separando le variabili, cioè scrivendo

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = ka^n \Rightarrow a^{-n}\mathrm{d}a = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int a^{-n}\mathrm{d}a = k\int \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{-n+1}a^{-n+1}(t) = kt + \text{cost.} \tag{3.11}$$

da cui infine

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{n-1}} \tag{3.12}$$

Più precisamente, scegliamo cost. come $-kt_0 + \frac{a_0^{-n+1}}{-n+1}$, in modo che al tempo t_0 si abbia $a(t_0) = a_0$ come volevamo. Notiamo che il caso $n = 1$ sembra essere problematico, e in effetti in tal caso l'integrale $\int \frac{\mathrm{d}a}{a}$ fa un logaritmo, e non una costante come la formula sottintenderebbe.

Applicando quanto appena visto al problema originario dell'universo pieno di materia, e riconoscendo che $n = -1/2$ in 3.10 e 3.12, si ottiene

$$a(t) \propto t^{2/3} \Rightarrow a(t) = \frac{a_0}{t_0^{2/3}}t^{2/3} \tag{3.13}$$

ovvero che l'universo si espande in modo rallentato. Dal fatto che $a(0) = 0$ intuiamo che al tempo zero le distanze fisiche vanno contraendosi fino ad annullarsi, cioè l'universo è estremamente compresso. In effetti le leggi della fisica che conosciamo smettono di funzionare e non sappiamo come descrivere questa fase dell'universo (per il momento), che chiamiamo Big Bang.

Studiamo ora la traiettoria di un raggio di luce diretto verso di noi. I raggi di luce si spostano lungo traiettorie con $\mathrm{d}\tau^2 = 0$, e il nostro raggio si sposta in modo radiale perciò $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\phi = 0$. In conclusione

$$c^2\mathrm{d}t^2 = a^2(t)\mathrm{d}r^2 \Rightarrow c\mathrm{d}t = -a(t)\mathrm{d}r \tag{3.14}$$

dove il segno meno è stato scelto perché andando avanti nel tempo il raggio si avvicina a noi (l'origine). Integrando questa equazione e ricordando 3.13 si ha

$$\int_t^{t_0} c\frac{t_0^{2/3}}{a_0}t'^{-2/3}\mathrm{d}t' = -\int_r^0 \mathrm{d}r' \tag{3.15}$$

dove gli estremi superiori sono il tempo di osservazione t_0 alla posizione origine, mentre gli estremi inferiori sono il tempo t alla distanza r. Svolgendo gli integrali, si ottiene

$$3c\frac{t_0^{2/3}}{a_0}(t_0^{1/3} - t^{1/3}) = r \tag{3.16}$$

Useremo questa equazione nella prossima sezione, in una forma più generale. Per ora, osserviamo che mettendo $t = 0$ si ottiene un valore per la distanza coordinata fra noi e il luogo da cui proverrebbe un raggio di luce partito all'inizio dell'universo, che ora ci raggiunge. Tale distanza è

$$r = \frac{3ct_0}{a_0} \tag{3.17}$$

e la distanza fisica attuale fra noi e questo luogo è $a_0 r$, ovvero

$$d_F = 3ct_0 \tag{3.18}$$

Una conclusione importante e generale è che l'eta attuale dell'universo t_0 ci dà una stima delle dimensioni dell'universo che possiamo vedere, poiché guardare più lontano implicherebbe ricevere luce da un tempo ancora precedente, che sembra impossibile.

3.4 Redshift, again

Riscriviamo l'equazione 3.16 tenendo $a(t)$ indicato, cioè partiamo da 3.14, ottenendo

$$c\int_t^{t_0} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} = r \tag{3.19}$$

e immaginiamo che alla distanza coordinata r ci sia una stella in caduta libera. Al tempo t la luce della stella ha una certa fase, che torna uguale a se stessa dopo un periodo T inverso alla frequenza della luce emessa, cioè $\nu = T^{-1}$. Riscriviamo l'equazione 3.19 ma per la luce emessa al tempo $t + T$, ottenendo

$$c\int_{t+T}^{t_0+T_0} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} = r \tag{3.20}$$

dove l'estremo temporale superiore è cambiato perché la luce partita dopo ci arriverà più tardi. Osserviamo che la frequenza della luce che riceviamo appare essere $\nu_0 = T_0^{-1}$.

Vogliamo ora relazionare T e T_0. Per farlo, eguagliamo 3.19 e 3.20 ottenendo

$$c\int_t^{t_0} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} = c\int_{t+T}^{t_0+T_0} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} \tag{3.21}$$

da cui infine

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} = \int_t^{t+T} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} \tag{3.22}$$

I periodi T, T_0 delle onde sono molto piccoli rispetto al tempo in cui cambia $a(t)$, che varia su tempi scala dell'età dell'universo. Dunque è lecito approssimare gli integrali con l'area di un rettangolo, con base la lunghezza dell'intervallo di integrazione, e altezza il valore dell'integrando all'estremo (sinistro, per noi) dell'intervallo, ottenendo

$$\frac{T_0}{a(t_0)} = \frac{T}{a(t)} \tag{3.23}$$

Ricordando le definizioni di frequenza di emissione $\nu_e = T^{-1}$ e frequenza alla ricezione $\nu_0 = T_0^{-1}$, si ha infine

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t)} \tag{3.24}$$

Si definisce z il redshift della luce, ovvero

$$z \equiv \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0} \Rightarrow 1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t)} \tag{3.25}$$

Osserviamo che $z > 0$ se la frequenza che osserviamo è minore di quella di emissione $\nu_0 < \nu_e$, in accordo con l'intuizione che la frequenza della luce si è spostata verso il rosso a causa dell'espansione dell'universo. Il big bang è a redshift infinito.

3.5 Universi con più componenti di energia

Abbiamo visto in una sezione precedente come evolve un universo costituito puramente da materia fredda, studiando in particolare come la densità di energia della materia cambia con il fattore di scala a. Negli esercizi vedremo anche il caso di un universo pieno di radiazione elettromagnetica e il caso di universo vuoto ma con costante cosmologica (energia oscura). Affrontiamo ora il problema di descrivere la situazione generale, in cui tutte e tre le componenti sono presenti in simultanea.

Definiamo ρ_0 come la densità di energia attuale nell'universo. Definiamo inoltre $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda$

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_0}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_0}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_0} \tag{3.26}$$

che descrivono come l'energia è attualmente ripartita nelle sue varie forme. Vale che

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 \tag{3.27}$$

Negli esercizi vedremo come variano $\rho_{r,\Lambda}$ in funzione di a, oltre a ρ_m che abbiamo già visto. È usuale riesprimere a in funzione del redshift per cui, ad esempio, la densità di materia nel passato a redshift z è legata a quella attuale da

$$\rho_m(z) = \frac{M}{a^3(z)} = \frac{M}{a_0^3}\frac{a_0^3}{a^3(z)} = \rho_0\frac{a_0^3}{a^3(z)} = \rho_0(1+z)^3 \tag{3.28}$$

ESERCIZI

☆☆☆☆☆ **Esercizio 1 Prima equazione di Friedmann** Proveremo a derivare la prima equazione di Friedmann senza sapere le equazioni di Einstein e limitandoci al caso di spazio piatto, ragionando come segue. Naturalmente la giustificazione completa (specialmente dei fattori numerici) è a posteriori.

Immaginiamo un universo Newtoniano riempito da un gas di particelle non-relativistiche, con densità di materia media ρ. Prendiamo un punto qualsiasi O e assumiamo che le particelle si allontanino radialmente da O con velocità proporzionale alla distanza da O

$$v(r) = Hr, \quad H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{3.29}$$

Se vi dà fastidio riempire un universo Newtoniano di materia in modo uniforme, immaginate che a grande distanza da O non ci sia più materia. Si chiede

1. Scrivere l'energia di legame gravitazionale percepita da una particella di massa m a distanza r.

2. Scrivere l'energia cinetica (non-relativistica) della medesima particella, in funzione della sua distanza da O.

3. Se l'energia totale della particella fosse negativa, l'orbita sarebbe legata e l'espansione si arresterebbe (spazio a curvatura negativa). In modo (qualitativamente) simile, se l'energia fosse positiva avremmo uno spazio a curvatura positiva; supponiamo quindi $E = 0$ e troviamo finalmente la prima equazione di Friedmann nel caso di spazio piatto.

☆☆☆☆☆ **Esercizio 2 Seconda equazione di Friedmann** Proviamo ora a trovare la seconda equazione di Friedmann.

1. Quantificare il volume fisico al tempo t di una regione di spazio a forma di cubo, che abbia lato di lunghezza coordinata comovente L.

2. Quantificare l'energia dentro tale regione, assumendo che l'energia media a tempo t sia $\rho(t)$.

Ricordando la prima equazione di Friedmann, mostrare che la seconda equazione di Friedmann è equivalente alla condizione di espansione adiabatica (cioè senza produzione di entropia) dell'energia nell'universo.

★☆☆☆☆ **Esercizio 3 Check della legge di Hubble** La legge di Hubble può confondere, perché sembra selezionare un punto come "privilegiato", perché intorno ad esso avviene l'espansione. Cercheremo ora di convincerci della consistenza delle equazioni in approssimazione non-relativistica, quando il concetto di velocità di un corpo distante ha ancora senso.

Consideriamo allora l'espansione quando centrata intorno al punto O oppure intorno al punto O', e per entrambi i casi scrivere la velocità a cui recede un terzo punto P in funzione dei vettori distanza OP, $O'P$. Applicare infine la legge di Hubble per dedurre la velocità a cui recede O' da O. Queste tre velocità sono compatibili con la legge della somma Galileiana delle velocità? Usare notazione vettoriale per discutere il caso generale di O, O', P disallineati.

☆☆☆☆☆ **Esercizio 4 Forza dell'espansione dell'universo** Tracciare la linea mondo in coordinate comoventi per due osservatori in caduta libera, che partono vicini e fermi uno rispetto all'altro. Come evolve la loro distanza fisica? Si consideri un atomo di idrogeno e si stimi la "forza efficace" data dall'espansione dell'universo che agisce sull'elettrone, e la si compari con la forza elettromagnetica fra elettrone e protone. Chiediamoci ora come sarebbe fatto un universo in cui le due forze sono invece comparabili: quale sarebbe la costante di Hubble di tale universo, fissate tutte le altre costanti? Quanto sarebbe grande l'universo osservabile, in tal caso?

Si ricordino le seguenti quantità misurate:

$$m_e \simeq 10^{-30}\text{kg}, \quad H_0 \simeq 10^{-18}\text{s}^{-1}, \quad r_B \simeq 10^{-10}\text{m}, \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \simeq 10^{-28}\text{Nm}^2$$

★★☆☆☆ **Esercizio 5 Universi di luce e energia oscura** La legge di scala più generale per la densità di energia è $\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^n$. Usando la prima equazione di Friedmann, ricavare $a(t)$ per n generico.

Vogliamo domandarci quale sia la potenza di a corretta se l'universo è riempito di radiazione elettromagnetica. Immaginiamo nuovamente una scatola invisibile con le pareti in caduta libera, e definiamo densità di energia l'energia dentro la scatola diviso il suo volume. Per prima cosa, come nel caso della materia, i volumi fisici scalano come a^3, e visto che il volume va al denominatore abbiamo subito $\propto a^{-3}$.

Tuttavia nel caso della materia avevamo osservato che l'energia dentro la scatola resta costante in quanto proporzionale al numero di particelle. Consideriamo invece un'onda di lunghezza d'onda λ. Come varia la lunghezza d'onda? E l'energia dell'onda?

Stabilire il valore di n in $\rho \propto a^{-n}$ nel caso della radiazione, e ricavare come evolve a nel tempo.

Un altro "fluido" che la relatività generale consente di introdurre è l'energia oscura. Questo fluido è una proprietà intrinseca di ogni regione di spazio-tempo, nel senso che un dato volume fisico (diciamo 1m^3) conterrà sempre la stessa quatità di energia oscura (6×10^{-10}J), indipendentemente dal tempo a cui poniamo la domanda. Notare che in questo caso, come nel precedente, l'energia non si conserva. Qual è n in $\rho \propto a^{-n}$ nel caso dell'energia oscura? Come evolve $a(t)$?

Per quale n la costante di Hubble viene effettivamente costante?

★★★☆☆ **Esercizio 6 E la pressione?** Vogliamo controllare la seconda equazione di Friedmann. Assumendo ancora una volta $\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^n$ e che la pressione e la densità di energia siano legate da una costante adimensionale w secondo $p = wc^2\rho$, quanto vale w in funzione di n? Controllare i casi di n materia, radiazione e costante cosmologica, verificando che per la materia fredda la pressione venga effettivamente nulla.

★★★★☆ **Esercizio 7 Distanza di luminosità** Una domanda fondamentale in cosmologia è quanto siano distanti le cose che osserviamo. Il problema è molto difficile, ma come vedremo nel problema successivo un passo importante verso la soluzione è capire come l'intensità I della luce che osserviamo sia legata alla luminosità intrinseca L della stella, cioè alla quantità di energia che questa emette nel tempo. Classicamente diremmo che l'energia a distanza r si distribuisce su una sfera di area $4\pi r^2$, e perciò l'intensità della luce è

$$I = \frac{L}{4\pi r^2} \tag{3.30}$$

Come possiamo immaginare, questa formula andrà modificata in relatività generale. Si definisce la *distanza di luminosità* r_L tale per cui sia ancora vero che

$$I = \frac{L}{4\pi r_L^2} \tag{3.31}$$

Cercheremo ora di esprimere r_L in termini della distanza comovente r e del fattore di scala al tempo attuale a_0 e al tempo di emissione $a(t_e)$.

- Stabilire l'area di una sfera di raggio r in coordinate comoventi, aiutandosi eventualmente comparando equazione 3.3 con 2.1. L'energia emessa per unità di tempo si distribuisce su questa area qui.

- Veniamo ora all'energia emessa per unità di tempo. Per prima cosa, l'energia è emessa sotto forma di luce, che redshifta attraversando l'universo in espansione. Relazionare l'energia di un fotone al momento di emissione con la sua energia quando è visto al tempo attuale, ricordando la parte di lezione sul redshift e il fatto che la frequenza e l'energia di un fotone sono direttamente proporzionali (costante di Planck h).

- Ci sono due aspetti legati all'energia emessa per unità di tempo. Nel punto precedente abbiamo quantificato l'energia osservata in funzione di quella emessa. Il secondo aspetto è il tempo in cui una data quantità di fotoni viene emessa o ricevuta. Ora si chiede di relazionare il tempo in cui un dato numero di fotoni è emesso con il tempo in cui sono ricevuti.

  Potremmo essere tratti in inganno dalla metrica, poiché per eventi a stesse coordinate spaziali comoventi si ha $\mathrm{d}tau = \mathrm{d}t$ indipendentemente da a. Tuttavia abbiamo visto a lezione che un periodo T della luce all'emissione non coincide con un periodo T_0 della luce all'osservazione. La "falla" nell'argomento è che dobbiamo specificare fra quali due eventi vogliamo calcolare l'intervallo di tempo, e questo relaziona punti diversi nello spazio-tempo (emissione e ricezione). Oltre al calcolo dettagliato della lezione, si pensi intuitivamente che c'è un redshift nelle frequenze, e quindi nei tempi, perché parti lontane dell'universo si allontanano e quindi si ha l'usuale doppler relativistico.

Mettendo insieme i tre punti precedenti, si dia una formula per la distanza di luminosità r_L in funzione della distanza comovente r e del redshift z.

★★★★★ **Esercizio 8 La costante di Hubble** In questo problema cercheremo di capire un modo attraverso cui è stata misurata la costante di Hubble, venuto storicamente per primo, che fa uso della cosiddetta *distance ladder*: l'idea è di guardare le galassie lontane e misurarne la distanza di luminosità in funzione del redshift.

Prima si guardano stelle vicine, come le Cefeidi e le RR Lyrae, per le quali sappiamo calcolare la distanza con tecniche di parallasse. Poi si guardano le supernove vicine a noi, la cui distanza si ricava usando le informazioni dalle Cefeidi. Il bello delle supernove è che la loro luminosità intrinseca (cioè l'energia che emettono) è sempre la stessa, per via della particolare fisica che le governa. Quindi la luminosità intrinseca delle supernove in altre galassie è nota, e perciò quella apparente (cioè misurata) consente di ricavare la distanza di luminosità.

In questo esercizio arriveremo a scrivere una relazione fra redshift della galassia (che si misura guardando il colore della luce che ci arriva) e la distanza di luminosità.

1. Per prima cosa, scrivere come cambia la costante di Hubble H in funzione del redshift, supponendo noto il valore attuale H_0 e come è distribuita l'energia fra materia etc, ovvero siano note Ω_m, Ω_Λ, Ω_r etc.

2. Scrivere la relazione fra redshift z e fattore di scala a, e usarla per arrivare a una espressione che leghi H, z e $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

3. Supponendo di mettere noi osservatori all'origine del sistema di coordinate, la luce delle galassie lontane arriva a noi muovendosi in modo puramente radiale lungo traiettorie di tipo luce. Scrivere quale lunghezza comovente $\mathrm{d}r$ viene coperta dalla luce in un tempo $\mathrm{d}t$.

4. Usare i tre punti precedenti per arrivare a una espressione della distanza comovente percorsa dalla luce, epressa in funzione di z, $\mathrm{d}z$, H_0, $\Omega_{m,\Lambda,r}$, eliminando cioè $\mathrm{d}t$ e H.

5. L'espressione precedente può essere integrata per ottenere la distanza comovente fra noi (redshift $z = 0$) e una galassia a redshift z. Dalla distanza comovente, ottenere infine la distanza di luminosità.