

Analogie in Fisica Classica

Daniele Battesimo Provenzano*

8 febbraio 2025

Sommario

In questa lezione verranno analizzate in dettaglio alcune analogie tra argomenti appartenenti a diverse branche della Fisica Classica, ma descrivibili con gli stessi modelli matematici. Sapevate che i raggi di luce possono curvare per formare delle orbite chiuse e che la legge di Snell vale anche per i terremoti? Oppure, sapevate che la distribuzione della velocità in un fiume che scorre attorno al pilastro di un ponte è uguale al campo elettrico di due cariche poste molto lontano da un particolare disco? Infine, sapevate che il moto delle tartarughe appena nate sulla spiaggia, che scappano dai granchi, riesce a spiegare di quanto si riduce la visibilità durante una giornata di nebbia? Dopo la lezione lo saprete sicuramente.

*daniele.provenzano@sns.it oppure daniele.battesimo.provenzano@gmail.com

— INDICE —

1	Evanescenza in tutte le salse	3
2	Risonanza meccanica e circuitale	9
2.1	Oscillatore armonico smorzato	9
2.2	Oscillatore armonico smorzato e forzato	11
3	Legge di Snell in tutte le salse	14
3.1	Derivazione della legge di Snell	17
3.2	Miraggi inferiori e miraggi superiori	18
4	Orbite in ottica e in campi di forza radiali	19
5	Decadimento di orbite	23
6	Analogia tra elettrostatica e fluidodinamica	25
6.1	Campo elettrico e campo di velocità	25
6.2	Metodo delle immagini	26
6.3	Esempi di campi elettrici e flussi in 2D	29
6.4	Esempi di campi elettrici e flussi in 3D	34
6.5	Forza sui conduttori e sugli ostacoli	36

SEZ. 1 — EVANESCENZA IN TUTTE LE SALSE —

Attenuazione ed evanescenza sono parole che si riferiscono al decadimento spaziale di grandezze fisiche. In questa sezione vedremo come l'evanescenza sta alla base di fenomeni apparentemente molto diversi tra di loro.

Esempio 1.1 (Povere tartarughe). *Le tartarughe marine depongono le uova sulle spiagge. I nidi devono essere sufficientemente lontani dall'acqua per non essere travolti dalle onde, quindi le tartarughe appena nate devono percorrere un tratto di spiaggia pieno di predatori prima di entrare in acqua. Consideriamo un tratto di spiaggia rettangolare, di lati L_x e L_y , e assumiamo che N_0 tartarughe nascano allo stesso tempo a una distanza L_x dall'acqua e che i nidi siano uniformemente distribuiti lungo il lato di lunghezza L_y . Quando nascono, le tartarughe vanno verso l'acqua con velocità costante v , e possono essere considerate oggetti puntiformi. Purtroppo sulla spiaggia ci sono N_g granchi, distribuiti uniformemente e fermi, che mangiano tutte le tartarughe entro una distanza r_g da loro.*

1. Quante tartarughe sono ancora vive a una distanza x dai nidi?
2. Come cambierebbe la risposta se i granchi avessero dei riflessi finiti, caratterizzati dal tempo di reazione t_s ?

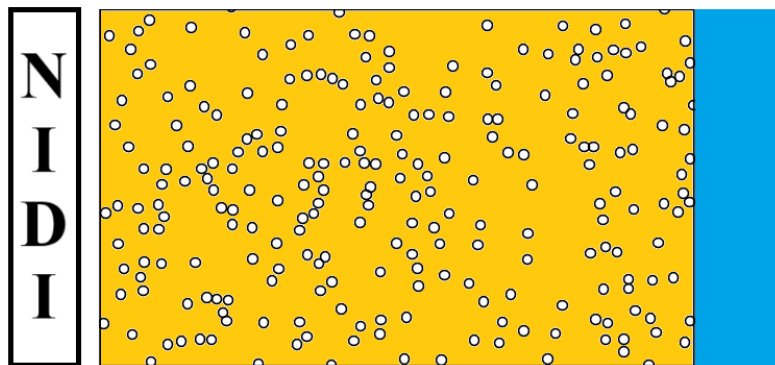


Figura 1: Schematizzazione del tratto di spiaggia su cui si muovono le tartarughe. I cerchi bianchi rappresentano i campi visivi dei singoli granchi.

Cominciamo col dire che questa soluzione vale solamente nella configurazione limite in cui sono presenti tantissimi granchi e r_g è piccolissimo, come in Fig. 2.

1. In questo caso, si intuisce già che la soluzione non dipende in alcun modo dalla velocità delle tartarughe. Questo è dovuto al fatto che i granchi hanno un tempo di reazione nullo: non appena le tartarughe entrano nel loro raggio d'azione, esse vengono mangiate istantaneamente.

Consideriamo una striscetta di spiaggia distante x dai nidi, lunga L_y e spessa dx . Le tartarughe che muoiono in questa porzione sono

$$dn(x) = -n(x) \frac{2r_g N_g}{L_x L_y} dx.$$

Cerchiamo di giustificare quest'ultima equazione. La densità dei granchi sulla spiaggia è $\eta_g = N_g/(L_x L_y)$, quindi nella striscia di spiaggia in esame ci sono $\eta_g L_y dx = N_g dx/L_x$ granchi. Dato che i granchi sono distribuiti omogeneamente, la frazione/percentuale di tartarughe che muoiono è pari alla frazione/percentuale di spazio coperto dai granchi sulla lunghezza L_y . Traducendo in formule, sfruttando il fatto che ogni singolo granchio

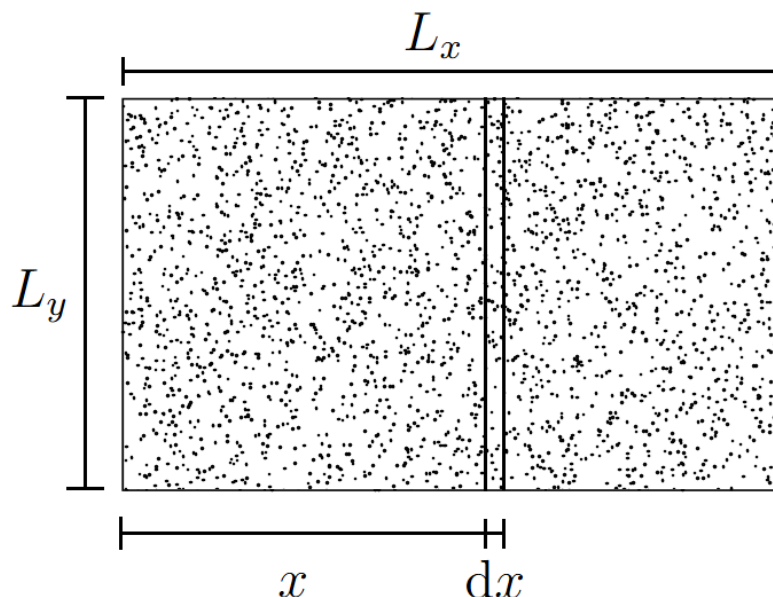


Figura 2: Schematizzazione del tratto di spiaggia su cui si muovono le tartarughe. I punti neri rappresentano i campi visivi dei singoli granchi.

contribuisce a coprire una lunghezza $2r_g$, si ha

$$\frac{dn(x)}{n(x)} = - \left(\frac{2r_g}{L_y} \right) \left(\frac{N_g dx}{L_x} \right),$$

dove il segno $(-)$ ci ricorda che $dn(x)$ è negativo perché le tartarughe muoiono, il fattore $2r_g/L_y$ è la frazione di lunghezza coperta da un singolo granchio e il secondo fattore è il numero di granchi nella striscia di spiaggia. La soluzione dell'equazione è

$$n(x) = N_0 e^{-\frac{2r_g N_g}{L_x L_y} x}.$$

Le tartarughe che riescono ad entrare in acqua sane e salve sono

$$n(x = L_x) = N_0 e^{-\frac{2r_g N_g}{L_y}}.$$

2. Per rispondere alla seconda richiesta, basta capire come cambia la lunghezza coperta da un singolo granchio al variare della velocità delle tartarughe. In questo caso sarà sicuramente più piccola di $2r_g$ perché, in base alla posizione, le tartarughe possono uscire dal raggio visivo dei granchi prima che essi se ne accorgano. Maggiore è la velocità delle tartarughe, minore sarà il campo visivo utile ai granchi per mangiarle. Facendo dei semplici ragionamenti geometrici sulla circonferenza di raggio r_g centrata su un singolo granchio, ci si accorge che la lunghezza efficace coperta è

$$2\sqrt{r_g^2 - \frac{1}{4}v^2 t_s^2},$$

che torna il valore $2r_g$ nel limite di tempo di reazione nullo. Questa relazione perde di significato quando $vt_s > 2r_g$, cioè quando lo spazio percorso dalle tartarughe nel tempo di reazione diventa maggiore del diametro del cerchio: in questo caso nessuna tartaruga muore perché nessun granchio si accorge della sua presenza. Sono troppo veloci! Limitandoci al caso $vt_s \leq 2r_g$, le tartarughe ancora vive a una distanza x sono

$$n(x) = N_0 e^{-\frac{\sqrt{4r_g^2 - v^2 t_s^2} N_g}{L_x L_y} x}.$$

Esempio 1.2 (Visibilità con nebbia). *Siamo in autostrada in un giorno di nebbia, la visibilità è di 50 m. Qual è la densità volumetrica delle goccioline d'acqua disperse in aria? Trova un'espressione analitica e fornisci una stima numerica usando valori ragionevoli per le grandezze coinvolte.*

Questo problema è la versione 3D del problema precedente. In questo caso, la sezione utile di una gocciolina di nebbia è

$$S = \pi R^2.$$

In una lastra di spessore dx , posta alla profondità x , il numero di raggi di luce si affievolisce di

$$dn(x) = -n(x) \pi R^2 \eta dx,$$

dove $n(x)$ è il numero di raggi di luce che ancora non hanno sbattuto contro alcuna particella ed η è la densità di goccioline di nebbia. La soluzione dell'equazione è

$$n(x) = n_0 e^{-\pi R^2 \eta x},$$

dove n_0 è il numero di raggi emessi dai vari oggetti. Possiamo definire la visibilità come la distanza entro cui il numero di raggi imperturbati diminuisce di un fattore e , quindi

$$d = \frac{1}{\pi R^2 \eta} \quad \Longrightarrow \quad \eta = \frac{1}{50 \text{ m} \cdot \pi R^2}.$$

Il raggio delle goccioline di nebbia è abbastanza variabile, per quanto riguarda la nebbia continentale è di qualche micron. Segue che

$$\eta \approx 10^8 - 10^9 \text{ goccioline/m}^3.$$

Esempio 1.3 (Pinball fotonico). *Schematizziamo una nube interstellare come una lastra omogenea, di spessore piccolo rispetto alle altre dimensioni, composta da grani di polvere interstellare, approssimabili a piccole sfere di raggio R . Un flusso F_I di fotoni (per unità di tempo e superficie), provenienti da una stella lontana, incide sulla nube in direzione perpendicolare a una delle sue due facce grandi. All'interno della nube i fotoni non vengono assorbiti dal grano, ma ci rimbalzano sopra come dei flipper, mantenendo invariata la loro frequenza. Alcuni fotoni riescono a superare la nube, altri vengono riflessi verso dietro. Se la densità di grano nella nube è η e lo spessore della nube è L , quanti fotoni riescono a superare la nube in regime stazionario?*

Anche in questo caso potremmo essere tentati di aspettarci una soluzione di tipo esponenziale come negli esempi precedenti. Ma in questo problema c'è una caratteristica diversa: i fotoni non vengono assorbiti, ma possono essere riflessi. Nell'Esempio 1.1, le tartarughe vengono mangiate dai granchi, quindi scompaiono come se fossero assorbite. Nell'Esempio 1.2 abbiamo implicitamente supposto che la luce venga assorbita dalle particelle di nebbia. Questa cosa ha senso? Nonostante non possiamo affermare che la luce venga assorbita, possiamo comunque dire che il nostro modello funziona. Ma perché? Se ci pensate, i fotoni riflessi vengono deviati dalla loro traiettoria rettilinea. I fotoni che determinano la (buona) visibilità sono solo quelli che non vengono deviati, perché loro trasportano il colore corrispondente agli oggetti che stanno nell'esatta direzione in cui stiamo guardando. Ai nostri occhi arrivano anche dei fotoni che sono stati deviati una o più volte, ma l'informazione che ci danno non corrisponde alla posizione vera degli oggetti presenti nella direzione in cui guardiamo, quindi non contribuiscono alla (buona) visibilità.

In questo caso, dobbiamo tener conto della riflessione. Intanto ci aspettiamo che il numero di fotoni trasmessi sia sempre maggiore del caso con assorbimento e senza riflessione. Perché? Perché ogni volta che il fotone sbatte contro una particella esso non scompare, ma viene deviato.

Magari la prima riflessione lo fa tornare indietro, ma una seconda lo può reindirizzare in avanti. Questo fa sì che i fotoni in uscita, a parità dei valori dei parametri, siano di più di quelli che garantiscono la visibilità nell'Esempio 1.2. Quindi, come agiamo? Come suggerito dal testo, ogni fotone compie un cosiddetto *random walk*, schematizzato in Fig. 3.

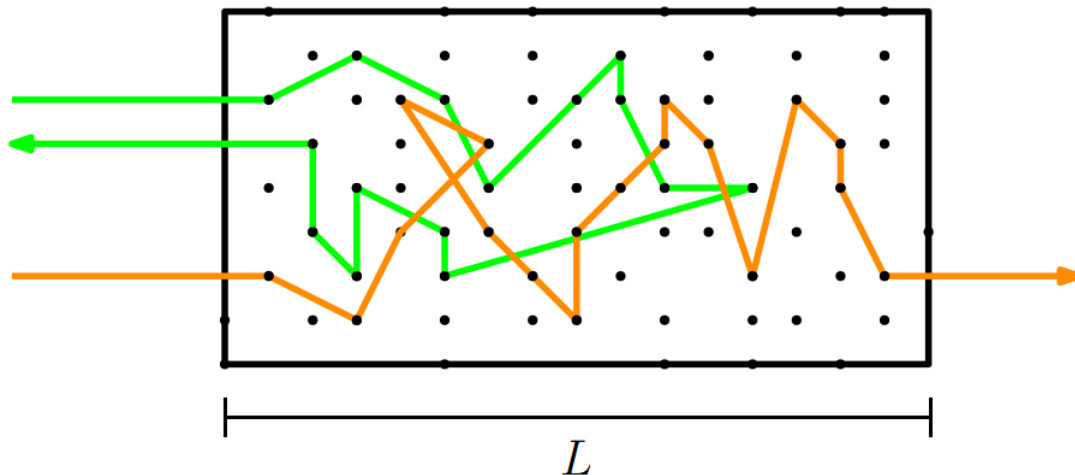


Figura 3: Random walk di due fotoni, uno riflesso e uno trasmesso.

Data l'ipotesi sulle dimensioni della nube, possiamo limitarci a studiare il caso unidimensionale in cui x descrive la profondità. Le equazioni che descrivono il random walk sono la legge di Fick e l'equazione di diffusione:

$$\mathcal{F}(x, t) = -D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2},$$

dove D è il coefficiente di diffusione e $n(x, t)$ è la densità di particelle soggette al random walk, in questo caso i fotoni, alla profondità x e al tempo t . $\mathcal{F}(x)$ è il flusso netto di fotoni alla profondità x . Il coefficiente di diffusione è definito come il cammino libero medio delle particelle per la velocità media delle stesse. Il cammino libero medio in un mezzo omogeneo caratterizzato da una densità η di corpuscoli di raggio R è

$$\lambda = \frac{1}{\pi R^2 \eta}.$$

La velocità dei fotoni è la velocità della luce c , quindi

$$D = \frac{c}{\pi R^2 \eta}.$$

Il problema chiede di studiare una situazione stazionaria, quindi di equilibrio. In questo caso, le equazioni del random walk perdono la dipendenza dal tempo:

$$\mathcal{F}(x) = -D \frac{dn(x)}{dx}, \quad \frac{d^2 n(x)}{dx^2} = 0.$$

La soluzione della seconda equazione è

$$n(x) = Ax + B,$$

dove A e B sono costanti reali. Ci servono due condizioni per determinarle.

- Per quanto riguarda i fotoni trasmessi, bisogna avere

$$n(x = L) = n_T.$$

- Per quanto concerne la situazione alla quota $x = 0$, bisogna avere

$$n(x = 0) = n_I + n_R,$$

dove n_I e n_R sono le densità di fotoni incidenti e riflessi. Potete convincervi del fatto che¹

$$n_I = \frac{F_I}{c}, \quad n_R = \frac{F_R}{c}, \quad n_T = \frac{F_T}{c}.$$

Tenete a mente che queste relazioni valgono (appena) fuori dalla nube, dove i fotoni si muovono in modo ordinato alla velocità della luce. Altra cosa: il flusso netto di fotoni alla quota $x = 0$ è $\mathcal{F}(x = 0) = F_I - F_R$. Perché in quest'ultima equazione è presente il segno $(-)$, mentre $n(x = 0) = n_I + n_R$? Ciò è dovuto al fatto che i flussi sono quantità direzionate², mentre la densità di fotoni è uno scalare.

Imponendo le condizioni appena discusse e sfruttando la conservazione del flusso totale di fotoni

$$F_I = F_R + F_T, \quad \implies \quad n_I = n_R + n_T,$$

si ottiene

$$n(x) = \frac{2(n_T - n_I)}{L} x + 2n_I - n_T,$$

che, come ci aspettavamo, è una funzione decrescente. Il flusso netto di fotoni è

$$\mathcal{F}(x) = -D \frac{dn(x)}{dx} = \frac{2D}{L} (n_I - n_T),$$

quindi è omogeneo in tutta la nube. Ciò è coerente con la nostra assunzione di stazionarietà. Alla profondità $x = L$ possiamo scrivere

$$\mathcal{F}(x = L) = F_T = \frac{2D}{L} (n_I - n_T), \quad \implies \quad n_T = \frac{F_T}{c} = \frac{2D}{cL} (n_I - n_T).$$

Ricordando la forma del coefficiente di diffusione, la soluzione di quest'ultima equazione è

$$n_T = \frac{2n_I}{2 + \pi R^2 \eta L},$$

che, nell'intervallo $0 < L < \infty$, come si vede dal grafico in Fig. 4, è una funzione *sempre* maggiore di

$$n_T = n_I e^{-\pi R^2 \eta L},$$

che è proprio la funzione che avremmo trovato in caso di assorbimento, esattamente quella dell'Esempio 1.2.

Esempio 1.4 (Evanescenza di onde elettromagnetiche piane). Consideriamo un'onda elettromagnetica monocromatica che si propaga lungo la direzione $\hat{x}$, descritta dal seguente campo elettrico

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)},$$

dove $\vec{E}_0$ è un vettore omogeneo (detto *ampiezza*), k è il modulo del vettore d'onda e ω è la frequenza. In Fisica, qualsiasi tipo di onda ha associata una relazione di dispersione, cioè un'equazione che lega k e ω . Quindi, esse non possono essere prese a caso. Nel caso di onde

¹Consideriamo, ad esempio, i fotoni incidenti. In un intervallo di tempo Δt , N fotoni si muovono di una quantità $c\Delta t$, quindi il volume di spazio che occupano durante questo tempo è $\Delta V = S c \Delta t$, dove S è la sezione del *tubo di flusso*. Il flusso di fotoni, cioè il numero di fotoni per unità di tempo e superficie, è $F_I \equiv N/(S\Delta t)$. D'altra parte, la densità di fotoni incidenti è $n_I = N/\Delta V = N/(S\Delta t) = F_I/c$.

²Anche se in questo caso non sembra, i flussi sono dei vettori. In 2D o 3D sarebbe evidente, nel nostro caso 1D abbiamo tolto le frecce sulle F .

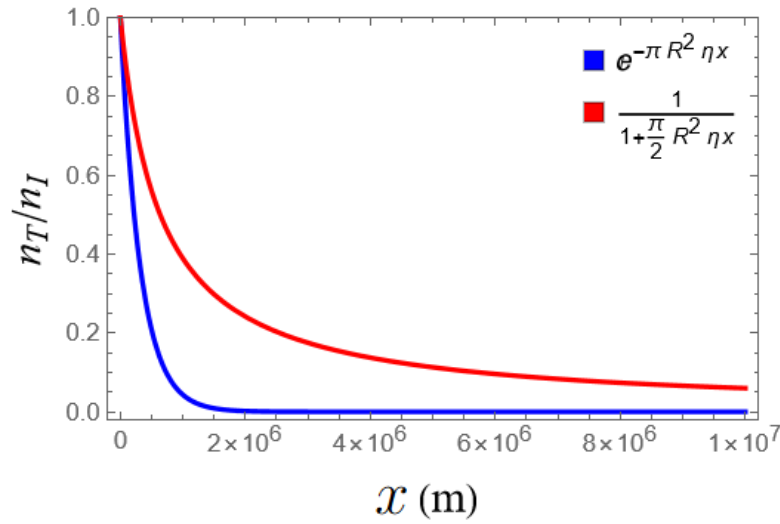


Figura 4: Confronto tra le due funzioni che descrivono l'attenuazione dell'intensità luminosa, nei casi con e senza assorbimento. I parametri usati sono $R = 10^{-6} \text{ m}$ e $\eta = 10^6 \text{ m}^{-3}$.

elettromagnetiche piane che si propagano in un mezzo isotropo di permittività elettrica $\varepsilon_0\varepsilon$ e permeabilità magnetica $\mu_0\mu$, l'equazione d'onda è

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto. Svolgiamo i calcoli:

$$(ik)(ik)\vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(-i\omega)(-i\omega)\vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}, \implies k^2 = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}, \implies k = \pm n \frac{\omega}{c}.$$

dove $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ è l'indice di rifrazione del mezzo. Questa è la relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche piane in un mezzo isotropo. Generalmente, nei dielettrici il prodotto $\varepsilon\mu$ è un numero reale positivo. Può capitare, però, che esso sia un numero reale negativo o addirittura un numero complesso. In entrambi i casi, l'indice di rifrazione n è un numero complesso. Dato che la frequenza è sempre un numero reale, in questi casi il vettore d'onda è sempre complesso, quindi può essere scritto come

$$k = \alpha + i\beta,$$

dove α e β sono numeri reali. Sostituiamo quest'espressione nel campo elettrico originario

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{-\beta x} e^{i(\alpha x - \omega t)},$$

che corrisponde all'intensità elettromagnetica

$$I \propto |\vec{E}|^2 = |\vec{E}_0|^2 e^{-2\beta x}.$$

Quindi, nei mezzi in cui $\varepsilon\mu \in \mathbb{R} < 0$ o $\varepsilon\mu \in \mathbb{C}$ le onde elettromagnetiche non riescono a propagarsi e decadono poco dopo l'interfaccia³. Questo è un altro esempio di evanescenza!

³In realtà, c'è un caso in cui le onde non decadono ma, al contrario, si ingigantiscono quando entrano in un mezzo del genere. Questo succede quando $\beta < 0$, valore che caratterizza i cosiddetti *mezzi con gain*.

SEZ. 2 — RISONANZA MECCANICA E CIRCUITALE

Iniziamo inquadrando le due seguenti configurazioni.

- Consideriamo un corpo di massa m attaccato a una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, la cui altra estremità è bloccata nell'origine di un sistema di coordinate. Inoltre, il corpo è vincolato a muoversi su una retta, è soggetto alla resistenza dell'aria, proporzionale alla sua velocità istantanea, e a una forza esterna F_{ext} . La seconda legge di Newton applicata al corpo si legge

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + k x(t) = F_{\text{ext}},$$

dove $x(t)$ è la posizione istantanea del corpo.

- Consideriamo un circuito composto da una batteria che fornisce una d.d.p. V , un resistore di resistenza R , un condensatore di capacità C e un induttore di induttanza L , collegati in serie tra di loro. La legge di Kirchhoff applicata all'intero circuito restituisce

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = V,$$

dove $q(t)$ è la carica istantaneamente presente su una faccia del condensatore.

Da quanto appena detto, possiamo osservare che le equazioni che governano l'evoluzione temporale dei due sistemi sono analoghe. Non è un caso se la costante elastica effettiva di N molle in serie/parallelo e la capacità effettiva di N condensatori in serie/parallelo si calcolano allo stesso modo:

$$\begin{aligned} k_{\text{serie}}^{\text{eff}} &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} \right)^{-1}, & k_{\text{parallelo}}^{\text{eff}} &= \sum_{i=1}^N k_i, \\ C_{\text{serie}}^{\text{eff}} &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right)^{-1}, & C_{\text{parallelo}}^{\text{eff}} &= \sum_{i=1}^N C_i. \end{aligned}$$

Analogie analoghe :) ci sono anche tra massa e induttanza e tra resistenza meccanica ed elettrica. Quindi, possiamo semplicemente studiare cosa succede nel caso meccanico, per ricavare quello elettrico basta sostituire parametri e variabili in ogni equazione.

2.1 Oscillatore armonico smorzato

Iniziamo dal caso in cui $F_{\text{ext}} = 0$. L'equazione da risolvere è

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + k x = 0,$$

con le condizioni iniziali $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = 0$. La riscriviamo nel seguente modo

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

dove $2\gamma \equiv b/m$ e $\omega_0^2 \equiv k/m$. L'equazione algebrica associata è

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Dunque, scriviamo la generica soluzione nel seguente modo

$$x(t) = A e^{-\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma\right)t} + B e^{\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} - \gamma\right)t},$$

valida nei casi in cui $\gamma \neq \omega_0$. Distinguiamo i tre possibili scenari.

- Caso $\gamma < \omega_0$. Gli esponenti sono complessi, la generica soluzione è

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{-\left(i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} + \gamma\right)t} + B e^{\left(i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} - \gamma\right)t} = \\ &= e^{-\gamma t} \left(A e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + B e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right) = \\ &= C e^{-\gamma t} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi \right). \end{aligned}$$

Imponendo le condizioni iniziali $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = 0$, si ottiene

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right).$$

- Caso $\gamma > \omega_0$. Gli esponenti sono reali, quindi la generica soluzione è

$$x(t) = A e^{-\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma\right)t} + B e^{\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} - \gamma\right)t},$$

che non descrive qualcosa che oscilla, ma un modo che porta la massa a fermarsi nell'origine in modo monotono. Imponendo le condizioni iniziali $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = 0$, si ottiene

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cosh \left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t \right).$$

- Caso $\gamma = \omega_0$. Sostituendo nella soluzione generica, otterremmo una soluzione del tipo

$$x_1(t) = C e^{-\gamma t},$$

ma questa non è l'unica! In questo caso, il determinante dell'equazione algebrica associata all'equazione differenziale è nullo, quindi bisogna ricordarsi che l'altra soluzione è

$$x_2(t) = D t e^{-\gamma t}.$$

Quindi si ha

$$x(t) = (C + D t) e^{-\gamma t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = 0$, si ottiene

$$x(t) = x_0 (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}.$$

In Fig. 5 sono riportati i grafici delle soluzioni nei tre casi appena analizzati.

Come si spiega che la soluzione caratterizzata da $\gamma = \omega_0$ è quella che decresce più velocemente delle altre? Nel tre casi appena analizzati, l'ampiezza dell'oscillazione evolve come

- $\gamma < \omega_0$, l'ampiezza decade come $e^{-\gamma t}$;
- $\gamma = \omega_0$, l'ampiezza decade come $e^{-\gamma t}$;

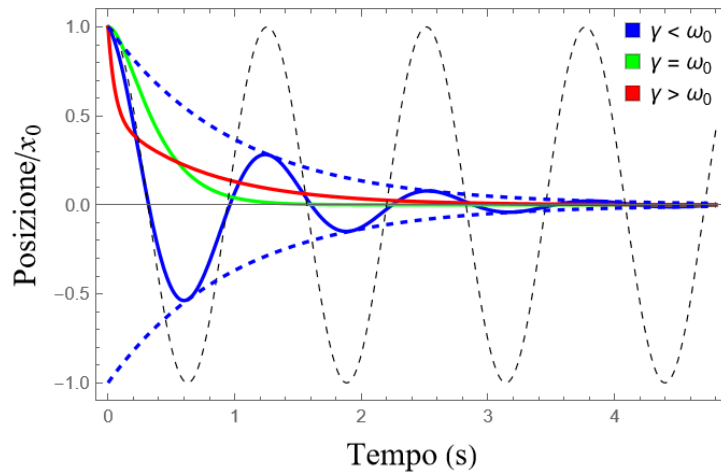


Figura 5: Soluzioni al variare del valore di γ . La curva nera tratteggiata rappresenta l'oscillazione nel caso senza attrito.

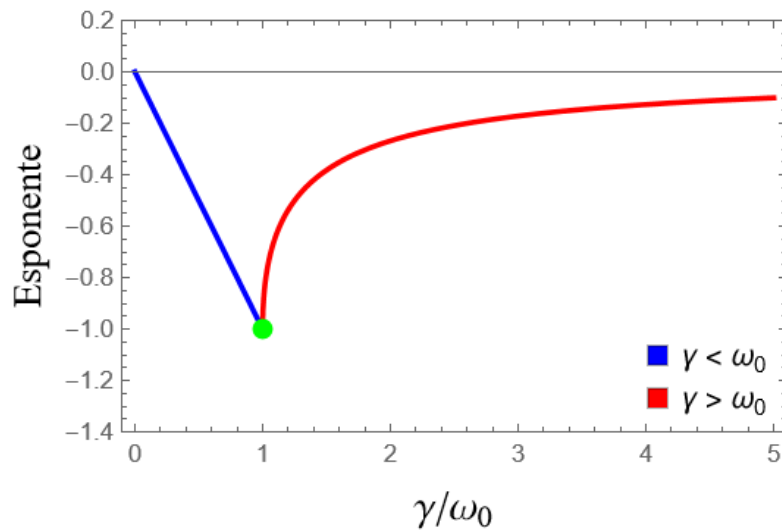


Figura 6: Esponente di decadimento dell'ampiezza in funzione di γ .

- $\gamma > \omega_0$, l'ampiezza decade come⁴ $e^{(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} - \gamma)t}$.

Confrontando i regimi, è possibile costruire un grafico dell'esponente in funzione del parametro γ , riportato in Fig. 6. Dalla figura si capisce immediatamente che nel caso $\gamma = \omega_0$ si ha l'esponente più piccolo, quindi la soluzione corrispondente è la più veloce a decrescere.

2.2 Oscillatore armonico smorzato e forzato

Analizziamo il caso con forza esterna, partendo dal caso di forza costante.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}.$$

Una soluzione particolare di quest'equazione è

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2},$$

⁴Il decadimento ha questo andamento perché l'altro addendo in $x(t)$ va come $e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$ e, quindi, decade molto più velocemente.

che implica

$$x(t) = A e^{-\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma\right)t} + B e^{\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} - \gamma\right)t} + \frac{F_0}{m\omega_0^2},$$

quindi la soluzione è spostata di x_p rispetto a quella imperturbata. A questo punto, bisognerebbe dividere nuovamente nei tre casi in base al segno della grandezza $\gamma - \omega_0$ e sfruttare le condizioni iniziali per trovare le costanti A e B .

Consideriamo adesso il caso di forza esterna oscillante

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}.$$

Usando una soluzione di prova del tipo $x(t) = \mathcal{A} e^{i\omega t}$, otteniamo

$$(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) \mathcal{A} e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}.$$

Quindi, la soluzione di prova va bene a patto che

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (2.1)$$

La soluzione particolare è, dunque,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} e^{i\omega t}.$$

Ad ogni istante temporale, il numero complesso $\mathcal{A}$ si può scrivere in forma polare come

$$\mathcal{A} = \rho e^{i\theta},$$

dove ρ è il suo modulo e θ è l'angolo che lo identifica sul piano. Nel nostro caso,

$$\rho = \sqrt{(\text{Re}(\mathcal{A}))^2 + (\text{Im}(\mathcal{A}))^2} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}},$$

$$\tan \theta = \frac{\text{Im}(\mathcal{A})}{\text{Re}(\mathcal{A})} = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Allora

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} e^{i\left[\omega t - \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right]},$$

la cui parte reale è

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos\left[\omega t - \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right].$$

La soluzione che descrive l'evoluzione del sistema è

$$x(t) = A e^{-\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma\right)t} + B e^{\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} - \gamma\right)t} +$$

$$+ \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos\left[\omega t - \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right].$$

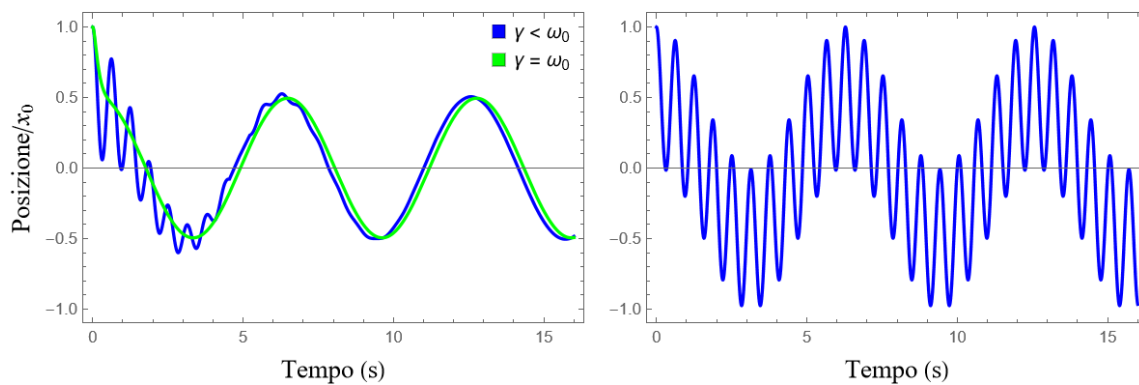


Figura 7: Oscillatore armonico smorzato e forzato. A sinistra sono riportati i casi in cui $\gamma < \omega_0$ e $\gamma = \omega_0$. Il caso $\gamma > \omega_0$ non è riportato perché è qualitativamente identico al caso $\gamma = \omega_0$. A destra è riportato il caso senza attrito.

A questo punto, bisognerebbe dividere nuovamente nei tre casi in base al segno della grandezza $\gamma - \omega_0$ e sfruttare le condizioni iniziali per trovare le costanti A e B . In ogni caso, le espressioni trovate non entrerebbero nel foglio e non ha senso riportarle. In Fig. 7 sono riportati alcuni casi con i rispettivi valori dei parametri. Come possiamo notare dall'ultima equazione e dai grafici, la soluzione è formata da un transiente iniziale non periodico e, successivamente, diventa periodica. Questo è dovuto al fatto che la soluzione dell'equazione omogenea è limitata da esponenziali decrescenti, che decrescono abbastanza in fretta. L'unica cosa che sopravvive è la soluzione particolare dell'equazione non omogenea, che è una funzione periodica.

Dunque, vale la pena dire qualche altra cosa su

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos \left[\omega t - \arctan \left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right].$$

Intanto, per $\omega \rightarrow 0$, la soluzione tende alla soluzione del caso stazionario con forza costante. Inoltre, studiamo l'ampiezza della soluzione al variare della frequenza ω e del parametro γ . Dei grafici sono riportati in Fig. 8. Si nota che le funzioni sono piccate in corrispondenza di ω_0 . Questo fenomeno è detto *risonanza* ed è molto diffuso nei sistemi meccanici, acustici, elettronici⁵ ed elettromagnetici⁶. Quando la frequenza della forza esterna è molto vicina a quella propria del sistema, l'azione della forza è sempre in fase con la risposta del sistema, quindi l'ampiezza delle oscillazioni tende a crescere. Nel caso ideale in cui non c'è dissipazione, l'ampiezza diventa infinita. L'altezza del picco può essere trovata minimizzando il denominatore dell'ampiezza:

$$\frac{d}{d\omega} \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right) = 0 \implies \omega^* = 0, \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

Allora, come si può anche vedere dalla figura, se $\gamma < \omega_0/\sqrt{2}$, il massimo è in corrispondenza di $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$, altrimenti è in corrispondenza di $\omega = 0$. L'altezza del picco è

$$\mathcal{A}_{\max} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}, \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}},$$

⁵Ad esempio, le radio funzionano grazie alla risonanza. Modificando la capacità del circuito interno della radio, viene modificata la frequenza di risonanza in modo che coincida, entro un certo intervallo, con la frequenza delle onde elettromagnetiche emesse da una certa stazione radio. In questo modo, la risposta del circuito è massima e viene incanalata verso le periferiche che convertono il segnale elettrico in acustico.

⁶Ad esempio, uno dei più semplici modelli usati per descrivere la risposta di cariche elettriche sollecitate da un campo elettrico oscillante, con una certa frequenza ω , è il modello dell'*oscillatore di Lorentz*. Esso descrive come la funzione dielettrica ϵ dipende dalla frequenza ω . La funzione $\epsilon(\omega)$ che ne viene fuori ha una forma simile all'Eq. (2.1), quindi anche essa presenta una risonanza!

che, appunto, diverge per $\gamma \rightarrow 0$.

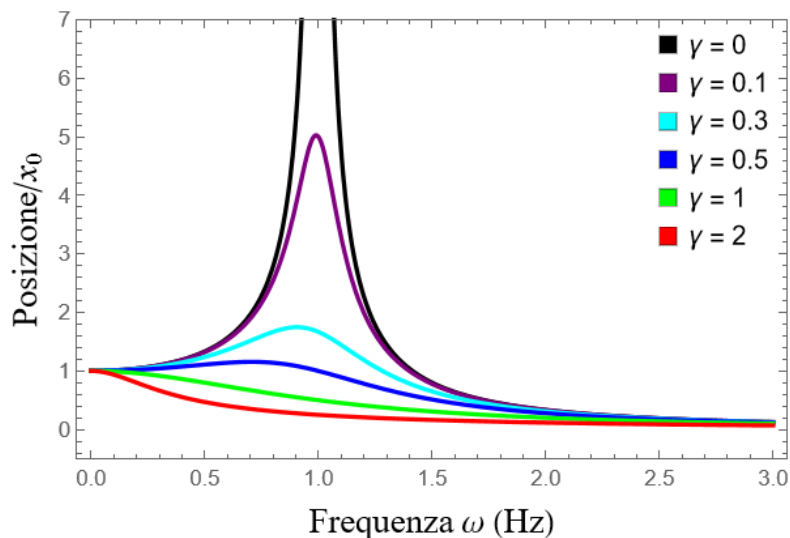


Figura 8: Ampiezza dell'oscillazione al variare del valore di γ , nel caso di $\omega_0 = 1$ Hz e $F_0/m = 1$ m/s².

SEZ. 3 — LEGGE DI SNELL IN TUTTE LE SALSE

La legge di Snell per i raggi di luce lega gli angoli di incidenza e rifrazione all'interfaccia tra due mezzi caratterizzati da due diversi indici di rifrazione

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r.$$

Se $n_1 > n_2$, in base al valore dell'angolo di incidenza può verificarsi il fenomeno della riflessione totale. L'angolo di rifrazione vale

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right).$$

Quest'equazione implica che θ_r può essere pari a $\pi/2$ anche se θ_i è minore di $\pi/2$. Ciò è dovuto al fatto che il rapporto tra gli indici di rifrazione è > 1 . Quindi, se il valore dell'angolo di incidenza è maggiore di

$$\theta_{max} = \arcsin \frac{n_2}{n_1},$$

il raggio non viene trasmesso nel secondo mezzo.

Nel caso in cui l'indice di rifrazione di un mezzo vari lungo la direzione x , la quantità

$$n(x) \sin \theta(x)$$

è la stessa in tutti i punti della traiettoria del raggio. Essa è detta *invariante di Snell*. Se $n(x)$ è una funzione decrescente, il raggio può andare incontro alla riflessione totale. Se, invece, $n(x)$ è una funzione crescente, il raggio tende a diventare parallelo all'asse x . Nel caso di mezzi a simmetria sferica, invece, l'invariante di Snell ha una forma leggermente diversa.

Teorema (Invariante di Snell in mezzi a simmetria sferica). *L'invariante di Snell per mezzi a simmetria sferica è*

$$n(r) r \sin \theta(r),$$

dove r è la coordinata radiale e θ è l'angolo tra la direzione del raggio e la direzione radiale.

Dimostrazione. Facendo riferimento alla Fig. 9, dividiamo lo spazio in infiniti gusci sferici concentrici di spessore infinitesimo, in ognuno dei quali $n(r)$ può essere considerato costante. Per la legge di Snell, si ha

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Per il teorema dell'angolo esterno, si ha

$$\theta_2 = \theta'_2 + \delta\theta,$$

che implica

$$\sin \theta_2 = \sin \theta'_2 \cos \delta\theta + \cos \theta'_2 \sin \delta\theta \approx \sin \theta'_2 + \cos \theta'_2 \delta\theta.$$

Sostituendo quest'espressione nella legge di Snell e passando a quantità infinitesime, si ottiene

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta'_2 + n_2 \cos \theta'_2 d\theta,$$

da cui

$$d(n \sin \theta) = -n \cos \theta d\theta = -\frac{n}{r} \frac{dr}{dl} r d\theta = -n \frac{dr}{r} \sin \theta.$$

Quindi

$$r d(n \sin \theta) + n \sin \theta dr = 0,$$

$$d(n(r) r \sin \theta) = 0,$$

dunque la quantità $n(r) r \sin \theta$ è omogenea nello spazio.

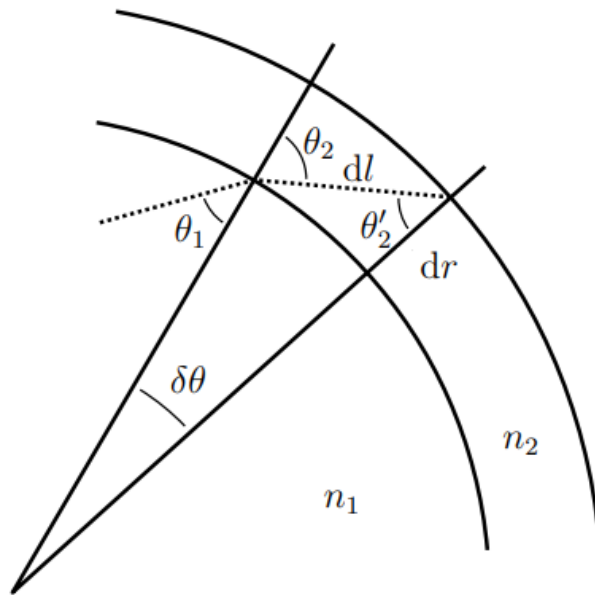


Figura 9: Traiettorie di un raggio di luce tra due gusci sferici in un mezzo con indice di rifrazione a simmetria sferica.

Una versione analoga della legge di Snell c'è anche per le onde meccaniche, come quelle legate al suono che si propaga in aria o ai terremoti che si propagano nel sottosuolo. Nel caso di onde che si propagano tra due mezzi diversi, la legge di Snell è

$$\frac{\sin \theta_i}{v_1} = \frac{\sin \theta_r}{v_2},$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità delle onde meccaniche nei due mezzi, cioè le velocità del suono. Ad esempio, in aria si ha $v \approx 340$ m/s. L'invariante di Snell in un mezzo non omogeneo è

$$\frac{\sin \theta(x)}{v(x)}.$$

Le onde sonore prodotte sulla superficie terrestre viaggiano per tutta l'atmosfera, in tutte le direzioni. Quelle che salgono verso l'alto vengono curvate perché la velocità del suono varia con la quota. Ciò è dovuto al fatto che la velocità del suono dipende dalla temperatura e dalla densità dell'aria, che diminuiscono con la quota. Quindi, anche le onde sonore vengono rifratte e possono andare incontro alla riflessione totale.

Esempio 3.1 (Posizione apparente delle stelle, tratto dal concorso di ammissione SNS 2014). *L'indice di rifrazione dell'atmosfera cresce con continuità dall'atmosfera più alta, dove $n = 1$, fino alla superficie terrestre, dove $n = 1,0003$. Esprimere la relazione tra gli angoli θ_{vero} e $\theta_{\text{apparente}}$, dove θ_{vero} è l'angolo che definisce la vera direzione della luce proveniente da una stella, mentre $\theta_{\text{apparente}}$ definisce la direzione apparente della stella come percepita da un osservatore posto sulla superficie terrestre. Si ignori la curvatura della Terra.*

Dividiamo l'atmosfera in infiniti strati di spessore infinitesimo, come schematizzato in Fig. 10.

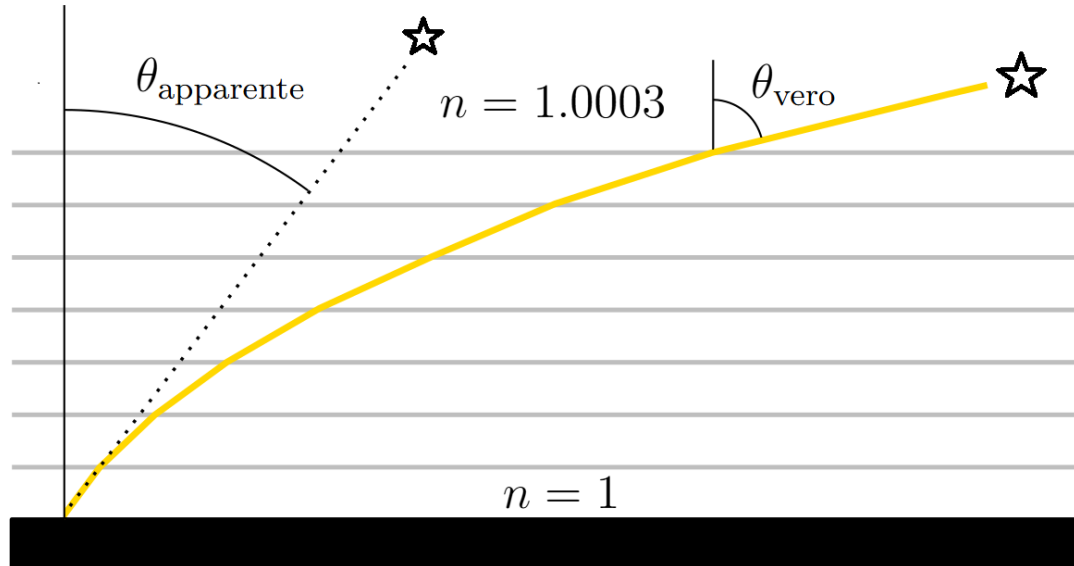


Figura 10: Deviazione di un raggio di luce attraverso l'atmosfera.

Se gli strati hanno uno spessore infinitesimo, l'indice di rifrazione è omogeneo al loro interno. Questo ci autorizza a considerare rettilineo il raggio di luce all'interno del singolo strato. Allora,

legge di Snell vale per ogni coppia di strati consecutivi:

$$\begin{aligned} n_0 \sin \theta_0 &= n_1 \sin \theta_1, \\ n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta_2, \\ n_2 \sin \theta_2 &= n_3 \sin \theta_3, \\ &\dots\dots\dots \\ n_{k-1} \sin \theta_{k-1} &= n_k \sin \theta_k, \\ n_k \sin \theta_k &= n_{\text{vuoto}} \sin \theta_{\text{vuoto}}. \end{aligned}$$

La catena di uguaglianze implica che

$$\begin{aligned} n_0 \sin \theta_0 = n_{\text{vuoto}} \sin \theta_{\text{vuoto}} &\implies 1,0003 \cdot \sin \theta_{\text{apparente}} = 1 \cdot \sin \theta_{\text{vero}} \\ \implies \theta_{\text{apparente}} &= \arcsin \left(\frac{\sin \theta_{\text{vero}}}{1,0003} \right) < \theta_{\text{vero}}. \end{aligned}$$

Quindi, un osservatore posto al polo nord vede le stelle leggermente più in alto nella volta celeste rispetto alla loro posizione effettiva. Per lo stesso motivo, è possibile vedere delle stelle che ancora non sono effettivamente sorte nel cielo.

3.1 Derivazione della legge di Snell

Per i mezzi isotropi, il tempo di percorrenza di un tratto di spazio si scrive

$$dt = \frac{ds}{v(\mathbf{r})} = n(\mathbf{r}) \frac{ds}{c},$$

dove $n(\mathbf{r}) \geq 0 \ \forall \ \mathbf{r}$. Quindi

$$T = \int_{S_A}^{S_B} n(\mathbf{r}) \frac{ds}{c}.$$

Molte volte accade che la soluzione di un determinato problema fisico è quella per cui una certa grandezza fisica è la più piccola possibile. In questo caso, è come se la luce scegliesse la traiettoria su cui muoversi in modo da minimizzare il tempo di percorrenza tra due punti nello spazio. Ciò significa che la soluzione può essere trovata minimizzando la seguente funzione

$$F = n(\mathbf{r}) ds,$$

dove ds dipende dal sistema di coordinate che scegliamo di usare. Usiamo le coordinate cartesiane: scegliamo un indice di rifrazione che dipende dalla coordinata z , cioè $n(\mathbf{r}) = n(z)$. È conveniente lavorare nel piano xz e considerare l'elemento infinitesimo di lunghezza

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1 + z'^2} dx.$$

La funzione da minimizzare diventa

$$F = n(z) \sqrt{1 + z'^2}.$$

La minimizzazione non passa per la derivata standard, ma per le cosiddette *equazioni di Eulero-Lagrange*. Esse implicano che, quando la funzione F non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente x , la quantità

$$F - z' \frac{\partial F}{\partial z'}$$

è costante. Nel nostro caso, abbiamo

$$\text{Costante} = n(z) \sqrt{1 + z'^2} - \frac{n(z) z'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}}. \quad (3.1)$$

Dato che

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}},$$

ritroviamo l'invariante di Snell. Questa equazione fornisce la traiettoria dei raggi nel mezzo:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{n^2(z)}{k^2} - 1}.$$

La costante è determinata una volta che conosciamo le condizioni iniziali, come l'orientamento del raggio in un punto dato. Oppure possiamo trovare l'indice di rifrazione $n(z)$ che permette al raggio di percorrere la traiettoria data $z(x)$.

Fenomeni fisici come i miraggi si generano a causa della legge di Snell: nel deserto, l'indice di rifrazione dell'aria, che dipende dalla temperatura, varia molto rapidamente con la quota. Ciò fa curvare i raggi di luce, quindi gli oggetti ci appaiono deformati e sembrano avere una posizione diversa da quella che in realtà hanno.

Esempio 3.2 (Traiettorie in un caso particolare). *Nel deserto, l'indice di rifrazione dipende dalla quota come $n(z) = n_0 \sqrt{1 + z/h}$. Trova la funzione $z(x)$ che descrive la traiettoria di un raggio di luce che parte dal punto $A = (0, h)$ e giunge a un osservatore posto in $B = (h, h)$.*

In questo caso, una traiettoria possibile è il segmento che congiunge i due punti⁷, che rispetta l'Eq. (3.1). La soluzione non banale si trova a partire da

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\alpha \left(1 + \frac{z}{h}\right) - 1},$$

dove abbiamo definito $\alpha \equiv n_0^2/k^2$. Separando le variabili e integrando, troviamo

$$\frac{2h}{\alpha} \sqrt{\alpha - 1 + \alpha \frac{z}{h}} = x + \beta, \quad (3.2)$$

dove β è la costante di integrazione. La traiettoria generica è

$$z(x) = \frac{\alpha}{4h} (x + \beta)^2 + \frac{h}{\alpha} (1 - \alpha).$$

Imponendo il passaggio per i punti A e B , troviamo

$$\alpha = 8 \left(2 \pm \sqrt{\frac{15}{4}} \right), \quad \beta = -\frac{h}{2}.$$

Nel nostro caso, la soluzione con il segno (+) non ha significato fisico perché la parabola raggiunge $z < 0$ in parte del dominio $[0, h]$.

3.2 Miraggi inferiori e miraggi superiori

Ci sono casi in cui i miraggi fanno sì che la posizione apparente degli oggetti che guardiamo sia più in basso di quella effettiva e altri casi in cui sia collocata più in alto. Cerchiamo di capire

⁷Di ciò bisogna accorgersi a parte, dato che le traiettorie in cui la variabile dipendente è costante sono problematiche. La stessa cosa vale nel caso a simmetria sferica, dove le circonferenze a r costante generano confusione.

come prevedere questa caratteristica, legata alla concavità della traiettoria dei raggi. Deriviamo rispetto a x entrambi i membri dell'Eq. (3.1). Otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dn(z)}{dz} \frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} - \frac{n(z)z'z''}{(\sqrt{1+z'^2})^3} \\ &= z' \left(\sqrt{1+z'^2} \right)^{-3} \left[n'(z)(1+z'^2) - n(z)z'' \right]. \end{aligned}$$

Quindi, a parte il caso di rette parallele all'asse x , si ha $n'(z)(1+z'^2) = n(z)z''$, che implica che i segni di $n'(z)$ e z'' sono uguali. Quindi, deduciamo le seguenti caratteristiche:

- *Miraggi inferiori*: $z'' > 0 \implies n'(z) > 0$. Questo accade quando la temperatura dell'aria diminuisce con la quota, come per i miraggi nel deserto;
- *Miraggi superiori*: $z'' < 0 \implies n'(z) < 0$. Questo accade quando la temperatura dell'aria aumenta con la quota, come per la Fata Morgana in mare.

La Fig. 11 mostra i due tipi di miraggi.

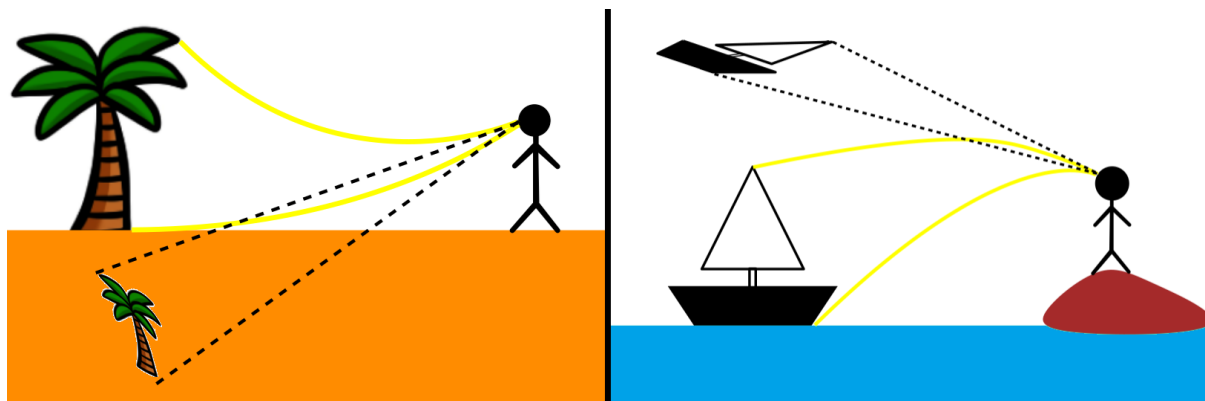


Figura 11: Miraggio inferiore nel deserto (a sinistra) e miraggio superiore in mare (a destra). Le linee tratteggiate sono le tangenti ai raggi nel punto dove si trovano gli occhi dell'osservatore. Le immagini vengono deformate a causa della curvatura dei raggi.

SEZ. 4 — ORBITE IN OTTICA E IN CAMPI DI FORZA RADIALI

Le orbite di corpi puntiformi soggetti a forze radiali possono essere trovate risolvendo l'equazione di Binet. Essa è

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} = -\frac{mr^2(\theta)}{L^2} F(r, \theta), \quad (4.1)$$

dove m è la massa del corpo orbitante, L è il momento angolare calcolato rispetto al centro della forza, $r(\theta)$ è la funzione polare che descrive l'orbita e $F(r, \theta)$ è il modulo della forza radiale che agisce sul corpo⁸. L'orbita che ne deriva è una curva piana, cioè contenuta interamente in un piano, non sempre chiusa, come per le spirali, e non sempre limitata, come per spirali, parabole e iperboli.

⁸Generalmente, sui libri e sulle fonti online viene detto che l'equazione di Binet vale per le forze centrali. In realtà, essa vale per le forze radiali, che comprendono anche quelle centrali. Questo vale perché l'equazione Eq. (4.1) viene ricavata usando la conservazione del momento angolare, valida in tutti i campi radiali. Non c'è

Esempio 4.1 (Forza nulla). in questo caso, l'equazione di Binet diventa

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} = 0,$$

la cui soluzione è

$$\frac{1}{r(\theta)} = A \cos \theta + B \sin \theta,$$

dove A e B sono costanti da determinare imponendo il passaggio per un determinato punto e con una certa direzione del moto. In qualsiasi caso, la soluzione appena trovata descrive una retta in coordinate polari. Questo ha molto senso, dato che un corpo indisturbato si muove di moto rettilineo (uniforme).

Esempio 4.2 (Orbite in gravitazione). Nel caso di un corpo soggetto alla forza gravitazionale, l'Eq. (4.1) diventa

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} = \frac{GMm^2}{L^2},$$

dove M è la massa del corpo attrattore, supposto fisso nell'origine. La generica soluzione dell'equazione omogenea

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} = 0$$

è

$$\frac{1}{r(\theta)} = A \cos \theta + B \sin \theta,$$

dove A e B sono della costanti da determinare. Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{GMm^2}{L^2}.$$

Allora, la soluzione complessiva è

$$\frac{1}{r(\theta)} = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{GMm^2}{L^2},$$

che implica

$$r(\theta) = \frac{L^2/GMm^2}{A \cos \theta + B \sin \theta + 1},$$

dove le costanti A e B sono diverse da quelle di prima. Scegliendo bene l'orientazione dell'orbita, è possibile ridurre l'equazione dell'orbita a

$$r(\theta) = \frac{L^2/GMm^2}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad (4.3)$$

dove ε è l'eccentricità. Al variare di ε nell'intervallo $[0, \infty)$, l'Eq. (4.3) descrive le quattro coniche: circonferenza, ellisse, parabola e iperbole.

alcun riferimento al fatto che la forza deve essere conservativa. Ci sono altre versioni dell'equazione, come questa

$$\frac{d^2 u(\theta)}{d\theta^2} + u(\theta) = -\frac{m}{L^2} \frac{d}{du} \left[V \left(\frac{1}{u} \right) \right], \quad (4.2)$$

dove $u(\theta) \equiv r^{-1}(\theta)$ e V è l'energia potenziale associata alla forza, per cui $\vec{F} = -\nabla V$. Ovviamente, quest'ultima forma dell'equazione di Binet necessita l'ulteriore ipotesi dell'esistenza di un potenziale che dipenda solo dalla coordinata radiale e non dall'angolo. Dunque, la forza deve essere centrale per poter usare l'equazione in modo corretto. In queste condizioni, si può dimostrare che le orbite percorribili sono tutte simmetriche rispetto a un asse passante per il centro della forza.

Esempio 4.3 (Cardioide). Vediamo quale forza è in grado di generare un'orbita a forma di cardioide. L'equazione polare della cardioide in Fig. 12 è

$$r(\theta) = R(1 + \cos \theta),$$

dove R è una lunghezza. Usando l'Eq. (4.1), si ottiene

$$F(r) = -\frac{3RL^2}{m r^4} \propto -r^{-4},$$

che è una forza centrale attrattiva.

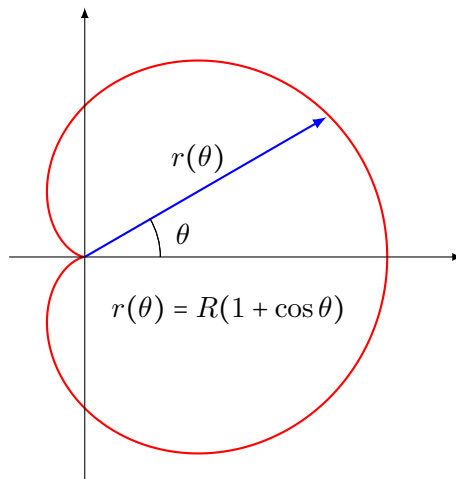


Figura 12: Orbita a forma di cardioide.

Cosa succede, invece, in ottica? I raggi di luce possono percorrere delle orbite, anche chiuse, se l'indice di rifrazione n del mezzo in questione varia in base alla posizione $\vec{r}$. In questa lezione ci limiteremo a trattare i casi in cui l'indice di rifrazione ha simmetria sferica, cioè $n(\vec{r}) = n(r)$. In tal caso, la traiettoria è confinata in un piano, analogamente a quanto succede per le forze radiali! Questo ci consente di poter descrivere la curva tramite le coordinate polari. L'equazione che lega la traiettoria $r(\theta)$ all'indice di rifrazione $n(r)$ ha tante forme. Ne menzioneremo solo alcune, tra cui

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} = -\frac{r^2(\theta)}{2k^2} \frac{d}{dr} [n^2(r)], \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2 u(\theta)}{d\theta^2} + u(\theta) = \frac{1}{2k^2} \frac{d}{du} \left[n^2 \left(\frac{1}{u} \right) \right], \quad (4.5)$$

dove $u(\theta) \equiv r^{-1}(\theta)$ e k^2 è una costante di integrazione positiva. Potete notare come l'Eq. (4.5) sia molto simile all'Eq. (4.2), valida solo per campi centrali. Inoltre, se l'indice di rifrazione è omogeneo nello spazio, allora la configurazione è analoga a quella di un corpo non soggetto ad alcuna forza. Infatti, la traiettoria di un raggio in un mezzo omogeneo è una retta. Ma questa non è l'unica traiettoria in comune. Possiamo dimostrare che ce ne sono infinite. Consideriamo le equazioni Eq. (4.1) e Eq. (4.4). Notiamo che il primo membro è lo stesso per entrambe. Consideriamo una forza centrale del tipo

$$\vec{F}(r) = \alpha r^\beta \hat{r}$$

e un indice di rifrazione a simmetria sferica del tipo

$$n(r) = \gamma r^\delta,$$

dove γ è un numero positivo. Allora, i membri di destra delle rispettive equazioni diventano

$$-\frac{m\alpha}{L^2} r^{\beta+2} \quad \text{e} \quad -\frac{\delta\gamma^2}{k^2} r^{2\delta+1}.$$

Ne deduciamo che le traiettorie del caso ottico sono uguali alle orbite del caso meccanico se

$$\delta \rightarrow \frac{\beta+1}{2} \quad \gamma \rightarrow \frac{k}{L} \sqrt{\frac{2m\alpha}{(\beta+1)}}.$$

Bisogna ricordarsi che ciò vale solo se $\alpha/(\beta+1) > 0$. Ad esempio, le traiettorie ottiche sono delle coniche nel caso $\delta = -1/2$, che corrisponde al caso gravitazionale con $\beta = -2$. Il caso di rette si ritrova con $\alpha = \gamma = 0$, oppure con $\delta = 0$.

Le equazioni (4.4) e (4.5) non sono molto comode da usare per conti analitici. Una versione alternativa è

$$n^2(r) = \frac{k^2}{r^4} \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right], \quad (4.6)$$

da cui possiamo ricavare qualche informazione sulla costante k^2 . Riscriviamola come

$$k^2 = n^2(r) r^2 \frac{r^2 (d\theta)^2}{r^2 (d\theta)^2 + (dr)^2}.$$

La frazione non è nient'altro che il seno dell'angolo ϕ tra la direzione del raggio e la direzione radiale. Dunque, possiamo scrivere

$$k = n(r) r \sin \phi. \quad (4.7)$$

Questo è proprio l'invariante di Snell nel caso di indice di rifrazione a simmetria sferica. Esso ha la stessa struttura del modulo del momento angolare di un oggetto in orbita, calcolato rispetto al centro della forza:

$$L = m v(r) r \sin \phi,$$

dove ϕ è l'angolo tra direzione del moto e la direzione radiale. Deduciamo che l'Eq. (4.7) rappresenta la conservazione del momento angolare del raggio di luce⁹. Ma non è finita qui.

Compariamo le equazioni (4.2) e (4.5): le trasformazioni che le rendono uguali sono $k^2 \leftrightarrow L^2/2m$ e $n^2 \leftrightarrow E - V$, dove E è una costante che viene fuori perché sono le derivate di n^2 e $-V$ a dover essere uguali. Operiamo queste sostituzioni nell'Eq. (4.6) e vediamo cosa succede:

$$E - V(r) = \frac{L^2}{2m r^4} \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right] = \frac{L^2}{2m r^2} + \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2,$$

dove l'ultimo membro è stato ottenuto usando la conservazione del momento angolare. Quest'equazione rappresenta la conservazione dell'energia in un campo di forza centrale!

⁹Vediamola da un altro punto di vista. La quantità di moto associata a un fotone è $p = h/\lambda = hf/v = hf n/c$, dove $v = c/n$ è la velocità della luce nel mezzo. Il momento angolare del fotone, calcolato rispetto al centro di simmetria, è $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = hf n(r) r \sin \phi / c$. Dato che la frequenza non cambia al variare delle caratteristiche del mezzo, la conservazione della quantità in Eq. (4.7) è analoga alla conservazione del momento angolare.

SEZ. 5 — DECADIMENTO DI ORBITE

Ogni sistema fisico presenta dissipazione, cioè la trasformazione di energia di un certo tipo, come quella meccanica o elettrica, in calore. Le cause più note sono l'attrito, gli urti anelastici e le resistenze elettriche. Vediamo due modelli, uno su scala planetaria e uno su scala atomica, in cui il sistema sembra evolvere nello stesso modo a causa della perdita di energia, dovuta a due fenomeni molto diversi.

Esempio 5.1 (Paradosso del satellite). *Un satellite di massa m si muove inizialmente su un'orbita circolare di raggio R_0 attorno a un corpo celeste puntiforme, di massa $M \gg m$. Il satellite è soggetto alla forza d'attrito $\vec{F}_a = -A|\vec{v}|\vec{v}$. Supponendo che la forza di attrito sia sufficientemente piccola in modo da poter approssimare l'orbita come istantaneamente circolare, trova la funzione $r(t)$ che descrive l'evoluzione temporale della distanza tra il satellite e il pianeta. Dopo quanto tempo il satellite cade sul suolo?*

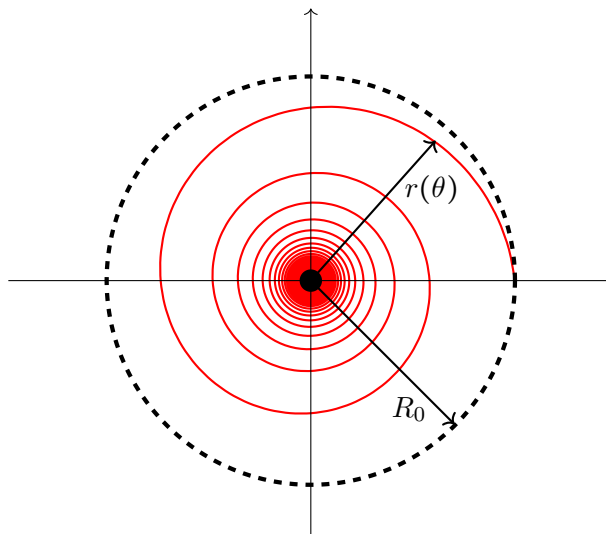


Figura 13: Traiettoria del satellite. La figura è stata esagerata per mettere in evidenza la spirale, che non rispetta la condizione di orbita istantaneamente circolare.

Il bilancio energetico del sistema si scrive

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}_a = -Av^3.$$

L'energia meccanica del sistema è

$$E = -\frac{GMm}{2r(t)},$$

quindi possiamo scrivere

$$\frac{GMm}{2r^2(t)} \frac{dr}{dt} = -Av^3.$$

Sfruttiamo l'approssimazione suggerita nel testo: se l'orbita è istantaneamente circolare, la velocità radiale è approssimativamente nulla, mentre la velocità orbitale vale $v = \sqrt{GM/r}$. Sostituendo nell'equazione del bilancio energetico, otteniamo un'equazione differenziale a variabili separabili

$$r^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{dt} = -\frac{2A}{m} (GM)^{\frac{1}{2}},$$

la cui soluzione è

$$r(t) = R_0 \left[1 - \frac{A}{m} \left(\frac{GM}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}} t \right]^2.$$

Intanto, per $t = 0$ otteniamo $r = R_0$. In aggiunta, notiamo che la soluzione $r(t)$ è una funzione monotona decrescente. Questo ha molto senso, perché l'attrito tende sempre a far rimpicciolire l'orbita. In generale, orbite più piccole corrispondono a sistemi più legati, quindi ad energie piccole (tanto negative). E la forza di attrito cosa fa? Riduce l'energia del sistema! Tutto torna!

Il tempo richiesto per raggiungere $r = 0$ è

$$t_{fall} = \frac{m}{A} \left(\frac{R_0}{GM} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{m}{Av_0},$$

dove v_0 è la velocità orbitale iniziale.

Manca da capire a cosa è dovuto il titolo di questo problema. Dove sta il paradosso? Abbiamo detto che $r(t)$ è una funzione decrescente, quindi la velocità $v(t) = \sqrt{GM/r(t)}$ è una funzione crescente! Come è possibile che la velocità cresca se c'è attrito? In realtà è possibilissimo, perché la forza di attrito non è l'unica forza in gioco. Bisogna tener conto della forza gravitazionale! Inoltre, ricordiamoci che le forze dissipative fanno sicuramente diminuire l'energia meccanica del sistema (come in questo caso), ma non è detto che facciano diminuire l'energia cinetica. La fanno diminuire solo se sono le uniche forze in gioco a compiere lavoro¹⁰! Quindi, in realtà, questo non è un paradosso.

Se volete esercitarvi ad impostare e a svolgere integrali, provate a calcolare quanti giri compie il satellite e quanto spazio percorre prima di cadere sul pianeta. Se ci sono problemi di divergenza in $r = 0$, provate a dare un raggio non nullo al pianeta ($0 < R_p < R_0$). Per lo spazio percorso, serve sapere come si calcola la lunghezza di una curva in coordinate polari. Infine, provate a trovare la traiettoria $r(\theta)$ del satellite.

Esempio 5.2 (Breakdown dell'atomo di Rutherford). *L'elettromagnetismo classico non è in grado di spiegare i fenomeni che accadono quando le cariche elettriche sono legate all'atomo. Per esempio, la teoria prevede che una particella carica che accelera irraggi energia sotto forma di onde elettromagnetiche. La potenza elettromagnetica irradiata da una particella di carica q e accelerazione a nel vuoto, in regime non relativistico, è*

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3},$$

dove c è la velocità della luce. Schematizziamo l'atomo di idrogeno come un protone, fisso nello spazio, con un elettrone che gli ruota attorno. A causa della perdita di energia, l'elettrone cadrà sul protone. Se il raggio iniziale dell'orbita dell'elettrone è R_0 , trova il tempo dopo il quale l'elettrone cade sul protone, supponendo che l'orbita sia approssimabile a una circonferenza in ogni istante.

Supponendo che ad ogni rivoluzione il raggio dell'orbita cambi di poco, possiamo considerare l'orbita istantaneamente circolare. Di conseguenza varrà

$$F_{el} = m_e \frac{v^2}{r} \implies \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r},$$

da cui possiamo ricavare v^2 in funzione di r per il calcolo dell'energia cinetica. L'energia potenziale vale

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

¹⁰In questo problema potrebbe sembrare che la forza gravitazionale non compia lavoro perché, essendo il satellite sempre su orbite circolari, lo spostamento è sempre tangenziale e mai radiale. In realtà, nonostante questa approssimazione, stiamo comunque assumendo che la gravità compia lavoro perché prendiamo per vera la relazione $v(t) = \sqrt{GM/r(t)}$ in ogni istante. Seppur lentamente, il satellite si avvicina al pianeta, quindi la forza gravitazionale compie lavoro.

Sommando cinetica e potenziale, si ottiene

$$E(r) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \implies \frac{dE}{dr} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}.$$

La potenza emessa per irraggiamento segue la formula di Larmor

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3},$$

dove il segno (-) ci ricorda che l'energia viene persa. L'accelerazione, centripeta in ogni istante per le assunzioni fatte nel testo, vale

$$a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r^2}.$$

L'equazione per il bilancio energetico diventa

$$-\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r^2} \right)^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{dr}{dt},$$

che, dopo qualche semplificazione, diventa un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2 m_e^2 \epsilon_0^2 c^3} \frac{1}{r^2}.$$

Integrando otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{R_0}^0 r^2 dr &= \int_0^\tau -\frac{e^4}{12\pi^2 m_e^2 \epsilon_0^2 c^3} dt, \\ \implies \tau &= \frac{4\pi^2 m_e^2 \epsilon_0^2 c^3 R_0^3}{e^4}. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori delle costanti, l'ordine di grandezza che si ottiene è di 10^{-11} s, cosa che, ovviamente, non è realistica. Gli atomi non dovrebbero esistere secondo la descrizione classica. Dopo Rutherford, Bohr creò un modello che faceva finta di salvare la Fisica, introducendo il postulato sulle orbite stazionarie. La soluzione del paradosso arrivò più tardi, con De Broglie, Schrödinger & company.

SEZ. 6 — ANALOGIA TRA ELETTROSTATICA E FLUIDODINAMICA

6.1 Campo elettrico e campo di velocità

Consideriamo una carica elettrica q nel vuoto, posizionata nell'origine. Il campo e il potenziale elettrico che essa genera valgono

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \varphi_E(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{in 3D,} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} & \varphi_E(\vec{r}) &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C & \text{in 2D,} \end{aligned}$$

dove r_0 è una qualunque distanza dall'origine e C è una costante¹¹. La dipendenza dalla dimensione è dettata dal teorema di Gauss. Dato che il flusso attorno a una generica superficie chiusa contenente la carica è q/ε_0 , allora

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{\varepsilon_0 S(r)} \hat{r},$$

dove S è la superficie della sfera centrata nella carica. Dato che in 2D la sfera si riduce a una circonferenza, il campo deve necessariamente essere diverso dal caso 3D.

La stessa cosa vale in fluidodinamica per flussi irrotazionali di fluidi incomprimibili. Qui, si parla di *sorgenti/pozzi* anziché di *cariche positive/negative*. In questo caso, la *forza* della sorgente/pozzo è la portata F di fluido che entra/ esce da essa, cioè il volume immesso o sottratto dal sistema nell'unità di tempo. In analogia con caso elettrico, il campo e il potenziale di una sorgente posta nell'origine sono

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{F}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \varphi_V(\vec{r}) = \frac{F}{4\pi r} \quad \text{in 3D,}$$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{F}{2\pi r} \hat{r} \quad \varphi_V(\vec{r}) = -\frac{F}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\frac{F}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + C \quad \text{in 2D.}$$

Quindi anche alla velocità è associato un potenziale. Questo è dovuto al fatto che sia il campo elettrostatico che quello di velocità, in questo caso, sono irrotazionali¹². Bisogna anche specificare che tutto ciò vale solo per i fluidi incomprimibili. Quest'ipotesi serve per poter applicare la conservazione della portata sulla superficie gaussiana.

A questo punto siamo in grado di capire cosa succede se nello spazio sono presenti una sorgente e un pozzo: questo è un dipolo! La distribuzione della velocità nello spazio è riportata in Fig. 14, è identica a quella di un dipolo elettrico!

Se abbiamo N tra sorgenti e pozzi nello spazio illimitato, in assenza di altri oggetti e altre forze, possiamo trovare il campo di velocità in un generico punto dello spazio facendo una semplice sovrapposizione. Ma cosa succede se lo spazio a disposizione è limitato oppure se ci ostacoli nel sistema? Non basta più fare una semplice somma vettoriale. Nuovamente, ci viene in aiuto l'analogia con l'elettrostatica.

6.2 Metodo delle immagini

In elettrostatica, quando studiamo configurazioni in cui sono presenti distribuzioni di cariche vicino a dei conduttori, usiamo il famoso metodo delle immagini. Ad esempio, il campo di una carica puntiforme q posta a distanza d dal centro di una sfera conduttrice di raggio $R < d$, messa a terra, è uguale al campo della configurazione contenente la stessa carica e una carica $-qR/d$ posta a distanza R^2/d dal centro della sfera, come illustrato in Fig. 15. Perché è vera questa cosa? Rispondere a questa domanda è equivalente a spiegare il funzionamento, la validità e il senso del metodo delle immagini.

Problema dell'Elettrostatica. Consideriamo delle cariche esterne (e fisse) poste in un sistema in cui sono presenti degli oggetti dielettrici o conduttori, che possono anche essere scarichi. In un generico punto dello spazio, il campo elettrico è la somma vettoriale del campo prodotto dalle cariche esterne e del campo prodotto da quelle contenute negli oggetti in risposta alla sollecitazione del primo. Ad esempio, se avviciniamo una carica puntiforme a una sfera dielettrica neutra, si formeranno delle cariche di polarizzazione sulla sfera, il cui campo si sovrappone a

¹¹Si, è vero che è sbagliato togliere r_0 al denominatore perché l'argomento dei logaritmi acquista delle dimensioni. Però fare così ci aiuta a semplificare la notazione negli esercizi.

¹²Per quanto riguarda il campo di velocità, esso può anche essere rotazionale. Ad esempio, basti pensare ai vortici! Però, se ci limitiamo a sorgenti puntiformi, vortici non se ne formano.

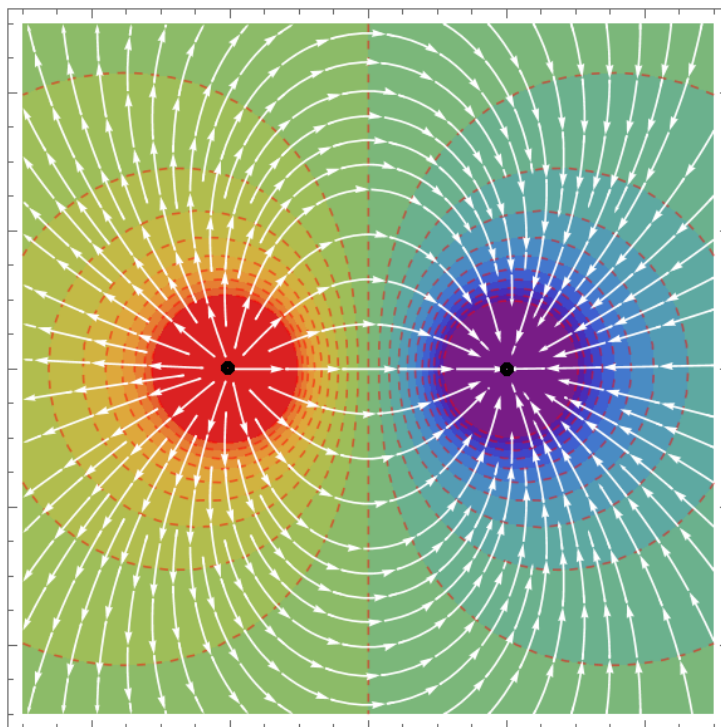


Figura 14: Campo di velocità generato da una sorgente, posta a sinistra, e un pozzo, posto a destra, della stessa intensità.

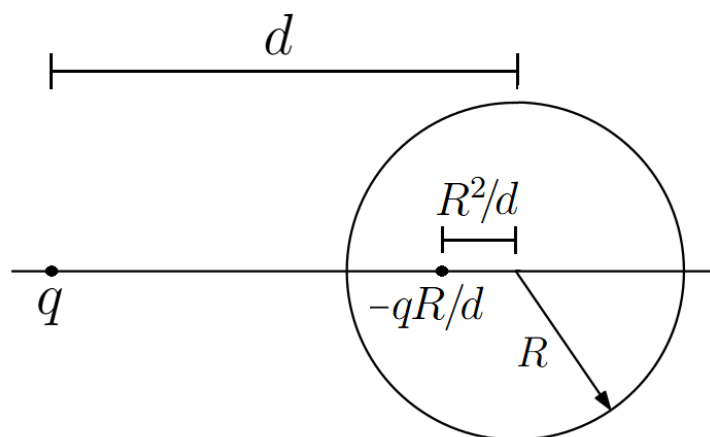


Figura 15: Disposizione della carica immagine nel problema della sfera conduttrice messa a terra.

quello della carica originaria. Generalmente, questo è un problema molto difficile da trattare a livello analitico. Infatti, le soluzioni esistono solo nei casi in cui le forme degli oggetti sono altamente simmetriche, come per sfere, cilindri di altezza infinita e piani infiniti. In questi casi, il metodo delle immagini dà una grossa mano.

Metodo delle immagini. Consideriamo la configurazione descritta precedentemente. Ogni problema di questo tipo è caratterizzato da un'equazione di Poisson per il potenziale elettrico φ_E e da alcune condizioni al contorno. Ad esempio, nel caso dei conduttori, il campo elettrico appena fuori di essi deve essere rivolto perpendicolarmente alla loro superficie. Questo equivale a dire che ogni punto all'interno e sulla superficie di un conduttore ha lo stesso potenziale. Questa è una condizione al contorno. Una volta determinate le condizioni al contorno, ci viene in aiuto il teorema di unicità per l'equazione di Poisson.

Teorema (Unicità). *In una regione connessa dello spazio, il campo elettrico generato dalla presenza di cariche e mezzi fissi è unicamente determinato dalla geometria del sistema e dalle condizioni al contorno.*

Quindi, una volta trovato un potenziale φ_E che risolve l'equazione di Poisson e soddisfa le condizioni al contorno, il campo elettrico è univocamente determinato. Se diamo per buona questa affermazione, il gioco è fatto. Infatti, se riusciamo a inventarci una distribuzione alternativa di cariche il cui potenziale soddisfa l'equazione di Poisson e le condizioni al contorno, abbiamo trovato la soluzione al problema originario! Questa distribuzione fittizia prende il nome di *carica immagine*. Bisogna, però, fare molta attenzione alla posizioni di queste cariche: esse non possono essere posizionate nella regione in cui vogliamo trovare la soluzione dell'equazione di Poisson. Il motivo è che, così facendo, modificherebbero l'equazione stessa, quindi troveremmo la soluzione a un problema diverso, non analogo. Le cariche fittizie vanno messe fuori dal dominio connesso in cui vogliamo trovare il potenziale o il campo! Quindi, bisogna dividere lo spazio in due regioni, separate dalle interfacce dei mezzi stessi: una in cui vogliamo risolvere il problema e una contenente tutte le cariche immagine, in cui il problema analogo non può essere risolto. Ad esempio, nel caso già citato di una carica posta fuori da una sfera conduttrice, il problema viene risolto in tutto lo spazio tranne che nella sfera, dentro cui vanno le cariche immagine. Nel caso di una carica posta vicino a un piano conduttore infinito messo a terra, il problema può essere risolto solo nel semispazio che contiene la carica. L'altro semispazio contiene la carica immagine, che aiuta a risolvere il problema dall'altra parte.

Cosa cambia in Fluidodinamica? Nel caso di flussi irrotazionali di fluidi incompressibili, esiste un analogo dell'equazione di Poisson. Invece, per quanto riguarda le condizioni al contorno, ci sono delle differenze. Ad esempio, mentre il campo elettrico sulla superficie di un conduttore è ortogonale ad esse, il campo di velocità in prossimità della superficie di un ostacolo è parallelo alla superficie. L'acqua non può penetrare dentro i solidi!

Teorema (Analogia). *In elettrostatica, le condizioni al contorno fluidodinamiche sono analoghe a quelle elettrostatiche sulla superficie di un oggetto caratterizzato da $\varepsilon = 0$.*

Dimostrazione. Le condizioni di interfaccia tra due mezzi isotropi sono

$$E_{1,\parallel} = E_{2,\parallel}, \quad D_{1,\perp} = D_{2,\perp},$$

che implicano

$$\varepsilon_1 \tan \alpha_1 = \varepsilon_2 \tan \alpha_2,$$

dove i due angoli sono calcolati rispetto alla perpendicolare alla superficie di contatto. Se $\varepsilon_1 = 0$, allora $\alpha_2 = 0$. Quindi nel mezzo 2 le linee di campo sono parallele alla superficie^a.

^aInvece, se $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$, allora $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$. Questo è ciò che succede per i conduttori!

Un'altra differenza tra le due teorie è che, mentre in elettrostatica il valore di ε discrimina l'orientazione del campo elettrico sulla superficie degli oggetti, in fluidodinamica non esiste un parametro analogo che, in base al suo valore, permette diverse orientazioni della velocità sulla superficie di un ostacolo. La velocità è sempre parallela alla superficie, e non può essere altrimenti. Vediamo alcuni esempi.

6.3 Esempi di campi elettrici e flussi in 2D

Esempio 6.1 (Campo elettrico di una carica posta vicino a un disco conduttore messo a terra). Siamo in 2D, quindi il campo elettrico di una carica puntiforme è

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{F}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r},$$

a cui è associato il potenziale

$$\varphi_E(r) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C.$$

Consideriamo un disco conduttore, messo a terra, di raggio R centrato nell'origine e una carica q posta lungo l'asse x in posizione $(-d, 0)$, con $d > R$. Dato che il campo scritto sopra non rispetta le condizioni al contorno sul cerchio, dobbiamo capire dove mettere almeno una carica immagine nel disco. Proviamo a mettere una carica q_I a una distanza $a < R$ dal centro del disco, come schematizzato in Fig. 16.

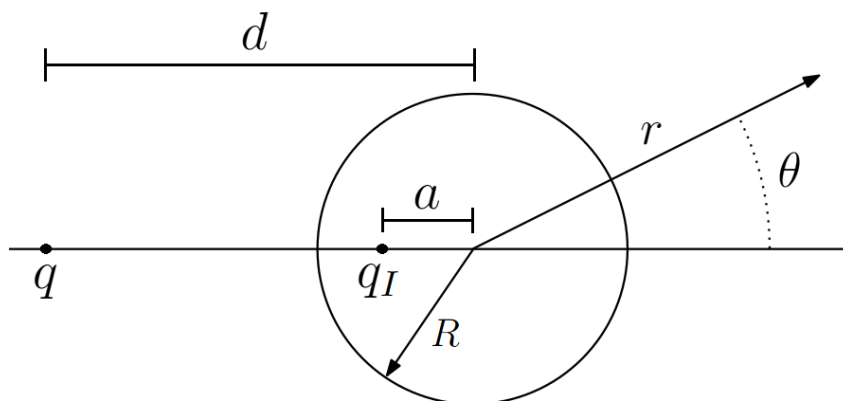


Figura 16: Configurazione equivalente con carica immagine.

Allora, il potenziale generato fuori dal cerchio è

$$\varphi_E(r, \theta) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta} \right) - \frac{q_I}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta} \right) + C.$$

Bisogna imporre la condizione sul bordo del disco $\varphi_E(r = R, \theta) = 0$, che diventa

$$-\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\sqrt{d^2 + R^2 + 2dR \cos \theta} \right) - \frac{q_I}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta} \right) + C = 0.$$

Abbiamo a disposizione solo un'equazione, ma ben tre incognite. Ricordiamoci, però, che a noi basta trovare un solo set di valori di q_I , a e C che vada bene. Pare che i termini logaritmici, che sono gli unici a dipendere da θ , si possano bilanciare solo se $q_I = -q$. Per quanto riguarda la posizione della carica, proviamo a usare $a = R^2/d$ come nel caso 3D della sfera. Così facendo, si ottiene

$$C = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{d}.$$

Il potenziale fuori dal disco è, dunque,

$$\varphi_E(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\frac{R^4}{d^2} + r^2 + 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta}{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta} \right) - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{d}.$$

In coordinate polari, il campo di elettrico si calcola come

$$\vec{E}(r, \theta) = -\nabla \varphi_E = -\frac{\partial \varphi_E}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_E}{\partial \theta} \hat{\theta}. \quad (6.1)$$

La Fig. 17 mostra il campo elettrico in prossimità fuori dal disco conduttore.

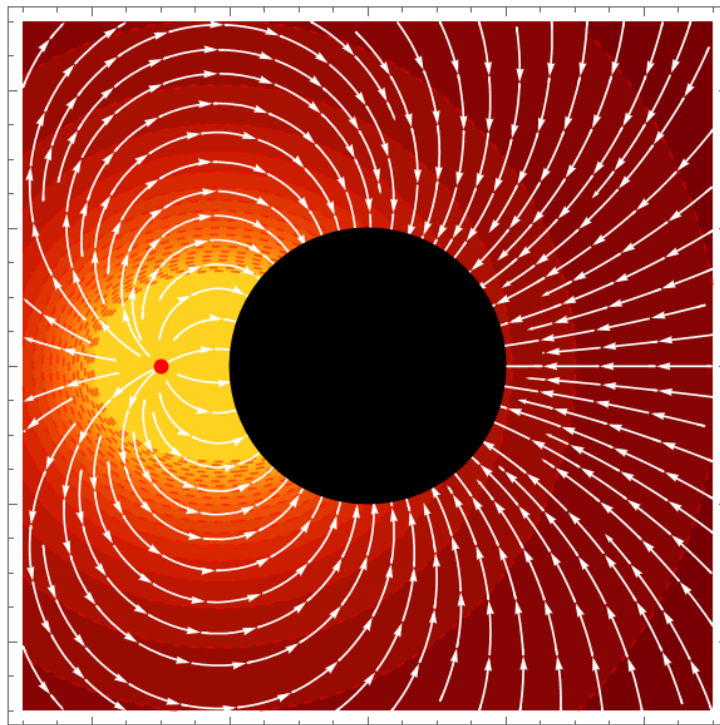


Figura 17: Campo elettrico in prossimità del disco conduttore, nel caso $q > 0$.

Esempio 6.2 (Campo di velocità di una sorgente posta vicino a un ostacolo circolare). Siamo in 2D, quindi il campo di velocità di una sorgente isotropa di portata F è

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{F}{2\pi r} \hat{r},$$

a cui è associato il potenziale

$$\varphi_V(r) = -\frac{F}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}.$$

Consideriamo un ostacolo circolare di raggio R centrato nell'origine e una sorgente di portata F posta lungo l'asse x in posizione $(-d, 0)$, con $d > R$. Dato che il campo scritto sopra non rispetta le condizioni al contorno sul cerchio, dobbiamo capire dove mettere le sorgenti o i pozzi immagine nel disco. Perché sappiamo a priori che non ne basta una? La motivazione è semplice: dato che il fluido è incomprimibile, c'è bisogno che la quantità di liquido che le sorgenti immagine genererebbero dentro il cerchio sia conservata. Quindi, come minimo ci devono essere una sorgente e un pozzo di portata opposta, posti da qualche parte dentro il cerchio. Siano F_I e $-F_I$ le loro portate, le loro posizioni prese come in Fig. 18. Questa scelta è dettata dal fatto che ci si aspetta che il campo sia simmetrico in y . Quindi, esso deve sicuramente essere nullo nei punti in cui la circonferenza interseca l'asse x .

Allora, il potenziale generano fuori dal cerchio è

$$\begin{aligned} \varphi_V(r, \theta) = & -\frac{F}{2\pi} \ln \left(\sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta} \right) - \frac{F_I}{2\pi} \ln \left(\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta} \right) + \\ & + \frac{F_I}{2\pi} \ln \left(\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta} \right). \end{aligned}$$

Mentre nel caso dei conduttori il valore e le posizioni delle cariche sono scelti in modo da rendere φ costante per $r = R$, nel caso fluidodinamico (o nel caso elettrostatico per $\varepsilon = 0$) vogliamo che la componente radiale della velocità sulla circonferenza sia nulla. Quindi imponiamo che

$$v_r \equiv -\frac{\partial \varphi_V}{\partial r}(r = R, \theta) = 0.$$

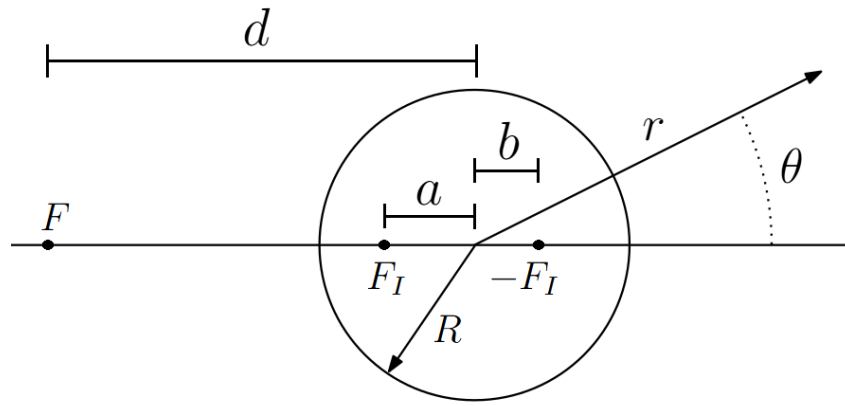


Figura 18: Disposizione delle sorgenti immagine dentro al disco.

La velocità radiale è

$$v_r(r, \theta) = + \frac{F}{4\pi} \frac{r + d \cos \theta}{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta} + \frac{F_I}{4\pi} \frac{r + a \cos \theta}{a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta} + \frac{F_I}{4\pi} \frac{r - b \cos \theta}{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}.$$

Allora la condizione scritta sopra si traduce in

$$\frac{F}{4\pi} \frac{R + d \cos \theta}{d^2 + R^2 + 2dR \cos \theta} + \frac{F_I}{4\pi} \frac{R + a \cos \theta}{a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta} - \frac{F_I}{4\pi} \frac{R - b \cos \theta}{b^2 + R^2 - 2bR \cos \theta} = 0.$$

Questa è apparentemente un'equazione con ben tre incognite: a , b e F_I . Sembrerebbe impossibile da risolvere. Ricordiamoci, però, che a noi basta trovare un solo set di valori di a , b e F_I che vada bene. Quindi, proviamo a indovinare se ci sono soluzioni con, ad esempio, $b = 0$ e $F_I = F$. Se, risolvendo l'equazione per a trovassimo un valore maggiore del raggio, ciò significherebbe che le assunzioni fatte per b e F_I sono sbagliate. L'equazione diventa

$$\frac{R + d \cos \theta}{d^2 + R^2 + 2dR \cos \theta} + \frac{R + a \cos \theta}{a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta} - \frac{1}{R} = 0.$$

la cui soluzione è $a = R^2/d$, che è sicuramente minore di R . Ecco che abbiamo trovato le quantità che cercavamo: $a = R^2/d$, $b = 0$ e $F_I = F$. La Fig. 19 mostra una schematizzazione del sistema.

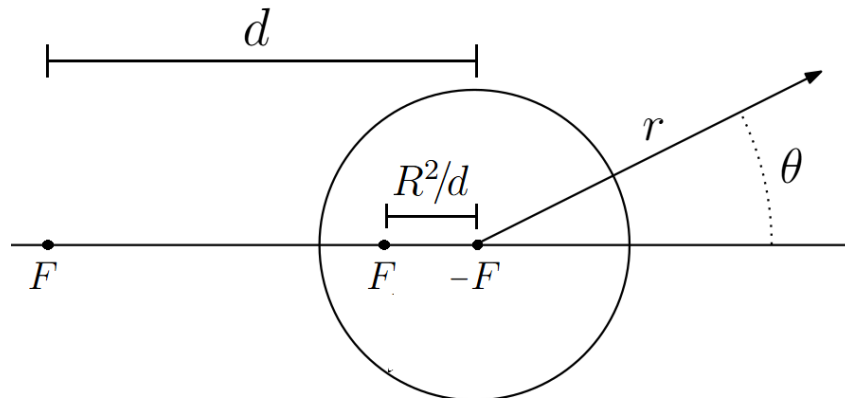


Figura 19: Disposizione delle sorgenti immagine dentro al disco.

Adesso possiamo calcolare il campo di velocità in tutto lo spazio. Ripartiamo dall'espressione del potenziale in un generico punto dello spazio, che diventa

$$\begin{aligned}\varphi_V(r, \theta) = & -\frac{F}{2\pi} \ln \left(\sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta} \right) - \frac{F}{2\pi} \ln \left(\sqrt{\frac{R^4}{d^2} + r^2 + 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta} \right) + \\ & + \frac{F}{2\pi} \ln r + C.\end{aligned}$$

In coordinate polari, il campo di velocità si calcola come

$$\vec{v}(r, \theta) = -\nabla \varphi_V = -\frac{\partial \varphi_V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_V}{\partial \theta} \hat{\theta}. \quad (6.2)$$

La Fig. 20 mostra il campo in prossimità dell'ostacolo circolare.

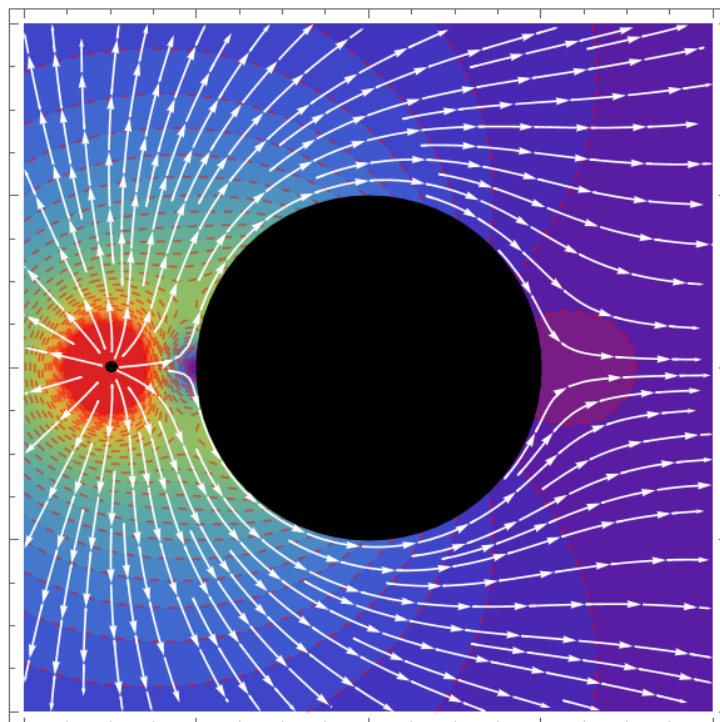


Figura 20: Campo di velocità generato da una sorgente posta vicino a un ostacolo circolare.

Esempio 6.3 (Flusso di un fiume attorno a un pilastro cilindrico). Assumendo ci sia simmetria lungo la direzione data dall'asse del pilastro, possiamo limitarci a studiare la configurazione 2D come per la sezione precedente, ma con qualche modifica. In assenza del pilastro, il fiume è un flusso omogeneo e infinito di acqua. Quindi ci serve capire quali sorgenti producono un campo omogeneo nello spazio. Ci sono diverse possibilità. Ad esempio, sappiamo che un piano carico infinito produce un campo elettrico omogeneo nello spazio. Un'altra possibilità è considerare due cariche opposte $+q$ e $-q$ a distanza d l'una dall'altra e costruire la configurazione limite facendo tendere $q, d \rightarrow \infty$ ma mantenendo costante il rapporto q/d . In questo modo, nello spazio compreso tra le due cariche si ha un campo omogeneo come quello dentro a un condensatore a facce piane e parallele. Quindi, possiamo considerare la configurazione in cui sono presenti una sorgente $+F$ e un pozzo $-F$, opposte ma alla stessa distanza d dal centro del pilastro di raggio R . Troviamo il campo di velocità in questa configurazione, per poi calcolare il limite appena descritto. Usando il risultato della sezione precedente, possiamo dire che le cariche da porre al centro del cerchio sono uguali ed opposte, quindi i loro effetti si annullano a vicenda. Dunque, in pratica servono solo due cariche immagine, posizionate come in Fig. 21.

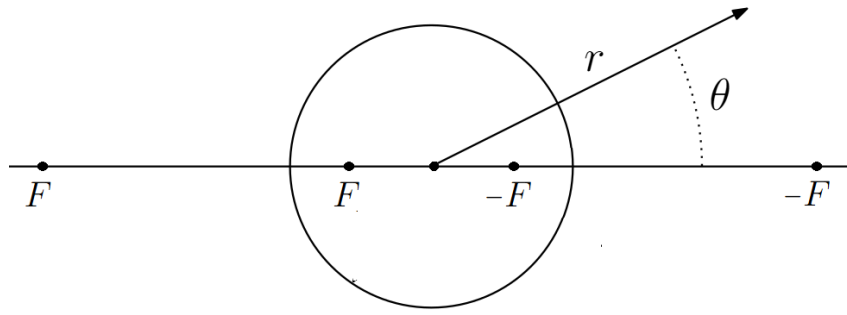


Figura 21: Disposizione delle sorgenti e delle sorgenti immagine dentro al disco.

Il potenziale nello spazio, escluso il cerchio, vale

$$\begin{aligned} \varphi_V(r, \theta) = & -\frac{F}{2\pi} \ln \left(\sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta} \right) - \frac{F}{2\pi} \ln \left(\sqrt{\frac{R^4}{d^2} + r^2 + 2 \frac{R^2}{d} r \cos \theta} \right) + \\ & + \frac{F}{2\pi} \ln \left(\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta} \right) + \frac{F}{2\pi} \ln \left(\sqrt{\frac{R^4}{d^2} + r^2 - 2 \frac{R^2}{d} r \cos \theta} \right). \end{aligned}$$

A questo punto, anche se non serve, l'Eq. (6.2) restituisce il campo di velocità in Fig. 22.

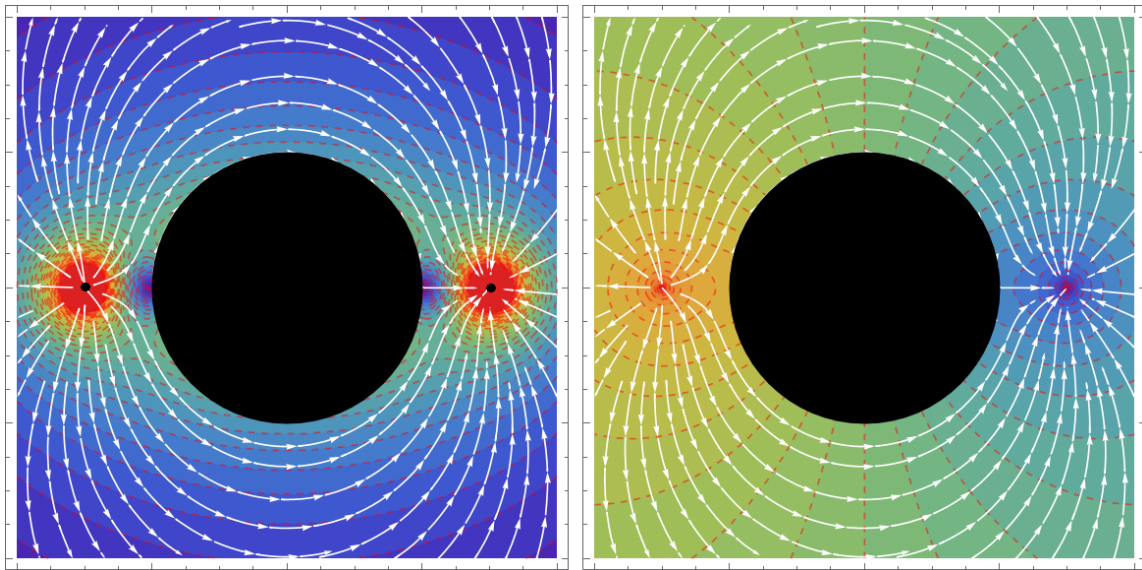


Figura 22: Campo di velocità generato da una sorgente e un pozzo posti vicino a un ostacolo circolare. A sinistra è mostrata una mappa dell'intensità del campo, a destra le linee equipotenziali.

Adesso manca il calcolo del limite $F, d \rightarrow \infty$ con F/d costante. Proviamo a calcolarlo analiticamente a partire dal potenziale. Sviluppiamo il potenziale in serie, raccogliendo d negli argomenti del primo e terzo addendo e r in quelli del secondo e quarto. Sfruttando le proprietà dei logaritmi, il potenziale si riduce a

$$\begin{aligned} \varphi_V(r, \theta) = & -\frac{F}{4\pi} \ln \left[1 + \left(\frac{r}{d} \right)^2 + 2 \frac{r}{d} \cos \theta \right] - \frac{F}{4\pi} \ln \left[1 + \frac{R^4}{d^2 r^2} + 2 \frac{R^2}{dr} \cos \theta \right] + \\ & + \frac{F}{4\pi} \ln \left[1 + \left(\frac{r}{d} \right)^2 - 2 \frac{r}{d} \cos \theta \right] + \frac{F}{4\pi} \ln \left[1 + \frac{R^4}{d^2 r^2} - 2 \frac{R^2}{dr} \cos \theta \right]. \end{aligned}$$

Visto che vogliamo $d \rightarrow \infty$, tutti i termini del potenziale sono della forma $\ln(1+x) \approx x$, con $x \ll 1$. Espandendo in serie di McLaurin, si ottiene

$$\begin{aligned}\varphi_V(r, \theta) &\approx -\frac{F}{4\pi} \left[\left(\frac{r}{d} \right)^2 + 2 \frac{r}{d} \cos \theta \right] - \frac{F}{4\pi} \left[\frac{R^4}{d^2 r^2} + 2 \frac{R^2}{dr} \cos \theta \right] + \\ &+ \frac{F}{4\pi} \left[\left(\frac{r}{d} \right)^2 - 2 \frac{r}{d} \cos \theta \right] + \frac{F}{4\pi} \left[\frac{R^4}{d^2 r^2} - 2 \frac{R^2}{dr} \cos \theta \right] = \\ &= -\frac{F}{\pi d} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r \cos \theta.\end{aligned}$$

Questo implica che la velocità fuori dal cerchio sia

$$\vec{v}(r, \theta) = -\nabla \varphi_V = \frac{F}{\pi d} \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \hat{r} - \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \hat{\theta} \right].$$

Per $\theta = k\pi$ e $r \rightarrow \infty$, cioè lungo l'asse x e a grandi distanze dall'origine, $\vec{v} \rightarrow F/\pi d \hat{x}$, quindi la quantità $F/\pi d$ è proprio la velocità della corrente del fiume, che possiamo ribattezzare U_0 . Possiamo notare che la velocità può essere riscritta come

$$\vec{v}(r, \theta) = U_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) - U_0 \frac{R^2}{r^2} (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}),$$

dove il primo termine è il contributo del campo di velocità imperturbato e omogeneo del fiume, mentre il secondo è il campo di un dipolo in 2D posto nell'origine. Questo è proprio il campo generato dalle sorgenti immagine, che in questa configurazione si trovano nell'origine perché $d \rightarrow \infty$. La distribuzione della velocità è raffigurata in Fig. 23. Il problema analogo in elettrostatica è quello di un disco con $\varepsilon = 0$ immerso in un campo elettrico omogeneo in 2D.

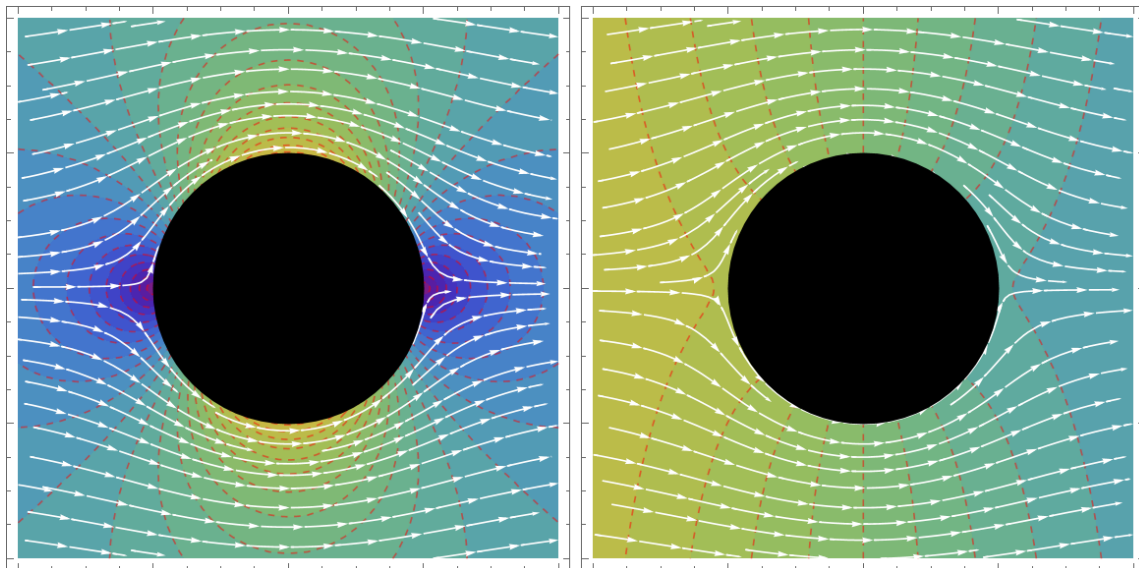


Figura 23: Campo di velocità di un fiume attorno a un ostacolo cilindrico, visto dall'alto. A sinistra è mostrata una mappa dell'intensità del campo, a destra le linee equipotenziali.

6.4 Esempi di campi elettrici e flussi in 3D

Rispetto al caso 2D, in 3D ci sono alcune differenze. La più evidente è legata al valore delle cariche/sorgenti immagine e alla loro posizione. Ad esempio, nel caso di una sorgente posta vicino a un ostacolo sferico non è più efficace mettere due cariche immagini puntiformi come nel

caso del disco in 2D. Si può mostrare che in questo caso bisogna mettere una sorgente puntiforme e una distribuzione lineare di pozzi tra il centro della sfera e la posizione della prima sorgente immagine. Questa differenza è dovuta alla diversa forma funzionale del potenziale in 2D e 3D. Comunque, la somma delle portate d'acqua dentro la sfera deve essere nulla. Nel caso di una sfera immersa in un flusso omogeneo, lavorando in modo analogo a quello del disco, si trova che il campo totale è la somma del campo omogeneo e del campo di un dipolo immagine posto dentro la sfera.

Esempio 6.4 (Campo elettrico di una carica posta vicino a una sfera conduttrice).

Consideriamo una sfera conduttrice di raggio R , messa a terra, centrata nell'origine e una carica q posta lungo l'asse x in posizione $(-d, 0)$, con $d > R$. Cerchiamo di capire come mettere una carica immagine per far rispettare le condizioni al contorno, cioè che il campo deve essere perpendicolare alla superficie del disco. Il potenziale generato al di fuori della sfera vale

$$\varphi_E(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta}} + \frac{q_I}{4\pi\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta}}.$$

Imponiamo la condizione

$$\varphi_E(r = R, \theta) = \frac{q}{4\pi\sqrt{d^2 + R^2 + 2dR \cos \theta}} + \frac{q_I}{4\pi\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta}} = 0,$$

che è soddisfatta se $q_I = -qR/d$ e $a = R^2/d$. Allora, il potenziale fuori dalla sfera è

$$\varphi_E(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta}} - \frac{qR/d}{4\pi\sqrt{\frac{R^4}{d^2} + r^2 + 2\frac{R^2}{d}r \cos \theta}}.$$

Il campo elettrico che ne deriva è mostrato in Fig. 24.

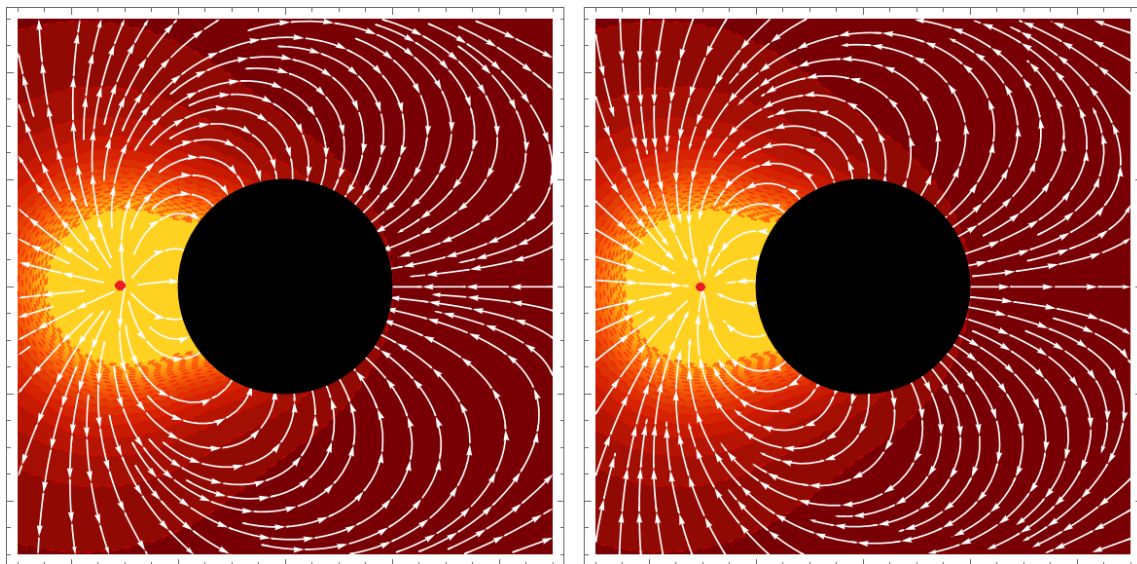


Figura 24: Campo elettrico di una carica (positiva a sinistra, negativa a destra) posta vicino a una sfera conduttrice messa a terra.

Esempio 6.5 (Campo elettrico di una carica posta vicino a una sfera conduttrice a potenziale fissato). Nel caso in cui la sfera conduttrice dell'esempio precedente sia mantenuta a potenziale fissato $V_0 \neq 0$, basta aggiungere un'ulteriore carica immagine nel centro della sfera, del valore di $4\pi\epsilon_0 R V_0$. Il suo scopo è quello di portare il potenziale sulla superficie della sfera dal valore $V = 0$ dell'esempio precedente al valore $V_0 \neq 0$.

Esempio 6.6 (Campo elettrico di una carica posta vicino a un piano conduttore infinito). Consideriamo una carica positiva $+q$ posta a distanza d da un piano conduttore infinito e messo a terra. La condizione di potenziale nullo sul piano è ottenibile posizionando una carica immagine $q_I = -q$ dall'altra parte del piano, a distanza d . Così facendo, il potenziale nel semispazio di destra vale

$$\varphi_E(x, y) = \frac{q}{4\pi\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{4\pi\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}.$$

Il campo elettrico che ne deriva è raffigurato in Fig. 25.

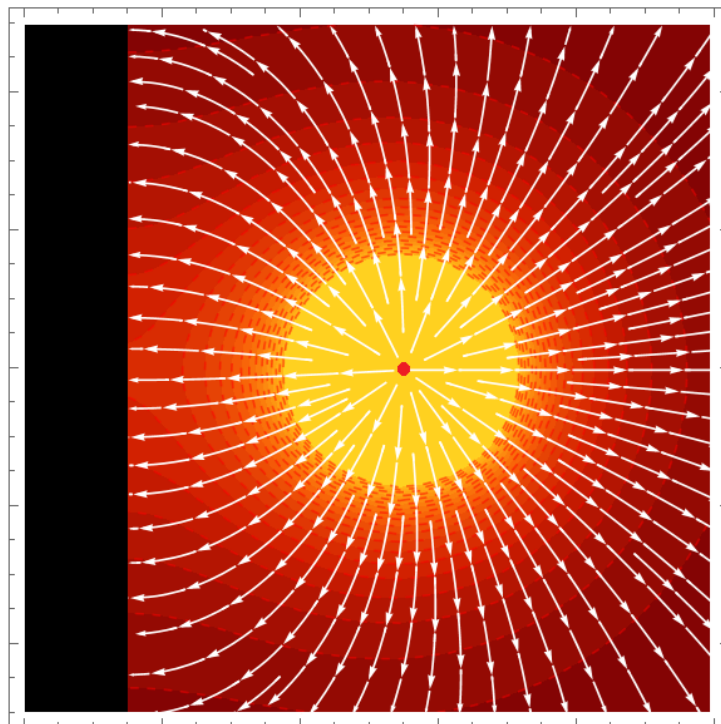


Figura 25: Campo elettrico di una carica positiva posta vicino a un piano conduttore infinito.

Esempio 6.7 (Campo di velocità di una sorgente posta vicino a un muro infinito). Consideriamo una sorgente $+F$ posta a distanza d da un muro infinito. La solita condizione di velocità parallela all'ostacolo è soddisfatta ponendo una sorgente immagine $F_I = +F$ dall'altra parte del muro, a distanza D , come in Fig. 26.

Il potenziale nella parte di destra vale

$$\varphi_V(x, y) = \frac{F}{4\pi\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{F}{4\pi\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}.$$

Dopo aver calcolato la velocità, si ottiene la distribuzione in Fig. 27.

6.5 Forza sui conduttori e sugli ostacoli

In tutte le configurazioni elettriche esaminate fino ad adesso, si genera una forza tra il conduttore e la carica fissa posizionata fuori da esso. Questa forza è sempre attrattiva, indipendentemente dal segno della carica. Essa si può calcolare trovando la densità superficiale di carica indotta sul conduttore, usando il teorema di Coulomb. Successivamente, basta integrare per trovare la forza. Il risultato che si trova è uguale alla forza ottenuta dall'interazione tra la carica e le cariche immagine.

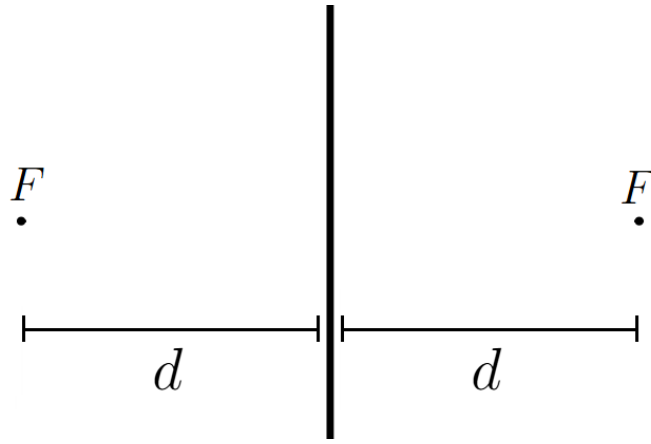


Figura 26: Sorgente (a destra) e sorgente immagine (a sinistra).

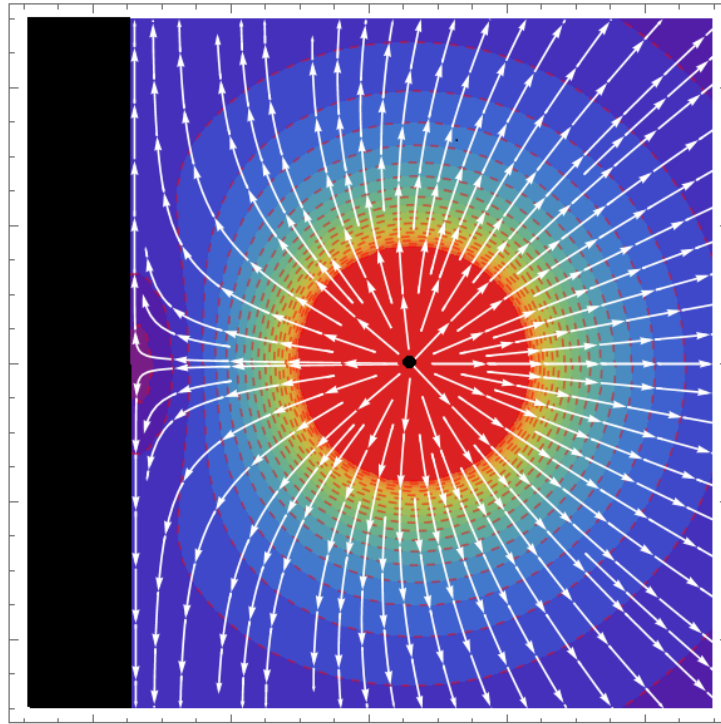


Figura 27: Campo di velocità generato da una sorgente posta vicino a un muro.

In fluidodinamica, le cose sono ben diverse: dato che abbiamo usato le ipotesi stazionaria, irrotazionale, incomprimibile e non-viscosa, e, dato che le linee di flusso sono ordinate, possiamo usare il teorema di Bernoulli in forma forte. Allora, la quantità

$$B = p(\vec{r}) + \frac{1}{2}\rho v^2(\vec{r})$$

è la stessa in tutti i punti del fluido, tranne dove sono presenti le sorgenti e i pozzi¹³. Allora, la

¹³Nei punti in cui sono presenti sorgenti e pozzi non vale l'ipotesi di incomprimibilità. Inoltre, formalmente, vicino a questi punti, la velocità è comunque immensa, quindi potrebbe sembrare che la pressione diventi negativa per mantenere costante B . In realtà, la pressione non può avere valori negativi, quindi deve esserci una spiegazione. Infatti, quando sono presenti sorgenti/pozzi, a cui sono associati campi di velocità che divergono in certi punti, il valore di B è infinito. Questo valore è proprio il valore della pressione all'infinito, visto che, molto lontano dagli ostacoli, la velocità è nulla. Ovviamente, questo è solo il modo formale per far tornare i conti.

forza agente su un ostacolo è

$$\vec{F} = \int_S p(\vec{r}) \hat{n} dS = \int_S B \hat{n} dS - \frac{1}{2} \rho \int_S v^2(\vec{r}) \hat{n} dS, \quad (6.3)$$

dove l'integrale è calcolato sulla superficie dell'ostacolo. Distinguiamo alcuni casi.

1. Nel caso di ostacoli finiti, il primo addendo è nullo perché l'integrale delle normali a una superficie chiusa è nullo.
2. Nel caso di ostacoli finiti immersi in un flusso abbastanza simmetrico, il secondo integrale è nullo. Questo vale, ad esempio, nel caso di un oggetto immerso in un flusso omogeneo. Ciò va sicuramente contro l'esperienza comune ed è noto come *paradosso di d'Alembert*.

Visto quanto appena detto, la forza sul disco in Fig. 20 non è nulla ed è diretta verso la sorgente, contrariamente a quanto si possa pensare. Infatti, l'ultimo addendo in Eq. (6.3) *tira* verso sinistra, dato che $v^2(R, \theta)$ è maggiore per l'emisfero sinistro. Nel caso raffigurato in Fig. 22 e 23 la forza è nulla perché $v^2(R, \theta) = v^2(R, -\theta)$, mentre la forza agente sul muro in Fig. 27 tende a spingerlo verso sinistra, indipendentemente dal fatto che ci sia una sorgente o un pozzo.