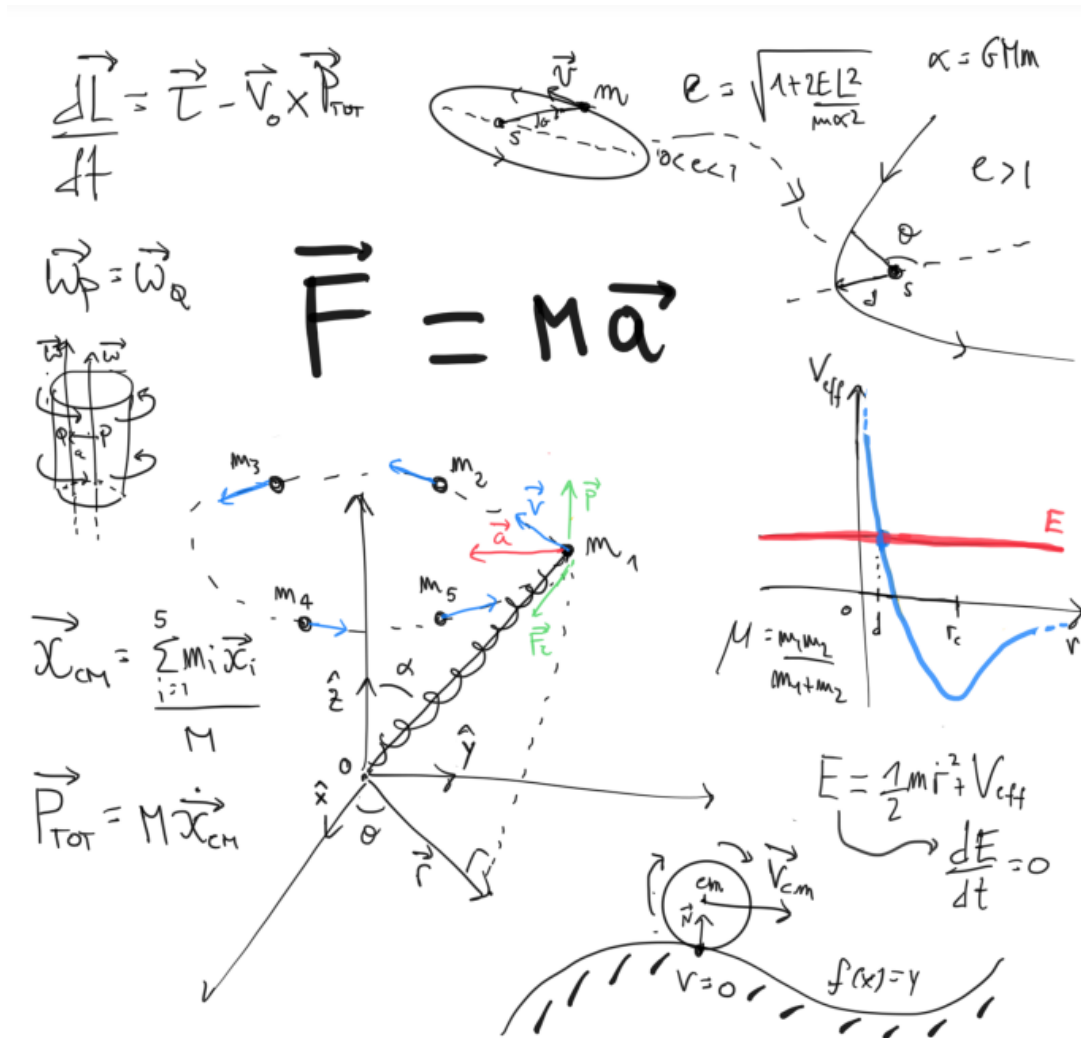


Meccanica Base

Edoardo Perri - Alessandro Macchioni *



Sommario

Fornendo delle nozioni di calcolo vettoriale, la prima parte della lezione sarà volta a fornirvi delle tecniche per risolvere l'equazione del moto in diversi contesti. Passeremo poi alle leggi di conservazione, che aiutano a ridurre il numero dei parametri da determinare nell'evoluzione di un sistema. Successivamente tratteremo le equazioni cardinali della dinamica, con qualche accenno a vincoli e corpo rigido, di cui ci limiteremo a studiare problemi riconducibili ad una trattazione bidimensionale. Infine studieremo la forma delle orbite dovute alla forza gravitazionale, analizzando in dettaglio le leggi di Keplero, introducendo il potenziale efficace, il vettore Lenz e fornendo elementi per trattare la perturbazione delle orbite al primo ordine.

*edoardo.perri@sns.it - alessandro.macchioni@sns.it

— INDICE —

1	Calcolo vettoriale	4
1.0.1	Cos'è un vettore	4
1.0.2	Rappresentazione di un vettore	4
1.1	Operazioni tra vettori	4
1.1.1	Prodotto scalare	4
1.1.2	Prodotto vettoriale	6
1.1.3	Due identità notevoli	8
1.2	Derivata di un vettore	8
2	Moto del punto materiale	10
2.1	Coordinate cilindriche	10
2.2	Equazioni del moto in forma vettoriale	11
2.3	Principio della dinamica ed invarianza per inversione temporale	11
2.4	Sistemi accelerati	12
2.5	Esempio: Caduta di un grave dalla torre di Pisa	13
3	Leggi di conservazione ed equazioni cardinali	14
3.1	Energia	14
3.2	Quantità di moto	16
3.3	Sistema del centro di massa	17
3.4	Momento angolare	18
3.5	Teoremi di König	18
3.5.1	Primo teorema di König	18
3.5.2	Secondo teorema di König	19
3.6	Equazioni cardinali della dinamica	19
3.7	Forze dovute a vincoli	20
4	Corpo rigido	20
4.1	Decomposizione del moto del corpo rigido e velocità angolare	20
4.2	Teorema di Huygens-Steiner	22
4.3	Puro rotolamento	23
5	Introduzione ai campi centrali	24
5.1	Grandezze conservate	24
5.2	Potenziale efficace	24
6	Gravitazione	26
6.1	Leggi di Keplero	27
6.1.1	Prima legge	28
6.1.2	Seconda legge	29
6.1.3	Terza legge	29
6.2	Vettore di Runge-Keplero-Lenz	29
6.2.1	Ricaviamo $r(\theta)$ usando il vettore di Lenz	30
6.3	Equazione di Binet	31
6.3.1	Perturbazione di orbite circolari	32
6.3.2	Perturbazione del potenziale	32
A	Appendice: derivata di un vettore, caso generale	34

B	Appendice: $\vec{\omega}$ per vettori generici e coordinate sferiche	34
B.1	$\vec{\omega}$ esiste sempre?	34
B.2	Coordinate sferiche	36
C	Appendice: Perturbazione generica del potenziale	37
	Esercizi	39

SEZ. 1 — CALCOLO VETTORIALE

§ 1.0.1. **Cos'è un vettore.** — La definizione di vettore in matematica, come elemento di un insieme dotato di due operazioni che rispettano certe proprietà (uno spazio vettoriale), non è particolarmente illuminante dal punto di vista fisico, in particolare, per i nostri scopi, un vettore è una rappresentazione matematica di un'entità fisica, ad esempio una forza o una velocità, che possiede tre caratteristiche: *lunghezza*, *direzione* e *verso*. Geometricamente, possiamo vedere un vettore come una freccia nello spazio tridimensionale.

§ 1.0.2. **Rappresentazione di un vettore.** — Per studiare la rappresentazione di un vettore abbiamo bisogno del concetto di indipendenza lineare. Studiamo in queste dispense il caso tridimensionale, notando che in dimensione più alta le considerazioni sono del tutto identiche. L'insieme $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ si dice formato da vettori linearmente indipendenti se l'unica soluzione dell'equazione

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = 0$$

è $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Per rappresentare un vettore nello spazio tridimensionale, usiamo tre vettori di riferimento linearmente indipendenti, indicati con \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 . L'insieme $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è detto *base*.

L'indipendenza lineare tra vettori garantisce che ogni vettore nello spazio abbia una rappresentazione unica nella base scelta. Infatti, se avessimo due rappresentazioni diverse dello stesso vettore \vec{v} ,

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3$$

avremmo

$$(a_1 - b_1)\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\vec{v}_2 + (a_3 - b_3)\vec{v}_3 = 0$$

e, per l'indipendenza lineare, questo implica che $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, e $a_3 = b_3$, assicurando così l'unicità della rappresentazione.

Un fatto importante da notare è che nonostante la rappresentazione del vettore sia diversa a seconda della base utilizzata, il vettore in sé resta lo stesso. Questa osservazione permette di ricavare delle importanti proprietà di trasformazione dei vettori che sono accennate nella sezione degli esercizi.

Per comodità, vogliamo che i tre vettori siano anche ortogonali, in modo da poter usare il teorema di Pitagora per calcolare la lunghezza dei vettori (approfondiremo più formalmente la definizione di lunghezza e ortogonalità nella prossima sezione, per ora vi basta avere l'idea intuitiva del loro significato).

Inoltre, per semplificare ulteriormente, possiamo imporre che i vettori abbiano tutti lunghezza unitaria. Un vettore di lunghezza unitaria viene chiamato *versore* e lo rappresentiamo con un cappellino sopra la lettera, al posto della freccia usuale. In questo caso, ogni vettore nello spazio tridimensionale può essere scritto come

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$$

dove \hat{x} , \hat{y} , e \hat{z} sono i tre versori canonici, che corrispondono ai vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

1.1 Operazioni tra vettori

§ 1.1.1. **Prodotto scalare.** — Il prodotto scalare euclideo permette di calcolare la proiezione di un vettore su un altro e anche la lunghezza di un vettore. Con il prodotto scalare, che a tutti gli effetti è una funzione di che prende come input due vettori e restituisce uno scalare, la

proiezione di uno sull'altro, stiamo definendo una lunghezza nello spazio tridimensionale. Infatti la lunghezza di un vettore non è altro che la proiezione su sè stesso. Il prodotto scalare di due vettori \vec{v} e \vec{w} nello spazio euclideo tridimensionale è definito nel seguente modo:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

Se i vettori sono uguali, cioè $\vec{v} = \vec{w}$, otteniamo

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

che è proprio il quadrato della lunghezza del vettore, come ci dice il teorema di Pitagora. La lunghezza di un vettore è chiamata *norma* e la denotiamo con $\|\vec{v}\|$. Inoltre, come potete facilmente verificare, valgono le tre seguenti proprietà:

- Distributiva:

$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{v} = \vec{x} \cdot \vec{v} + \vec{y} \cdot \vec{v}$$

- Simmetria:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

- Omogeneità:

$$(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$$

(Dove $\vec{x}, \vec{y}, \vec{v}$ sono vettori e λ è un numero reale)

Ora, vediamo che con questa definizione il prodotto scalare ci permette di calcolare la proiezione di un vettore su un altro nel senso geometrico che vorremmo. Dimostriamo in particolare quanto segue:

Teorema: *Siano \vec{v}, \vec{w} due vettori e sia θ sia l'angolo tra i due, allora vale:*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta$$

Costruiamo un triangolo nello spazio tridimensionale con i lati $\|\vec{w}\|$, $\|\vec{v}\|$, e $\|\vec{v} - \vec{w}\|$ e usiamo il teorema dei coseni di Carnot, che afferma

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta$$

Ora, usando la definizione di norma, possiamo scrivere

$$\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta = \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

da cui otteniamo la tesi uguagliando la prima e l'ultima equazione.

Il prodotto scalare ci permette quindi di calcolare le componenti di un vettore, e in particolare di determinare il coseno dell'angolo tra due vettori, un'operazione molto utile in uno spazio tridimensionale, dove è difficile "vedere" le proiezioni a occhio. Inoltre abbiamo un criterio per stabilire l'ortogonalità tra due vettori scritti in componenti, in particolare vale

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$$

Così, per un vettore \vec{v} nello spazio tridimensionale, possiamo scrivere

$$\vec{v} = \hat{x}(\vec{v} \cdot \hat{x}) + \hat{y}(\vec{v} \cdot \hat{y}) + \hat{z}(\vec{v} \cdot \hat{z}) = \hat{x}v \cos \theta_1 + \hat{y}v \cos \theta_2 + \hat{z}v \cos \theta_3$$

Infine, dato che $\|\vec{v}\| = v$, vale la relazione

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1$$

Questo ci dice un fatto già ben noto, ovvero che per determinare un vettore nello spazio euclideo abbiamo bisogno di sapere la sua lunghezza e l'angolo che forma con due dei tre versori cartesiani. Dunque una direzione generica nello spazio tridimensionale è determinata da due parametri.

§ 1.1.2. **Prodotto vettoriale.** — Probabilmente siete abituati a calcolare il modulo del prodotto vettoriale come

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta = \sqrt{a^2 b^2 - (a \cdot b)^2}$$

. In questa sezione cercheremo di sviluppare ulteriormente l'idea in modo analogo a quanto fatto per il prodotto scalare, in modo da avere uno strumento più versatile che ci permetta di calcolare anche le componenti del prodotto vettoriale tra due vettori.

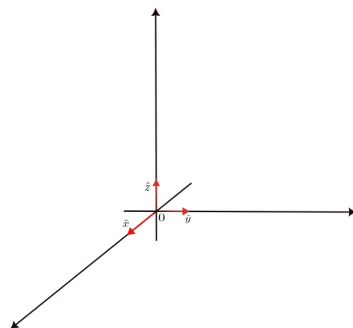
Il prodotto vettoriale tra due vettori per definizione fornisce in output un vettore ¹ ortogonale ai due vettori di partenza ed il cui modulo è dato dall'equazione scritta sopra. In altri termini vale

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Questo definisce modulo e direzione (nello spazio euclideo tridimensionale due vettori generano un piano a cui è associata un'unica direzione ortogonale, come siete invitati a mostrare nella sezione degli esercizi) ma non ci dice ancora nulla sul verso. Esiste una regola, detta della mano destra, che vi permette di stabilirlo, tuttavia vorremmo darvi uno strumento più versatile e meno "manuale" per determinarlo. Presa la terna di versori cartesiani, il segno del prodotto vettoriale è dato dalla seguente regola:

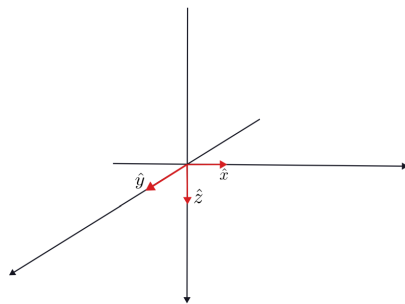
$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

Potete convincervi in modo visivo ruotando in modo rigido la terna di assi cartesiani standard che una qualsiasi permutazione pari (ovvero in questo caso una che potete ottenere facendo scorrere ciclicamente a destra o sinistra i tre versori nell'equazione scritta sopra) lascia inalterato il segno del prodotto vettoriale, in quanto potete ruotare rigidamente la terna iniziale e ottenere, a meno di rinominare gli assi, esattamente la stessa terna di partenza, ovvero il nuovo asse x ha stessa direzione e verso del vecchio asse x , e analogamente per y e z . Qui sotto riportiamo un'immagine degli assi cartesiani per aiutarvi a immaginare le possibili rotazioni e convincervi che la regola appena esposta sia coerente.



Notiamo poi che se ruotiamo la terna in figura dapprima attorno all'asse y di $\theta_0 = \pi$ e successivamente attorno all'asse z di $\theta_1 = \pi/2$ otteniamo la terna mostrata in figura:

¹In realtà l'output non è un vettore propriamente detto, infatti se applicate una riflessione al vostro sistema, questa modifica il segno dei due vettori di partenza ma non del loro prodotto vettoriale (un oggetto con questa proprietà è detto **pseudovettore**). Tuttavia, essendo questa differenza irrilevante ai nostri scopi, lo continueremo a chiamare impropriamente "vettore"



Usando la regola appena spiegata deve dunque valere

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$$

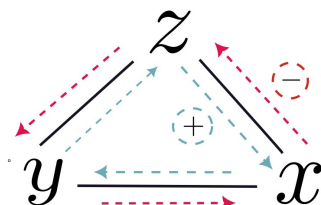
e così per ogni permutazione pari ottenuta a partire da questa. Una terna di versori a due a due ortogonali $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ è detta destrorsa se ha la stessa orientazione dei tre versori cartesiani standard, ovvero se vale $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Il prodotto vettoriale rispetta le seguenti proprietà:

- Distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- Antisimmetria: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Omogeneità: $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \vec{a} \times \vec{b}$

(Dove $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sono vettori e λ è un numero reale)

Esiste un modo veloce per stabilire velocemente il segno del prodotto vettoriale sfruttando la ciclicità del prodotto vettoriale su una terna destrorsa. Questa è riassunta graficamente nel triangolo ciclico mostrato in figura.



Per determinare il segno del prodotto vettoriale tra due versori di una terna destrorsa si procede nel modo seguente: si prende il versore che sta a sinistra nel prodotto vettoriale e si procede sul triangolo ciclico nel verso del secondo versore (supposto diverso dal primo), l'output fornisce il terzo versore ed il segno è dato dalla seguente regola: se per andare dal versore di sinistra nel prodotto vettoriale a quello di destra mi muovo in verso orario sul triangolo allora il segno è positivo, altrimenti è negativo. Inoltre se i due versori sono identici, il che equivale a non spostarsi sul triangolo ciclico, il risultato è il vettore nullo.

Pensando in questo modo al prodotto vettoriale potete a tutti gli effetti trattarlo come una moltiplicazione una volta che sapete il tipo di terna di versori che state utilizzando, infatti, sfruttando la proprietà distributiva e l'antisimmetria, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= (v_1 \hat{x} + v_2 \hat{y} + v_3 \hat{z}) \times (w_1 \hat{x} + w_2 \hat{y} + w_3 \hat{z}) \\ &= v_1 w_1 \hat{x} \times \hat{x} + v_1 w_2 \hat{x} \times \hat{y} + v_1 w_3 \hat{x} \times \hat{z} + \dots = (v_1 w_2 - v_2 w_1) \hat{x} \times \hat{y} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \hat{z} \times \hat{x} + (v_2 w_3 - v_3 w_2) \hat{y} \times \hat{z} \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) \hat{x} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \hat{y} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \hat{z} \end{aligned}$$

§ 1.1.3. **Due identità notevoli.** — Concludiamo la sezione sulle operazioni tra vettori con un paio di identità che vi semplificheranno notevolmente la risoluzione di problemi in cui dovrete maneggiare vettori (si rimanda anche qui alla sezione degli esercizi per delle dirette applicazioni). La prima è la cosiddetta relazione **BAC -CAB** per il prodotto triplo:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Per ricordare mnemonicamente quale dei vettori sia effettivamente da prendere come vettore e di quale coppia di vettori sia da fare il prodotto scalare basta che pensiate che il prodotto vettoriale di due vettori vi restituisce un vettore ortogonale ad entrambi, perciò iterando il processo un'altra volta con un terzo vettore avrete un vettore che giace nel piano generato dai due vettori di partenza, \vec{b} e \vec{c} nel nostro caso.

La seconda identità invece vi permette di ciclare tre elementi quando fate il prodotto scalare di un vettore con il prodotto vettoriale di altri due, in formule:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

Notate che in questo modo potete verificare esplicitamente che il prodotto vettoriale di due vettori generici è ortogonale ad essi.

1.2 Derivata di un vettore

Supponiamo di avere un certo vettore $\vec{v} = v\hat{v}$ nello spazio ad un certo istante t . Vogliamo capire come esprimere la variazione ad un istante successivo $t + \delta t$ nel limite $\delta t \rightarrow 0$. Studiamo prima il caso più semplice in cui il vettore varia in modulo ma punta sempre nella stessa direzione, in questo caso possiamo dimenticarci della direzione e trattare la variazione del modulo del vettore come tratteremmo una variazione di una funzione qualsiasi al primo ordine, ovvero

$$\vec{v}(t + \delta t) \approx \vec{v}(t) + \dot{v}\hat{v}\delta t$$

che diventa esatta passando al limite $\delta t \rightarrow 0$. Otteniamo così

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\hat{v}$$

Cosa succede se ora a variare è solo la direzione del vettore con modulo fissato? Per semplicità tratteremo il caso bidimensionale, ovvero il caso in cui il vettore giace nel piano xy , rimandando all'*Appendice* per una dimostrazione che si estenda al caso tridimensionale.

Per fissare le idee, supponiamo che vi stiate muovendo lungo una circonferenza a velocità costante: quanto vale la vostra accelerazione? La variazione di velocità in questo caso è data dalla variazione di direzione di questa. In particolare, per un vettore generico \vec{v} costante in modulo si ha

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2 = \text{costante}$$

Derivando ad entrambi i membri rispetto al tempo si ha:

$$v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} = 0$$

ovvero

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

Ciò implica che i vettori velocità e accelerazione sono ortogonali, ovvero posso trovare un vettore $\vec{\omega}$ perpendicolare ad entrambi (diretto quindi lungo l'asse z) tale che

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

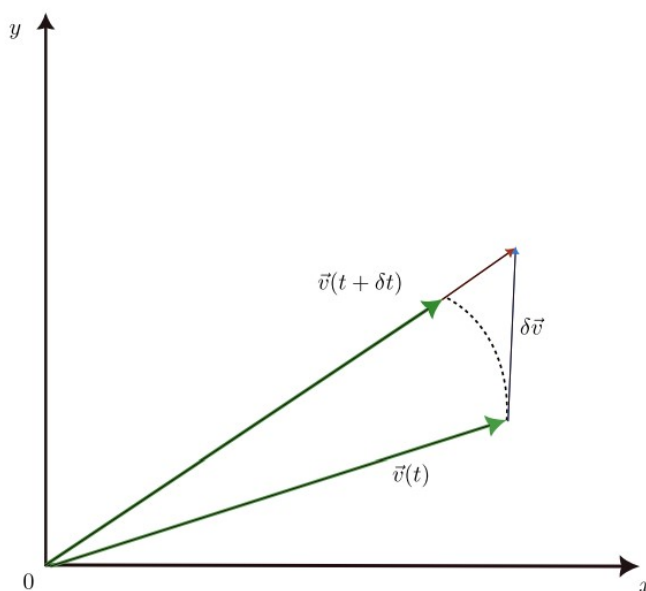
Il vettore appena menzionato è detto velocità angolare ed è diretto sempre lungo l'asse di rotazione istantaneo. Analizziamo il caso in cui un vettore ruota attorno ad un asse modificando allo stesso tempo il suo modulo. Prima forniamo un'argomentazione del tutto matematica, a seguito vedremo anche una argomentazione visiva che dovrebbe convincervi. Usiamo la regola di Leibniz:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt}$$

Poichè il modulo del versore non cambia (per definizione la sua lunghezza resta unitaria) usiamo l'argomentazione discussa sopra per concludere

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\hat{v} + v\vec{\omega} \times \hat{v} = \dot{v}\hat{v} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Ora proviamo ad avere dell'intuito visivo su quello che sta succedendo. Osserviamo la figura: immaginiamo di fissare un punto sulla punta del vettore a t e vediamo dove si trova quel punto ad un istante $t + \delta t$.



Evidentemente vale

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{v}(t)$$

$$\vec{v}(t + \delta t) = v(t)\hat{v}(t + \delta t) + \delta v\hat{v}(t + \delta t)$$

Dove il primo termine indica il vettore ruotato avente lo stesso modulo del vettore iniziale e il secondo termine esprime la variazione del modulo stesso. Espandendo al primo ordine i termini appena trovati e facendo il rapporto incrementale nel limite $\delta t \rightarrow 0$ otteniamo anche qui

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \delta t) - \vec{v}(t)}{\delta t} = \dot{v}\hat{v} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

abbiamo dunque scomposto il vettore valutato ad un istante di tempo successivo come una componente dovuta alla rotazione del vettore originale invariato in modulo ed una componente dovuta all'allungamento del vettore stesso lungo la direzione del vettore. Questo stesso ragionamento si applica anche nel caso in cui la coda del vettore sia applicata in qualsiasi altro punto dello spazio in quanto i vettori sono invarianti per traslazioni, dunque potete sempre ricondurvi al caso appena esposto.

SEZ. 2 — MOTO DEL PUNTO MATERIALE

2.1 Coordinate cilindriche

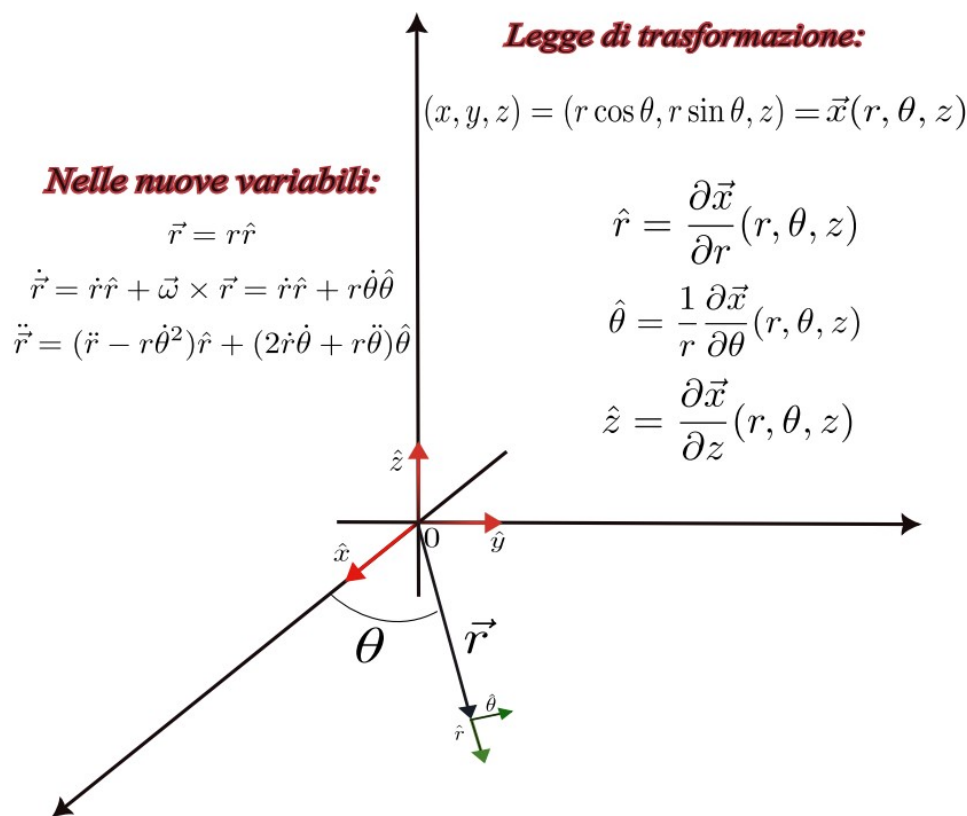
Le coordinate cilindriche sono definite attraverso la trasformazione che ci porta dal mondo (x, y, z) al mondo (r, θ, z) :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

I rispettivi versori si ottengono andando a studiare una piccola variazione del vettore posizione scritto in coordinate cilindriche rispetto a ciascuna delle variabili fissando le altre. La figura chiarisce ulteriormente l'idea dietro alla trasformazione. Notate che nella figura \vec{r} identifica il vettore posizione nel piano, mentre \vec{x} indica il vettore posizione dello spazio tridimensionale, in altre parole $\vec{x} = z\hat{z} + r\hat{r}$



Si ha dunque:²

$$\hat{r} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r}(r, \theta, z) = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}(r, \theta, z) = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}$$

$$\hat{z} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial z}(r, \theta, z) = \hat{z}$$

Potete convincervi facilmente che $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$ sia una terna destrorsa ruotando gli assi di un angolo

²Il fattore $\frac{1}{r}$ è dovuto al fatto che i versori hanno modulo unitario.

θ in verso orario e mandandola così nella terna cartesiana, come potete convincervi guardando la figura sopra.

Dall'argomentazione proposta nel calcolo della derivata di un vettore segue che la velocità angolare associata alla terna è la velocità angolare associata ai due versori \hat{r} e $\hat{\theta}$ (che è diretta dunque lungo l'asse z essendo i primi due versori contenuti nel piano xy ed essendo il terzo versore fisso). Essa deve essere la stessa per entrambi se vogliamo che restino ortogonali anche a tempi successivi³. Vale dunque

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z}$$

Il vantaggio della trattazione che utilizza la velocità angolare è che non fa mai uso specifico di coordinate e ci tornerà utile fra poco studiando i sistemi accelerati.

Andiamo al calcolo nel caso planare, il caso tridimensionale si estende facilmente essendo \hat{z} fisso:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}$$

Vedrete che col passare del tempo ricorderete queste equazioni a memoria in quanto tornano estremamente utili in un grandissimo numero di problemi. Nel nostro caso la loro maggiore applicazione sarà per lo studio di orbite in gravitazione.

2.2 Equazioni del moto in forma vettoriale

Prima di passare alle equazioni del moto per i sistemi accelerati è interessante ricavare un risultato che ci servirà in seguito per studiare le forze fittizie. Usiamo solo le definizioni di versore e il fatto che esiste un vettore velocità angolare indipendentemente dalle coordinate utilizzate e vediamo cosa ricaviamo svolgendo passaggi identici a quelli appena svolti:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{r}\hat{r} + r\vec{\omega} \times \hat{r} = \dot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \times \dot{r}\hat{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \ddot{r}\hat{r} + 2\vec{\omega} \times \dot{r}\hat{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\end{aligned}$$

Ora che abbiamo gli strumenti per studiare la meccanica possiamo effettivamente iniziare a sporcarci le mani. Enunciamo il principio della dinamica (detto anche la seconda legge di Newton), che assumeremo come postulato della teoria che andiamo a sviluppare:

2.3 Principio della dinamica ed invarianza per inversione temporale

Legge di Newton:

Sia dato un sistema di riferimento inerziale ed un punto materiale la cui accelerazione in ogni istante vale $\vec{a}(t)$, allora, detta \vec{F} la risultante delle forze agenti su di esso vale

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

³Si rimanda all'Appendice per una dimostrazione rigorosa che si estende a una qualsiasi terna rigida di versori

Soffermiamoci per un attimo sul caso in cui $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ ovvero la forza dipende solo dalla posizione (questo caso sarà particolarmente significativo nel prossimo capitolo). Notiamo allora che l'equazione è invariante per inversione temporale, ovvero presa una generica trasformazione tale che $\vec{x}' = \vec{x}$ e $t' = t_0 - t$ si ha

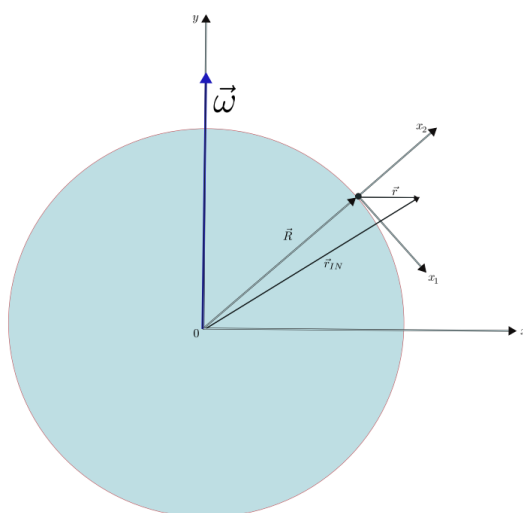
$$\vec{F}(\vec{x}') = \vec{F}(\vec{x}) = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2}$$

dunque vale il principio per cui se un sistema si evolve da uno stato $(\vec{x}_1, t = 0)$ a (\vec{x}_2, t) , lungo una certa traiettoria, allora esso può percorrere la stessa traiettoria al contrario se invertiamo lo scorrere del tempo, o detto in altri modi se facciamo partire il sistema dalla posizione \vec{x}_2 con velocità $\vec{v}' = -\vec{v}(\vec{x}_2, t)$ questo arriverà dopo un tempo $t' = t$ alla posizione \vec{x}_1 con velocità $\vec{v}'' = -\vec{v}(\vec{x}_1, 0)$.

Questo principio è l'analogo della reversibilità del cammino ottico che forse avete già incontrato in ottica geometrica.

2.4 Sistemi accelerati

Consideriamo il sistema di coordinate mobili mostrato in figura.



I versori che definiscono le nuove coordinate sono a due a due ortogonali come mostrato in figura. Per fissare le idee potete pensare che quelle siano le coordinate locali di un osservatore sulla Terra che ruota attorno al suo asse. Per costruzione abbiamo:

$$\vec{r}_{IN} = \vec{R} + \vec{r}$$

r_{IN} sta per "posizione misurata in un sistema di riferimento inerziale" mentre $\vec{r} = \sum_i x_i \hat{x}_i$ indica la posizione nel sistema di riferimento non inerziale.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{IN} &= \dot{\vec{R}} + \sum_i \dot{x}_i \hat{x}_i + \sum_i x_i \vec{\omega} \times \hat{x}_i = \dot{\vec{R}} + \sum_i \dot{x}_i \hat{x}_i + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \ddot{\vec{r}}_{IN} &= \ddot{\vec{R}} + \sum_i \ddot{x}_i \hat{x}_i + \sum_i \vec{\omega} \times \dot{x}_i \hat{x}_i + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \sum_i \vec{\omega} \times \dot{x}_i \hat{x}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \ddot{\vec{R}} + \sum_i \ddot{x}_i \hat{x}_i + 2 \sum_i \vec{\omega} \times \dot{x}_i \hat{x}_i + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

moltiplicando per la massa ad entrambi i membri e usando l'equazione di Newton al membro di sinistra otteniamo la seguente equazione:

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{R}} + m \sum_i \ddot{x}_i \hat{x}_i + 2m \sum_i \vec{\omega} \times \dot{x}_i \hat{x}_i + m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

ovvero

$$m\vec{a}_{rel} = \vec{F} - m\vec{a}_T + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{az} + \vec{F}_{cent}$$

Identifichiamo:

Accelerazione di trascinamento:

$$\vec{a}_T = \ddot{\vec{R}}$$

Forza di Coriolis:

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$$

Forza Azimutale:

$$\vec{F}_{az} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

Forza Centrifuga:

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Da qui riconosciamo tutti i termini usuali relativi alle cosiddette forze fittizie. Essi sono tutti dovuti al fatto che i versori che per un osservatore nel sistema non inerziale sembrano fissi in realtà ruotano rispetto ad un osservatore inerziale, perciò compaiono nuovi termini che l'osservatore in moto non uniforme percepisce come nuove forze, da cui il nome forze fittizie.

2.5 Esempio: Caduta di un grave dalla torre di Pisa

Immaginate di salire fino in cima alla Torre di Pisa e lasciare cadere un oggetto. Cadrà esattamente sulla proiezione verticale della sua posizione sul terreno? La risposta è negativa, in quanto la Terra ruota e il corpo che lasciate cadere dalla sommità ha una velocità leggermente maggiore rispetto a quella del terreno, essendo più lontano dall'asse di rotazione. Cerchiamo ora di essere quantitativi.

Orientiamo gli assi in modo che l'asse z nel sistema non inerziale sia ortogonale alla superficie terrestre. Consideriamo solo il contributo dei termini lineari in ω e trascuriamo la variazione dell'accelerazione di gravità⁴. Scriviamo la legge di Newton per il corpo in caduta riferendoci alla terna destrorsa della figura esposta nella pagina precedente $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \rightarrow (\hat{x}, \hat{z}, -\hat{y})$:

$$-mg\hat{z} = m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}) + 2m\omega(\cos\theta\hat{z} - \sin\theta\hat{x}) \times (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z})$$

visto che cerchiamo una prima correzione alla soluzione $\omega = 0$, in cui $\vec{v} = -gt\hat{z}$. Non ci interessano i termini della velocità lungo \hat{x} , \hat{y} in quanto porterebbero ad una correzione quadratica in ω perché essi sono almeno lineari in $\vec{\omega}$ come potete convincervi guardando l'equazione appena scritta (potete anche pensare che $\vec{v}(t) = \vec{v}(t, \omega)$ ed espandere in serie di Taylor a tempi fissati rispetto alla variabile ω). Otteniamo così

$$\ddot{z} = -g$$

$$\ddot{y} = -2\omega\sin\theta\dot{z}$$

Cosicchè, detta h l'altezza della torre di Pisa (all'incirca 55 metri)

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y(t) = \omega g \sin\theta \frac{t^3}{3}$$

⁴Per darvi un'idea di quanto sia sensato tenere solo il termine lineare in ω , facendo un breve calcolo si ottiene $\omega_{Terra} \approx 7 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{s}$

Che corrisponde ad una deviazione sul tempo di caduta pari a

$$\delta y = \frac{1}{3} \omega g \sin \theta \sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)^3} \approx 2\text{cm.}$$

Intuitivamente il segno di questo risultato è coerente con quello che ci aspettiamo, essendo la velocità tangenziale del corpo in caduta maggiore di quella del terreno. Per capire il vantaggio di usare le equazioni del moto scritte in questa forma è presente un esercizio alla fine delle dispense che vi chiede di ricavare lo stesso risultato usando solo principi di conservazione (che vedremo nella prossima sezione) e facendo qualche approssimazione (come d'altronde è stato fatto anche ora).

SEZ. 3 — LEGGI DI CONSERVAZIONE ED EQUAZIONI CARDINALI

Definiamo il lavoro di una forza tra due punti dello spazio A, B la seguente quantità:

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Una forza si dice conservativa se per ogni coppia di punti A,B nello spazio L non dipende dal percorso scelto per andare da A a B.

Esempi notevoli di forze conservative sono la forza elettrostatica e gravitazionale. Non sempre ciò accade: la forza d'attrito, ad esempio, non soddisfa tale condizione, dal momento che il lavoro svolto su un circuito chiuso è sempre strettamente negativo. Esamineremo innanzitutto il caso in cui le uniche forze che compiono lavoro sul sistema sono conservative.

3.1 Energia

Limitiamoci al caso unidimensionale per il momento: Sia $\vec{F} = F(x)\hat{x}$ una forza conservativa, allora scelto un x_0 generico è ben definita la quantità⁵

$$U = - \int_{x_0}^x F(x') dx'$$

Vale dunque

$$F = - \frac{dU}{dx}$$

Ritorniamo all'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$, che nel nostro caso si può scrivere in forma scalare in quanto stiamo lavorando in una dimensione:

$$\frac{-dU}{dx} = m\ddot{x}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per \dot{x} , ottenendo:

$$\frac{-dU}{dx} \dot{x} = m\ddot{x}\dot{x}$$

Per la *chain rule* vale dunque:

$$- \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right)$$

⁵Denoto le coordinate di integrazione con il segno primato per distinguerle dagli estremi

ovvero la quantità

$$E \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

è una costante del moto. Il caso in più dimensioni non è difficile da ottenere una volta capito quello unidimensionale:

Consideriamo la quantità

$$U(x, y, z) = - \int_{\vec{r}_0}^{(x,y,z)} \vec{F}(x', y', z') \cdot \vec{dl}$$

Essa è ben definita essendo la forza conservativa. Consideriamo una piccola variazione della funzione lungo una delle direzioni, ad esempio la direzione x :

$$U(x + \delta x, y, z) - U(x, y, z) = - \int_{(x,y,z)}^{(x+\delta x,y,z)} \vec{F}(x', y', z') \cdot \vec{dl}$$

Tuttavia in questo caso la variazione si ha solo su un tratto lungo l'asse x , dunque vale $\vec{dl} = dx\hat{x}$ perciò possiamo scrivere

$$U(x + \delta x, y, z) - U(x, y, z) = - \int_{(x,y,z)}^{(x+\delta x,y,z)} F_x(x', y', z') dx'$$

Ci siamo quindi ricondotti al caso unidimensionale e nel limite $\delta x \rightarrow 0$ possiamo concludere che

$$F_x(x, y, z) = - \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z)$$

e analogamente per le altre due componenti della forza⁶. Introducendo l'operatore $\vec{\nabla}$ definito come:

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

otteniamo la seguente espressione per la forza:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Ritorniamo ora alla legge di Newton:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri per \vec{v} , ottenendo

$$-\vec{\nabla}U \cdot \vec{v} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Se ho $U(x, y, z)$ definita come sopra e cerco la più generica variazione della funzione in seguito alla variazione di tutte e tre le coordinate, allora posso scomporre l'integrale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} & U(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - U(x, y, z) = \\ & - \int_{(x,y,z)}^{(x+\delta x,y,z)} \vec{F}(x', y', z') \cdot \vec{dl} - \int_{(x+\delta x,y,z)}^{(x+\delta x,y+\delta y,z)} \vec{F}(x', y', z') \cdot \vec{dl} - \int_{(x+\delta x,y+\delta y,z)}^{(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)} \vec{F}(x', y', z') \cdot \vec{dl} \\ & = - \int_{(x,y,z)}^{(x+\delta x,y,z)} F_x(x', y', z') dx' - \int_{(x+\delta x,y,z)}^{(x+\delta x,y+\delta y,z)} F_y(x', y', z') dy' - \int_{(x+\delta x,y+\delta y,z)}^{(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)} F_z(x', y', z') dz' \end{aligned}$$

⁶Se non avete mai incontrato il simbolo utilizzato per la derivata dell'energia, esso è una **derivata parziale** ed indica la derivata di una funzione a più variabili rispetto ad una delle variabili tenendo le altre fisse

Passando al limite per spostamenti infinitesimi e usando per ogni integrale la stessa argomentazione usata precedentemente otteniamo

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

ovvero

$$dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{x}$$

Questo procedimento vale in generale per qualsiasi funzione di tre variabili (o N variabili in generale) sufficientemente regolare (le derivate parziali devono essere ben definite). Dalla precedente equazione, derivando rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{dU}{dt} = \vec{\nabla}U \cdot \vec{v}$$

Per fare un controllo di consistenza, vediamo che nel caso unidimensionale si riduce correttamente a

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Tornando all'equazione del moto, il membro di destra dell'equazione del moto è molto simile alla derivata di $|\vec{v}|^2$, infatti vale proprio

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right) = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Abbiamo dunque la seguente equazione di conservazione:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + U \right) = 0$$

ovvero risulta conservata

$$E \equiv \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + U(x, y, z)$$

detta **Energia**, in modo del tutto analogo al caso unidimensionale. Il primo termine è detto **Energia cinetica**, il secondo **Energia potenziale**.

Energia ed energia potenziale sono definite a meno di una costante additiva: aggiungere una quantità U_0 a entrambe non altererebbe la fisica del problema, visto che $U(x, y, z)$ appare nelle equazioni del moto solo a seguito dell'azione di una derivata.

3.2 Quantità di moto

Per quanto segue, considereremo il caso unidimensionale per primo in virtù della maggiore semplicità.

Consideriamo un insieme di particelle vincolate a muoversi lungo una retta sotto l'azione di un potenziale $U(x) = \sum_{i \neq j} U(x_i - x_j)$ che dipende solo dalla distanza relativa tra le coppie di particelle. Numeriamo le particelle con un indice $i = 1, \dots, N$ e scriviamo la legge di Newton per la particella k -esima.

$$m_k \frac{dv_k}{dt} = - \frac{dU}{dx_k} = - \frac{d}{dx_k} \left[\sum_{i \neq j} U(x_i - x_j) \right] = - \frac{d}{dx_k} \left[\sum_{i \neq k} U(x_i - x_k) \right]$$

immaginiamo ora di farlo per tutte le particelle e sommare tutti i membri di destra: otterremo zero al membro di destra per scambio di segno della derivata in ogni coppia. Per vederlo in modo

esplicito valutiamo il caso con due particelle:

Sia $r = x_2 - x_1$, $U = U(x_2 - x_1)$, allora vale

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -\frac{dU}{dx_1} = -\frac{dU}{d(x_2 - x_1)} \frac{d(x_2 - x_1)}{dx_1} = \frac{dU}{d(x_2 - x_1)} = \frac{dU}{dr}$$

Analogamente per l'altra particella si avrà

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = -\frac{dU}{dr}$$

Perciò

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0$$

Nel caso generale vale

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i v_i \right) = 0$$

In più dimensioni la generalizzazione è solo più difficile a livello di notazione ma non cambia nulla dal caso a due particelle, perciò possiamo scrivere in generale che in un sistema in cui la forza è unicamente data dalla mutua interazione tra le particelle, allora si conserva

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Questa non è altro che una riformulazione del Terzo principio di Newton.

I casi più comuni di sistemi con questa proprietà sono ad esempio corpi che si urtano (ad esempio palle da biliardo) oppure sistemi che interagiscono per mezzo della forza di gravità, come sarà esplorato più in dettaglio nella parte finale della lezione.

3.3 Sistema del centro di massa

Nello studio di un sistema di punti materiale è comodo passare per il sistema del centro di massa, definito nel modo seguente:

$$\vec{R}_{cm} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

dove $M = \sum_i m_i$.

Studiare il moto del centro di massa equivale a studiare il moto di un punto materiale di massa M con delle proprietà utili che semplificano la trattazione di sistemi estesi. La sua utilità entra in gioco già in un sistema finito di punti materiali, in quanto valgono le seguenti proprietà: Detto $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}_{cm}$ si ha per definizione di centro di massa

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$$

e derivando la precedente espressione

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

dunque nel sistema del centro di massa la quantità di moto totale è nulla. Questo fatto sarà utile in seguito. Infine notiamo che dalla definizione di quantità di moto totale del sistema abbiamo che

$$\vec{P}_{tot} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_{cm}$$

3.4 Momento angolare

Vogliamo trovare un analogo "angolare" della conservazione della quantità di moto, che identificheremo nel momento angolare.

Prendiamo un sistema di particelle con le stesse proprietà di quello studiato per la quantità di moto, ovvero in cui le uniche forze agenti sono interne, con l'ulteriore richiesta che $\vec{F}_{ij} \propto \vec{r}_i - \vec{r}_j$, ovvero sia diretta lungo la congiungente tra la particella i e la particella j . Notate che questa richiesta, in un sistema in cui le interazioni sono mediate da forze di contatto, è automaticamente verificata così come nel caso di interazioni gravitazionali. Definiamo allora la seguente quantità rispetto ad un polo O , detta momento angolare

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{p}_i$$

Derivando ambo i membri abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \left(\sum_j \vec{F}_{ij} \right) - \vec{v}_O \times \vec{P}_{tot} = \sum_{i,j (i \neq j)} (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_{ij} - \vec{v}_O \times \vec{P}_{tot} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j (i \neq j)} ((\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_j - \vec{r}_O) \times \vec{F}_{ji}) - \vec{v}_O \times \vec{P}_{tot} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j (i \neq j)} ((\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}) - \vec{v}_O \times \vec{P}_{tot} = -\vec{v}_O \times \vec{P}_{tot} \end{aligned}$$

dove nelle ultime due uguaglianze ho usato rispettivamente $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ e $\vec{F}_{ij} \propto \vec{r}_i - \vec{r}_j$.
Se vale una delle seguenti condizioni:

- $\vec{v}_O = 0$
- $\vec{v}_O \parallel \vec{V}_{cm}$

allora

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

che è la terza e ultima equazione di conservazione che volevamo ottenere.

Osservazione: La legge di conservazione vale se scegliamo come polo il centro di massa del sistema, che così manifesta nuovamente la sua utilità nella semplificazione di problemi costituiti da più particelle.

3.5 Teoremi di König

§ 3.5.1. Primo teorema di König. — Il primo teorema ci permette di esprimere il momento angolare di un sistema come somma del momento angolare del centro di massa e momento angolare del sistema rispetto a centro di massa ⁷. In particolare vale la seguente equazione:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{S/cm}$$

Lavoriamo con distribuzioni di massa finite ma il teorema si può dimostrare in modo del tutto analogo per distribuzioni continue. L'idea sta solo nell'usare la definizione di momento angolare

⁷Un errore comune è pensare che il sistema del centro di massa sia il "sistema di riferimento" del centro di massa, dunque se ho un corpo che ruota su se stesso gli assi del sistema del centro di massa ruotano con il corpo, ma questo è falso, come siete esplicitamente invitati ad andare a verificare nella sezione degli esercizi. Dunque con sistema del centro di massa possiamo sì pensare il sistema di riferimento del centro di massa a patto che usiamo degli assi fissi rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

e decomporre il moto nel moto delle coordinate del centro di massa e in quelle relative ad esso. Procediamo con i calcoli.

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{r}'_i + \vec{R}_{cm} - \vec{r}_O) \times (\vec{v}'_i + \vec{V}_{cm}) \\ &= \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i + (\vec{R}_{cm} - \vec{r}_O) \times \sum_i m_i \vec{V}_{cm} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i + (\vec{R}_{cm} - \vec{r}_O) \times M \vec{V}_{cm}\end{aligned}$$

dove nella seconda riga si è usato $\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$. La prima quantità ottenuta è $\vec{L}_{S/cm}$ mentre la seconda è \vec{L}_{cm} .

§ 3.5.2. Secondo teorema di König. — Il secondo teorema è l'analogo del primo applicato all'energia cinetica, in particolare vale

$$K = K_{cm} + K_{S/cm}$$

Per dimostrarlo procediamo analogamente a quanto fatto nel caso appena analizzato:

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{v}'_i + \vec{V}_{cm}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (|\vec{v}'_i|^2 + 2\vec{v}'_i \cdot \vec{V}_{cm} + |\vec{V}_{cm}|^2) = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{v}'_i|^2 + \frac{1}{2} M |\vec{V}_{cm}|^2 \\ &= K_{cm} + K_{S/cm}\end{aligned}$$

Il primo termine è l'energia cinetica del sistema rispetto al centro di massa, mentre il secondo è l'energia cinetica del centro di massa, preso come punto materiale nel suo moto.

3.6 Equazioni cardinali della dinamica

Siamo ora pronti a studiare il caso in cui un sistema di particelle è soggetto a delle forze e momenti torcenti esterni. In particolare faremo uso dei risultati precedenti sul centro di massa per scrivere due equazioni che descrivono interamente la dinamica del sistema. Queste sono dette equazioni cardinali⁸.

Prima equazione cardinale:

Sia $\vec{F} \equiv \sum_i \vec{F}_i^{ext}$ allora posso scrivere

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \vec{F}$$

o analogamente

$$M \vec{a}_{cm} = \vec{F}$$

Seconda equazione cardinale:

Sia $\vec{\tau} \equiv \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_i = (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_i^{ext}$. Preso un polo O e detto il momento angolare rispetto a quel polo \vec{L}_O si ottiene con passaggi identici a quelli fatti nella sezione precedente

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau} - \vec{v}_O \times \vec{P}_{tot}$$

Notiamo dunque che preso un polo O, affinché valga la formula più semplice in cui non compare il secondo termine deve essere verificata una delle due condizioni esposte nella sezione precedente.

⁸Esiste anche una terza equazione cardinale, tuttavia la sua forma completa è molto raramente utile perciò si è preferito lasciarla a voi come esercizio al fine di alleggerire la teoria

3.7 Forze dovute a vincoli

Un vincolo è una funzione che di solito parametrizza una superficie sulla quale si muove un corpo e riduce il numero di parametri cosiddetti *liberi* di un sistema. Ad esempio: se abbiamo una particella che si muove di moto circolare a raggio R fissato, le componenti della velocità v_x e v_y non sono indipendenti, in quanto deve valere ad ogni istante

$$x^2 + y^2 = R^2$$

perciò derivando otteniamo:

$$xv_x + yv_y = 0$$

Questo determina una dipendenza funzionale tra le due velocità. Nel caso più generale possibile un vincolo può assumere qualsiasi forma e le forze che rendono possibile l'attuazione di tale vincolo possono essere dirette in direzione arbitraria. Tuttavia ci interessa una particolare classe di vincoli le cui forze sono ortogonali alla geometria del vincolo stesso, in tal caso il vincolo è detto *liscio*.

Per un sistema sottoposto solamente a vincoli lisci l'energia è conservata, infatti

$$dL_{ext} = \vec{F}_{vincolo} \cdot d\vec{l} = 0$$

in quanto lo spostamento è tangenziale al vincolo mentre la forza è ortogonale ad esso.

Il fatto che un vincolo sia liscio dipende dal particolare sistema di riferimento, infatti se prendo un sistema che ha velocità \vec{u} rispetto al primo si ha

$$dL_{ext} = \vec{F}_{vincolo} \cdot d\vec{l}' = -\vec{F}_{vincolo} \cdot \vec{u} dt \neq 0$$

L'*esercizio 17* mette particolarmente in risalto questo aspetto.

SEZ. 4 — CORPO RIGIDO

Siamo pronti a studiare il corpo rigido. In queste dispense ci limiteremo a studiare i casi in cui \vec{L} non cambia direzione, dunque non tratteremo trottole e moti di precessione.

4.1 Decomposizione del moto del corpo rigido e velocità angolare

Partiamo dalla definizione di corpo rigido:

Si dice corpo rigido un sistema di punti materiali soggetto al vincolo per cui vale per ogni coppia di punti i, j

$$\frac{d}{dt} |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = 0.$$

Sarà inoltre utile conoscere il seguente teorema dovuto ad Eulero (la cui dimostrazione non rientra nei nostri scopi):

Teorema di Eulero: Preso un generico corpo rigido avente un punto fisso, è sempre possibile trovare un asse passante per il punto fisso che resta invariato durante il moto. Detto in altre parole, è sempre possibile trovare l'asse di rotazione di un corpo rigido, perciò ha sempre senso definire la sua velocità angolare.

Usando la composizione di moti relativi si ottiene il seguente corollario:

Teorema di Chasles: Un qualsiasi spostamento rigido può sempre ricondursi alla composizione di una traslazione di un punto e di una rotazione del corpo attorno ad un asse passante per quel punto.

Possiamo dunque affermare che la velocità di un punto P qualsiasi del corpo rigido può essere scritta come

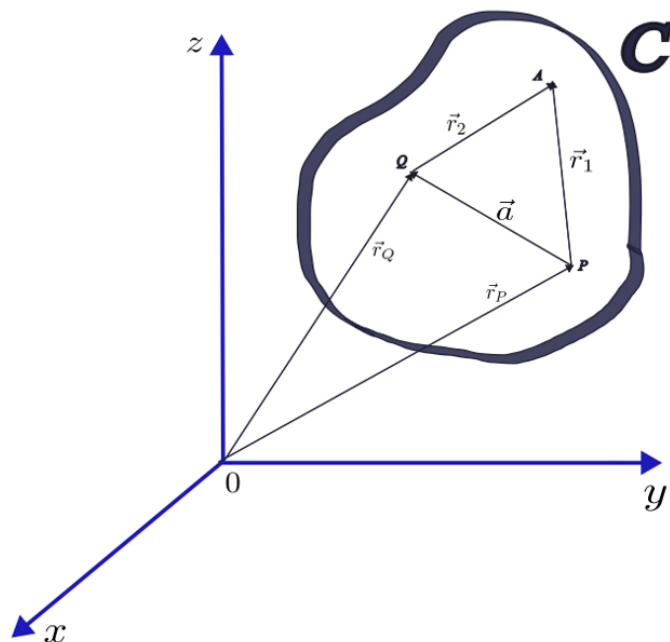
$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega}_O \times (\vec{r}_P - \vec{r}_O)$$

dove O è un punto generico del corpo rigido. Vale inoltre un fatto molto utile riguardante la velocità angolare in un corpo rigido:

Teorema: *La velocità angolare di un corpo rigido $\vec{\omega}$ non dipende dal punto del corpo rigido considerato.*

Presi due punti qualsiasi P, Q del corpo rigido voglio dimostrare: $\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_Q$.

La chiave della dimostrazione è usare numerose volte il fatto che la velocità di un punto qualsiasi del corpo rigido P si può scrivere come $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega}_O \times (\vec{r}_P - \vec{r}_O)$, dove O è un altro punto generico del corpo rigido.



Osserviamo dalla figura che vale per costruzione $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{a}$, inoltre possiamo ottenere

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega}_P \times \vec{r}_1 = \vec{v}_Q + \vec{\omega}_Q \times (\vec{r}_1 - \vec{a})$$

allo stesso tempo però sappiamo che vale $\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega}_P \times \vec{a}$ perciò sostituendo questa espressione nell'equazione precedente otteniamo

$$(\vec{\omega}_P - \vec{\omega}_Q) \times (\vec{r}_1 - \vec{a}) = 0 \quad \forall \vec{r}_1$$

che implica

$$\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_Q$$

per ogni coppia di punti del corpo rigido P, Q .

Dunque la velocità di un punto qualsiasi del corpo rigido si può scrivere come

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_O).$$

Per la maggior parte dei problemi che affronterete, sarà comodo prendere $\vec{v}_O = \vec{v}_{cm}$ in modo da utilizzare i teoremi di König ricavati in precedenza⁹. In particolare, per un corpo rigido, vale la seguente relazione:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{cm} + \int \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dm.$$

⁹Per quanto questa sia la scelta più naturale, è bene ricordare che spesso non è l'unica ed in particolare ci sono alcuni problemi in cui non è la scelta più comoda. Per maggiori dettagli si rimanda alla sezione dei problemi.

Per i nostri scopi il vettore velocità angolare sarà sempre ortogonale alla posizione relativa tra i punti del corpo rigido ed il centro di massa (abbiate in mente che in queste dispense stiamo studiando casi riconducibili a moti bidimensionali, perciò avremo $\vec{\omega}$ ortogonale al piano del moto), dunque possiamo usare l'identità per il prodotto triplo ed il fatto che la velocità dei punti del corpo rigido non dipende dalla loro posizione per ottenere

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{cm} + \vec{\omega} \int |\vec{r}'|^2 dm = \vec{L}_{cm} + I\vec{\omega}$$

$I \equiv \int |\vec{r}'|^2 dm$ è detto **Momento di inerzia**.

Attenzione: bisogna essere guardinghi nei casi in cui la velocità angolare non è sempre ortogonale alla posizione di alcuni punti del corpo rigido, come ad esempio nel caso del momento di inerzia di una sfera attorno a un suo asse: in quel caso ci sono due modi di procedere:

- si tiene conto del termine nell'integrale che è stato eliminato per ortogonalità sopra, perciò si calcola direttamente (usando l'identità del prodotto triplo) $\vec{L}_{S/CM} = \int dm(\vec{\omega}r'^2 - \vec{r}'(\vec{\omega} \cdot \vec{r}'))$
- si riduce il problema alla sovrapposizione di tanti problemi bidimensionali, ad esempio nel caso di una sfera con massa uniformemente distribuita nel volume vedendola come sovrapposizione di tanti dischi di spessore infinitesimo.

Scriviamo ora l'energia cinetica di un corpo rigido usando il secondo teorema di König:

$$K = K_{cm} + \frac{1}{2} \int |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 dm$$

Nell'ipotesi di cui sopra, possiamo ridurre nuovamente l'espressione alla seguente formula:

$$K = K_{cm} + \frac{1}{2} I |\vec{\omega}|^2$$

con le stesse accortezze dette precedentemente sul momento di inerzia.

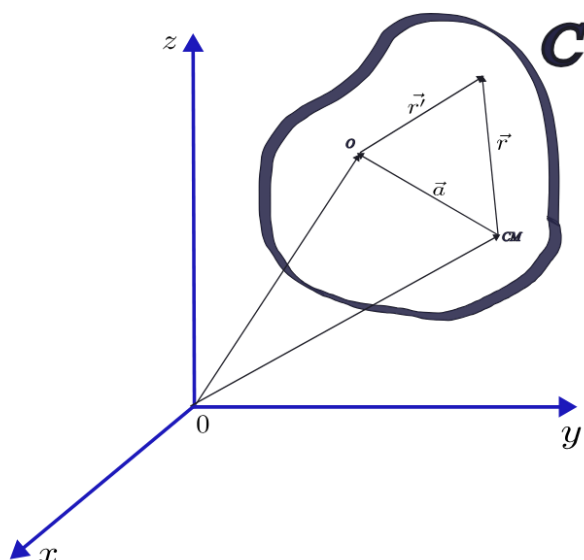
4.2 Teorema di Huygens-Steiner

Esiste un potente teorema che mette in relazione il momento di inerzia tra due assi, uno passante per il centro di massa ed un altro parallelo a questo. In particolare vale

$$I_O = I_{CM} + Ma^2$$

dove M è la massa del corpo rigido e a il modulo della distanza tra i due assi. Dimostriamo questo fatto: Per definizione il momento di inerzia del corpo rigido attorno ad un certo asse è

$$I_O = \int |\vec{r}'|^2 dm$$



Dalla figura è evidente che

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a},$$

da cui

$$I_O = \int (|\vec{r}'|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{r}) dm$$

Per definizione di centro di massa si vede che espandendo il prodotto scalare in componenti l'ultimo termine si annulla, perciò otteniamo

$$I_O = \int |\vec{r}'|^2 dm + M|\vec{a}|^2 = I_{CM} + M|\vec{a}|^2.$$

4.3 Puro rotolamento

La maggior parte di problemi che svolgerete sul corpo rigido assumeranno la cosiddetta condizione di **puro rotolamento** su una certa superficie. Essa equivale a dire che velocità relativa del punto di contatto del corpo rigido rispetto al punto di contatto fisico della superficie è nulla. In altri termini, preso un generico sistema inerziale e detta $\vec{u}(t)$ la velocità del punto di contatto della superficie su cui scorre il corpo rigido, vale

$$\vec{u} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_O),$$

dove si è preso come al solito O un punto generico del corpo rigido e \vec{r} il vettore posizione del punto di contatto del corpo rigido.

Spesso è comodo disaccoppiare il moto rispetto al centro di massa, perciò la condizione diventa

$$\vec{u} = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{cm}).$$

Essendo la forza di attrito dinamico nulla se non si ha moto relativo tra il corpo e la superficie di contatto, il moto di puro rotolamento è un moto che non dissipa energia. Questo è il motivo per cui si prediligono problemi in cui questa condizione è verificata. In particolare, se la massima forza di attrito statico (come in un grande numero di problemi in cui vi imbatterete) è in modulo $F = \mu N$, allora la condizione di puro rotolamento si traduce nella disuguaglianza $F_{attrito} \leq \mu N$.

SEZ. 5 — INTRODUZIONE AI CAMPI CENTRALI —

Definiamo forza centrale una forza che, in un sistema di coordinate sferiche, è diretta lungo la congiungente del punto di applicazione e l'origine del sistema di riferimento:

$$\vec{F} \equiv F(r, \theta, \phi) \hat{r}$$

D'ora in poi faremo riferimento unicamente ai campi centrali a simmetria sferica, ossia dove la forza non dipende dagli angoli θ e ϕ :

$$\vec{F} \equiv F(r) \hat{r}$$

Si tenga in considerazione che ogni campo centrale a simmetria sferica è conservativo (non forniremo una dimostrazione, in quanto esula dagli scopi delle dispense), ossia è il gradiente di un potenziale scalare

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

Il potenziale è definito a meno di una costante, ed è a sua volta a simmetria sferica. Possiamo integrare l'equazione precedente e ottenere:

$$V(r_2) - V(r_1) = - \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$$

5.1 Grandezze conservate

Data una forza centrale a simmetria sferica, siamo sempre in grado di identificare due grandezze conservate:

- Energia meccanica $E = \frac{1}{2}m|\dot{v}|^2 + V(r)$
- Momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

L'energia meccanica si conserva perchè la forza considerata è conservativa e non sono presenti forze dissipative agenti sul sistema. Il momento angolare si conserva perchè la forza è centrale, infatti ricordando la definizione di momento torcente:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times (F(r)\hat{r}) = 0$$

Il momento angolare è un vettore, quindi devono conservarsi separatamente tutte le sue componenti (non solo il suo modulo). Dalla definizione di $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ segue immediatamente che il moto del corpo è interamente contenuto in un piano ortogonale a \vec{L} .

5.2 Potenziale efficace

Al termine della sezione precedente abbiamo dimostrato che il moto è riconducibile ad un moto planare, e in tal caso conviene adottare un sistema di coordinate cilindriche in modo che l'origine e i versori polari giacciono sul piano dell'orbita, con l'asse \hat{z} coincidente con \hat{L} . Possiamo dunque scrivere energia totale e momento angolare nella forma seguente:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r)$$

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{z}$$

Con una semplice sostituzione otteniamo:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L}{2mr^2} + V(r) \right)$$

che coincide con l'energia meccanica di un moto unidimensionale descritto dalla coordinata $r(t)$ e soggetto ad un potenziale:¹⁰

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L}{2mr^2} + V(r).$$

Supponiamo di riuscire a ricavare esplicitamente la legge oraria $r(t)$, allora integrando $L = mr^2\dot{\theta}$ otteniamo:

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{L}{mr(t)^2} dt.$$

Questo risolve formalmente il problema iniziale, a meno di saper calcolare il precedente integrale. Lo studio del potenziale efficace fornisce una grande quantità di informazioni circa il moto della particella. A scopo didattico, presentiamo due esempi di casi particolarmente rilevanti dal punto di vista fisico.

Consideriamo dapprima un potenziale armonico della forma

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

che dà origine ad un potenziale efficace

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2.$$

Notiamo ora che il termine cinetico dell'energia totale è positivo, quindi deve valere $E \geq V_0$, dove con V_0 si denota il valore minimo del potenziale efficace. Al variare dell'energia del sistema si

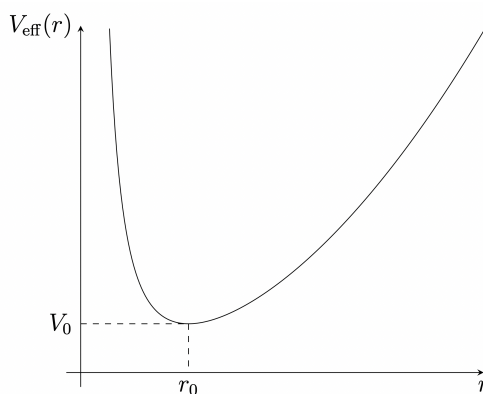


Figura 1: Potenziale efficace

presentano due scenari:

- $E = V_0$, allora $\dot{r} = 0$ e il corpo percorre orbite circolari con raggio pari a r_0
- $E > V_0$, il moto avviene in una regione limitata $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ dove r_{\min} e r_{\max} dipendono in generale da E

¹⁰Esso viene detto *potenziale efficace* in quanto vale $\vec{F} = -\vec{\nabla}V_{\text{eff}}$

Il potenziale efficace diverge nei limiti $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$: la prima divergenza è dovuta al termine centrifugo, e la seconda al termine armonico. Perciò non possono esistere orbite illimitate, in quanto necessiterebbero di energia infinita. Al contrario, esistono potenziali in natura che ammettono traiettorie non limitate, ad esempio quello gravitazionale:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (\alpha > 0)$$

che dà luogo ad un potenziale efficace

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

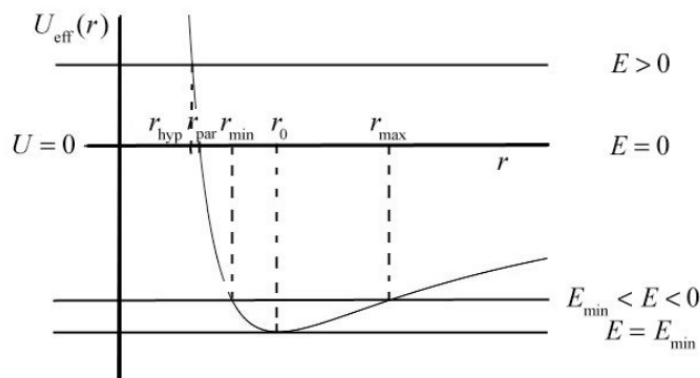


Figura 2: Potenziale efficace

Denotiamo con E_{min} il valore minimo del potenziale efficace. In questo caso la situazione è diversa dal caso analizzato in precedenza, in particolare possiamo distinguere quattro casi al variare di E :

- $E < E_{\text{min}}$ in tal caso nessuna regione è accessibile dalla particella
- $E = E_{\text{min}}$, allora $\dot{r} = 0$ e il corpo percorre orbite circolari di raggio r_0
- $E_{\text{min}} < E < 0$, il moto avviene in una regione limitata $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$ dove r_{min} e r_{max} dipendono in generale da E
- $E \geq 0$ in tal caso il moto non è limitato, e il corpo si allontana indefinitamente dall'origine

Inoltre, nel caso in cui l'orbita sia limitata, i punti di inversione del moto r_{min} e r_{max} corrispondono ai valori di r per cui la velocità radiale si annulla, ossia alle soluzioni dell'equazione $V_{\text{eff}}(r) = E$.

SEZ. 6 — GRAVITAZIONE

In meccanica newtoniana, la forza di gravità tra due masse m_1 e m_2 poste a distanza r_{12} è data dalla *legge di gravitazione universale*:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$

Nell'approssimazione in cui $m_1 \gg m_2$ è possibile considerare il primo corpo fermo, ed in un sistema di coordinate avente la sua posizione come origine possiamo trattare il moto dell'altro come quello di un corpo in un campo centrale.

Tuttavia, il lavoro svolto in precedenza non si rivela utile unicamente per fornire degli strumenti di calcolo in una situazione approssimata; infatti, vedremo ora come sia possibile ricondurre

anche il moto di due corpi a un problema unidimensionale.

Consideriamo la seconda equazione della dinamica applicata ai due corpi:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Abbiamo un sistema di equazioni differenziali accoppiate, che a prima vista può sembrare complicato, ma che con semplici manipolazioni algebriche si riduce a qualcosa di familiare. Innanzitutto sommando le due equazioni otteniamo:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

ossia, sfruttando la linearità dell'operatore derivata:

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0.$$

Ricordando la definizione di centro di massa, è evidente che quest'ultimo si muove di moto rettilineo uniforme (come ci aspettavamo, essendo il sistema isolato).

Tornando al sistema in esame, moltiplichiamo la seconda equazione per m_1 , la prima per m_2 e sottraiamole, ottenendo così:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = -\frac{Gm_1 m_2 (m_1 + m_2)}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Introduciamo due grandezze ausiliarie: la massa totale del sistema $M = m_1 + m_2$ e la cosiddetta *massa ridotta*:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

In termini di queste nuove variabili, l'equazione precedente diventa

$$\mu \ddot{\vec{r}}_{12} = -\frac{GM\mu}{r^2} \hat{r}_{12},$$

la quale corrisponde all'equazione del moto di un punto di massa μ che orbita attorno ad un corpo fisso di massa M .

Possiamo quindi trattare la gravitazione con gli strumenti appresi nello studio dei moti in un campo centrale, dove

$$\vec{F}(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{r} \quad \alpha \equiv GM\mu,$$

il cui potenziale è dato da

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

6.1 Leggi di Keplero

Veniamo ora alle leggi di Keplero, che descrivono il moto di corpi celesti nel sistema solare:

1. Le orbite dei pianeti nel sistema solare sono ellissi, di cui il sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro dei pianeti spazza aree uguali in tempi uguali.
3. Il quadrato del periodo delle orbite percorse dai pianeti è proporzionale al cubo dei semiassi maggiori delle rispettive ellissi.

§ 6.1.1. **Prima legge.** — Tramite osservazioni astronomiche, Keplero aveva dedotto che le orbite dei pianeti del sistema solare fossero ellissi, di cui il sole occupa uno dei due fuochi. Tuttavia il potenziale gravitazionale non ammette unicamente orbite limitate, bensì al variare dell'energia del sistema si può avere qualsiasi conica. In particolare, l'orbita in coordinate polari si scrive:

$$r = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \theta} = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

L'equazione rappresenta una conica in coordinate polari, di eccentricità

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$$

Possiamo quindi classificare le varie orbite al variare dell'energia meccanica:

- $\epsilon = 0$, ossia $E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}$: in questo caso si hanno orbite circolari;
- $0 < \epsilon < 1$, ossia $-\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} < E < 0$: in questo caso si hanno orbite ellittiche;
- $\epsilon = 1$ ossia $E = 0$: in questo caso si hanno orbite paraboliche;
- $\epsilon > 1$, ossia $E > 0$: in questo caso si hanno orbite iperboliche.

Concentriamoci ora sulle orbite limitate e ricaviamo delle relazioni tra i parametri geometrici delle traiettorie ellittiche e i parametri meccanici del sistema.

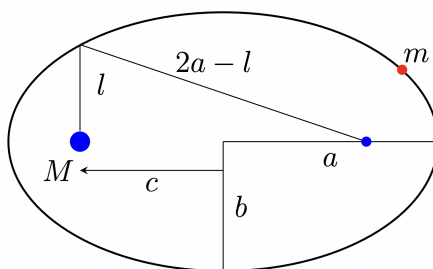


Figura 3: Parametri geometrici dell'orbita ellittica

Innanzitutto consideriamo l'espressione dell'energia meccanica all'afelio e al perielio (punti dell'orbita in cui viene raggiunta rispettivamente la massima e minima distanza dal fuoco), denotati rispettivamente dalle posizioni r_1 e r_2 :

$$E = \frac{L^2}{2mr_1^2} - \frac{\alpha}{r_1} \quad E = \frac{L^2}{2mr_2^2} - \frac{\alpha}{r_2}$$

Moltiplicando le due equazioni rispettivamente per r_1^2 e r_2^2 e sottraendole otteniamo:

$$E(r_2^2 - r_1^2) = \alpha(r_1 - r_2)$$

$$E = -\frac{\alpha}{r_2 + r_1} = -\frac{GMm}{2a}$$

Inoltre sappiamo che l'eccentricità di un'ellisse si esprime in funzione dei suoi semiassi come:

$$\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Eguagliando le due espressioni per l'eccentricità, ed usando il valore di E appena ricavato, troviamo dopo semplici calcoli:

$$L^2 = m\alpha \left(\frac{b^2}{a}\right)$$

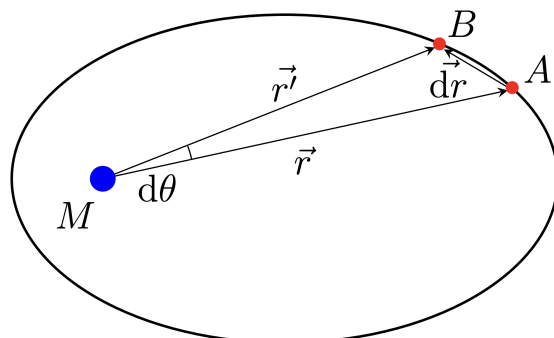


Figura 4: Visualizzazione della seconda legge di Keplero

§ 6.1.2. **Seconda legge.** — Facciamo riferimento alla figura 4. Consideriamo l'area dA spazzata dal raggio vettore per un piccolo spostamento angolare $d\theta \ll 1$. Questa è approssimabile al prim'ordine in $d\theta$, con un triangolo isoscele, per cui vale:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \sin d\theta \simeq \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

La seconda legge è dunque una riformulazione del principio di conservazione del momento angolare nel moto in un campo centrale.

§ 6.1.3. **Terza legge.** — Sfruttiamo il risultato appena trovato, separando le variabili ed integrando ambo i membri:

$$\int_0^{\mathcal{A}} dA = \int_0^T \frac{L}{2m} dt$$

Dove si è indicato con T il periodo dell'orbita. Integrando ed elevando al quadrato entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$T^2 = \frac{4m^2 \mathcal{A}^2}{L^2}$$

Utilizzando l'espressione di L trovata in precedenza, e ricordando che l'area di un'ellisse è $\mathcal{A} = \pi ab$, si arriva alla seguente relazione tra periodo e semiasse maggiore:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GMm^2} a^3.$$

6.2 Vettore di Runge-Keplero-Lenz

Abbiamo dimostrato che nel moto di un corpo puntiforme in presenza di un campo centrale a simmetria sferica, si conservano la sua energia meccanica e il momento angolare.

Per un sistema con N gradi di libertà, esistono $2N - 1$ costanti del moto indipendenti. Questo risultato può essere compreso intuitivamente considerando che le equazioni del moto sono equazioni differenziali lineari di secondo ordine. Di conseguenza, l'evoluzione del sistema è completamente determinata specificando due condizioni iniziali per ciascuna delle N equazioni.

Pensando al sistema in uno spazio di dimensione $2N$, costituito dalle N coordinate e dalle N velocità, l'evoluzione del sistema può essere vista come la traiettoria di un punto in questo spazio. Ogni costante del moto indipendente impone una condizione che riduce il moto a una ipersuperficie di dimensione inferiore di uno. Poiché la traiettoria del punto nello spazio delle configurazioni è unidimensionale, avere più di $2N - 1$ costanti del moto indipendenti significherebbe ridurre la traiettoria a un punto. In tal caso, il sistema non sarebbe in grado di evolvere.

Per il momento abbiamo solo 4 costanti del moto, ossia le tre componenti del momento angolare e l'energia meccanica.

Nel caso di potenziale gravitazionale esiste un'ulteriore grandezza conservata, nota come vettore di Runge-Keplero-Lenz, definito come

$$\vec{A} \equiv m\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - m\alpha\hat{r}$$

Dimostriamo che è effettivamente una costante del moto, calcolandone la sua derivata temporale:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) - m\alpha\dot{\hat{r}},$$

dove abbiamo sfruttato la conservazione del momento angolare e usato la regola di derivazione del prodotto.

Siccome il moto è confinato su un piano ortogonale al momento angolare, adottando il più naturale sistema di coordinate cilindriche otteniamo

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}})$$

sfruttando l'identità vettoriale **BAC-CAB** otteniamo:

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = -\frac{m\alpha}{r^3} [\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - r^2\dot{\vec{r}}] = -\frac{m\alpha}{r^2} [\dot{r}\vec{r} - r\dot{\vec{r}}] = m\alpha \left[\frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2} \vec{r} \right] = m\alpha\dot{\hat{r}},$$

il che conclude la nostra dimostrazione.

È immediato verificare che $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$, ossia che il vettore di Lenz è ortogonale al vettore momento angolare, e quindi giace sul piano dell'orbita. Per completezza, ricaviamone il modulo:

$$\frac{A^2}{m^2} = \alpha^2 - 2\alpha\hat{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{L}) + |\vec{v} \times \vec{L}|^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha L^2}{mr} + v^2 L^2 = \alpha^2 + \frac{2L^2}{m} \left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \right) = \alpha^2 + \frac{2EL^2}{m}$$

Il lettore più attento si sarà reso conto che in questo modo abbiamo trovato effettivamente 7 costanti del moto, le quattro precedenti più le tre componenti del vettore di Lenz. Ciò non contraddice il fatto che esistano al più 5 costanti del moto indipendenti, infatti abbiamo già trovato due equazioni che legano tra loro \vec{A} , \vec{L} ed E , ossia:

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0 \qquad \frac{A^2}{m^2} = \alpha^2 + \frac{2EL^2}{m}$$

§ 6.2.1. Ricaviamo $r(\theta)$ usando il vettore di Lenz. — Si è visto nel paragrafo precedente che il vettore di Lenz

$$\vec{A} \equiv m\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - m\alpha\hat{r}$$

è una costante del moto. Consideriamo la quantità:

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = m\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) - m\alpha r = (m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{L} - m\alpha r = L^2 - m\alpha r$$

Dove abbiamo utilizzato l'identità vettoriale vista nella prima parte della lezione

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Dalla definizione di prodotto scalare euclideo segue:

$$Ar \cos \theta = L^2 - m\alpha r$$

$$r = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \theta}$$

Facendo riferimento al valore del modulo di A ricavato precedentemente otteniamo:

$$r = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \theta} = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

L'equazione precedente descrive precisamente una conica in coordinate polari avente eccentricità pari a $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$.

6.3 Equazione di Binet

Ricaviamo ora un'importante equazione per un generico campo centrale a simmetria sferica che permette di ricondurre il moto periodico a un semplice moto armonico nella coordinata $u = 1/r$. Vediamo in che modo questo sia possibile.

Possiamo applicare la seconda legge della dinamica per la componente radiale del moto in coordinate polari, e ottenere:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r)$$

Come già fatto in precedenza, sfruttiamo la conservazione del momento angolare per eliminare la dipendenza da θ

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r)$$

Non stiamo cercando la dipendenza temporale di r , quindi usiamo la regola di derivazione a catena

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{L^2}{mr^2},$$

grazie alla quale otteniamo:

$$\frac{L^2}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{L^2}{mr^3} = F(r).$$

Per semplificare l'espressione adoperiamo la sostituzione

$$r = \frac{1}{u}$$

E ricordando che vale $F(r) = -\frac{dU}{dr}$

$$-\frac{L^2 u^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{L^2 u^3}{m} = -\frac{dU}{du} \frac{du}{dr}$$

Assumendo $u \neq 0$, l'equazione è equivalente a

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{dU}{du}$$

Questa è nota come **equazione di Binet**, ed ha importanti applicazioni. La sua più naturale applicazione permette di ricavare immediatamente la forma delle orbite nel caso di potenziale gravitazionale: sostituendo $U(u) = -\alpha u$ otteniamo

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{m\alpha}{L^2}$$

che ammette come soluzione generale (B è un parametro di integrazione da fissare):

$$u(\theta) = B \cos(\theta + \phi) + \frac{\alpha m}{L^2}.$$

Possiamo porre $\phi = 0$ ruotando opportunamente gli assi e, ricordando la definizione di u , ottenere

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \frac{L^2 B}{\alpha m} \cos \theta} = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

che abbiamo visto essere l'equazione di una conica in coordinate polari.

§ 6.3.1. Perturbazione di orbite circolari. — Consideriamo come al solito il moto di una particella in un campo centrale, che ammette un potenziale $U(u)$. È immediato calcolare il raggio dell'orbita circolare associata, imponendo $\frac{d^2 u}{d\theta^2} = 0$ nell'equazione di Binet:

$$u_0 = -\frac{m}{L^2} U'(u_0).$$

Immaginando di perturbare l'orbita circolare con *kick* radiale, ovvero una forza impulsiva radiale che agisce in un tempo molto breve, possiamo scrivere $u \simeq u_0 + \delta u$ e trovare le correzioni all'orbita $u(\theta)$ al prim'ordine:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\delta u) + u_0 + \delta u = -\frac{m}{L^2} \frac{dU}{du}(u_0 + \delta u)$$

Espandendo al primo ordine in serie di Taylor il membro di destra otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2}(\delta u) + \delta u &= -\frac{m}{L^2} \frac{d^2 U}{du^2}(u_0) \delta u \\ \frac{d^2}{d\theta^2}(\delta u) &= -\left[1 + \frac{m}{L^2} \frac{d^2 U}{du^2}(u_0)\right] \delta u \end{aligned}$$

Che è l'equazione differenziale di un oscillatore armonico, la cui soluzione più generale è

$$u(\theta) = u_0 + A \cos \left[\sqrt{1 + \frac{m}{L^2} \frac{d^2 U}{du^2}(u_0)} \theta + \phi \right]$$

Perciò, come probabilmente potevate aspettarvi, l'orbita perturbata diventa un'ellisse. Scopriamo inoltre che tale ellisse precede nel piano dell'orbita, come potete convincervi valutando l'espressione appena trovata dopo un angolo $\delta\theta = 2\pi$.

Notiamo che in questa trattazione abbiamo tenuto costante il modulo del momento angolare nello stato perturbato ed in quello non perturbato. Questo è stato possibile perché abbiamo supposto che la forza impulsiva sia radiale. Il caso più generale è leggermente più complesso e non rientra negli scopi della lezione.

§ 6.3.2. Perturbazione del potenziale. — L'ultimo caso interessante da trattare è una perturbazione dell'orbita causata non da un impulso esterno, ma da una modifica del potenziale che genera il moto. Ad esempio, correzioni di relatività generale mostrano che il potenziale gravitazionale ammette una prima (piccola) correzione al moto planetario. Questo è visibile nella precessione di Mercurio, che fu una delle osservazioni che la fisica newtoniana da sola non riusciva a spiegare.

Consideriamo dunque il potenziale modificato $U(u) = -\alpha u + \gamma u^2$ e studiamo come variano le orbite in presenza di questa modifica. Scriviamo l'equazione di Binet (??):

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} (-\alpha + 2\gamma u)$$

Risolvendo l'equazione di Binet otteniamo

$$u(\theta) = \frac{m\alpha}{L^2} + B \cos\left(\sqrt{1 + \frac{2m\gamma}{L^2}}\theta + \phi\right).$$

A meno di ruotare gli assi possiamo porre $\phi = 0$ ottenendo così, al primo ordine nel parametro perturbativo γ , la seguente equazione:

$$u(\theta) = \frac{m\alpha}{L^2} + B \cos\left(\left(1 + \frac{m\gamma}{L^2}\right)\theta\right).$$

Il corpo in orbita tornerà nuovamente alla stessa distanza dal fuoco a cui era in $\theta = 0$ quando $\theta = \theta^*$, dove θ^* soddisfa l'equazione $(1 + \frac{m\gamma}{L^2})\theta^* = 2\pi$.

Al primo ordine in $m\gamma/L^2$ otteniamo dunque:

$$\theta^* = 2\pi\left(1 - \frac{m\gamma}{L^2}\right).$$

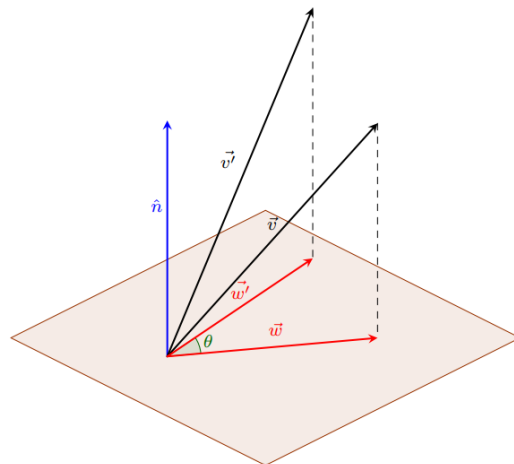
Questo ci indica la presenza di una frequenza angolare di precessione dell'orbita $\Omega = -\frac{m\gamma}{L^2}$, per cui ad ogni periodo si avrà uno spostamento angolare

$$\delta\theta = -\frac{2\pi m\gamma}{L^2}$$

Rimandiamo all'appendice per il caso di una perturbazione generica del potenziale.

SEZ. A — APPENDICE: DERIVATA DI UN VETTORE, CASO GENERALE

Diamo una dimostrazione esaustiva di quanto visto nel caso bidimensionale per rotazioni attorno ad un asse generico.



La dimostrazione procede in modo del tutto analogo a quanto fatto nel caso bidimensionale, con l'accortezza di decomporre il vettore nelle due componenti, una parallela all'asse di rotazione e un'altra ortogonale ad esso. Usando la regola di Leibniz per derivare un generico vettore $\vec{v} = v\hat{v}$, possiamo ricondurci a dimostrare il caso in cui il modulo del vettore è costante.

Preso un vettore \vec{v} ed un asse di rotazione la cui direzione è data dal versore \hat{n} vale:

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + \vec{w}$$

Dove si è indicato con \vec{w} la componente del vettore di partenza ortogonale all'asse di rotazione. Ruotando il vettore attorno a \hat{n} la componente parallela di \vec{v} resta invariata mentre quella ortogonale può essere decomposta lungo la sua direzione iniziale. In particolare notiamo che

$$\vec{w}' = \vec{w} \cos \theta + \sin \theta \hat{n} \times \vec{w} = (\vec{v} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{v})) \cos \theta + \sin \theta \hat{n} \times (\vec{v} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{v}))$$

espandendo il prodotto vettoriale e facendo la differenza con il vettore iniziale \vec{v} otteniamo

$$\delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} = \sin \theta \hat{n} \times \vec{v} + (1 - \cos \theta)(\vec{v} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{v}))$$

Se $\theta \rightarrow 0$, allora $\sin \theta \approx \theta$ e $1 - \cos \theta \approx \theta^2/2$. Passando al limite otteniamo dunque

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{n} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

SEZ. B — APPENDICE: $\vec{\omega}$ PER VERSORI GENERICI E COORDINATE SFERICHE

B.1 $\vec{\omega}$ esiste sempre?

Vogliamo dimostrare che presa una terna destrorsa di versori mutuamente ortogonali $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$ libera di muoversi nello spazio è sempre possibile trovare un vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ associata al loro moto. Un esempio, per fissare le idee, è la terna di versori in coordinate cilindriche, per i

quali si è fornita un'argomentazione a parte.

Teorema:

Sia $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$ una terna destrorsa di versori a due a due ortogonali, allora esiste ed è unica la velocità angolare $\vec{\omega}$ associata al moto dei versori.

Dimostriamo innanzitutto l'esistenza.

Vogliamo determinare esplicitamente la velocità angolare $\vec{\omega}$ attraverso le sue componenti. Essendo la terna considerata formata da versori mutuamente ortogonali, valgono le seguenti relazioni per $\hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3$:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{v}_1}{dt} &= \alpha\hat{v}_2 + \beta\hat{v}_3 \\ \frac{d\hat{v}_2}{dt} &= \gamma\hat{v}_1 + \delta\hat{v}_3 \\ \frac{d\hat{v}_3}{dt} &= \zeta\hat{v}_1 + \xi\hat{v}_2\end{aligned}$$

L'idea ora è la seguente: per trovare $\vec{\omega}$ ci basta fornire le sue componenti nella base formata dalla terna in questione, perciò una volta che trovo un generico vettore che rispetta la proprietà $\vec{\omega} \times \hat{v}_{1,2,3} = \frac{d\hat{v}_{1,2,3}}{dt}$, allora so che questa è la velocità angolare richiesta. Lo scopo del resto della dimostrazione è dunque quello di trovare esplicitamente le tre componenti. ¹¹

Scriviamo dunque $\vec{\omega} = \omega_1\hat{v}_1 + \omega_2\hat{v}_2 + \omega_3\hat{v}_3$ ed espandiamo il prodotto vettoriale con i rispettivi versori (usiamo anche il fatto che la terna è destrorsa perciò vale $\hat{v}_1 \times \hat{v}_2 = +\hat{v}_3$.) ottenendo così le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}-\omega_2\hat{v}_3 + \omega_3\hat{v}_2 &= \alpha\hat{v}_2 + \beta\hat{v}_3 \\ -\omega_3\hat{v}_1 + \omega_1\hat{v}_3 &= \gamma\hat{v}_1 + \delta\hat{v}_3 \\ -\omega_1\hat{v}_2 + \omega_2\hat{v}_1 &= \zeta\hat{v}_1 + \xi\hat{v}_2\end{aligned}$$

Affinché la velocità angolare sia ben definita, le diverse espressioni contenenti le componenti di $\vec{\omega}$ nelle tre equazioni scritte sopra devono essere identiche. Ora sfruttiamo l'ortogonalità a tutti i tempi tra i versori per notare che valgono le relazioni:

$$\begin{aligned}\alpha &= -\gamma \\ \beta &= -\zeta \\ \delta &= -\xi\end{aligned}$$

Svolgiamo il conto della prima riga esplicitamente per maggiore chiarezza, utilizzando l'ortogonalità tra ciascuna coppia di versori:

$$\alpha = \frac{d\hat{v}_1}{dt} \cdot \hat{v}_2 = \frac{d}{dt}(\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2) - \frac{d\hat{v}_2}{dt} \cdot \hat{v}_1 = -\frac{d\hat{v}_2}{dt} \cdot \hat{v}_1 = -\gamma$$

Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \alpha = -\gamma = \frac{d\hat{v}_1}{dt} \cdot \hat{v}_2 \\ \omega_2 &= -\beta = \zeta = \frac{d\hat{v}_3}{dt} \cdot \hat{v}_1\end{aligned}$$

¹¹A livello formale, vi potrebbe sembrare che d'ora in poi stiamo già assumendo l'esistenza di $\vec{\omega}$, in realtà quello che stiamo facendo è determinare un vettore generico che rispetti le condizioni che deve verificare la velocità angolare ed infine affermare (se volete ripercorrendo da capo la dimostrazione) che una scelta valida per la velocità angolare è proprio il vettore trovato. Per semplicità di notazione, chiameremo $\vec{\omega}$ direttamente il vettore iniziale.

$$\omega_1 = \delta = -\xi = \frac{d\hat{v}_2}{dt} \cdot \hat{v}_3$$

Questo ci mostra che la velocità angolare definita in questo modo permette di calcolare la derivata rispetto al tempo di ciascuno dei versori, perciò dimostra l'esistenza.

Per quanto riguarda l'unicità, essa segue dalla sua scrittura in base. Infatti, imponendo le equazioni che definiscono $\vec{\omega}$, le sue tre componenti $\omega_{1,2,3}$ sono univocamente determinate.

Osservazione: Nel caso delle coordinate cilindriche, le equazioni scritte sopra ci permettono di fare un controllo di consistenza. Infatti in quel caso sappiamo che $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \dot{\theta}$. D'altro canto, $\alpha = \frac{d\hat{r}}{dt} \cdot \hat{\theta} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) \cdot \hat{\theta} = \dot{\theta}$, come potete verificare usando l'espressione di $\hat{\theta}$ in coordinate cartesiane. Segue $\omega_3 = \dot{\theta}$. Essendo \hat{r} e $\hat{\theta}$ contenuti nel piano xy , si ha $\beta = \frac{d\hat{r}}{dt} \cdot \hat{z} = 0$ e allo stesso modo $\delta = \frac{d\hat{\theta}}{dt} \cdot \hat{z} = 0$, ovvero $\omega_1 = \omega_2 = 0$, confermando l'espressione della velocità angolare ottenuta intuitivamente.

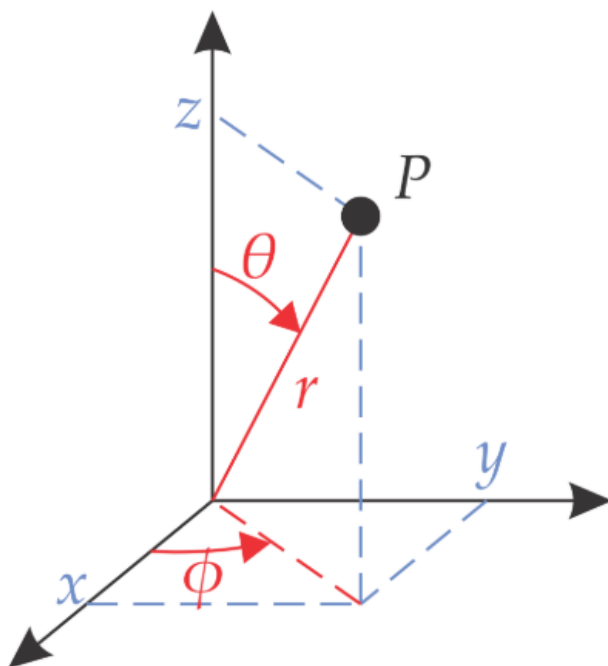
B.2 Coordinate sferiche

Le coordinate sferiche sono definite dalla seguente parametrizzazione dello spazio euclideo tridimensionale:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

I versori corrispondenti si trovano allo stesso modo di quanto fatto nel caso delle coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial r}(r, \theta, \phi) = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}(r, \theta, \phi) = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi}(r, \theta, \phi) = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \end{aligned}$$



Ci si può convincere che $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ è una terna destrorsa e vale $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$, dunque nel triangolo ciclico usato per calcolare il segno del prodotto vettoriale mappiamo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mapsto (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$. Guardando la figura notiamo che la velocità angolare associata al moto dei versori sarà composta da due rotazioni successive¹²: la rotazione di $\hat{\phi}$ attorno a \hat{z} (si comporta esattamente allo stesso modo di $\hat{\theta}$ in coordinate cilindriche) e la rotazione di $\hat{\theta}$ attorno a $\hat{\phi}$. Scriveremo dunque

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{\phi} + \dot{\phi}\hat{z} = \dot{\theta}\hat{\phi} + \dot{\phi}\cos\theta\hat{r} - \dot{\phi}\sin\theta\hat{\theta}$$

Siamo pronti per ricavare velocità e accelerazione:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\phi} \times \hat{r} - r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\theta} \times \hat{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

I conti da svolgere ora per ricavare l'accelerazione sono concettualmente identici a quelli appena fatti per ricavare la velocità, solo che ora aumenta il numero di prodotti vettoriali da svolgere, dunque l'esercizio è lasciato a voi da completare. Il risultato che si ottiene dopo qualche passaggio algebrico è

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta)\hat{\phi}$$

Questo conto non vi sarà troppo utile per il risultato ottenuto (che raramente vi troverete ad usare al contrario di quello in coordinate cilindriche) ma sicuramente vi aiuta nello sviluppare la vostra padronanza nella manipolazione vettoriale che molto spesso userete.

SEZ. C — APPENDICE: PERTURBAZIONE GENERICA DEL POTENZIALE

Studiamo il caso generale di una perturbazione al potenziale newtoniano $U(r) = -\alpha/r + \delta U$.

¹²Ricordiamo che rotazioni infinitesime commutano, quindi nel calcolo della derivata non conta in che ordine ruotiamo rispetto ai rispettivi assi. Detto in altri termini, **le velocità angolari si sommano**.

Scriviamo innanzitutto

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2}$$

Dall'equazione per l'energia totale del sistema possiamo scrivere, a seguito della sostituzione e di semplici manipolazioni algebriche:

$$\frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = \sqrt{2m(E - U) - \frac{L^2}{r^2}}.$$

Separando le variabili ed integrando otteniamo lo spostamento angolare dell'orbita in un periodo

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{L^2}{r^2}}} dr$$

Sostituiamo ora l'espressione per il potenziale ed espandiamo al primo ordine in serie di Taylor la radice quadrata nell'integrale, ottenendo così ¹³:

$$\Delta\theta = 2\pi + 2m \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L/r^2 \delta U}{\left(2m(E + \alpha/r) - \frac{L^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dr$$

Notiamo ora che l'integrale può essere visto come una derivata rispetto al momento angolare del sistema (valutato al primo ordine nella perturbazione), in particolare vale:

$$\Delta\theta = 2\pi + 2m \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\delta U}{\sqrt{2m(E + \alpha/r) - \frac{L^2}{r^2}}} dr$$

Facendo il cambio di variabile $dr = \frac{dr}{d\theta} d\theta = \frac{r^2}{L} \sqrt{2m(E - U) - \frac{L^2}{r^2}} d\theta$ e valutandolo sulla soluzione non perturbata (ricordiamo che stiamo considerando solo correzioni al primo ordine nella perturbazione del potenziale) otteniamo:

$$\Delta\theta = 2\pi + 2m \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{1}{L} \int_0^\pi \delta U r^2 d\theta \right)$$

Si può facilmente verificare che nel caso in cui $\delta U = \gamma/r^2$ si ottiene la formula ottenuta precedentemente risolvendo direttamente l'equazione di Binet.¹⁴

¹³Il 2π viene dall'integrazione sull'orbita corrispondente al potenziale non perturbato, ovvero dal termine zero dell'espansione in serie di Taylor nell'integrale

¹⁴Questa sezione è stata ispirata dal libro *Landau - Lifschitz: Fisica Teorica Volume 1 - Meccanica*

— ESERCIZI —

☆☆☆☆☆ **Esercizio 1 Invarianza per rotazioni** Mostrate che il prodotto scalare è invariante per rotazioni. Per non complicarvi eccessivamente la vita potete lavorare nel piano, ovvero dimostrate che presi due vettori $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ scritti in coordinate cartesiane e preso un sistema di assi (\hat{x}', \hat{y}') ruotato di un angolo θ nel piano, vale $(\vec{v} \cdot \vec{w})_{xy} = (\vec{v} \cdot \vec{w})_{x'y'}$. Fate lo stesso per $\vec{v} \times \vec{w}$

☆☆☆☆☆ **Esercizio 2 Ortogonalità implica indipendenza lineare** Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ tre vettori ortogonali nello spazio tridimensionale. Dimostrate che essi sono linearmente indipendenti. **Osservazione:** La dimostrazione al caso N-dimensionale è del tutto identica, convincetevi.

★★☆☆☆ **Esercizio 3 Un vettore trasforma come un vettore!** Se chiedete a un fisico la definizione di vettore, alcuni vi risponderanno con la frase *"un vettore è tutto ciò che trasforma come un vettore"*. Per capire cosa intendono queste persone, cercate di capire come trasformano in generale le componenti di un vettore sotto rotazioni nel piano imponendo che a seguito della trasformazione $\vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i = \sum_i v'_i \vec{e}'_i$ dove ho indicato con \vec{e}_i, \vec{e}'_i i vettori di base rispettivamente prima e dopo la trasformazione. Come trasformano invece i vettori di base? Se avete conoscenze riguardanti matrici, provate a usare quel tipo di formalismo per generalizzare il risultato a generiche trasformazioni invertibili nello spazio.

★★☆☆☆ **Esercizio 4 Direzione ortogonale** Presi due vettori $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ scritti in coordinate cartesiane, scrivete l'equazione cartesiana del piano da essi generato e trovate il vettore normale al piano. Dimostrate ora che $\vec{v} \times \vec{w}$ fornisce un multiplo del vettore normale al piano, a conferma del fatto che il prodotto vettoriale tra due vettori fornisce in output un terzo vettore ortogonale ai primi due.

★★★☆☆ **Esercizio 5 Decomposizione di un vettore** Fissato \vec{b} nello spazio tridimensionale, dimostrate che un generico vettore può essere scomposto in due componenti, una parallela e una ortogonale a \vec{b} , e determinate esplicitamente questa decomposizione.

★★★★☆ **Esercizio 6 Si urtano o no?** Due masse puntiformi percorrono traiettorie parallele a velocità costante in un dato sistema di riferimento. Posso trovare un altro sistema di riferimento inerziale in cui le due traiettorie si intersecano? In tal caso, potrei pensare di far partire le due masse con delle condizioni iniziali tali per cui esse si scontrano in un certo punto della traiettoria. Come risolvere il paradosso?

☆☆☆☆☆ **Esercizio 7 Il metodo classico** Ricavare velocità ed accelerazione in coordinate cilindriche derivando le espressioni cartesiane dei versori.

★★☆☆☆ **Esercizio 8 Ma dimmi Nabla, come trasformi?** Abbiamo incontrato l'operatore $\vec{\nabla}$ nel calcolo della forza in sistemi con più gradi di libertà. Ora, insieme alle conoscenze su prodotto scalare e prodotto vettoriale, vorremmo capire come esprimerlo in coordinate diverse da quelle cartesiane, in cui esso è naturalmente stato definito. Essendo fisici non ci preoccuperemo troppo dei dettagli matematici che giustificano formalmente tutti i passaggi che effettuerete, in particolare tratteremo $\vec{\nabla}$ come se fosse un vettore le cui componenti sono le derivate parziali (ovvero in coordinate cartesiane vale $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$), con l'aggiunta di

qualche proprietà che vi permetterà di ottenere rotore e divergenza in altri sistemi di coordinate. Sarà inoltre comodo ricordarvi che per una funzione a più variabili vale la seguente formula di riparametrizzazione $\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial f(u,v,w)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. Definiamo il rotore e la divergenza in coordinate cartesiane come $\mathbf{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v}$, ovvero si applica una delle componenti di $\vec{\nabla}$ a un'altra componente di \vec{v} e si fa il prodotto vettoriale dei versori cartesiani corrispondenti alle rispettive componenti (ad esempio $\vec{\nabla} \times (v\hat{x}) = \frac{\partial v}{\partial y} \hat{y} \times \hat{x} + \frac{\partial v}{\partial z} \hat{z} \times \hat{x}$). Analogamente, in coordinate cartesiane definiamo $\mathbf{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$, ovvero si applica una delle componenti di $\vec{\nabla}$ a un'altra componente di \vec{v} e si fa il prodotto scalare dei versori cartesiani corrispondenti alle rispettive componenti (ad esempio $\vec{\nabla} \cdot (v\hat{x}) = \frac{\partial v}{\partial x} \hat{x} \cdot \hat{x}$).

- Imponendo che $\vec{\nabla}$ trasformi come un vettore sotto rotazioni, determinarlo in coordinate cilindriche. *Hint: esprimete i versori cartesiani in coordinate cilindriche e usate la formula di riparametrizzazione.*
- Imponendo che presa comunque una terna di versori valga la seguente regola $\nabla_i \hat{x}_i \times v_j \hat{x}_j = \nabla_i (v_j) \hat{x}_i \times \hat{x}_j + \hat{x}_i \times \nabla_i (v_j)$ ricavare $\vec{\nabla}$ in coordinate cilindriche (se avete visto anche la sezione in coordinate sferiche provate a ricavarlo pure in coordinate sferiche, con l'avviso che il conto da svolgere è parecchio laborioso)
- Imponendo che presa comunque una terna di versori valga la seguente regola $\nabla_i \hat{x}_i \cdot v_j \hat{x}_j = \nabla_i (v_j) \hat{x}_i \cdot \hat{x}_j + \hat{x}_i \cdot \nabla_i (v_j)$ ricavare la divergenza in coordinate cilindriche (e sferiche come bonus)

★☆☆☆☆ **Esercizio 9 Momento di inerzia della sfera** Usate la definizione generale di momento angolare per ricavare il momento di inerzia di una sfera piena di massa M e raggio R .

★☆☆☆☆ **Esercizio 10 Ciclicità del prodotto vettoriale** Svolgendo esplicitamente il calcolo, mostrate $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

★★★☆☆ **Esercizio 11 Ortogonale all'ortogonale** Usando le identità

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \quad (\text{E.1})$$

dimostrare **BAC -CAB** *Hint: Provate prima a dimostrarlo nel caso in cui $\vec{a} = \vec{c}$*

★★★☆☆ **Esercizio 12 Coriolis o Momento Angolare?**

Studiare la caduta dalla Torre di Pisa dal punto di vista di un osservatore inerziale.

Hint: Usate la conservazione di energia e momento angolare, approssimando al primo ordine in $\omega/\sqrt{g/R}$.

★★☆☆☆ **Esercizio 13 Chi lo tiene fermo?** Anna e Bob hanno come passatempo quello di correre in cerchio uno attorno all'altro a turni, mentre l'altro sta fermo al centro. Adesso tocca ad Anna correre. Nel frattempo Bob, che non vede l'ora arrivi il suo turno, pensa a cosa vede Anna dal suo punto di vista e realizza che secondo Anna Bob risente della forza centrifuga (diretta lungo la congiungente tra i due amici) che tende a farlo allontanare da Anna. Cosa tiene Bob fermo in questo sistema?

★★★☆☆ **Esercizio 14 Monociclo** Un monociclista viaggia su un monociclo il cui punto più basso percorre una traiettoria circolare piana di raggio R . Monociclista e monociclo assieme possono essere modellizzati come un'asta rigida e uniforme di lunghezza L , inclinata di un

angolo θ verso il centro della circonferenza rispetto alla verticale. Supponendo che il coefficiente di attrito fra monociclo e terreno sia abbastanza alto, qual è la velocità angolare alla quale viene percorsa la traiettoria? La gravità è \vec{g} .

★★☆☆☆ **Esercizio 15 A tutta velocità** Un'auto da corsa percorre una curva inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale a velocità \vec{v} . Il coefficiente di attrito statico vale μ . Trovare la massima e la minima velocità che permettono alla macchina di percorrere la curva senza strisciare.

★★☆☆☆ **Esercizio 16 Palla da biliardo** Una palla da biliardo (avente massa m e raggio R) posta sul piano xy riceve un impulso $\vec{J} = J\hat{x}$ ad un'altezza da terra pari ad $h < 2R$. Il coefficiente d'attrito dinamico tra il piano e la palla vale μ . Si determini sotto quali condizioni la palla inizia immediatamente a rotolare senza strisciare e studiare il moto nel caso generale, ovvero trovare la velocità angolare e la velocità lineare in funzione del tempo. Esiste un tempo caratteristico di evoluzione per il sistema (ovvero un tempo oltre cui le variabili cinematiche restano costanti)?

★★★★☆ **Esercizio 17 Vincoli e sistemi inerziali** Si consideri un piano inclinato di altezza h , angolo α rispetto al piano orizzontale senza attrito. È presente un campo gravitazionale uniforme \vec{g} . Una massa puntiforme m è lasciata libera di muoversi dalla cima del piano.

- Determinare la velocità \vec{v} con cui la massa si muove sul piano orizzontale nel suo moto successivo.
- Studiare lo stesso sistema dal punto di vista di un osservatore che si muove lungo il piano orizzontale con velocità \vec{v} , in particolare studiare il bilancio energetico in questo sistema. Chi compie lavoro? Verificate le vostre affermazioni svolgendo esplicitamente il conto.

★★★★☆ **Esercizio 18 Palla su giradischi** Un disco orizzontale con superficie ruvida è tenuto in rotazione attorno al suo asse di simmetria con velocità angolare Ω . Una sfera ruvida di raggio R rotola senza strisciare e il suo centro si muove su una circonferenza di raggio r_0 , concentrica al disco. Trovare la velocità lineare iniziale e la velocità angolare iniziale che la palla deve avere per compiere questo moto.

★★★★☆ **Esercizio 19 Rallenta!** Abbiamo una bicicletta di massa M che si muove con velocità v_0 e il cui centro di massa è a un'altezza D dal terreno. Le due ruote sono equidistanti dal centro di massa, con i rispettivi centri a una distanza orizzontale $2L$ l'uno dall'altro. Il momento di inerzia delle due ruote è trascurabile. Le due ruote possono rotolare senza strisciare fintantoché si abbia $F \leq \mu N$, dove F è la forza applicata nel punto di contatto tra ruota e terreno, parallela a quest'ultimo, N è la reazione normale e μ è il coefficiente di attrito. Alla bicicletta è impressa una decelerazione a .

1. Nel caso in cui si possa frenare solo con la ruota anteriore, dire qual è il massimo valore di a (in modulo) tale che la bicicletta non slitti durante la frenata;
2. Fare lo stesso nel caso in cui si possa frenare solo con la ruota posteriore.

La gravità è presente e vale \vec{g} .

★★★★☆ **Esercizio 20 Scala in caduta** Sia data un'asta omogenea lunga l appoggiata ad una parete, che forma un certo angolo $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ rispetto al pavimento. Improvvisamente

sparisce l'attrito sul pavimento e sulla parete che teneva l'asta in posizione. Determinare a quale angolo avviene il distacco tra l'asta e la parete verticale.

★★★★☆ **Esercizio 21 Caduta del tripode** Tre piccole sfere sono connesse tramite aste rigide prive di massa; è presente un giunto sulla sfera centrale che permette alle aste di far variare liberamente l'angolo tra di esse. Inizialmente questo angolo è retto e le tre sfere sono ferme. Due di esse hanno massa m , una delle due laterali ha massa $4m$. Si trovi l'accelerazione di quest'ultima appena il sistema viene rilasciato, ignorando l'attrito.

★★★★☆ **Esercizio 22 Matita che cade** Una matita viene posta in posizione verticale su un tavolo avente un coefficiente di attrito μ in presenza di gravità uniforme. Dire se durante la caduta la punta della matita si stacca dal tavolo e se avviene moto di slittamento in qualche fase della caduta al variare del coefficiente di attrito.

★★☆☆☆ **Esercizio 23 Terza equazione cardinale** Dimostrare che, preso un polo O ed un sistema su cui agisce una forza risultante $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ ed un momento torcente risultante rispetto ad O $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i$ allora, vale

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_O + \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}_O$$

che è detta terza equazione cardinale.

★☆☆☆☆ **Esercizio 24 Momenti di inerzia** Calcolare il momento di inerzia dei seguenti oggetti, tutti di massa M :

- cilindro di altezza h e raggio R rispetto all'asse e rispetto una retta perpendicolare ad esso;
- asta di lunghezza L ;
- prisma a base triangolare con lati a , b e c e altezza h , rispetto ad un asse passante per i baricentri delle facce;
- cubo di lato L ;
- sfera di raggio R con cavità sferica di raggio r a distanza d dal centro.

★★★★☆☆ **Esercizio 25 Sopra il gradino** Una sfera di massa M , raggio R e momento d'inerzia $I = \frac{2}{5}MR^2$ rotola senza scivolare su un pavimento a velocità v_0 . Ad un certo punto urta uno scalino di altezza h ; si assuma che nel moto successivo non si stacchi dal bordo del gradino finché non l'ha superato. Qual è il valore minimo di v_0 per cui la sfera riesce a superare lo scalino?

★★★★☆☆ **Esercizio 26 Aste incernierate** Si considerino due aste di massa m e lunghezza l . L'estremo destro della prima asta viene incollato all'estremo sinistro della seconda, formando un corpo unico libero di traslare e ruotare nel piano. Alle aste, inizialmente poste in posizione orizzontale, viene applicato un impulso J all'estremo destro. Studiare il moto immediatamente dopo l'urto, trovando delle espressioni per le velocità angolari e le velocità lineari delle due aste.

★★★★☆ **Esercizio 27 Caduta dalla semisfera** Una particella puntiforme di massa m si trova a riposo sopra una semisfera liscia di massa m , che poggia su un tavolo privo

di attrito. La particella riceve un piccolo impulso e scivola lungo la semisfera (che inizierà a sua volta a muoversi). A quale angolo θ (misurato dalla sommità della semisfera) la particella perderà il contatto con la semisfera?

★★☆☆☆ **Esercizio 28 Che brutto il termine di polo mobile!** Ricavate il termine di polo mobile nella seconda equazione cardinale ponendovi nel sistema di riferimento inerziale istantaneamente solidale con il polo.

★★☆☆☆ **Esercizio 29 Convinciti calcolando!** Considerate un disco al cui centro è attaccata un'asta di massa trascurabile posto in rotazione su un piano con l'estremo dell'asta fisso. Usate un sistema di coordinate comovente con il disco per mostrare che il momento angolare calcolato nel sistema di riferimento del disco (nelle coordinate comoventi) non è in accordo con quello calcolato nel sistema inerziale del laboratorio. Cosa vi dice questo fatto riguardo alla velocità angolare?

★★★☆☆ **Esercizio 30 Minima distanza** Tre piccole sfere identiche (indicate come A, B e C) di massa m sono collegate con due barre senza massa di lunghezza l , in modo che una delle aste collega le sfere A e B, e l'altra asta collega le sfere B e C. Le aste sono incernierate alla sfera B, cioè l'angolo tra le aste può cambiare senza sforzo. Il sistema riposa in assenza di gravità in modo tale che le sfere si trovino su una retta. Alla palla A viene data istantaneamente una velocità v_0 perpendicolare alle aste. Trovare la distanza minima d tra le sfere A e C durante il successivo movimento del sistema. Trascurare l'attrito.

★★★★☆ **Esercizio 31 Matita su un piano inclinato** Si modellizzi una matita lunga l come un prisma che ha per base un esagono regolare di lato $a \ll l$, e ha una massa M distribuita omogeneamente. Si pone ora la matita su un piano inclinato di un angolo θ con attrito infinito, con il lato lungo sempre alla stessa altezza. Viene quindi data una spinta alla matita che comincia a rotolare. Si assuma che le facce del prisma siano leggermente concave in modo che solo gli spigoli siano in contatto con il piano, ma che la concavità non abbia effetto sul momento d'inerzia.

1. Si dimostri che il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse centrale del prisma vale $I = \frac{5}{12}Ma^2$.
2. Si trovi la relazione fra la velocità angolare della matita appena prima che uno spigolo colpisca il tavolo e la velocità angolare immediatamente dopo l'urto. Domanda analoga per l'energia cinetica. Trovare ora l'energia cinetica minima appena dopo un impatto affinché possa avvenire l'impatto successivo. Trovare la velocità limite della matita. Si assuma che la matita tocchi il piano in ogni istante.
3. Qual è il minimo valore di θ per cui esiste una velocità limite non nulla? Qual è il valore massimo di θ per cui la matita rimane sempre in contatto con il piano?

★★★★☆ **Esercizio 32 Il paradosso della pallina da golf** Una palla da golf di massa m e raggio r viene lanciata all'interno di un lungo cilindro di raggio $R > r$ con una certa velocità angolare iniziale ω_0 . Dimostrare che indipendentemente dalla velocità iniziale (purché il cilindro sia sufficientemente lungo) la pallina risalirà in un certo istante, oscillando verticalmente all'interno del cilindro. Per fare ciò descrivete il moto in ogni istante e trovate il rapporto tra la frequenza di oscillazione verticale e la frequenza iniziale di rotazione attorno all'asse del cilindro.

★★★★☆ **Esercizio 33 Tidal Lock** È risaputo che la Luna mostra sempre, più

o meno, la stessa faccia alla Terra. Questa curiosità non è una coincidenza, ma una semplice conseguenza delle forze di marea che agiscono tra la Terra e la Luna. Nel corso del tempo, le forze di marea hanno continuamente rallentato la rotazione della Luna attorno al suo asse fino a quando il periodo di quella rotazione è diventato uguale al periodo orbitale della Luna intorno alla Terra. È per la stessa ragione per cui la rotazione della Terra attorno al suo asse rallenta continuamente e la velocità orbitale della Luna sta ancora decrescendo.

1. Stimare il rapporto tra la diminuzione di energia cinetica della Terra e della Luna per unità di tempo.
2. Durante il programma Apollo (voli 11, 14 e 15), dei catadiottri (serie di specchi laser ad angolo cubo) sono stati posizionati sulla Luna. Secondo le misurazioni laser estremamente accurate rese possibili dalla presenza dei catadiottri, la distanza lineare della Luna dalla Terra è attualmente in aumento a una velocità di 3,8 cm per anno. Utilizzando questo dato, stimare la variazione della lunghezza di un giorno terrestre durante un anno.
3. Se il sistema Terra-Luna continuasse il suo moto indisturbato, come risultato dell'effetto frenante delle forze di marea, dopo un tempo sufficientemente lungo, la Terra mostrerebbe sempre la stessa faccia alla Luna, cioè le rotazioni e i movimenti orbitali di questi due corpi sarebbero sincronizzati. Quante volte più lungo di oggi sarebbe un giorno della Terra e quanto più grande di oggi sarebbe la distanza Terra-Luna? Si supponga che l'orbita della Luna rimanga circolare e si trascuri l'effetto di marea del Sole.

★★☆☆☆ **Esercizio 34 Due cilindri** Un cilindro di raggio R contiene al suo interno un altro cilindro cavo di massa m e raggio $r < R$, libero di muoversi al suo interno. Supponendo condizioni di puro rotolamento in ogni istante, trovare il punto di equilibrio stabile e studiare la frequenza delle piccole oscillazioni.

★★★★☆ **Esercizio 35 Oscillazioni non equilibrate** Considerate lo stesso cilindro del problema precedente, soltanto che stavolta esso è composto da due semicilindri, il primo avente la stessa densità di massa del cilindro del problema precedente ed il secondo avente densità dimezzata rispetto all'altra metà. Trovate il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile sul piano orizzontale.

Hint: Può essere utile trovare dapprima la posizione del centro di massa e la sua velocità durante il moto e successivamente usare qualche legge di conservazione

★★★★☆☆ **Esercizio 36 Similitudine meccanica** Supponiamo che l'energia potenziale sia omogenea di grado k . Supponiamo di riscalare le coordinate spaziali di un fattore α e quelle temporale di un fattore β . Supponiamo inoltre che questo riscalamento abbia come conseguenza quella di moltiplicare l'energia totale per una certa costante. Dimostrate allora che vale $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}$. Cosa ottenete nel caso $k = -1$ e $k = 2$?

★★★★☆☆ **Esercizio 37 Isocronia delle piccole oscillazioni** Una particella di massa m libera di muoversi lungo l'asse x è soggetta al seguente potenziale: $V(x) = kx^2$. Dimostrare che il periodo di oscillazione non dipende dall'ampiezza iniziale e trovare il periodo del moto.

★★★★☆☆ **Esercizio 38 Quadrato orbitante** Quattro masse puntiformi sono sui vertici di un quadrato inscritto in una circonferenza ed hanno tutte velocità tangenziale in verso antiorario. Trovare la minima distanza raggiunta tra una qualsiasi delle coppie di masse.

★★☆☆☆ **Esercizio 39 Conica in coordinate polari** Si dimostri che l'equazione:

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

descrive una conica in coordinate polari, discutendo in particolare il significato geometrico di ϵ

★★☆☆☆ **Esercizio 40 Cambio di eccentricità** Un corpo si trova in un'orbita ellittica di eccentricità ϵ_1 attorno a una stella. Quando si trova nel pericentro un urto gli fornisce un impulso radiale che trasforma l'orbita in una di eccentricità ϵ_2 . Trovare l'angolo formato tra gli assi maggiori delle due orbite.

★★☆☆☆ **Esercizio 41 Tunnel planetario** Si consideri un pianeta sferico con densità di massa uniforme ρ . Viene praticato un tunnel rettilineo a distanza d dal centro del pianeta. La presenza del tunnel non modifica la forza di gravità. Si studi il moto di un corpo che parte da fermo in una delle estremità del tunnel.

★★☆☆☆ **Esercizio 42 Collasso di un sistema binario** Due corpi di massa m sono posti a riposo a distanza d e sono lasciati liberi di muoversi sotto l'azione della forza gravitazionale. Trovare il tempo di collasso del sistema, ovvero il tempo che i corpi impiegano per urtarsi.

★★☆☆☆ **Esercizio 43 Una strana orbita circolare** Un punto materiale di massa m si muove in un campo di forza centrale di simmetria sferica. Una possibile traiettoria del moto del punto materiale è descritta da una circonferenza \mathcal{C} passante per il centro della forza e avente diametro d_0 .

1. Scrivere l'equazione parametrica della traiettoria \mathcal{C} , $r = r(\theta)$.
2. Fissato il momento angolare L , scrivere l'espressione della forza che genera il moto.

★★★☆☆ **Esercizio 44 Trio gravitazionale** Tre corpi (considerati come punti materiali) di masse m_1 , m_2 e m_3 interagiscono tra di loro solo gravitazionalmente. Sotto quali condizioni sulle mutue posizioni e sulla velocità angolare i tre corpi ruotano rigidamente attorno al centro di massa comune?

★★★★☆ **Esercizio 45 Deduzioni astronomiche** Una cometa orbita attorno ad una stella; vengono osservate le velocità della cometa in due punti diversi della traiettoria, e si osserva che:

1. \vec{v}_1 e \vec{v}_2 sono ortogonali tra loro
2. $|\vec{v}_1| = 2|\vec{v}_2|$

Qual'è il minimo valore possibile dell'eccentricità dell'orbita?

★★★★☆ **Esercizio 46 Approssimazioni Tolemaiche** Dimostrare che, per un'orbita ellittica di tipo kepleriano con eccentricità $\epsilon \ll 1$, la velocità angolare di una particella osservata da un punto situato nel fuoco vuoto dell'ellisse risulta uniforme (al prim'ordine in ϵ). Si noti che il fuoco vuoto non coincide con il centro di attrazione del moto.

★★★☆☆ **Esercizio 47 Polvere stellare** Nel sistema solare è presente una distribuzione uniforme di polvere stellare; ciò produce un contributo aggiuntivo all'attrazione gravitazionale solare, pari a

$$\vec{F} = -mC\vec{r} \quad C > 0$$

Dove C è una costante proporzionale alla densità volumica di polvere stellare. Si assuma inoltre che tale contributo alla forza di attrazione sia molto minore di quello gravitazionale.

1. Si calcoli il periodo di un'orbita circolare di raggio r_0 attorno al sole
2. L'orbita circolare è poi perturbata con un piccolo "kick" radiale. Si calcoli il periodo delle oscillazioni radiali del corpo
3. Mostrare che le orbite quasi-circolari sono approssimabili a delle ellissi che precedono, e calcolarne la frequenza di precessione