

Matematica

LEZIONE AVANZATA

Martino Barbieri*, Michele Casella†

3 febbraio 2025

Sommario

La prima parte della lezione introdurrà la nozione di integrali su curve, superfici e volumi; verranno poi enunciati i teoremi della divergenza e di Stokes, che collegano questi concetti tra di loro. In seguito, saranno discussi alcuni metodi risolutivi per equazioni differenziali ordinarie, e verranno trattati aspetti più qualitativi legati al contesto fisico in cui si collocano. Infine, sarà dato un cenno a livello puramente intuitivo alla teoria delle rappresentazioni di gruppi abeliani come strumento per studiare sistemi fisici con particolari simmetrie.

*martino.barbieri@sns.it

†michele.casella@sns.it

— INDICE —

1	Integrazione	3
1.1	Integrazione lungo curve	3
1.2	Integrazione su superfici	4
1.2.1	Integrali su rettangoli	4
1.2.2	Integrali su domini di \mathbb{R}^2	5
1.2.3	Integrali su superfici	7
1.3	Integrazione su volumi	9
2	Il teorema della divergenza e il teorema di Stokes	9
2.1	Il teorema della divergenza	10
2.2	Applicazioni del teorema della divergenza	11
2.3	Il teorema di Stokes	13
2.4	Applicazioni del teorema di Stokes	13
2.5	Campi irrotazionali e conservativi	14
3	Equazioni differenziali ordinarie	15
3.1	Equazioni a variabili separabili	15
3.2	Equazioni lineari del primo ordine	16
3.3	Equazioni lineari a coefficienti costanti	16
3.3.1	Primo intermezzo: linearità e spazi vettoriali	16
3.3.2	Caso omogeneo	17
3.3.3	Secondo intermezzo: base di spazio vettoriale	18
3.3.4	Tornando alle ODE...	18
3.3.5	Caso non omogeneo	19
3.3.6	Metodo degli annihilatori	20
3.3.7	Metodo di variazione delle costanti	21
3.3.8	Principio di sovrapposizione	21
3.3.9	Conclusione	22
4	Teoria delle rappresentazioni	23
4.1	Simmetrie	23
4.1.1	Abelianità	23
4.2	Rappresentazioni	23
4.2.1	Rappresentazioni riducibili e irriducibili	26
4.2.2	Conclusioni	27
	Esercizi	28

SEZ. 1 — INTEGRAZIONE

Ricordiamo rapidamente che cosa significa integrare una funzione f su un intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} : considerata una suddivisione dell'intervallo $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$, scegliamo un punto $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ all'interno di ciascun intervallo, e calcoliamo la somma di Riemann

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

ossia moltiplichiamo i valori della funzione nei punti che abbiamo scelto per le lunghezze degli intervalli a cui appartengono, e sommiamo tutto. Più è fine la suddivisione che scegliamo, più il valore di questa somma si avvicina a ciò che conosciamo come integrale di f su $[a, b]$, $\int_a^b f dx$.

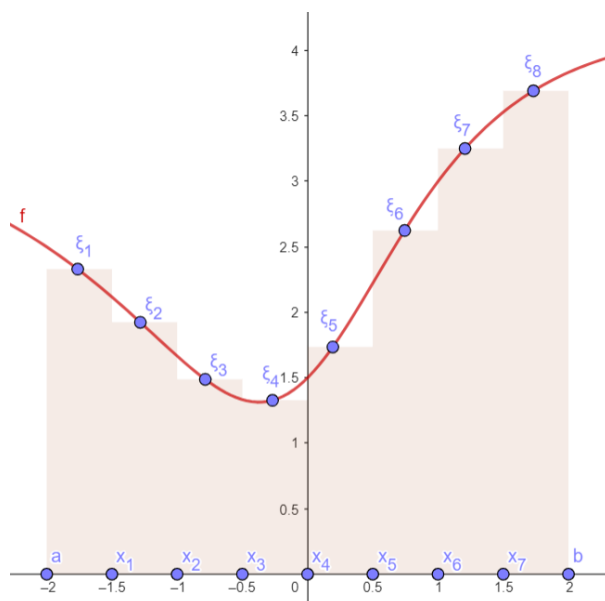


Figura 1: La rappresentazione grafica del procedimento appena descritto. L'area evidenziata corrisponde al valore della somma.

Adesso ci interessa definire l'integrale di funzioni in contesti più generali, ma è importante ricordare l'intuizione con cui siamo partiti: l'integrale è il limite di una somma pesata che tiene conto sia del valore della funzione in una certa regione, sia della “misura” di quella regione. Su un intervallo quella che stiamo chiamando misura non era altro che la lunghezza; sulle superfici diventerà l'area, negli integrali tridimensionali il volume. Non è immediato definire questi concetti di misura in generale, ma la nostra capacità di calcolare integrali dipende da essi in modo fondamentale. Nel seguito ne faremo uso, ma soltanto a un livello intuitivo che non dovrebbe creare eccessiva confusione.

1.1 Integrazione lungo curve

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva, e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione; definiamo l'integrale di f lungo γ come

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Il fatto che debba esserci $f(\gamma(t))$ è abbastanza intuitivo; quello che sul momento potrebbe creare confusione è il $\|\dot{\gamma}(t)\|$. Come possiamo spiegarcelo? Ora non stiamo facendo l'integrale su $[a, b]$, ma sulla curva; di conseguenza, quando partizioniamo l'intervallo e facciamo la somma pesata

dei valori della funzione, non dobbiamo usare le lunghezze degli intervalli, ma dei corrispondenti tratti di curva. Se gli intervalli sono abbastanza piccoli, la distanza percorsa dalla curva è ben approssimata dal modulo della sua velocità in un punto (che è proprio $\|\dot{\gamma}\|$) moltiplicato per la lunghezza dell'intervallo. Dunque, il ds che abbiamo scritto al membro di sinistra non è altro che $\|\dot{\gamma}(t)\|dt$, ossia la distanza percorsa dalla curva nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$. Un'altra definizione che ha senso dare è quella di lavoro di un campo vettoriale lungo una curva: dato $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, poniamo

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Si tratta dell'integrale della funzione $\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ (ossia la proiezione di \mathbf{F} sul vettore velocità di γ) lungo γ . In questo caso, ds assume un significato leggermente diverso: non dobbiamo più immaginarlo come un valore infinitesimo, ma come un vettore di lunghezza infinitesima che ha la stessa direzione e verso della velocità della curva, $ds = \dot{\gamma}(t)dt$.

Esempio 1.1 (Lunghezza di una curva) Abbiamo detto che $ds = \|\dot{\gamma}(t)\|dt$ è la distanza percorsa dalla curva nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$. Pertanto, la lunghezza totale della curva è data da

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

che corrisponde all'integrale della funzione identicamente uguale a 1 lungo γ .

Esempio 1.2 (Teorema delle forze vive) Sia γ la legge oraria di un punto materiale di massa m su cui agisce una forza \mathbf{F} . Dalla seconda legge di Newton $\mathbf{F}(\gamma(t)) = m\ddot{\gamma}(t)$; il lavoro di \mathbf{F} lungo γ , quindi, è

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_a^b m\ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \right) dt = \frac{1}{2} m \|\dot{\gamma}(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\dot{\gamma}(a)\|^2$$

che è esattamente la differenza delle energie cinetiche agli istanti b e a . Abbiamo utilizzato la relazione $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)$ e il comportamento del prodotto scalare sotto derivazione:

$$\frac{d}{dt}(v(t) \cdot w(t)) = \dot{v}(t) \cdot w(t) + v(t) \cdot \dot{w}(t)$$

1.2 Integrazione su superfici

La trattazione generale dell'integrazione su superfici è più impegnativa rispetto al caso delle curve; vedremo dapprima il caso di sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 , per capire l'idea, poi mostreremo come si applica ad alcune superfici particolari.

§ 1.2.1. Integrali su rettangoli. — Sia $D = [a, b] \times [c, d]$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Ricordando l'intuizione che abbiamo dato a inizio capitolo, vogliamo dividere D in pezzetti sempre più piccoli. Un modo naturale per farlo è dividere i suoi lati e creare una griglia: prendiamo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$. I rettangoli $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ al variare di $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ sono una suddivisione di D . Scelti $\xi_{i,j} = (x_i, y_j)$, sommiamo le aree dei rettangoli moltiplicate per i valori di f :

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Per quanto abbiamo detto prima, ha senso definire l'integrale di f su D come il limite di questa somma a mano a mano che le suddivisioni si fanno più fini :

$$\int_D f dS = \lim \sum_{i,j} f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Ovviamente, l'ordine con cui sommiamo non importa; quindi, possiamo riscrivere la somma come

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j)(y_j - y_{j-1})$$

in cui sommiamo prima su ogni colonna e poi sommiamo al variare delle colonne. Soffermiamoci sulla somma all'interno: siccome x_i è fissato, è esattamente la somma di Riemann della funzione $y \rightarrow f(x_i, y)$ sull'intervallo $[c, d]$. Dunque, più le suddivisioni sono fini, più la somma che abbiamo scritto è vicina a

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \int_c^d f(x_i, y) dy$$

Ma ora notiamo che $\int_c^d f(x, y) dy$ si può vedere come una funzione di x ; in quest'ottica, quella che abbiamo appena scritto è la sua somma di Riemann. Ricordando la definizione data prima, quindi,

$$\int_D f dS = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Facciamo il punto della situazione: abbiamo dato una nozione di integrale $\int_D f dx dy$ che corrispondesse alla nostra intuizione, e abbiamo mostrato che si può calcolare facilmente con due integrali unidimensionali, almeno nel caso dei rettangoli. Ovviamente, vale anche

$$\int_D f dS = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

siccome la situazione che stiamo studiando è simmetrica in x e y . Nella pratica, è utile saper riconoscere quale ordine di integrazione rende più facili i conti.

§ 1.2.2. Integrali su domini di \mathbb{R}^2 . — Supponiamo ora che D sia un generico sottoinsieme di \mathbb{R}^2 ; esattamente come prima, possiamo definire l'integrale di $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ come limite di somme di Riemann, a mano a mano che l'area delle regioni in cui suddividiamo diventa più piccola. Nel caso precedente, le suddivisioni più comode erano quelle in rettangoli; in generale, questo non è sempre vero. Prendiamo per esempio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco unitario: possiamo ricoprirlo con dei quadrati, oppure dividerlo in "spicchi" tracciando dei raggi, e sezionare gli spicchi con circonferenze concentriche (questa seconda scelta corrisponde a suddividere gli intervalli $[0, 1]$ e $[0, 2\pi]$ e creare una griglia analoga a prima, se vediamo la situazione in coordinate polari). Ora calcoliamo l'integrale di $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ usando queste due scomposizioni:

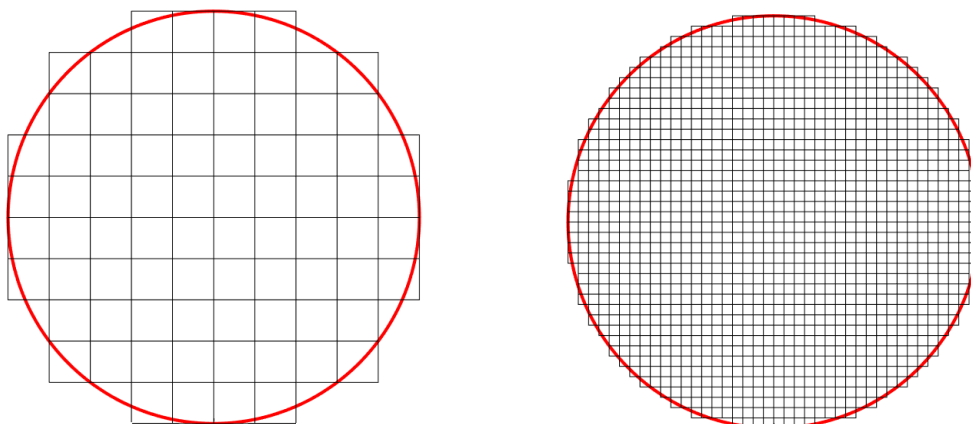


Figura 2: Alcune suddivisioni del cerchio con quadrati

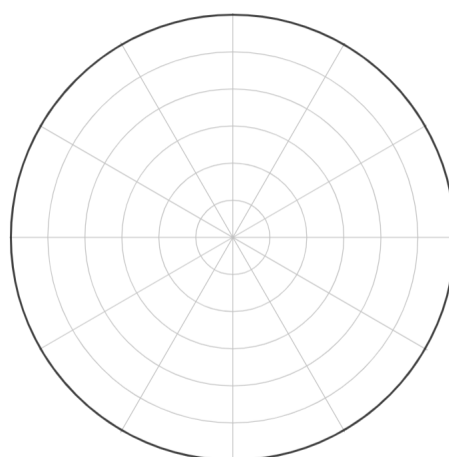


Figura 3: Una suddivisione del cerchio data dalle coordinate polari

Esempio 1.3 (Integrazione sul cerchio in coordinate cartesiane) La ragione per cui questa scomposizione non è così comoda è che, quando scriviamo l'integrale doppio, gli estremi dell'integrale interno non sono più costanti, ma dipendono dalle coordinate! Dobbiamo calcolare

$$\int_D f dS = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

poiché, se fissiamo x , l'intersezione di D con $\{x\} \times \mathbb{R}$ si ha proprio per $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$.

Esempio 1.4 (Integrazione sul cerchio in coordinate polari) Consideriamo $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = 1$ e $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = 2\pi$ suddivisioni. Per scrivere la somma di Riemann, ci serve l'area della regione definita in coordinate polari (ρ, ϕ) da $r \leq \rho \leq r + \Delta r$, $\theta \leq \phi \leq \theta + \Delta\theta$. Essa vale $\frac{\Delta\theta}{2}((r + \Delta r)^2 - r^2)$, che al primo ordine di approssimazione per Δr , $\Delta\theta$ piccoli diventa $r \Delta r \Delta\theta$; pertanto, si dice che $r dr d\theta$ è l'elemento infinitesimo di area in coordinate polari. Riordinando la somma in modo analogo a prima e utilizzando questa approssimazione, otteniamo che

$$\int_D f dS = \int_0^1 r \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta dr$$

Abbiamo eliminato la dipendenza dalle coordinate negli estremi di integrazione: ci siamo riusciti perché, portato in coordinate polari, D corrisponde al rettangolo $([0, 1] \times [0, 2\pi])$. Nel caso di una regione qualunque, esattamente come prima per il cerchio in cartesiane, avremmo dovuto determinare la sua intersezione con le circonferenze di raggio r centrate nell'origine, e restringere ad esse l'integrale interno (oppure l'intersezione con le semirette, se avessimo voluto integrare prima in r).

Per ricapitolare, dato $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, se il dominio e la funzione hanno proprietà ragionevoli possiamo sempre, in astratto, integrare con la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{D_x} f(x, y) dy dx$$

dove $D_x = \{y \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (x, y) \in D\}$ è la sezione di D lungo la retta verticale di ascissa x (Ovviamente x e y si possono scambiare). Tuttavia, per ottenere conti meno pesanti (e fattibili esplicitamente) può essere utile studiare eventuali simmetrie di D e di f che le rendano adatte a essere trattate meglio in un sistema di coordinate opportuno.

§ 1.2.3. Integrali su superfici. — Sebbene esistano formule generali per gli integrali di superficie, ricavarle (o anche solo dare una buona euristica del perché funzionino) non è immediato. Oltretutto, è raro che nei problemi di fisica compaiano superfici diverse da un cilindro, una sfera o altri casi particolarmente convenienti; ci limiteremo quindi a dare qualche esempio. Data $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo $\int_{\Sigma} f dS$ come il solito limite delle somme di Riemann per suddivisioni sempre più fini (dS è detto elemento infinitesimo di superficie). Come prima, quello che si può fare per semplificare la situazione è scegliere suddivisioni che si scrivono bene nel giusto sistema di coordinate, sfruttando le simmetrie di Σ . Vediamo esplicitamente due casi:

Esempio 1.5 (Integrazione su un cilindro) Se Σ è la superficie laterale di un cilindro di raggio di base r e altezza h , possiamo utilizzare un sistema di coordinate cilindriche (ρ, θ, z) . In queste coordinate, Σ è descritta dalle condizioni $\rho = r$, $0 \leq z \leq h$, e dS è dato da $r d\theta dz$:

$$\int_{\Sigma} f dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) d\theta dz$$

Esempio 1.6 (Integrazione su una sfera) Se Σ è la sfera di raggio R , possiamo utilizzare le coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , in cui Σ è banalmente descritta dalla condizione $r = R$ e $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ (questo elemento infinitesimo è meno immediato degli altri, provate a convincervene graficamente):

$$\int_{\Sigma} f dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) d\phi d\theta$$

Un'ultima definizione importante è quella di flusso di un campo vettoriale \mathbf{F} lungo una superficie: esso si definisce come

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma} (\mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{N}(x)) dS$$

dove $\mathbf{N}(x)$ è il versore con direzione ortogonale alla superficie nel punto $x \in \Sigma$. Per questo versore ci sono due possibili scelte, che determinano la cosiddetta orientazione di Σ ; l'integrale che si ottiene è lo stesso a meno di un cambio di segno. Se la superficie è chiusa, la scelta canonica del versore normale è quella che punta verso l'esterno. Esattamente come nel caso delle curve, quindi, $d\mathbf{S}$ non è altro che un vettore diretto lungo \mathbf{N} , e di modulo pari all'elemento infinitesimo di superficie.

Esempio 1.7 (Interpretazione intuitiva del flusso in fluidodinamica) Consideriamo un fluido che si muove all'interno di un condotto attraversando una superficie Σ ; possiamo definire, supponendo che la situazione sia stazionaria, il campo $\mathbf{v}(x)$ che associa a ogni punto la velocità del fluido in corrispondenza di esso. Così facendo, il flusso di \mathbf{v} attraverso Σ rappresenta il volume di fluido che attraversa Σ in un'unità di tempo.

Se invece Σ è una superficie chiusa, e $\mathbf{v}(x, t)$ è il campo delle velocità del fluido, il flusso di \mathbf{v} attraverso Σ all'istante t è il bilancio totale tra il volume di fluido che esce da Σ (con segno positivo) e quello che entra (con segno negativo) per unità di tempo. Di conseguenza, se $V(t)$ è il volume di fluido contenuto in Σ , vale la relazione

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v}(x, t) \cdot d\mathbf{S} = -\dot{V}(t)$$

Osserviamo, infine, che se il fluido è incomprimibile, $V(t)$ è costante, dunque il flusso di \mathbf{v} attraverso qualunque superficie chiusa è nullo.

Esempio 1.8 (Conservazione della carica in forma globale) Consideriamo una distribuzione di carica che dipende dal tempo e una superficie chiusa Σ ; siano $Q(t)$ la carica totale contenuta in Σ e $\mathbf{J}(x, t)$ la densità di corrente per unità di superficie. Allora, in totale analogia con quanto detto sopra riguardo al moto dei fluidi,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J}(x, t) \cdot d\mathbf{S} = -\dot{Q}(t)$$

1.3 Integrazione su volumi

Come ultimo argomento, vogliamo dare una nozione di integrale per funzioni $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definite su una regione di \mathbb{R}^3 . L'idea è la solita: suddividiamo V in cubetti, e definiamo $\int_V f dV$ come il limite delle somme di Riemann. Riprendendo il procedimento utilizzato nel caso dei rettangoli di \mathbb{R}^3 , si dimostra che un tale integrale si può calcolare con tre integrali unidimensionali (invece dei due che ci erano serviti in precedenza). Tuttavia, la regione V potrebbe non essere descrivibile comodamente in coordinate cartesiane: pertanto, è utile conoscere gli elementi di volume in coordinate cilindriche ($dV = \rho d\rho d\theta dz$) e sferiche ($dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$)

Esempio 1.9 (Integrazione su un cilindro) Sia V un cilindro con raggio di base r e altezza h ; invece che calcolare

$$\int_0^h \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y, z) dy dx dz$$

possiamo utilizzare le coordinate cilindriche e scrivere

$$\int_V f dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) d\rho d\theta dz$$

NOTA: questo secondo metodo è tendenzialmente più comodo perché sfrutta meglio la simmetria di V . Tuttavia, se per esempio sapessimo che f non dipende da y , l'integrale in cartesiane potrebbe meritare di essere rivalutato. In generale, questi esempi sono dati per fornire diversi metodi risolutivi, in modo tale da poter selezionare quello più conveniente nel momento del bisogno, non per designare l'unico procedimento corretto.

Esempio 1.10 (Integrazione su una palla) Se V è la palla di raggio R (ossia $V = \{(x, y, z) \text{ t.c. } x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$), si può scrivere

$$\int_V f dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) d\phi d\theta dr$$

SEZ. 2 — IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA E IL TEOREMA DI STOKES

Ricordiamo l'enunciato del teorema fondamentale del calcolo integrale: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile con derivata continua, vale l'identità

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

che lega il comportamento della funzione al bordo del dominio con il comportamento della sua derivata all'interno di esso. L'analisi in più variabili offre moltissime generalizzazioni di questo risultato, tutte derivanti dal Teorema di Stokes-Cartan, che non dimostreremo; ne vedremo però due casi particolarmente utili in fisica, che collegano integrali di volume a integrali di superficie e integrali di superficie a integrali di linea.

Sia \mathbf{F} un campo vettoriale e F_x, F_y, F_z le sue componenti: definiamo la divergenza di \mathbf{F} come

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

e definiamo il rotore di \mathbf{F} come

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

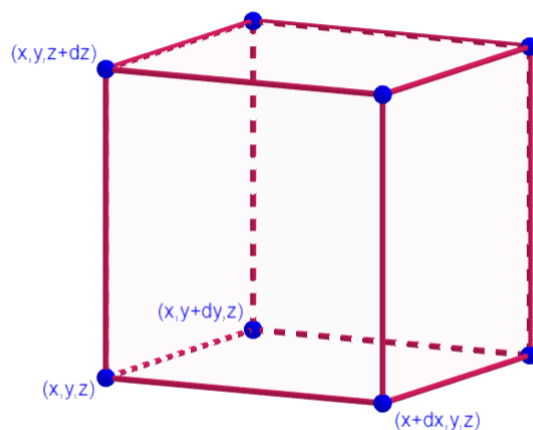
Un modo per ricordare queste definizioni è utilizzare la scrittura formale $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ e vedere divergenza e rotore come un prodotto scalare e un prodotto vettoriale tra ∇ e \mathbf{F} rispettivamente. Se il campo è definito su una regione $V \subseteq \mathbb{R}^3$, la divergenza è una funzione scalare $\nabla \cdot \mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}$, mentre il rotore è un campo vettoriale $\nabla \times \mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$.

2.1 Il teorema della divergenza

Sia V una regione di \mathbb{R}^3 che ha per bordo una superficie chiusa Σ : allora vale l'identità

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_\Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Non daremo una dimostrazione formale di questo risultato, ma cercheremo di far capire perché debba essere vero a livello intuitivo. Innanzitutto, verifichiamolo nel caso in cui V è un cubetto con spigoli paralleli agli assi e lato infinitesimo.



Calcoliamo il contributo al flusso delle facce orizzontali: esso è dato da

$$\int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} F_z(x', y', z + \Delta z) dy' dx' - \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} F_z(x', y', z) dy' dx' =$$

$$\int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} F_z(x', y', z + \Delta z) - F_z(x', y', z) dy' dx'$$

ma $F_z(x', y', z + \Delta z) - F_z(x', y', z) \approx \frac{\partial F_z}{\partial z}(x', y', z) \cdot \Delta z$ se Δz è molto piccolo; inoltre, se Δx e Δy sono piccoli, possiamo trascurare la dipendenza di $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ da s e t e stimare l'integrale con

$$\frac{\partial F_z}{\partial z}(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Facendo il calcolo con le altre facce si trovano termini analoghi (ma contenenti $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ e $\frac{\partial F_y}{\partial y}$), cosicché, sommando, si ottiene

$$\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \approx (\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$$

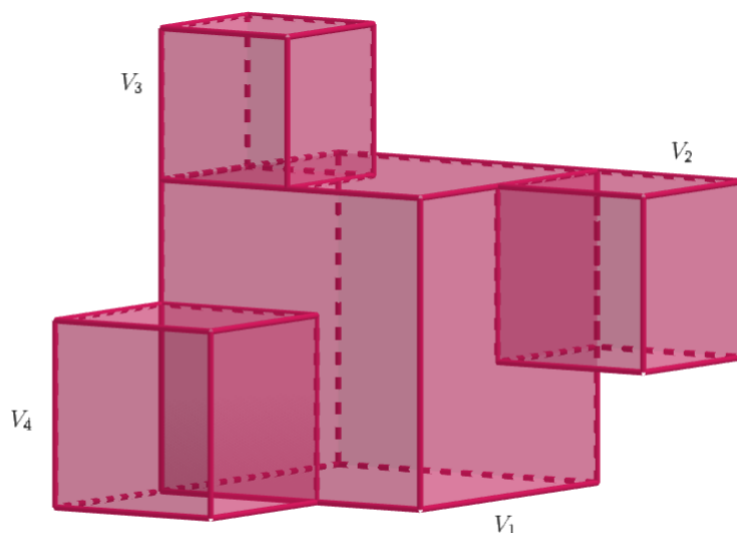


Figura 4: Un possibile esempio di unione di cubi; notiamo che si devono intersecare soltanto nei bordi, in modo che gli integrali sommino correttamente

dove Σ è il bordo del cubetto. A questo punto, supponiamo che V sia un'unione di cubi V_1, V_2, \dots, V_n di bordi rispettivamente $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$. Vogliamo scrivere il flusso di \mathbf{F} attraverso Σ in termini dei flussi attraverso le Σ_k : alcune parti dei bordi si sovrappongono, ma sempre con orientazioni opposte, in modo tale che i loro contributi si annullino e rimanga solo il flusso attraverso il bordo esterno. Quindi, possiamo scrivere

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

e, se i cubetti sono abbastanza piccoli (altrimenti possiamo suddividerli ulteriormente), otteniamo

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \approx \sum_{k=1}^n (\nabla \cdot \mathbf{F})(x_k, y_k, z_k) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$$

il cui membro di destra, per cubetti sempre più piccoli, tende a $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$.

2.2 Applicazioni del teorema della divergenza

Introduciamo ora un semplice fatto matematico che sarà di enorme utilità in seguito: siano $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Se per ogni regione V bordata da una superficie chiusa Σ vale l'identità

$$\int_V f dV = \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

allora f è esattamente la divergenza di \mathbf{F} . Infatti, preso $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, possiamo considerare attorno a esso una pallina V abbastanza piccola da poter supporre f e $\nabla \cdot \mathbf{F}$ praticamente costanti al suo interno. Per ipotesi,

$$f(x, y, z) \text{vol}(V) = \int_V f dV = \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = (\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) \text{vol}(V)$$

dove $\text{vol}(V)$ è il volume di V , e abbiamo concluso. Siamo partiti dall'uguaglianza tra un integrale di volume e un integrale di superficie, ma il teorema della divergenza ci ha permesso di scriverli

entrambi come integrali di volume, in modo da poterli confrontare direttamente.

Esempio 2.1 (Equazione dei fluidi incomprimibili) Se \mathbf{v} è il campo delle velocità di un fluido incomprimibile, abbiamo visto in precedenza che il suo flusso attraverso ogni superficie chiusa è nullo. Ne consegue, applicando il lemma appena mostrato per $f = 0$, $\mathbf{F} = \mathbf{v}$, che $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$; questa è la condizione locale che esprime l'incomprimibilità di un fluido.

Esempio 2.2 (Conservazione della carica in forma locale) Ricordiamo l'espressione globale per la conservazione della carica:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\dot{Q}(t)$$

introduciamo ora la densità di carica per unità di volume ρ ; vale che $Q(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV$, pertanto, portando la derivata sotto il segno d'integrale,

$$\dot{Q}(t) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV$$

Possiamo dunque applicare il lemma precedente con $f = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\mathbf{F} = \mathbf{J}$, ottenendo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

che è l'espressione locale della conservazione della carica.

Esempio 2.3 (Prima legge di Maxwell) Ricordiamo la legge di Gauss: se V è una regione con bordo Σ superficie chiusa, chiamando Q la carica totale contenuta in V e \mathbf{E} il campo elettrico, vale l'identità

$$\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Pertanto, applicando il lemma precedente con $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ e $f = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Esempio 2.4 (Terza legge di Maxwell) Nel caso del campo magnetico \mathbf{B} , sappiamo che il suo flusso attraverso una superficie chiusa è sempre nullo, dunque

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

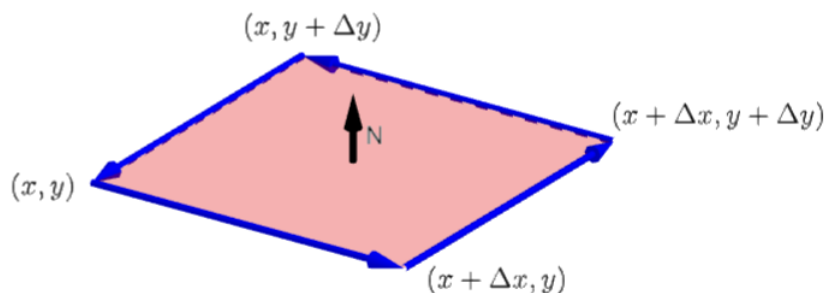
Come riflessione finale, tenendo conto sia del lemma sia delle applicazioni che abbiamo visto, che interpretazione possiamo dare dell'operatore divergenza? Possiamo dire che la divergenza di un campo \mathbf{F} nel punto \mathbf{x} "misura la presenza di sorgenti di \mathbf{F} in \mathbf{x} ": nel caso del campo elettrico è pari alla densità di carica, nel caso del campo magnetico è nulla perché sappiamo che non esistono monopoli magnetici, quindi un campo magnetico non potrà mai ammettere una sorgente localizzata in un punto. Ovviamente, il concetto di sorgente non è ben definito in generale, ma, almeno graficamente, se le linee di un campo vettoriale tendono a "scaturire" da un certo punto, possiamo aspettarci che in quel punto la divergenza sia positiva. Se invece le linee di campo convergono verso un certo punto, ci aspettiamo che la divergenza sia negativa.

2.3 Il teorema di Stokes

Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie avente per bordo una curva chiusa γ ; scegliamo l'orientazione di Σ in modo che rispetti la regola della mano destra rispetto al verso di percorrenza di γ . Allora

$$\int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Come per il teorema della divergenza, diamo una dimostrazione intuitiva in qualche caso particolare: sia Σ un quadratino nel piano xy con lati paralleli agli assi e vertici (x, y) , $(x + \Delta x, y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $(x, y + \Delta y)$. Se prendiamo \hat{z} come versore normale, dobbiamo percorrere il suo bordo in senso antiorario.



L'integrale di F lungo il bordo è dato da

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} F_x(x', y) dx' + \int_y^{y+\Delta y} F_y(x + \Delta x, y') dy' - \int_x^{x+\Delta x} F_x(x', y + \Delta y) dx' - \int_y^{y+\Delta y} F_y(x, y') dy' = \\ \int_y^{y+\Delta y} F_y(x + \Delta x, y') - F_y(x, y') dy' - \int_x^{x+\Delta x} F_x(x', y + \Delta y) - F_x(x', y) dx' \end{aligned}$$

che per Δx , Δy piccoli diventa, con le stesse approssimazioni di prima, $\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y$, dove riconosciamo la componente lungo \hat{z} del rotore di \mathbf{F} . Se ora Σ è un'unione di quadratini $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ che si intersecano soltanto nei loro bordi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, contenuti nel piano xy e aventi i lati paralleli agli assi, abbiamo che esattamente come prima

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

in quanto i contributi dei tratti di bordo che si intersecano tra loro hanno sempre segno opposto per ragioni di orientazione, e quindi si semplificano. Dunque, per quadrati piccoli

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}(x_k, y_k) - \frac{\partial F_x}{\partial y}(x_k, y_k) \right) \Delta x_k \Delta y_k$$

dove il membro di destra tende all'integrale di $(\nabla \times \mathbf{F})_z = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}$.

2.4 Applicazioni del teorema di Stokes

Cominciamo da un lemma del tutto analogo al precedente sulla divergenza: siano $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campi vettoriali e supponiamo che per ogni superficie Σ con bordo γ curva chiusa,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}$$

Allora $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$; la dimostrazione è analoga a prima, prendendo piccole superfici attorno a un punto p contenute nei piani xy , yz e xz , e concludendo che $\mathbf{G}(p)$ e $(\nabla \times \mathbf{F})(p)$ coincidono componente per componente.

Esempio 2.5 (Seconda equazione di Maxwell nel caso statico) Sappiamo che l'integrale del campo elettrico lungo un qualunque cammino chiuso è nullo; dunque, applicando il lemma precedente con $\mathbf{F} = \mathbf{E}$, $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Esempio 2.6 (Quarta equazione di Maxwell nel caso statico) Sappiamo che, se Σ è una superficie con bordo γ curva chiusa, vale la legge di Ampère

$$\int_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

da cui, applicando il lemma con $\mathbf{F} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{G} = \mu_0 \mathbf{J}$, si ottiene la formulazione locale

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Cerchiamo, infine, di dare un'interpretazione intuitiva del rotore; dato \mathbf{F} un campo vettoriale, in base al lemma precedente possiamo dire che $(\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{p})$ esprime con la propria direzione l'asse (se esiste) attorno al quale \mathbf{F} tende ad avvolgersi vicino al punto \mathbf{p} , con il proprio verso la direzione di rotazione, e con il proprio modulo l'entità dell'avvolgimento.

2.5 Campi irrotazionali e conservativi

Sappiamo che, presa $V \subseteq \mathbb{R}^3$, un campo vettoriale $\mathbf{F}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice conservativo se esiste una funzione $U: V \rightarrow \mathbb{R}$, detta potenziale, tale che $\mathbf{F} = -\nabla U$ (o, equivalentemente, se l'integrale lungo ogni cammino chiuso è nullo). Si dice invece che \mathbf{F} è irrotazionale (ricordando l'intuizione sul rotore data prima) se $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Verifichiamo innanzitutto che conservativo implica sempre irrotazionale: se $\mathbf{F} = -\nabla U$ e calcoliamo per esempio la prima componente del rotore, si ha

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0$$

poiché sappiamo che sotto opportune ipotesi di regolarità si possono scambiare le derivate parziali (il calcolo delle altre componenti del rotore è analogo). Possiamo, invece, dire che ogni campo irrotazionale è conservativo? Se il dominio V è \mathbb{R}^3 , questo è vero: infatti, data γ curva chiusa, possiamo sempre trovare una superficie Σ che abbia γ come bordo, e si ha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Tuttavia, se consideriamo il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

definito su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \text{ t.c. } x = y = 0\}$, possiamo verificare che è irrotazionale, ma il suo integrale lungo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ è non nullo, pertanto non è conservativo. Intuitivamente, il problema è che abbiamo sottratto una retta da \mathbb{R}^3 , quindi ci sono curve chiuse che non possiamo più vedere come bordo di una opportuna superficie.

SEZ. 3 — EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

In generale, un'equazione differenziale ordinaria di ordine $n \geq 1$ è un'equazione della forma

$$x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$$

dove l'incognita x è una funzione di t e per $x^{(k)}$ si intende la sua derivata k -esima; f è una funzione fissata.

Quando, oltre all'equazione differenziale sono date le n condizioni iniziali, per esempio al tempo t_0 , il sistema

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0, \quad x^{(1)} = x_0^{(1)}, \quad \dots, \quad x^{(n-1)} = x_0^{(n-1)} \end{cases}$$

si chiama **problema di Cauchy**. Se la funzione $f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$ è continua in t e differenziabile con continuità in $x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}$, esiste un teorema (**Cauchy-Lipschitz**, che non dimostreremo) che ci garantisce che esiste una soluzione al problema di Cauchy, e che tale soluzione è pure l'unica.

Al di là delle applicazioni, in cui entreremo tra poco, a livello teorico questo è già affascinante di suo: ci dice che, note le equazioni che governano un sistema e il suo stato esatto in un certo istante, conosciamo la sua evoluzione in modo deterministico. Tuttavia, è possibile che fluttuazioni molto piccole nei dati iniziali si ripercuotano in modo imprevedibile sul comportamento del sistema; di conseguenza, l'imperfezione dei nostri strumenti di misura (nonché, volendo, i limiti che la fisica stessa impone: pensate al principio di indeterminazione di Heisenberg) rendono impossibili previsioni certe. Al di là di questi discorsi astratti, risolvere esplicitamente un'equazione differenziale della forma che abbiamo scritto sopra è molto difficile: ci limiteremo pertanto ad analizzare alcuni casi relativamente semplici, e fisicamente rilevanti.

3.1 Equazioni a variabili separabili

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice a variabili separabili se è della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Supponiamo che la soluzione esista localmente e sia unica per ogni scelta del dato iniziale (t_0, x_0) . Allora, se $x(t)$ è una soluzione non costante, $g(x(t))$ non si annulla mai: se si annullasse in $\tilde{x} = x(\tilde{t})$, x sarebbe soluzione al problema con dati iniziali (\tilde{t}, \tilde{x}) , ma anche la costante \tilde{x} lo sarebbe, il che nega l'unicità. Dunque, escludendo che x sia una costante, possiamo dividere per $g(x)$. Il procedimento che forse avete già visto per arrivare alla soluzione è

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \implies \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt \implies \int_{x_0}^x \frac{dx'}{g(x')} = \int_{t_0}^t f(t')dt'$$

Ora cerchiamo di formalizzarlo matematicamente. Definiamo pertanto

$$G(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{g(x')} \quad F(t) = \int_{t_0}^t f(t')dt'$$

e notiamo che $f(t) = \frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))}$ si può vedere come derivata temporale sia di $F(t)$, sia di $G(x(t))$. Dunque, esiste una costante c tale che $F(t) = G(x(t)) + c$; valutando in t_0 otteniamo che $c = 0$ e ricaviamo esattamente l'uguaglianza ricavata prima.

Esempio 3.1 (Fuoriuscita di un fluido da una cisterna) Su una cisterna di superficie di base S è praticato un foro cilindrico di area $A \ll S$. All'istante $t = 0$ la cisterna è riempita di fluido fino all'altezza h_0 (supponiamo che il foro si trovi ad altezza zero); vogliamo determinare l'evoluzione temporale dell'altezza del fluido h . La velocità con cui esso fuoriesce è data da $\sqrt{2gh}$, pertanto

$$\dot{h} = -\frac{A}{S}\sqrt{2gh}$$

Dal metodo appena visto si ha che

$$2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0} = -\left(\frac{A}{S}\sqrt{2g}\right)t \implies h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \left(\frac{A}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\right)t\right)^2$$

Dove l'espressione che abbiamo è scritto è valida fino a quando h si annulla.

3.2 Equazioni lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice lineare se è della forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Sia $A(t) = \int_{t_0}^t a(t')dt'$; scriviamo $\dot{x}(t) - a(t)x(t) = b(t)$ e moltiplichiamo per $e^{-A(t)}$

$$e^{-A(t)}\dot{x}(t) - e^{-A(t)}a(t)x(t) = e^{-A(t)}b(t)$$

dove notiamo che il membro di sinistra è la derivata temporale di $e^{-A(t)}x(t)$. Integrando,

$$e^{-A(t)}x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t e^{-A(t')}b(t')dt'$$

da cui, moltiplicando per $e^{A(t)}$, si ottiene la soluzione:

$$x(t) = e^{A(t)}x_0 + e^{A(t)}\int_{t_0}^t e^{-A(t')}b(t')dt'$$

3.3 Equazioni lineari a coefficienti costanti

§ 3.3.1. Primo intermezzo: linearità e spazi vettoriali. — Accenniamo brevemente a qualche strumento utile per studiare problemi con una natura *lineare*, introducendo qualche concetto nuovo e un po' di nomenclatura. Procederemo in maniera molto garibaldina, enunciando i risultati in maniera intuitiva ma non assolutamente rigorosa: per formalizzare avrete tempo durante tutta l'Università.

Iniziamo dal concetto di **linearità**: data una proprietà \mathcal{P} , essa è lineare se dati due elementi che soddisfano \mathcal{P} , la loro somma e i loro riscaldamenti (reali o complessi) soddisfano ancora \mathcal{P} .

Facciamo qualche esempio:

1. Se $\mathcal{P} = \text{“essere un elemento di } \mathbb{R}^3\text{”}$, presi due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, pure il vettore somma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e il vettore riscalato $\alpha\mathbf{v}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ stanno in \mathbb{R}^3 . Quindi \mathcal{P} è una proprietà \mathbb{R} -lineare.
2. Se $\mathcal{P} = \text{“essere soluzione di } y'' + y = 0\text{”}$, prese due soluzioni (per esempio $y_+ = e^{+ix}$, $y_- = e^{-ix}$), sappiamo che la loro somma o il loro riscalamento (con un numero in \mathbb{C}) pure è una soluzione di $y'' + y = 0$, quindi \mathcal{P} è \mathbb{C} - (e quindi anche \mathbb{R} -)lineare. Notate che la linearità in questo caso non ha nulla a che vedere con la forma della soluzione ($y(x)$ non è una retta!).

3. Se \mathcal{P} = “essere un numero intero”, ai nostri fini \mathcal{P} **non** è una proprietà lineare. Infatti 1 soddisfa \mathcal{P} , ma $\frac{1}{2}$ (visto come 1 riscalato per $\frac{1}{2}$) no.

Data una proprietà lineare, l'insieme degli oggetti che soddisfano tale proprietà è detto **spazio vettoriale** (su “campo” \mathbb{R} o \mathbb{C} , in base a quali riscalamati possiamo fare).

La definizione di linearità è molto generale e si applica a tantissimi contesti. Tuttavia, nonostante la (relativamente) poca struttura richiesta, è in grado di fornire tantissime conseguenze utili.

Adesso che abbiamo spazi vettoriali, vogliamo farci qualcosa: introduciamo quindi la nozione di **operatori** su spazi vettoriali: un operatore O è una mappa (=funzione) lineare da V spazio vettoriale in sé stesso. Questo vuol dire tre cose:

- $\forall v \in V, O(v) \in V$;
- $O(v + w) = O(v) + O(w)$;
- $O(\alpha v) = \alpha O(v)$.

Spesso indicheremo $O(v)$ con Ov .

Se prendiamo $V = \{\text{funzioni civili}\}$, “fare la derivata della funzione in un punto” è un operatore, perché prende un elemento di V , ossia una funzione, e mi restituisce un altro elemento di V , la sua derivata. Indicheremo l'operatore di derivazione con D .

Definiamo ora somma, prodotto e riscalamento di operatori. Prendiamo due operatori A, B :

- l'operatore “somma di A e B ”, che indichiamo con $(A + B)$, è quell'operatore t.c.

$$(A + B)v = Av + Bv$$

- l'operatore “ α -riscalamento di A ”, che indichiamo come αA , è quell'operatore t.c.

$$(\alpha A)v = \alpha(Av)$$

- l'operatore “prodotto di A e B ”, che indichiamo con (AB) è quell'operatore t.c.

$$(AB)v = A(Bv)$$

Attenzione: non è affatto detto che $AB = BA$, anzi, in generale è falso. Quando succede che $AB = BA$, si dice che A, B **commutano**.

§ 3.3.2. **Caso omogeneo.** — Un'equazione differenziale si dice lineare a coefficienti costanti e omogenea se è della forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

o, equivalentemente, con la nuova terminologia introdotta:

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0)x(t) = 0$$

Per comodità, definiamo $E = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0)$ l'operatore dell'equazione. L'equazione è lineare, dunque le soluzioni dell'equazione formano uno spazio vettoriale. Tuttavia, il problema di Cauchy rompe la linearità per via delle condizioni iniziali. Possiamo allora adottare il seguente “trucco”:

1. ignoriamo le condizioni iniziali;
2. troviamo abbastanza “soluzioni semplici”;
3. costruiamo la generica soluzione dell'equazione $E(f) = 0$ per sovrapposizione lineare;
4. scegliamo a questo punto la soluzione che ha le giuste condizioni iniziali.

§ 3.3.3. **Secondo intermezzo: base di spazio vettoriale.** — Nell'elenco precedente siamo stati un po' sbrigativi quando abbiamo scritto "abbastanza soluzioni semplici". Vogliamo chiarire questo punto. In uno spazio vettoriale, è possibile scegliere un insieme B di vettori in modo che:

- ogni elemento $v \in V$ si scriva come combinazione lineare di elementi in B ;
- gli elementi di B non si possono scrivere come combinazione lineare di soli altri elementi di B .

(teorema non dimostrato). In tal caso, B è una **base** di V . Il numero di elementi necessari per costruire una base (chiamato **dimensione** di V), non dipende dalla base scelta: è in altre parole il numero di gradi di libertà dello spazio vettoriale.

In termini formali, la richiesta di trovare abbastanza "soluzioni semplici" corrisponde a trovare una base delle soluzioni dell'equazione differenziale.

La dimensione dello spazio delle soluzioni dell'ODE può essere ricavata da un fatto che già abbiamo visto: fissate le condizioni iniziali, la soluzione è completamente determinata. Ma la condizione iniziale è determinata da n valori, dove n è l'ordine dell'equazione differenziale. Quindi i gradi di libertà sono proprio n .

§ 3.3.4. **Tornando alle ODE....** — Consideriamo il seguente ansatz:

$$x = x_0 e^{\lambda t}$$

Questo tentativo trova due giustificazioni:

1. funziona;
2. l'equazione è invariante sotto traslazioni $t \mapsto t + \Delta t$. Giustificheremo più avanti perché la simmetria ci suggerisce di prendere soluzioni esponenziali. Per ora prendetelo come un fatto.

Notiamo che se poniamo $x(t) = e^{\lambda t}$, l'equazione diventa

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0$$

pertanto c'è un modo naturale di associare a equazioni di questa forma un polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

le cui radici ci determinano una base delle soluzioni. D'altra parte, sappiamo che questo polinomio ha n radici (eventualmente ripetute) in \mathbb{C} ; se sono tutte distinte, chiamiamole $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Notate che in questo caso, con le condizioni iniziali, possiamo saturare i gradi di libertà delle soluzioni. Allora, l'insieme delle soluzioni dell'equazione è dato da

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

al variare di $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ costanti (scelte in modo che la funzione che si ottiene abbia valori reali).

Nel caso in cui ci siano invece radici multiple, possiamo far emergere le altre soluzioni perturbando di poco l'equazione differenziale. Per chiarezza espositiva, scrivo solo il caso in cui l'ordine dell'ODE è 2; la generalizzazione è ovvia. Notiamo che E può essere scritto come

$$E = (D - \lambda)(D - \lambda)$$

(notate che per usare questa notazione, stiamo assumendo che le derivate commutino tra loro e con i numeri, per esempio:

$$\begin{aligned}(D - \lambda)(D - \lambda) &= D^2 - \lambda \cdot D - D \cdot \lambda + \lambda^2 = 0 \\ &\downarrow \lambda \cdot D = D \cdot \lambda \\ &= D^2 - 2\lambda D + \lambda^2\end{aligned}$$

non azzardatevi a fare questa cosa con coefficienti non costanti, fallirebbe miseramente).

Il trucco sta nel perturbare leggermente uno dei λ , con un parametro infinitesimo ε che verrà mandato a zero alla fine dei calcoli: se prendiamo

$$(D - \lambda)(D - (\lambda + \varepsilon))x = 0,$$

sappiamo che le soluzioni sono $e^{\lambda t}, e^{(\lambda + \varepsilon)t}$. L'equazione è lineare, quindi combinazione lineare di soluzioni è soluzione.

Se ora prendiamo $x_+ = \frac{1}{2}[e^{\lambda t} + e^{(\lambda + \varepsilon)t}]$ e $x_- = \frac{1}{2\varepsilon}[e^{\lambda t} - e^{(\lambda + \varepsilon)t}]$, nel limite di $\varepsilon \rightarrow 0$ troviamo la soluzione che col metodo "ingenuo" ci eravamo persi:

$$\begin{aligned}x_- &= \frac{1}{2\varepsilon}[e^{\lambda t} - e^{(\lambda + \varepsilon)t}] \\ &= \frac{1}{2}te^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Quando avete degenerazioni di ordini superiori, basta costruirsi le derivate discrete di ordine superiore (fatelo come esercizio). Si trova che nel caso in cui ci siano una radice abbia molteplicità k , sono soluzioni $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$. Notate che il numero totale di gradi di libertà della nostra soluzione è ancora n .

Mettendo insieme le soluzioni che abbiamo avuto da ogni radice, otteniamo n funzioni $x_1(t), \dots, x_n(t)$ (che chiameremo una base delle soluzioni dell'equazione). Come prima,

$$c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$$

Dunque, abbiamo descritto un metodo di risoluzione esaustivo per equazioni di questo tipo.

Esempio 3.2 (Oscillatore armonico) Consideriamo l'equazione $\ddot{x} + \omega^2x = 0$; il polinomio associato, $z^2 + \omega^2$, si annulla in $\pm i\omega$. Pertanto, dobbiamo cercare soluzioni della forma $ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$ che siano reali: questo implica che a e b siano coniugati, quindi $a = p + iq$, $b = p - iq$. Sostituendo otteniamo che

$$(p + iq)e^{i\omega t} + (p - iq)e^{-i\omega t} = p(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + iq(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = 2p \cos(\omega t) - 2q \sin(\omega t)$$

che volendo si può ricondurre alla forma $\alpha \cos(\omega t + \varphi)$ tramite identità trigonometriche. Notate che, se chiamiamo $c_1 = 2p$, $c_2 = -2q$, $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$ sono una base delle soluzioni dell'equazione, ma con coefficienti reali invece che complessi. In generale, ogni base può essere ricondotta a coefficienti reali con un ragionamento simile, sfruttando il fatto che una radice complessa e la sua coniugata compaiono sempre con la stessa molteplicità in un polinomio a coefficienti reali.

§ 3.3.5. **Caso non omogeneo.** — Consideriamo ora un'equazione della forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = f(t)$$

e osserviamo che, se $x(t), \tilde{x}(t)$ sono soluzioni, la loro differenza $x(t) - \tilde{x}(t)$ è soluzione dell'equazione ottenuta rimuovendo f (ossia esattamente quella omogenea trattata nel paragrafo precedente).

Pertanto, se supponiamo di conoscere una particolare soluzione $\tilde{x}(t)$, presa x_1, \dots, x_n base di soluzioni dell'omogenea, le altre soluzioni della non omogenea sono determinate da

$$\tilde{x}(t) + c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

Dunque la chiave diventa saper trovare una soluzione particolare. Vediamo due metodi:

§ 3.3.6. Metodo degli annihilatori. — Chiamiamo $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0$ il polinomio associato alla nostra equazione. Supponiamo che $f(t)$ sia soluzione di un'altra equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti e omogenea:

$$f^{(m)} + b_{m-1}f^{(m-1)} + \dots + b_1\dot{f} + b_0f = 0$$

e sia $q(z) = z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_1z + b_0$ il polinomio ad essa associato. Allora, possiamo cercare la soluzione particolare $\tilde{x}(t)$ tra le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $p(z)q(z)$, il prodotto dei due polinomi. Questo è vero perché, se interpretiamo il membro di sinistra di un'equazione differenziale a coefficienti costanti come una trasformazione che manda $x(t)$ in $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x$, la trasformazione associata al prodotto tra due polinomi è esattamente la composizione delle due trasformazioni. Se applichiamo la trasformazione $y(t) \rightarrow y^{(m)} + b_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + b_1\dot{y} + b_0y$ a entrambi i membri dell'equazione non omogenea, annulliamo (o annichiliamo, da cui il nome del metodo) la f , e al membro di sinistra abbiamo la trasformazione associata a $p(z)q(z)$. Ci siamo, pertanto, ricondotti a cercare tra le soluzioni di un'equazione omogenea (sebbene un po' più complicata), che sappiamo gestire perfettamente.

Esempio 3.3 (Oscillatore armonico forzato, versione 1) studiamo l'equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \alpha \cos(\omega_0 t)$$

Per quanto sappiamo sull'oscillatore armonico, sicuramente $\cos(\omega_0 t)$ è soluzione di $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, che è associata al polinomio $q(z) = z^2 + \omega_0^2$, mentre la nostra equazione iniziale è associata a $p(z) = z^2 + \omega^2$. Dobbiamo studiare l'equazione omogenea associata a $p(z)q(z) = (z^2 + \omega^2)(z^2 + \omega_0^2)$.

Se $\omega \neq \omega_0$, le radici sono $\pm i\omega$, $\pm i\omega_0$ e la soluzione particolare deve essere della forma

$$ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} + ce^{i\omega_0 t} + de^{-i\omega_0 t}$$

ma $ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$ è anche una soluzione dell'equazione omogenea, quindi non influisce: supponiamo $a = b = 0$. Affinché la soluzione sia reale, $c = p + iq$ e $d = p - iq$ devono essere coniugati; sostituendo abbiamo

$$ce^{i\omega_0 t} + de^{-i\omega_0 t} = 2p \cos(\omega_0 t) - 2q \sin(\omega_0 t)$$

Ora, imponiamo che sia soddisfatta l'equazione iniziale:

$$2p(\omega^2 \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)) - 2q(\omega^2 \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)) = \alpha \cos(\omega_0 t)$$

da cui è evidente che una soluzione si abbia per

$$p = \frac{\alpha}{2(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad q = 0$$

Se $\omega = \omega_0$, le radici sono $\pm i\omega$, entrambe con molteplicità due. La soluzione è della forma

$$ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} + cte^{i\omega t} + dte^{-i\omega t}$$

ma $ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$ è anche una soluzione dell'equazione omogenea, quindi non influisce: supponiamo $a = b = 0$. Affinché la soluzione sia reale, $c = p + iq$ e $d = p - iq$ devono essere coniugati; sostituendo abbiamo

$$cte^{i\omega t} + dte^{-i\omega t} = 2pt \cos(\omega t) - 2qt \sin(\omega t)$$

Ora, imponiamo che sia soddisfatta l'equazione iniziale

$$\begin{aligned} -4p\omega \sin(\omega t) - 4q\omega \cos(\omega t) - 2pt\omega^2 \cos(\omega t) + 2qt\omega^2 \sin(\omega t) + 2pt\omega^2 \cos(\omega t) - 2qt\omega^2 \sin(\omega t) = \\ -4p\omega \sin(\omega t) - 4q\omega \cos(\omega t) = \alpha \cos(\omega t) \end{aligned}$$

da cui è evidente che una soluzione si abbia per

$$p = 0 \quad q = -\frac{\alpha}{4\omega}$$

§ 3.3.7. Metodo di variazione delle costanti. — Per questo metodo ci occorre la base di soluzioni dell'equazione omogenea (ottenuta trascurando temporaneamente la f), che abbiamo trovato precedentemente: chiamiamola $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t)$$

dove i c_k che prima erano costanti ora sono funzioni del tempo. Non lo dimostreremo, ma la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)x_1(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n(t) = 0 \\ \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dots + \dot{c}_n(t)\dot{x}_n(t) = 0 \\ \dots \\ \dot{c}_1(t)x_1^{(n-2)}(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ \dot{c}_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

esiste e i $c_k(t)$ così ottenuti danno la soluzione particolare cercata.

Esempio 3.4 (Oscillatore armonico forzato, versione 2) torniamo all'equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \alpha \cos(\omega_0 t)$$

La base delle soluzioni dell'omogenea è $e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$; cerchiamo pertanto $a(t), b(t)$ tali che

$$\begin{cases} \dot{a}(t)e^{i\omega t} + \dot{b}(t)e^{-i\omega t} = 0 \\ i\omega \dot{a}(t)e^{i\omega t} - i\omega \dot{b}(t)e^{-i\omega t} = \alpha \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

Il sistema è risolto da

$$\dot{a}(t) = \frac{\alpha \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t}}{2i\omega} \quad \dot{b}(t) = -\frac{\alpha \cos(\omega_0 t) e^{i\omega t}}{2i\omega}$$

Da cui, separando i casi $\omega = \omega_0$ e $\omega \neq \omega_0$, si possono ottenere $a(t)$ e $b(t)$ integrando. Avendo già ricavato la soluzione in altro modo, lasciamo al lettore il compito di verificare che il risultato sia lo stesso anche con questo procedimento.

§ 3.3.8. Principio di sovrapposizione. — Per concludere questa parte di teoria, un fatto piuttosto semplice, che non merita di essere chiamato metodo risolutivo, ma comunque utile

abbastanza da valere la pena di una menzione. Consideriamo l'equazione

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = f(t) + g(t)$$

Per risolverla, ci occorre una soluzione particolare; è immediato verificare che, se $x(t)$ risolve

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = f(t)$$

e $y(t)$ risolve

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = g(t)$$

allora $x(t) + y(t)$ è una soluzione particolare della nostra equazione di partenza. In parole povere, possiamo scomporre la parte non omogenea come somma di funzioni più facili da trattare.

§ 3.3.9. Conclusione. — A conclusione di questa sezione, mi sembra doveroso un commento. Abbiamo esibito diversi metodi per individuare soluzioni particolari, soddisfacenti per la loro generalità ma anche abbastanza intricati (all'atto pratico, aiuterà il fatto che avrete quasi sempre $n = 1, 2$).

In genere alcuni trick che vengono comodi sono:

- ridefinire la variabile indipendente t e quella dipendente x per rimuovere tutte le costanti dimensionate;
- risolvere parti dell'equazione di partenza e massaggiare opportunamente la soluzione per ricondurre l'equazione di partenza a un caso noto.

Nella maggior parte dei casi, dopo aver risolto un po' di equazioni, vi accorgete che è possibile farsi un'idea della forma che avrà la soluzione particolare usando solo l'intuito e l'esperienza; in fin dei conti, le soluzioni particolari saranno abbastanza "simili" alla parte non omogenea da cui siete partiti.

SEZ. 4 — TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI —

Premetto che la prima volta che leggerete questo capitolo, ragionevolmente non ci capirete nulla, ma è giusto così: è un argomento difficile! Sbattendoci sopra la testa con calma e facendo gli esercizi sono sicuro che riuscirete a trarne molto profitto, tramite la Teoria delle Rappresentazioni potete bashare alcuni problemi molto difficili senza morire di conti!

4.1 Simmetrie

Diamo una una definizione intuitiva di gruppo di simmetria: se abbiamo un sistema S e chiamiamo V le possibili configurazioni di S , una **simmetria** di S è una trasformazione che manda configurazioni in V in altre configurazioni in V in modo reversibile. Un **gruppo di simmetria** di un sistema è l'insieme delle simmetrie di un sistema ed è chiuso sotto composizioni (cioè effettuare due simmetrie consecutivamente è come far agire una sola simmetria, che sta nel gruppo).

Per esempio: prendiamo una particella libera che si muove nello spazio. Al tempo $t = 0$ essa avrà una posizione \mathbf{x} e una velocità \mathbf{v} . L'insieme delle possibili configurazioni è quindi $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Traslare il sistema di \mathbf{a} vuol dire prendere la configurazione (\mathbf{x}, \mathbf{v}) e sostituirla con $(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{v})$. Questa trasformazione è chiaramente reversibile: l'un-do si ottiene traslando di $-\mathbf{a}$. Le traslazioni formano quindi un gruppo di simmetria del sistema.

Consideriamo ora le rotazioni: ruotare una configurazione significa ruotare sia la posizione sia le velocità. Se chiamiamo R la rotazione, $R\mathbf{a}$ è il vettore \mathbf{a} ruotato secondo la rotazione R . Chiaramente, una volta ruotato un oggetto, possiamo fare la rotazione inversa, quindi le rotazioni formano un gruppo.

Se invece consideriamo la trasformazione che sposta la particella nel punto \mathbf{y} , a prescindere dalla posizione di partenza, quindi la trasformazione

$$T : (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{y}, \mathbf{v}),$$

notiamo che essa non può essere invertita: una volta spostata la particella nel punto \mathbf{y} , non sappiamo risalire alla sua posizione prima della trasformazione. In questo caso quindi l'insieme delle trasformazioni **non** forma un gruppo.

§ 4.1.1. **Abelianità.** — Se, in un gruppo di simmetria, l'ordine con cui svolgiamo le operazioni non è importante, il gruppo è **abeliano**.

Per esempio le traslazioni formano un gruppo abeliano: chiamiamo $T_{\mathbf{a}}\mathbf{x}$ il vettore \mathbf{x} traslato del vettore \mathbf{a} . Traslare \mathbf{x} prima di \mathbf{a} e poi di \mathbf{b} ci porta al vettore $T_{\mathbf{b}}T_{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{b}$, che è uguale al vettore $T_{\mathbf{a}}T_{\mathbf{b}}\mathbf{x}$ che si ottiene traslando prima di \mathbf{b} e poi di \mathbf{a} . Si dice in questo caso che le trasformazioni $T_{\mathbf{a}}$, $T_{\mathbf{b}}$ **commutano**.

Invece le rotazioni (in più di 2 dimensioni) **non** formano un gruppo abeliano; facciamo un esempio: chiamiamo R_z la rotazione di 90° attorno all'asse \hat{z} , R_x la rotazione di 90° attorno all'asse \hat{x} . Consideriamo $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$. $R_x R_z \mathbf{x} = (0, 0, 1)$, mentre $R_z R_x \mathbf{x} = (0, 1, 0)$: come potete vedere in fig. 5 l'ordine in cui componiamo le rotazioni conta eccome! In questo caso quindi si dice che le rotazioni non commutano, ovvero il gruppo delle rotazioni non è abeliano.

4.2 Rappresentazioni

Abbiamo introdotto tanta terminologia. È arrivato il momento di metterla in pratica e sporcarci le mani. Per farlo, ci serve un'ultimo strumento, che ci apprestiamo a fornire.

Quando un gruppo di simmetria agisce su (cioè trasforma) uno spazio vettoriale *in modo lineare*, abbiamo una **rappresentazione**.

L'ipotesi di linearità **non** discende banalmente dal fatto che lavoriamo su uno spazio vettoriale:

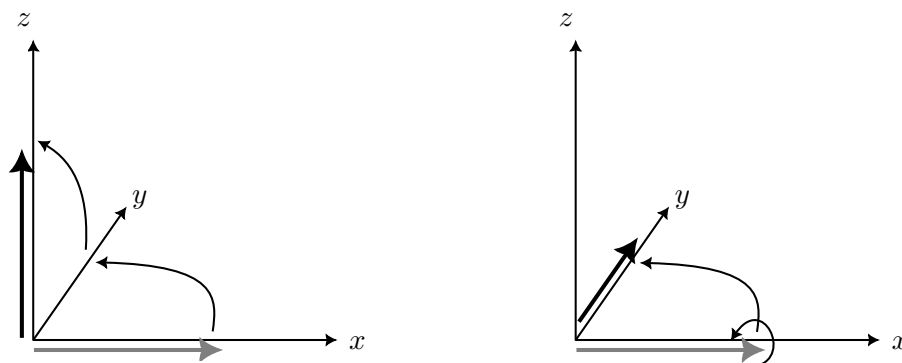


Figura 5: Il gruppo delle rotazioni in $D \geq 3$ è non commutativo.

- il gruppo delle rotazioni per esempio induce una rappresentazione nello spazio dei vettori, perché “il ruotato della somma è la somma dei ruotati”, quindi l’azione del gruppo di simmetria è lineare:

$$R(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = R\mathbf{x} + R\mathbf{y};$$

- invece il gruppo delle traslazioni **non** induce una rappresentazione:

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{a} \neq T_{\mathbf{a}}\mathbf{x} + T_{\mathbf{a}}\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + 2\mathbf{a}!$$

A lezione, vedremo solo il caso di rappresentazioni abeliane (ovvero rappresentazioni il cui gruppo di simmetria è abeliano), ma di questo concetto esiste una generalizzazione a qualsiasi gruppo, come potrete trovare negli esercizi.

Le rappresentazioni abeliane hanno una proprietà importantissima: hanno solo rappresentazioni irriducibili monodimensionali (questo è un corollario del Lemma di Schur, prendetelo come un fatto, non è assolutamente ovvio).

Detto in termini più civili, se prendete una rappresentazione, potete scomporre lo spazio vettoriale in pezzi semplici che non si mischiano tra di loro sotto l’azione della simmetria. Se la rappresentazione è abeliana, questi pezzi hanno dimensione uno, quindi tutti gli elementi del vostro sottospazio vettoriale sono proporzionali tra loro. In questo sottospazio, quindi, l’azione del gruppo è semplicemente moltiplicare il vostro elemento per un numero che dipende solo dalla trasformazione.

Vediamo un caso concreto per chiarire un po’ le idee.

Esempio 4.1 (Contatto termico 1) Prendiamo due oggetti con capacità termica C , inizialmente ($t = 0$) preparati con temperature T_1, T_2 . Supponiamo che siano collegati tramite un condotto di conducibilità termica globale κ . Il nostro obiettivo è trovare gli andamenti delle temperature $T_1(t), T_2(t)$ nel tempo.

Beh, la matematica su oggetti termodinamici non può dirci nulla, quindi richiamiamo per un secondo la fisica, scriviamo le equazioni del sistema e dopo la matematica ci dirà come risolverle.

Otteniamo un sistema di due equazioni differenziali:

$$\begin{cases} C\dot{T}_1 = \kappa(T_2 - T_1) \\ C\dot{T}_2 = \kappa(T_1 - T_2) \end{cases}$$

Facciamo ora qualche considerazione:

1. il sistema è **lineare**! Se ci dimentichiamo per un attimo delle condizioni iniziali, somma di soluzioni è soluzione;
2. il sistema ha una **simmetria**: scambiando il corpo 1 col corpo 2, le equazioni del sistema restano invariate (questa simmetria è chiamata dai fisici \mathbb{Z}_2); inoltre abbiamo pure simmetria per traslazioni temporali: immaginando di fare questo esperimento ora o tra cinque minuti, non cambia l'evoluzione dinamica del sistema; questa simmetria è chiamata \mathbb{R} ;
3. queste due simmetrie sono **abeliane**, ve ne potete convincere tranquillamente da soli. Inoltre commutano tra loro, ossia prima invertire i due corpi e poi aspettare cinque minuti o prima aspettare cinque minuti e poi invertire i corpi sono due diverse sequenze di operazioni che giungono allo stesso risultato.

Lo spazio delle soluzioni si “spezza” quindi in un po’ di sottospazi semplici che non si parlano tra loro. La soluzione, con le corrette condizioni iniziali, sarà data da un’opportuna sovrapposizione delle soluzioni semplici.

Più nel dettaglio, il gruppo di simmetria contiene due elementi:

$$\mathbb{Z}_2 = \{\text{“Non fare niente”}, \text{“Scambia 1 e 2”}\},$$

che per brevità chiameremo

- $e = \text{“Non fare niente”}$;
- $s = \text{“Scambia 1 e 2”}$.

Sulle “soluzioni semplici”, applicare queste trasformazioni equivale a moltiplicare per un numero che dipende solamente dalle trasformazioni stesse (perché la rappresentazione è abeliana, è il risultato magico enunciato prima): si tratta ora di

1. capire quali sono i numeri possibili;
2. capire quali sono le soluzioni possibili.

Partiamo dal punto più semplice, il primo.

- Per quanto riguarda e è facile: non fare niente non cambia il sistema, quindi dobbiamo avere l’identificazione $e \leftrightarrow 1$;
- su s dobbiamo avere qualche accortezza in più: a priori, s potrebbe essere associato a qualsiasi numero. Tuttavia, applicare due volte s ci riporta allo stato di partenza, ossia applicare due volte s è come non fare nulla: $s \cdot s = e$. Questo vincolo passa ai numeri associati a e, s . Se chiamiamo λ_s il numero associato alla trasformazione s , otteniamo quindi $\lambda_s^2 = 1$, ossia $\lambda_s = \pm 1$.

Finalmente possiamo trovare le soluzioni semplici. A $(\lambda_e, \lambda_s) = (1, 1)$ corrisponde una configurazione che sotto scambio di 1 e 2 resta uguale. Stiamo chiaramente parlando della configurazione $(T_1, T_2) = (1, 1)$ (o suo opportuno multiplo). Più esplicitamente, a meno di riscaldamenti, $(T_1, T_2) = (1, a)$. Vogliamo che $(1, a) = (a, 1)$ da cui discende $a = 1$.

Invece a $(\lambda_e, \lambda_s) = (1, -1)$ è associata una configurazione che sotto scambio, cambia segno. Si tratta quindi di $(T_1, T_2) = (1, -1)$. Parafrasando quanto detto fin qui in termini fisici:

- la generica soluzione del sistema si scrive come sovrapposizione lineare di due “modi normali”, ovvero due soluzioni indipendenti che, nell’evoluzione temporale, non si mischiano tra loro;
- uno dei due modi è simmetrico, l’altro è antisimmetrico;

e queste considerazioni discendono **solo** dalla linearità e dalla simmetria del sistema.

Fin qui abbiamo trovato solo i valori al tempo $t = 0$ dei modi normali. Si tratta ora di scoprire l’evoluzione temporale.

Per far questo, possiamo riattivare la macchina della teoria delle rappresentazioni: infatti “muovere il sistema avanti o indietro nel tempo”, è una **simmetria abeliana** che **agisce in modo lineare sul sistema!** Sappiamo quindi che andare avanti o indietro nel tempo, sui nostri modi normali non può che farli evolvere moltiplicandoli semplicemente per un numero che dipende solo dalla trasformazione (e quindi dal tempo t di cui “spostiamo nel tempo” i sistema) e dal modo normale considerato.

La composizione di due traslazioni temporali T_{t_i} è abeliana:

$$T_{t_1} T_{t_2} = T_{t_1+t_2},$$

questa composizione deve passare, come prima, ai numeri associati alle trasformazioni T_t sul singolo modo normale. Non ci sono molti modi di realizzare questa cosa: deve essere

$$\lambda_{T_t} = e^{\eta t},$$

con η che dipende dal modo normale dev’essere trovato dalle equazioni fisiche in gioco. Per il modo simmetrico si trova $\eta = 0$, per quello antisimmetrico $\eta = -\frac{2\kappa}{C}$.

La generica soluzione è quindi

$$(T_1, T_2) = T_+(1, 1) + T_-(1, -1) \exp\left[-\frac{2\kappa}{C} t\right],$$

con T_+, T_- opportune costanti per fissare le condizioni iniziali.

Lavorando con solo due corpi in contatto termico, il metodo brute-force di scrivere le equazioni, disaccoppiarle e risolverle a mano è certamente un metodo valido e fattibile.

Se voleste fare lo stesso esercizio con N corpi disposti in cerchio, i conti sarebbero molto più tedious.

Invece, grazie alla Teoria delle Rappresentazioni, ci basta scomporre in modi normali (che sappiamo, dai ragionamenti fatti prima, essere proporzionali a

$$(e^{2\pi i \cdot 1/N}, e^{2\pi i \cdot 2/N}, \dots, e^{2\pi i \cdot N/N}),$$

per la simmetria di rotazione) e trovare con quali esponenziali evolvono i singoli modi normali.

§ 4.2.1. Rappresentazioni riducibili e irriducibili. — Diamo nomi alle cose. Abbiamo visto che lo spazio vettoriale si “spezza” in sottospazi, che formano sottorappresentazioni. Chiamiamo **irriducibile** una rappresentazione che non ha sottorappresentazioni non banali (cioè se stessa e quella nulla, in cui lo spazio vettoriale è l’insieme $\{0\}$). Spesso si abbrevia rappresentazione irriducibile in irrep.

Una rappresentazione riducibile è una rappresentazione non irriducibile.

C’è una sottigliezza: si potrebbe pensare che una generica rappresentazione riducibile si spezzi sempre in irriducibili; questo però non è vero: vediamo un esempio.

Esempio 4.2 (Rappresentazione non completamente riducibile) Prendiamo l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = 0$$

e approcciamola con le simmetrie. L'equazione è simmetrica sotto traslazioni: se $y(x)$ è soluzione, pure $y(x - a)$ lo è.

Le rappresentazioni irriducibili sappiamo come trovarle: sono della forma $y = e^{\kappa x}$ e questo ci porterà al vincolo $\kappa = 1$. Sappiamo però che quest'equazione è di second'ordine, quindi deve avere un'altra soluzione, che abbiamo trovato nel capitolo precedente: si tratta di xe^{-x} .

Diamo un occhio a cosa succede alle soluzioni sotto la simmetria di traslazione. Traslando di a ,

$$\begin{cases} xe^{-x} & \mapsto e^a(xe^{-x}) - ae^a(e^{-x}) \\ e^{-x} & \mapsto e^a(e^{-x}). \end{cases}$$

La soluzione ingenua resta in sé stessa, quindi lo spazio che contiene solo le soluzioni ingenue vive in una rappresentazione irriducibile.

Viceversa, le soluzioni nascoste, da sole, non formano una rappresentazione, perché sotto la trasformazione otteniamo un contributo che esce dal set delle sole soluzioni nascoste. Se vogliamo costruire una rappresentazione che contiene le soluzioni nascoste, dobbiamo includere anche quelle banali. Ma questa rappresentazione ha un sottospazio invariante sotto l'azione della simmetria (le sole soluzioni banali), quindi questo è un caso di **rappresentazione non completamente riducibile**.

Un teorema garantisce che le rappresentazioni sono completamente riducibili se il gruppo di simmetria è compatto (condizione sempre vera con i gruppi finiti, per esempio \mathbb{Z}_2).

§ 4.2.2. Conclusioni. — Avrete certamente sentito parlare dei modi normali in meccanica: essi sono le irreps sotto la simmetria abeliana di traslazione temporale.

Avrete certamente sentito parlare della Trasformata di Fourier: un generico segnale, sotto opportune condizioni di regolarità e convergenza, si scompone in onde piane. Questo non è altro che una conseguenza della simmetria abeliana di traslazione nello spazio.

TL;DR quando si hanno simmetrie abeliane, vanno usati i modi normali.

— ESERCIZI —

★★★★★ **Esercizio 1 Superfici di rotazione** Molte superfici di rotazione possono essere descritte in coordinate cilindriche come $\{(f(z), \theta, z) \text{ t.c. } \theta \in [0, 2\pi], z \in I\}$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $f : I \rightarrow [0, \infty)$ è una funzione non negativa e derivabile. Date una formula per l'elemento infinitesimo di superficie.

★★☆☆☆ **Esercizio 2 Superficie e volume di un toro** Il toro è il solido che si ottiene facendo ruotare un cerchio rispetto a un asse ad esso complanare (e che non lo intersechi). Determinate il numero minimo di parametri necessari per identificare una tale figura e calcolate volume e superficie laterale in funzione di essi. Come potete interpretare i risultati?

★★★☆☆ **Esercizio 3 Momenti d'inerzia** Un'applicazione classica dei concetti di integrazione che abbiamo introdotto alla fisica è il calcolo dei momenti d'inerzia. Data una distribuzione di massa e un'asse di rotazione, definiamo il momento d'inerzia della distribuzione rispetto all'asse come $I = \int r^2 dm$ dove r indica la distanza dall'asse di rotazione e dm è l'elemento infinitesimo di massa (diventerà σdS quando avremo densità superficiali e ρdV quando avremo densità volumiche). Calcolate prima i momenti d'inerzia dei seguenti solidi, su cui è stata posta una densità volumica di massa ρ :

- Un cilindro rispetto al suo asse
- Un cono rispetto al suo asse
- Una sfera rispetto a qualunque asse passante per il centro
- Un parallelepipedo, rispetto agli assi che congiungono i centri di facce opposte
- Un toro rispetto al suo asse

Ora supponete di avere invece una densità superficiale di massa σ

- Un cerchio rispetto al suo asse
- Un cerchio rispetto a un asse ad esso complanare e passante per il centro
- Un quadrato rispetto all'asse ortogonale che passa per il centro
- La superficie di una sfera rispetto a qualunque asse passante per il centro
- La superficie di un cono rispetto al suo asse
- La superficie di un toro rispetto al suo asse

★★☆☆☆ **Esercizio 4 Campo indivergente e irrotazionale** Date un esempio di campo vettoriale definito su \mathbb{R}^3 non nullo, che abbia rotore e divergenza entrambi nulli.

★★★★☆ **Esercizio 5 Nabla-calcolo** Data $V \subseteq \mathbb{R}^3$ una regione e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo il suo laplaciano $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Se $\mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di componenti (F_x, F_y, F_z) , definiamo il suo laplaciano come il vettore $\Delta \mathbf{F} = (\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z)$.

- Mostrate che $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$
- Mostrate che $\nabla \times (\nabla f) = 0$

- Mostrate che $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- Mostrate che $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$
- Mostrate che $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$

★★★★☆ **Esercizio 6 Esistenza del potenziale vettore** Sia $Q = (a, b) \times (c, d) \times (e, f) \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{F} : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale a divergenza nulla.

1. Mostrate che esiste $\mathbf{G} : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$. (Non è assolutamente un esercizio facile. Potete semplificarvi la vita notando che \mathbf{G} è lontanissimo dall'essere unico, quindi è ragionevole che si possa cercare \mathbf{G} con ipotesi aggiuntive particolarmente comode. Provate a supporre $G_x = 0$ e alcune componenti si potranno ricavare esplicitamente integrando.)
2. Mostrate che sommando a \mathbf{G} il gradiente di una funzione scalare si ottiene ancora un potenziale vettore di \mathbf{F} ; mostrate anche che, se \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 sono potenziali vettore di \mathbf{F} , $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2$ è il gradiente di una funzione scalare.

★★★★☆ **Esercizio 7 Campi solenoidali** Data $V \subseteq \mathbb{R}^3$ una regione e $\mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vettoriale, diciamo che \mathbf{F} è solenoidale se ha flusso nullo attraverso ogni superficie chiusa contenuta in V .

1. Mostrate che un campo solenoidale ha divergenza nulla
2. Mostrate che se $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ per qualche campo vettoriale \mathbf{G} , allora è solenoidale
3. Esibite un campo indivergente ma non solenoidale (hint: provate con $V = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$)
4. Date un controesempio all'esercizio precedente nel caso in cui V non è un parallelepipedo

★★☆☆☆ **Esercizio 8 Un po' di campi** Per ciascuno di questi campi vettoriali, discutere per quali valori di α sono irrotazionali (e in tal caso determinare il potenziale, se esiste) e per quali valori di α sono indivergenti (e in tal caso determinare il potenziale vettore, se esiste).

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\alpha x z + \frac{y z}{x}, z \log x - \frac{\alpha^2}{2} y \log z, x^\alpha + y \log x - \frac{y^2}{z} \right) \quad V = \{x > 0, z > 0\}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\alpha x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 9x, \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \alpha^2 y, \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 5z \right) \quad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(y^\alpha \log(x^2 + y^2), yz - \alpha x \log(x^2 + y^2), -\frac{\alpha}{2} z^2 \right) \quad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$$

★★★★★ **Esercizio 9 Campo irrotazionale ma non conservativo** Considerate il campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ introdotto nella sezione 2.5; verificate esplicitamente che è irrotazionale ma non conservativo. Mostrate anche che è indivergente, dite se ammette un potenziale vettore e in tal caso calcolatelo. Alcune di queste verifiche potevano essere omesse notando che è un campo proveniente dalla fisica: in che contesto potreste trovare un campo del genere?

★★★☆☆ **Esercizio 10 Tra campi e ODE** Trovate tutte le funzioni $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che rendono irrotazionale il campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\varphi(y)}{x^2 + y^2}, -\frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

per tutte le tali φ , calcolate un potenziale, se esiste.

★★★★★ **Esercizio 11 Baffo di Peano** Mostrate che

$$\begin{cases} \dot{x} = x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

non ha soluzione unica (questo è dovuto alla non derivabilità di $x^{\frac{2}{3}}$ in zero).

★★★☆☆ **Esercizio 12 Un po' di equazioni del prim'ordine** Risolvete

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 + 1)e^{-t} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = (x - 1)(x - 2) \\ x(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \tan(t) + 3 \sin(t) \\ x(\pi) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{t} - \sqrt{2-t} \\ x(1) = 4 \end{cases}$$

★★★☆☆ **Esercizio 13 Soluzione con sviluppo in serie** Considerate

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 + tx \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Perchè i metodi standard di soluzione visti a lezione falliscono? Potete però trovare lo sviluppo di Taylor della soluzione, scrivendo sia x sia \dot{x} come serie di potenze. Fate lo stesso con

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t^2) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

★★☆☆☆☆ **Esercizio 14 Equazioni di Bernoulli** Sia $\alpha \neq 0, 1$: trovate una funzione ausiliaria che permetta di ricondurre l'equazione

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)[x(t)]^\alpha$$

a un caso trattabile con gli strumenti visti a lezione.

★★★★★ **Esercizio 15 Moto di un punto materiale su una retta** Cercate una manipolazione che porti l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) = e^{x(t)}$$

in un caso trattabile con gli strumenti visti a lezione (senza risolverla). Ora consideriamo un punto materiale di massa m che si muove su una retta soggetto solo alla forza $F(x) = -\frac{d}{dx}V(x)$: scrivete l'equazione del moto e applicate la manipolazione vista sopra. Cosa succede?

★★★☆☆ **Esercizio 16 Un po' di equazioni lineari** Trovate tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = te^t$$

$$\ddot{x} + 9\dot{x} = t \cos(3t)$$

$$\ddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = e^t - 1$$

$$\ddot{x} - \ddot{x} + 4\dot{x} - 4x = te^t + \sin(2t)$$

$$\ddot{x} - 4\ddot{x} + 4\dot{x} = t^2 + e^{2t}$$

★★☆☆☆☆ **Esercizio 17 Metodo di variazione delle costanti** Continuando a dare per buona l'esistenza delle soluzioni del sistema che abbiamo usato nella sezione 3.3.4, mostrate che esse portano effettivamente a una soluzione particolare.

★★★★☆☆ **Esercizio 18 Oscillatore smorzato**

1. Studiate l'equazione $\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = 0$, detta dell'oscillatore smorzato perché include un termine dovuto all'attrito viscoso, e quindi proporzionale alla velocità ($k > 0$). Dovrete distinguere tre casi: descrivete ciascuno di essi separatamente.
2. Se introduciamo una forzante αt^5 , com'è fatta la soluzione particolare?
3. Se introduciamo una forzante $\alpha \cos(\omega_0 t)$, com'è fatta la soluzione particolare?

★★★★☆☆ **Esercizio 19 Corda che oscilla** Questo esercizio è guidato ma difficile, seppur molto istruttivo.

Appendiamo una corda con densità lineare λ e lunghezza L al soffitto, in presenza di un campo di gravità costante. La corda si può muovere solo su un piano verticale. Prendiamo un set di

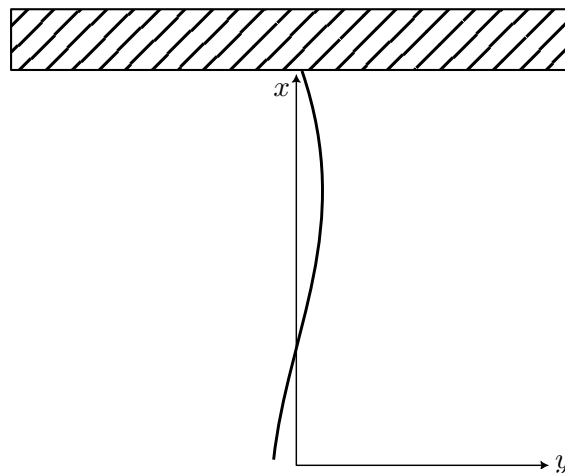


Figura 6: Set di coordinate del problema “Corda che oscilla”.

coordinate come in figura 6. Indichiamo con $y(x)$ l'ascissa della corda all'altezza x . Vogliamo descrivere le piccole oscillazioni della corda.

1. Trovare la tensione T della corda al variare di x .
Hint: per le piccole oscillazioni, basta trovare la tensione $T(x)$ quando la corda è ferma e all'equilibrio.

2. Verificare che l'equazione che regola il moto della corda è

$$\partial_t^2 y = g \partial_x [x \partial_x y] = g x \partial_x^2 y + g \partial_x y$$

3. Ci restringiamo ora al caso dei modi normali (onde stazionarie):

$$y(x, t) = e^{\pm i\omega t} X(x)$$

Ci servono due boundary conditions: una è $y(L) = 0$; a $x = 0$ si può trovare nel seguente modo:

- per il modo fondamentale (quello con frequenza più bassa), la corda può essere approssimata come un'asta rigida. Trovare il periodo in questo caso.
- Il modo con la $(k + 1)$ -esima frequenza più bassa, analogamente a quanto succede per la corda tesa, ha k nodi, ovvero punti interni alla corda in cui $y(x, t) = 0$ (questo è un fatto molto generale). Cercate di ricondurvi al caso precedente.

4. Abbiamo un'approssimazione per la parte libera della corda. Occorre ora trovare una soluzione approssimata per $x \rightarrow L$. Per fare questo introduciamo l'**approssimazione WKBJ**: se la tensione della corda fosse costante, la forma dell'onda stazionaria sarebbe $y(x) = y_0 e^{i\phi(x,t)} = y_0 e^{-i(\omega t - kx)}$, dove

$$k = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{T}} \omega = \frac{d\phi}{dx}$$

Ci aspettiamo quindi che una buona approssimazione della soluzione sia

$$X(x) \simeq A(x) e^{i \int^x d\phi} = A(x) e^{\pm i\omega \int^x \sqrt{\lambda/T(x')} dx'}$$

dove $A(x)$ è una funzione **lentamente variabile** da x . Trovare un'equazione approssimata e risolverla per $A(x)$.

Hint: per un fisico, se $f(x)$ è dispari, anche se diverge, per esempio nel caso $f(x) = 1/x$, vale $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0$. Se però lavorate con esponenziali complessi, di questa martellata non ne avrete bisogno.

Hint: stiamo lavorando con “ x molto grande”.

Generalizzazione: formalmente questa approssimazione può essere trovata a tutti gli ordini nel seguente modo: si pone $y = e^{iS(x)/s}$, dove s è una costante piccola (questo è solo un cambio di variabile: si può sempre fare!). L'equazione diventa quindi

$$-\omega^2 e^{iS/s} = gx [iS''/s - (S'/s)^2] e^{iS/s} + gS'/s e^{iS/s}$$

Se s è stato scelto piccolo, $1/s^2 \gg 1/s$, quindi trascuriamo i termini in $1/s$. Chiamiamo $S(x) = S^{(0)} + S^{(1)} + \dots$, dove l'apice indica l'ordine dell'approssimazione in $1/s$ a cui siamo arrivati. $S^{(0)}$ è quindi la soluzione di

$$\omega^2 = gx (S'/s)^2$$

Notate che, a quest'ordine, ritroviamo solo l'esponenziale guessato prima. Per trovare la variazione dell'ampiezza, bisogna andare all'ordine successivo. Verificate che con questo metodo si arriva allo stesso risultato trovato precedentemente.

5. In questa approssimazione, con questa notazione, calcolare $\phi(L) - \phi(0)$ per il k -esimo modo normale.

Hint: notate che $\sqrt{6} \approx \frac{3\pi}{4}$. Ricavare quindi le condizioni al bordo per ϕ per ogni modo normale.

Ricapitoliamo quello che abbiamo fatto fin ora:

- abbiamo trovato l'andamento asintotico della soluzione per x grande;
 - per x piccolo, le approssimazioni introdotte per WKB si rompono a causa del fatto che la derivata seconda è soppressa da un fattore x . Abbiamo fatto ricorso dunque a un'altra soluzione approssimata in questo regime, quella di asta rigida;
 - per x né troppo grande, né troppo piccolo, devono valere entrambe le approssimazioni. Abbiamo quindi imposto una **condizione di raccordo** delle due soluzioni approssimate, che ci permette di trovare facilmente tutte le frequenze di ogni modo normale.
6. Cerchiamo ora invece una soluzione esatta. Purtroppo non ne esiste una esprimibile in termine di sole funzioni elementari. Dimostrare che, sotto opportuni cambi di variabile, l'equazione del moto si riduce per qualche ν all'**equazione di Bessel**:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

dove $\nu \in \mathbb{C}$ è detto ordine dell'equazione. La funzione che soddisfa questa equazione e ha le corrette condizioni al bordo si chiama **funzione $J_\nu(x)$ di Bessel**. Ricavare, dal risultato approssimato dei modi normali trovato prima, l'espansione attorno a $x = +\infty$ della J_0 al primo ordine non banale in $1/x$.

★★☆☆☆ **Esercizio 20 Oscillatore armonico quantistico** Questo esercizio è guidato ma difficile, seppur molto istruttivo.

Per trovare l'energia E_i dell' i -esimo livello che un oscillatore armonico quantistico può avere, bisogna risolvere la seguente equazione differenziale (non chiedetevi perché, è un fatto):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi(x) + \frac{\omega^2}{2} x^2 \psi(x) = E_i \psi(x)$$

con $\psi(x)$ che tende a zero per $x \rightarrow \infty$.

1. Trovare con quali sostituzioni si riescono a eliminare le costanti dimensionali. In particolare, si vuole arrivare all'equazione

$$-\eta''(\xi) + \xi^2 \eta(\xi) = \epsilon_i \eta(\xi)$$

2. Notare che l'equazione è simmetrica per $\xi \mapsto -\xi$. Cosa si può dire quindi sulle soluzioni?
3. Per quanto notato al punto precedente, basta risolvere l'equazione per $\xi > 0$. Risolvere approssimativamente l'equazione sopra per $\xi \rightarrow +\infty$. Per farlo, vi lascio una traccia del modo più istruttivo per trovare la risposta:

- per $\xi \gg \sqrt{\epsilon}$, il RHS si può trascurare;
- per $\xi \simeq \text{const.}$ l'equazione assomiglia a $-\eta'' + \text{const.} \cdot \eta = 0$. La soluzione è $\eta \simeq e^{\pm \text{const.} \cdot \xi}$.
- Trovare le varie costanti disseminate qua e là, sfruttando l'approssimazione WKB.

4. Ora si tratta di recuperare i termini che abbiamo ucciso con le approssimazioni. Per farlo scrivere

$$\eta = e^{-\text{const.} \cdot \xi} \sum_{k=0}^N c_k \xi^k$$

e trovare quali condizioni dobbiamo imporre sui coefficienti c_n affinché l'ansatz soddisfi l'equazione differenziale.

5. Cosa succede se, per risolvere l'ODE prendiamo infiniti coefficienti c_n non nulli? Può tornare utile la formula

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

6. Che vincolo dobbiamo imporre per avere solo finiti termini nella sommatoria?

★★★★★ **Esercizio 21** \mathbb{Z}_3 Si prendano tre particelle di massa m vincolate a muoversi su una circonferenza. Poi, tramite molle che seguono il cerchio con costante elastica k , come in figura 7, si legano le tre masse. Trovare, tramite la teoria delle rappresentazioni, i modi normali.

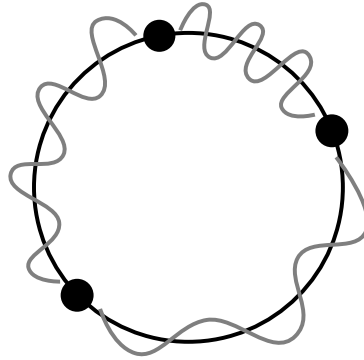


Figura 7: Figura del problema \mathbb{Z}_3

★★★★★ **Esercizio 22 Quadrati di resistenze** Facendo riferimento alla figura 8, per ogni coppia di punti nel circuito, determinare la resistenza equivalente. Si determini la corrente che scorre in ogni resistore, in ciascun caso.

Tutti i segmenti rappresentano resistori di resistenza R .

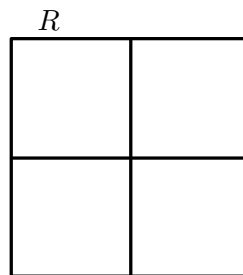


Figura 8: Setup del problema “Quadrati di resistenze”.

★★★☆☆ **Esercizio 23 Un cubo termico** Prendiamo un cubo e su ciascuna delle sei facce scriviamo un numero. Ogni secondo che passa, sostituiamo il numero su ciascuna faccia con la media dei numeri scritti sulle quattro facce adiacenti a quella, al secondo precedente.

Determinare i modi normali, ossia le configurazioni v che, dopo n secondi sono della forma $e^{\lambda n} v$. *Hint*: il gruppo di simmetria del cubo si chiama S^4 . In questo caso, vi basta prendere il gruppo \mathbb{Z}_4 formato dalle rotazioni attorno a un asse fissato.

Notate che λ ha delle degenerazioni (più irreps evolvono con e^λ con lo stesso λ): questo deriva dal fatto che ci siamo persi parte della simmetria passando a \mathbb{Z}_4 . Quando all'Uni vedrete Meccanica Quantistica, vi accorgete che, a meno che non ci siano “simmetrie a proteggere la degenerazione”, le degenerazioni non ci sono.

★★★☆☆ **Esercizio 24 Spirale di resistenze** Trovare la resistenza equivalente tra A e B in figura 9. Tutti i segmenti rappresentano resistori di resistenza R .

Vi troverete un'equazione polinomiale di terzo grado. Supponetene note le soluzioni.

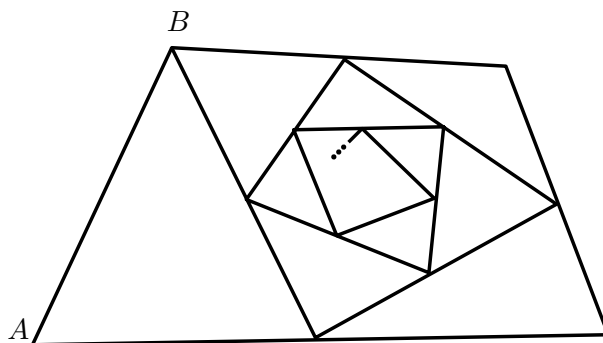


Figura 9: Una spirale di resistenze.

★★★☆☆ **Esercizio 25 Evviva la resistenza!** Come avrete intuito, ci piacciono le resistenze. Per questo, abbiamo deciso di riempirci un intero piano! Determinare la resistenza equivalente tra A e B , tra A e C e tra A e D , riferito alla figura 10.

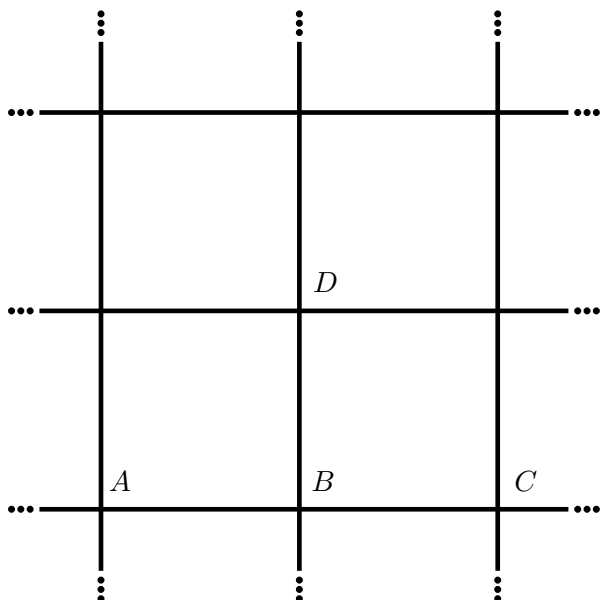


Figura 10: Un piano di resistenze.

Hint: può essere utile usare il fatto che la funzione ad argomenti interi

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

può essere scritta come

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iqk} dq$$