

# Matematica Base

Giovanni Marzenta\*, Lorenzo Bastioni†

3 febbraio 2025

## Sommario

La lezione è un'introduzione agli strumenti matematici necessari alla soluzione dei problemi di fisica. In particolare, dopo un ripasso sul prodotto scalare e sul prodotto vettore, si tratteranno lo sviluppo in serie di Taylor e le approssimazioni all' $n$ -esimo ordine, passando successivamente al calcolo differenziale in più variabili. Nella seconda parte della lezione si studieranno invece gli integrali, vedendo varie tecniche di calcolo per gli stessi. Si affronteranno infine le equazioni alle derivate ordinarie (ODE), in particolare quelle a variabili separabili, quelle lineari a coefficienti costanti e quelle degli oscillatori armonici. Non saremo molto formali, dato che l'obiettivo è solo quello di fornire gli strumenti per affrontare i problemi delle Olifis.

---

\*giovanni.marzenta@sns.it

†lorenzo.bastioni@sns.it

# — INDICE —

---

<b>1</b>	<b>Vettori</b>	<b>5</b>
1.1	Cos'è un vettore? . . . . .	5
1.2	Prodotto scalare . . . . .	6
1.3	Determinante . . . . .	7
1.3.1	Regola di Sarrus . . . . .	9
1.3.2	Regola di Laplace . . . . .	9
1.4	Prodotto vettore . . . . .	10
1.5	Prodotto misto . . . . .	11
1.5.1	Modulo e orientazione . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Espansione di Taylor</b>	<b>14</b>
2.1	$o$ -piccolo . . . . .	14
2.1.1	Definizione . . . . .	14
2.1.2	Esempi . . . . .	14
2.1.3	Osservazione . . . . .	14
2.1.4	Proposizione . . . . .	14
2.2	Polinomi di Taylor . . . . .	15
2.2.1	Teorema . . . . .	15
2.2.2	Osservazione . . . . .	16
2.2.3	Osservazione . . . . .	16
2.2.4	Alcuni esempi più o meno frequenti . . . . .	16
2.2.5	Osservazione . . . . .	16
2.2.6	Esempio . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Calcolo Multivariabile</b>	<b>18</b>
3.1	Gradiente di una funzione scalare . . . . .	18
3.2	Derivata di una curva . . . . .	21
3.2.1	Il vettore velocità . . . . .	22
3.2.2	La velocità scalare . . . . .	22
3.2.3	Guardare componente per componente . . . . .	22
3.2.4	Risultati . . . . .	22
3.3	Chain Rule . . . . .	23
3.4	Caso generale . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Complessi</b>	<b>25</b>
4.1	Somma di complessi . . . . .	25
4.2	Prodotto di complessi . . . . .	25
4.2.1	Notazione polare . . . . .	26
4.2.2	Notazione esponenziale . . . . .	26
4.2.3	Formula di De Moivre . . . . .	27
4.3	Il coniugio . . . . .	27
4.3.1	Inverso di un numero complesso . . . . .	28
4.4	Trasformazioni nel piano di Gauss . . . . .	28
4.4.1	Traslazioni . . . . .	28
4.4.2	Rotazioni . . . . .	28

4.4.3	Simmetrie . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Integrali</b>	<b>30</b>
5.1	Integrale indefinito . . . . .	30
5.2	Integrale definito . . . . .	30
5.3	Calcolo degli integrali . . . . .	31
5.3.1	Calcolo degli integrali definiti . . . . .	31
5.3.2	Linearità dell'integrale indefinito . . . . .	32
5.3.3	Integrali di potenze ed esponenziali . . . . .	32
5.3.4	Integrale di $1/x$ . . . . .	32
5.3.5	Integrali di funzioni trigonometriche . . . . .	33
5.3.6	Integrazione per parti . . . . .	33
5.3.7	Integrali di logaritmi . . . . .	34
5.3.8	Integrazione per sostituzione (a.k.a. cambio di variabile) . . . . .	34
5.3.9	Integrali impropri . . . . .	36
5.3.10	Altri integrali notevoli . . . . .	37
5.4	Moto unidimensionale . . . . .	37
<b>6</b>	<b>ODE</b>	<b>38</b>
6.1	Classificazione . . . . .	38
6.2	Variabili separabili . . . . .	38
6.3	Variabili inseparabili del primo ordine . . . . .	40
6.4	Oscillatore armonico . . . . .	41
6.4.1	Oscillatore armonico smorzato . . . . .	41
6.5	ODE lineari non omogenee . . . . .	42
6.6	Problemi di Cauchy . . . . .	43
6.7	Conservazione dell'energia . . . . .	43
6.7.1	Esempio: forza elastica . . . . .	44
6.7.2	Esempio: forza gravitazionale . . . . .	44
6.7.3	Esempio: gravità costante . . . . .	44
6.8	Non conservazione dell'energia . . . . .	45
	<b>Esercizi</b>	<b>46</b>
E.9	Esercizi proposti all'esercitazione . . . . .	46
E.10	Esercizi extra . . . . .	48
E.10.1	ODE . . . . .	49
E.10.2	Volumetti Infinitesimi . . . . .	49
E.10.3	Ordini e Limiti . . . . .	50
E.10.4	Fisica . . . . .	50
E.10.5	Integrali . . . . .	52

## — PREREQUISITI —

---

Questa lezione, e di conseguenza le dispense che state leggendo, richiede la conoscenza di alcuni prerequisiti, che elenchiamo brevemente di seguito. Tutti questi argomenti sono trattati nelle sezioni 1, 3 e 4 delle dispense della lezione di Analisi Base dell'edizione 2024 dello stage, disponibili nel sito: [stagefisica.sns.it](http://stagefisica.sns.it).

- Significato della notazione di sommatoria;
- Coefficienti binomiali;
- Logaritmi;
- Trigonometria di base;
- Idea intuitiva della nozione di limite;
- Differenziali, derivate e calcolo di esse.

# SEZ. 1 — VETTORI

## 1.1 Cos'è un vettore?

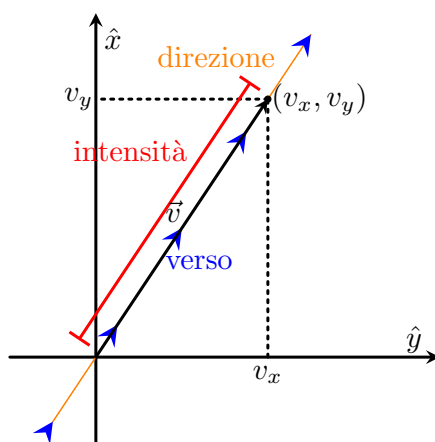
I vettori sono degli enti matematici usati per descrivere numerose grandezze fisiche. Degli esempi di queste sono la posizione di un corpo, la sua velocità e le forze che agiscono su di esso. Si distinguono da altre grandezze come la temperatura o la pressione per il fatto che la loro descrizione è subordinata all'informazione di *una direzione* e *un verso*. In sintesi a caratterizzare un vettore sono

- la sua *intensità* o *modulo*, ovvero un numero che li "quantifichi";
- una *direzione*, ovvero una retta su cui agisce;
- un *verso* di azione sulla retta che ne definisce la direzione.

Fisicamente i vettori sono *applicati* in un qualche punto. Tuttavia per le operazioni che definiremo sarà opportuno pensare che traslare un vettore non lo modifica in alcun modo, ovvero *rimane lo stesso identico oggetto*.

Se fissiamo un sistema di riferimento cartesiano, possiamo pensare che tutti i vettori siano applicati nell'origine. Per questa ragione è possibile descrivere un vettore in maniera alternativa con una  $n$ -upla di valori, dove  $n$  sarà dettato dalla geometria del problema, come mostrato nella figura 1.

Figura 1: Un vettore può essere identificato da una  $n$ -upla di numeri.



Nel caso più frequente di vettori in 3 dimensioni  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  si avrà che

- l'intensità è descritta dalla *norma euclidea*, ovvero  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ;
- la direzione e il verso sono descritti dal *versore* (cioè un vettore di modulo 1)  $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ .

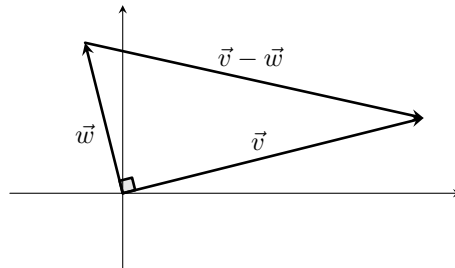
L'unico caso patologico è quello del vettore nullo, per cui non sono definiti direzione, verso e conseguentemente un versore associato. Per tutti gli altri vettori  $\mathbf{v}$  ha perfettamente senso scrivere  $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\hat{\mathbf{v}}$  o  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{v}}$ .

Per semplicità nel seguito descriveremo i vettori con *terne* di numeri, salvo indicazione contraria. Inoltre nel definire un dato vettore  $\mathbf{v}$  intenderemo sempre  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , con le dovute eccezioni ove specificato diversamente.

## 1.2 Prodotto scalare

Per comprendere l'origine del prodotto scalare, ci sembra opportuno risolvere un problema preliminare di centrale importanza.

Figura 2: Esempio di vettori ortogonali.



**Problema 1.1.** Dati due vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ , determinare quando questi sono ortogonali in termini delle rispettive componenti.

**Soluzione:** Per il teorema di Pitagora,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono ortogonali se e solo se (vedi figura 2)

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$$

che può essere espressa come

$$\sum_{i=1}^3 (v_i - w_i)^2 = \sum_{i=1}^3 (v_i^2 + w_i^2)$$

Espandendo i quadrati al primo membro e semplificando otteniamo la condizione necessaria e sufficiente

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

che conclude.

Ad un primo sguardo la condizione trovata può sembrare un po' strana. Tuttavia l'espressione al primo membro ha un significato ben preciso, come vedremo. Investigiamone le proprietà.

**Definizione 1.1** (Prodotto scalare). Dati due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , definiamo il loro *prodotto scalare* come

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Le seguenti proprietà sono di immediata verifica:

- $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$ , ovvero il prodotto scalare è commutativo.
- $((\mathbf{v} + \lambda \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) + \lambda (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z})$ , dove  $\lambda$  è un numero.
- $\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq 0$ .

Una conseguenza molto importante delle precedenti proprietà è il teorema di Carnot.

**Teorema 1.1.** *Dati due vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  risulta che*

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \frac{\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2}{2}$$

*Dimostrazione.* Segue immediatamente da

$$((\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \quad \square$$

Una conseguenza importante del teorema di Carnot è che le rotazioni attorno ad un'asse passante per l'origine *conservano* il prodotto scalare.

Consideriamo due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Con un'opportuna rotazione  $R$  si può dirigere  $\mathbf{v}$  lungo il semiasse positivo delle ascisse, ovvero  $R\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ . Con una successiva rotazione  $R'$  attorno all'asse  $x$  è possibile portare  $R\mathbf{w}$  sul piano  $xy$ . Di conseguenza  $R'R\mathbf{v} = R\mathbf{v}$ ,  $R'R\mathbf{w} = (w \cos \theta, w \sin \theta, 0)$ , dove  $\theta$  è l'angolo compreso fra i vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  (poiché le rotazioni *conservano* gli angoli). Di conseguenza

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (R\mathbf{v} \cdot R\mathbf{w}) = (R'R\mathbf{v} \cdot R'R\mathbf{w}) = vw \cos \theta \quad (1.1)$$

Otteniamo così che il prodotto scalare che abbiamo definito coincide con quello studiato usualmente a scuola.

### 1.3 Determinante

In questa sezione parleremo del determinante di una matrice quadrata  $A$ . Ci limiteremo a introdurlo, darne qualche proprietà algebrica importante e fare dei conti espliciti per calcolarlo.

**Definizione 1.2.** Il determinante  $n$ -esimo è l'unica funzione dalle matrici di taglia  $n \times n$  a valori negli scalari che rispetti le seguenti proprietà:

- è *multilineare* nelle colonne, ovvero

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A^{11} + \lambda A^{12} & A^2 & \dots & A^n \end{pmatrix} = \\ = \det \begin{pmatrix} A^{11} & A^2 & \dots & A^n \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} A^{12} & A^2 & \dots & A^n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

e analogamente se ad essere fissate sono  $n - 1$  colonne qualsiasi (non necessariamente le ultime).

- se  $A$  ha due colonne uguali allora  $\det A = 0$ .
- $\det I_n = 1$ .

Ci rendiamo conto che la precedente definizione è *molto* calata dal cielo. Tuttavia negli esercizi sarà più chiaro da dove nasce e per quali ragioni elementari una tale funzione è utile.

Valgono le seguenti proprietà algebriche:

1. scambiare due colonne fa cambiare segno al determinante;
2. se una colonna è nulla allora lo è anche il determinante;
3. se  $A$  e  $B$  sono matrici *quadrato* della stessa taglia allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ ;

4. sommare ad una colonna un multiplo di un'altra colonna non altera il valore del determinante;
5.  $\det A = \det A^t$ , cioè tutto quello che vale per le colonne vale anche per le righe;
6.  $\det A \neq 0$  se e solo se la matrice  $A$  è invertibile.

Facciamo degli esempi.

**Esempio 1.1.** Sia  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  una matrice  $2 \times 2$ . Allora

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} &= a \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \\ &= ab \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + ad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ad \end{aligned}$$

e analogamente

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & c \end{pmatrix} = -bc$$

Perciò si ha che

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

**Esempio 1.2.** Calcoliamo il determinante di una matrice  $3 \times 3$ . Sia  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  e

si immagini mentalmente cosa accade se si espandono tutte le colonne come somma di vettori diretti lungo gli assi e si espande usando la multilinearità. Ci si convinca che vale il seguente:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} &= aei \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + ahf \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ dbi \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + dhc \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ gbf \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + gec \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ognuna delle matrici al secondo membro si ottiene dalla matrice identità scambiando delle colonne. Se il numero di scambi è pari allora il determinante verrà 1, altrimenti verrà  $-1$ . Di conseguenza

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - ahf - dbi + dhc + gbf - gec$$

Riordinando si ottiene la formula di Sarrus per il calcolo del determinante delle matrici  $3 \times 3$ :

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Vediamo ora come si calcolano *realmente* i determinanti di matrici  $3 \times 3$ . Ad esempio calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 1.3.1. **Regola di Sarrus.** — Un primo modo è con la regola di Sarrus, ovvero con il risultato del conto precedente. Sembra difficile da ricordare, ma si rappresenta molto bene con uno schemino:

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array}$$

$aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$

Nel nostro caso, affiancando la matrice  $A$  a se stessa si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando le diagonali della figura precedente, si nota che solo la prima non contiene uno 0 e dunque sarà l'unica a contribuire. Il risultato è quindi  $\det A = 1$ .

**NOTA:** la regola di Sarrus funziona solamente per le matrici  $3 \times 3$ !

§ 1.3.2. **Regola di Laplace.** — Un secondo modo è con gli sviluppi per riga o per colonna, detto anche regola di Laplace.

Per prima cosa assegnamo a scacchiera dei segni  $+$  o  $-$  a ogni entrata della matrice, partendo con il  $+$  in alto a sinistra:

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & +0 \\ -0 & +1 & -0 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Procediamo scegliendo una riga o una colonna della nostra matrice. La scelta non influenza il risultato, ma è molto comodo scegliere una riga o una colonna contenente molti 0. Per la nostra matrice è comoda la terza colonna.

A questo punto si procede sommando i contributi di ciascun elemento della riga (o colonna) scelta, ognuno di questi ottenuto moltiplicando il valore di quella entrata per il segno scritto prima e per il determinante della matrice più piccola ottenuta eliminando la riga e la colonna contenenti quell'elemento.

Il procedimento può essere lungo e difficile da comprendere, per cui svolgiamo tutti i passaggi per la nostra matrice  $A$ , ricordando che abbiamo scelto la terza colonna:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} +1 & -1 & +0 \\ -0 & +1 & -0 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} = +0 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dovrebbe essere chiaro perché è meglio scegliere una riga (o colonna) con molti 0, infatti 2 dei 3 termini sopra sono moltiplicati per 0 e quindi non ha nemmeno senso preoccuparsi di calcolarli. Ora serve ricordarsi la formula del determinante di una matrice  $2 \times 2$ :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Per la matrice  $A$  si ottiene:

$$\det A = +1 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Come detto più volte, il risultato non dipende dalla riga o colonna scelta e corrisponde anche con quello trovato tramite la regola di Sarrus (altrimenti uno dei due sarebbe sbagliato).

A differenza della regola di Sarrus, quella di Laplace vale in dimensione generica, ovvero anche per le matrici  $n \times n$  con  $n \neq 3$ . Il problema è che può essere un calcolo molto lento (è ricorsivo) e alla peggio i termini da calcolare sono  $n! = n(n-1)(n-2) \dots 1$ . Se mai dovete calcolare il determinante di una matrice grossa a mano (altamente improbabile in una gara), questo sarebbe il metodo più facile da ricordare.

## 1.4 Prodotto vettore

**Definizione 1.3.** Siano  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  due vettori con *tre* componenti, ovvero  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  e  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ . Definiamo il prodotto vettore di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  come

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

dove  $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2$  e  $\hat{\mathbf{x}}_3$  denotano i vettori  $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ .

Poiché scambiare due righe cambia di segno al determinante, è chiaro che  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . È altrettanto chiaro che è *bilineare*, ovvero  $(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \lambda \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  e analogamente a destra. Investighiamo le altre proprietà del prodotto vettore.

**Problema 1.2.** Calcolare il prodotto vettore di  $\mathbf{a} = (1, 0, 1), \mathbf{b} = (0, 2, 3)$ .

Basta calcolare

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Per fare questo conto in maniera efficiente conviene sviluppare rispetto alla prima riga, ottenendo

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_2 + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_3 = (-2, -3, 2)$$

## 1.5 Prodotto misto

Si può verificare che dati tre vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  risulta

$$(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Poiché un numero pari di scambi di righe non altera il determinante, risulta che

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza vale che

$$(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})) = (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \quad (1.5)$$

Una diretta applicazione delle precedenti è che

$$(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a})) = 0$$

in quanto  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ . Analogamente  $(\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = 0$ . Abbiamo dunque dimostrato il teorema seguente.

**Teorema 1.2.** *Il prodotto vettore  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  è ortogonale sia ad  $\mathbf{a}$  che a  $\mathbf{b}$ .*

Vediamo subito un esempio.

**Problema 1.3.** Calcolare il prodotto misto  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  di  $\mathbf{a} = (1, 3, 4)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$ .

**Soluzione:** Dalla eq. (1.4) si ottiene che il risultato cercato è:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det A$$

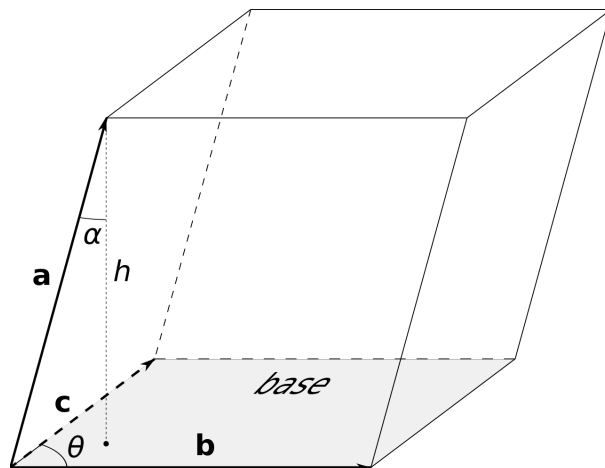
Purtroppo non abbiamo molti 0, quindi è più diretto utilizzare la regola di Sarrus. Scriviamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E ricordiamo di partire dalle prime 3 colonne verso destra con il segno + e dalle ultime 3 verso sinistra con il segno -:

$$\det A = +2 + 3 + 0 - 1 - 0 - 8 = -4$$

Figura 3: Prisma generato dal prodotto misto di 3 vettori.



Un modo di interpretare il prodotto misto  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  è il seguente: è il volume con segno del prisma che ha per base il parallelogramma avente per lati  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  e per altezza  $\mathbf{a}$ . La dicitura “con segno” indica solamente che se la terna di vettori non rispetta la regola della mano destra, allora il volume avrà segno negativo. Per una dimostrazione grafica, si veda fig. 3.

Questa identificazione è dovuta al fatto che  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  è il vettore area del parallelogramma, ovvero il vettore ortogonale ad esso (con un opportuno verso) che ha modulo pari all'area.

### § 1.5.1. Modulo e orientazione. —

**Teorema 1.3.** Il modulo di  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  è  $ab|\sin\theta|$ , dove  $\theta$  denota l'angolo compreso fra  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

*Dimostrazione.* Per definizione si ha che

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\mathbf{x}}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{\mathbf{x}}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{\mathbf{x}}_3$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 = \\ &= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) - 2a_2b_3a_3b_2 - 2a_3b_1a_1b_3 - 2a_1b_2a_2b_1 = \\ &= a^2b^2 - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 + 2a_2b_2a_3b_3) = \\ &= a^2b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2b^2(1 - \cos^2\theta) = a^2b^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. □

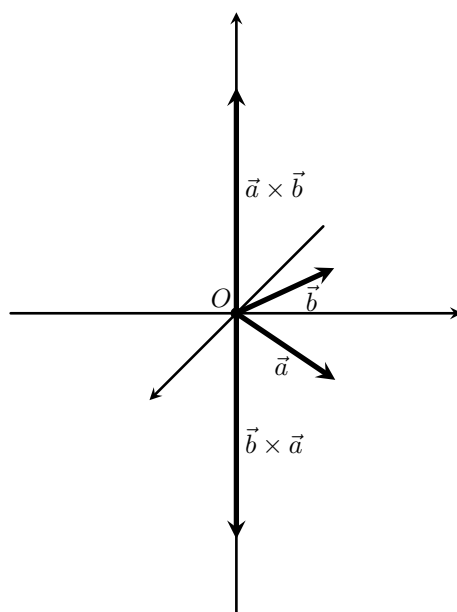
**Osservazione.**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$  se e solo se  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  sono *collineari*, ovvero se e solo se sono allineati.

L'usuale regola della mano destra identifica il verso del prodotto vettore. Questo perché se  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$  allora la terna *ordinata*  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$  è *orientata* o ha la stessa *chiralità* della terna di vettori  $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$ .

Verificheremo negli esercizi che una terna di vettori  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  è orientata come  $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$  se e solo se

$$(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} > 0$$

Figura 4: La regola della mano destra identifica il verso del prodotto vettore.



Di conseguenza  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$  è orientata come  $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$  in quanto se  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$  allora  $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 > 0$ . Abbiamo provato il seguente.

**Teorema 1.4.** *Siano  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  vettori non allineati. Allora  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  è quell'unico vettore che gode delle seguenti proprietà:*

- è ortogonale sia ad  $\mathbf{a}$  che a  $\mathbf{b}$ ;
- ha modulo  $ab|\sin \theta|$  dove  $\theta$  è l'angolo compreso fra  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ ;
- soddisfa la regola della mano destra.

## SEZ. 2 — ESPANSIONE DI TAYLOR

2.1 *o*-piccolo§ 2.1.1. **Definizione.** — (*o*-piccolo)

Sia  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  un reale esteso e sia  $I$  un intorno di  $x_0$ . Consideriamo due funzioni  $f(x), g(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che  $g(x) \neq 0 \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ .

Diremo che  $f(x)$  è un *o*-piccolo di  $g(x)$  per  $x$  che tende ad  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Per compattezza in tal caso scriveremo  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$ .

§ 2.1.2. **Esempi.** —

- $x = o(1)$  per  $x \rightarrow 0$ ,
- $\ln x = o(e^x)$  per  $x \rightarrow \infty$
- $x^{2025} = o(x^{2024})$  per  $x \rightarrow 0$ ,
- $\sin x = o(15\sqrt{x})$  per  $x \rightarrow \pi$ .

§ 2.1.3. **Osservazione.** — (*o*-piccolo = "trascurabile")

$f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$  ci sta moralmente dicendo che per  $x$  "molto vicine" a  $x_0$  possiamo considerare  $f(x)$  trascurabile rispetto a  $g(x)$ .

Concedendoci un leggero abuso di notazione, se in un'espressione troviamo degli *o*-piccolo possiamo sostituire le relative funzioni con la scrittura  $o(g(x))$  (stando attenti). Ad esempio  $\ln x = o(x^2)$  e  $x = o(x^2)$  per  $x \rightarrow \infty$  quindi

$$\ln x + 3x^2 - x = o(x^2) + 3x^2 - o(x^2)$$

Qua bisogna stare attenti, è assolutamente vietato semplificare gli *o*-piccolo (ovvero dire  $o(x^2) - o(x^2) = 0$ ), infatti se lo facessimo otterremmo una relazione falsa. La scrittura  $o(g(x))$  va vista come insieme di funzioni piuttosto che come singola funzione, infatti esiste sempre più di una funzione che è *o*-piccolo di  $g(x)$  ergo  $o(g(x)) - o(g(x))$  non è necessariamente 0.

§ 2.1.4. **Proposizione.** — (Alcune proprietà di *o*-piccolo)

Supponiamo che  $f_1(x) = o(g(x))$  e  $f_2(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$ . Allora

- (**SOMMA**  $o \pm o = o$ )  $f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x))$
- (**MULTIPLIO**  $\alpha o = o$ )  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  vale  $\alpha f_1(x) = o(g(x))$
- (**PRODOTTO**)  $f_1(x)f_2(x) = o(g(x)^2)$
- (**SEMPLIFICARE** *o*-piccolo)  $f_1(x) = o(g(x) + f_2(x)) = o(g(x))$

(La verifica delle proprietà è lasciata come esercizio).

Tornando al nostro esempio possiamo ora dire che per  $x \rightarrow \infty$  vale

$$\ln x + 3x^2 - x = o(x^2) + 3x^2 - o(x^2) = 3x^2 + o(x^2)$$

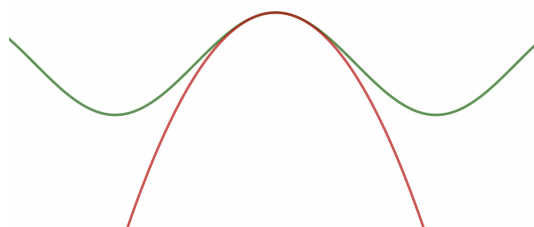
## 2.2 Polinomi di Taylor

Il sogno di ogni fisico è di poter lavorare con semplici funzioni polinomiali piuttosto che con funzioni brutte e cattive tipo  $\sin x$ ,  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $e^{\cos x}$ ... Purtroppo funzioni non polinomiali sbucano molto frequentemente nello studio della fisica ma non per questo dobbiamo rinunciare ai nostri sogni. Potremmo cercare di capire se è possibile approssimare le funzioni con cui dobbiamo lavorare a dei polinomi, almeno nelle vicinanze di un certo valore  $x_0$ . Ad esempio, se volessimo approssimare  $\cos x$  nelle vicinanze di  $x = 0$  con un polinomio  $P_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  di secondo grado vorremmo la seguente condizione soddisfatta

$$\cos x = \alpha x^2 + \beta x + \gamma + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

ovvero vorremmo che l'errore commesso nell'approssimare  $\cos x$  con  $P_2(x)$  sia un  $o$ -piccolo di  $x^2$ , cioè vorremmo che l'errore commesso sia trascurabile rispetto a  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  (a patto che  $x \rightarrow 0$  ovvero che  $x$  sia molto vicino a 0). In questo caso potremmo verificare che  $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$  svolge il lavoro richiesto ossia

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$



Il sogno dei fisici di poter approssimare una funzione  $f(x)$  con un polinomio  $P_n(x)$  di grado  $n$  è avverato dal seguente Teorema

### § 2.2.1. Teorema. — (Formula di Taylor)

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  un reale,  $I$  un suo intorno e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile almeno  $n$  volte con  $n \in \mathbb{N}$  allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

dove  $f^{(k)}(x_0)$  è la derivata  $k$ -esima di  $f$  calcolata in  $x_0$  ( $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ ).

In parole povere il polinomio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)$$

( $P_n$  è detto espansione di  $f(x)$  attorno a  $x_0$  all' $n$ -esimo ordine) è una buona approssimazione di  $f(x)$  per  $x$  molto vicino a  $x_0$  cioè l'errore commesso nell'approssimare  $f(x)$  con  $P_n(x)$  è trascurabile (rispetto a  $P_n(x)$ ).

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \left( \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)$$

per  $x$  molto vicino a  $x_0$ .

**§ 2.2.2. Osservazione.** — (Taylor imita le derivate di  $f$ )

Ciò che il polinomio di Taylor fa è imitare il comportamento della funzione  $f(x)$  nelle prime  $n$  derivate. (Verificare che le prime  $n$  derivate di  $f(x)$  calcolate in  $x_0$  coincidono con le prime  $n$  derivate di  $P_n(x)$  calcolate in  $x_0$ )

Molto spesso ci interessa approssimare una funzione  $f(x)$  nelle vicinanze di  $x = 0$ . Per  $x \rightarrow 0$  Taylor prende la seguente forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) + o(x^n) \approx \sum_{k=0}^n \left( \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

**§ 2.2.3. Osservazione.** — (Taylor di una funzione composta)

se si sostituisce  $x - x_0$  a  $x$  nella formula di Taylor per  $x \rightarrow 0$  di  $f(x)$  si ottiene la formula di Taylor per  $x \rightarrow x_0$  di  $g(x) = f(x - x_0)$ .

**§ 2.2.4. Alcuni esempi più o meno frequenti.** — (tutti per  $x \rightarrow 0$ )

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ ,
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$  (vale  $\forall \alpha \in \mathbb{R}!!$ )

Dove  $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}$ .

**§ 2.2.5. Osservazione.** — (Sostituzioni con gli  $o$ -piccolo)

Se  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$  e  $\lim_{x \rightarrow x_1} h(x) = x_0$  allora  $f(h(x)) = o(g(h(x)))$  per  $x \rightarrow x_1$  (si tratta di un limite per sostituzione). Questa osservazione può essere utile a scrivere Taylor di funzioni che sono composizioni di altre funzioni più semplici perché ci sta dicendo, ad esempio, che

$$\begin{aligned} \sin(\sin(x)) &= \sin(x) + o(\sin(x)) = x + o(x) + o(x + o(x)) = \\ &= x + o(x) + o(x) = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

perché  $\sin(x)$  tende a 0 per  $x \rightarrow 0$  (la prima uguaglianza viene da  $\sin(t) = t + o(t)$  per  $t \rightarrow 0$  e al posto di  $t$  abbiamo messo  $\sin(x)$ , dopo il secondo uguale abbiamo sostituito  $\sin(x)$  con  $x + o(x)$  e infine abbiamo manovrato gli  $o$ -piccolo).

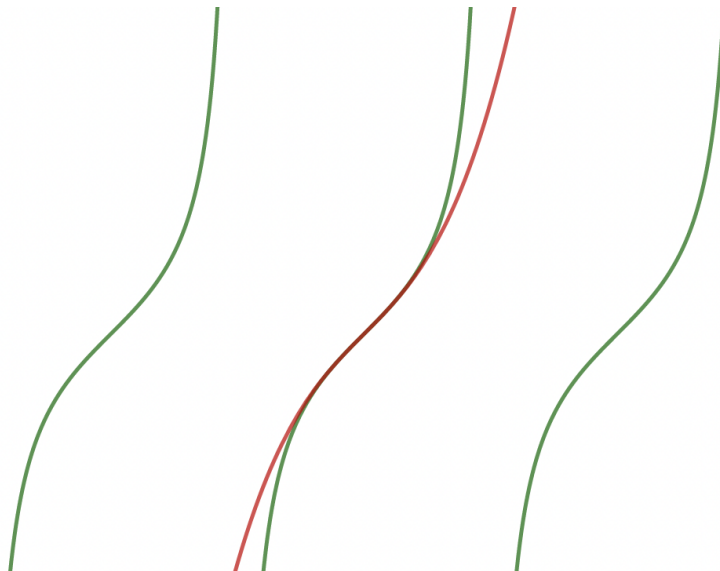
§ 2.2.6. **Esempio.** — (Espansione di  $\tan(x)$ )

Trovare l'espansione di  $\tan(x)$  attorno a  $x = 0$  al terzo ordine.

In questo caso usare direttamente la formula di Taylor potrebbe risultare particolarmente contoso poiché le derivate di  $\tan(x)$  non sono molto belle. Possiamo però scrivere  $\tan(x)$  come composizione di funzioni più semplici:

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1} = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} - o(x^3) + \left(\frac{x^2}{2} - o(x^3)\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - o(x^3)\right)^2\right)\right) = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{2} + xo(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \\ &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

dove per la terza uguaglianza è stata usata l'espansione di  $(1+t)^\alpha$  per  $t \rightarrow 0$  al secondo ordine con  $\alpha = -1$  e  $t = \frac{x^2}{2} - o(x^3)$  (gli  $o$ -piccolo si semplificano molto facilmente).



## SEZ. 3 — CALCOLO MULTIVARIABILE —

## 3.1 Gradiente di una funzione scalare

In questa sezione ci occuperemo di generalizzare la nozione di *derivata* al caso di funzioni  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Per semplicità considereremo solo le funzioni  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Queste hanno infatti il pregio di poter essere rappresentate con il disegno del loro *grafico*, ovvero l'insieme delle terne  $(x, y, V(x, y))$  al variare di  $x, y \in \mathbb{R}$ . Rappresentiamone qualcuna. Procedendo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso troviamo  $z = x + y, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \cos x, z = xe^{-y^2}$ .

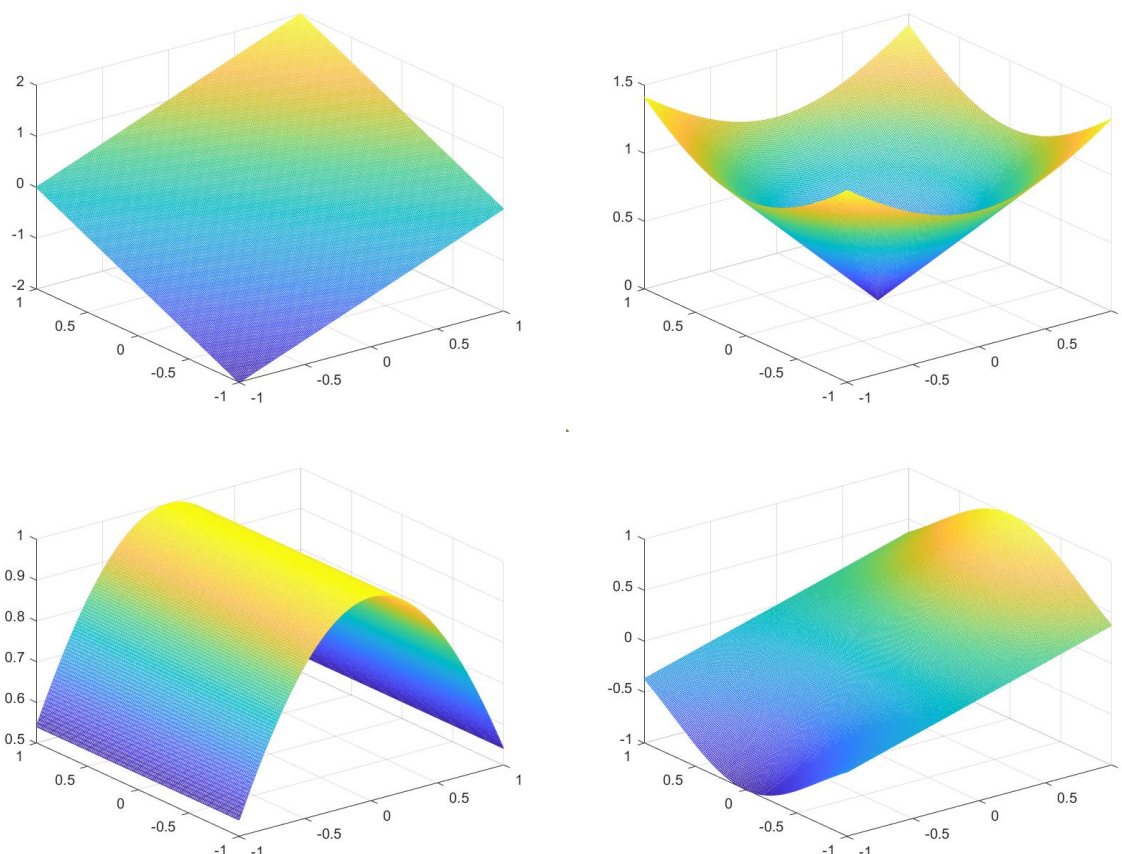


Figura 5: Esempi di grafici di funzioni.

Come per il calcolo in una variabile, vediamo cosa si ottiene se proviamo a calcolare il primo ordine di  $dV = dV(x, y) = V(x + dx, y + dy) - V(x, y)$ :

- per  $V(x, y) = x + y$  abbiamo  $dV = dx + dy$ .
- per  $V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  abbiamo

$$\begin{aligned}
 dV &= \sqrt{(x + dx)^2 + (y + dy)^2} - \sqrt{x^2 + y^2} = \\
 &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2xdx + 2ydy} - \sqrt{x^2 + y^2} = \\
 &= \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{2xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \sqrt{x^2 + y^2} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

dove evidentemente ci sono dei problemi se  $(x, y) = (0, 0)$ . Ci torneremo in seguito.

- per  $V(x, y) = \cos x$  abbiamo  $dV = -\sin x dx$ .
- per  $V(x, y) = xe^{-y^2}$  abbiamo

$$\begin{aligned} dV &= (x + dx)e^{-(y+dy)^2} - xe^{-y^2} = (x + dx)e^{-y^2-2ydy} - xe^{-y^2} = \\ &= (x + dx)e^{-y^2}(1 - 2ydy) - xe^{-y^2} = xe^{-y^2} + e^{-y^2} dx - 2xye^{-y^2} dy - xe^{-y^2} = \\ &= e^{-y^2} dx - 2xye^{-y^2} dy \end{aligned}$$

Cosa abbiamo imparato da questi esempi? Abbiamo scoperto che generalmente una funzione  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ammette un'espansione al primo ordine attorno al punto  $(x, y)$  del tipo

$$dV = a(x, y)dx + b(x, y)dy \quad (3.1)$$

dove  $a(x, y), b(x, y)$  sono dei numeri che in generale dipendono dal punto  $(x, y)$ . Come abbiamo ricavato in generale questi numeri  $a(x, y)$  e  $b(x, y)$ ? Essenzialmente abbiamo usato tutte le espansioni al primo ordine in una variabile che conoscevamo e lì dove le operazioni ci generavano dei termini  $(dx)^2$  o  $(dy)^2$  o ancora  $dx dy$  li abbiamo buttati via. In effetti se avessimo considerato l'espressione  $V(x + dx, y) - V(x, y)$  avremmo ottenuto

$$V(x + dx, y) - V(x, y) = a(x, y)dx \quad (3.2)$$

che a posteriori torna perché corrisponde a considerare  $dy = 0$  in (3.1). Di conseguenza sappiamo calcolare  $a(x, y)$ , visto che

$$V(x + dx, y) - V(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad (3.3)$$

dove  $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y)$  è la derivata di  $V$  rispetto a  $x$  tenendo fissata  $y$ , altresì detta *derivata parziale di  $V$  rispetto a  $x$* . Eguagliando (3.2) e (3.3) si ottiene  $a(x, y)dx = \frac{\partial V}{\partial x} dx$  e di conseguenza  $a(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}$ .

**Teorema 3.1.** *Sia  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sufficientemente regolare. Allora attorno ad ogni suo punto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ammette un'espansione al primo ordine del tipo*

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n \quad (3.4)$$

dove  $\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  denota la derivata parziale  $i$ -esima, ovvero la derivata di  $V$  nella variabile  $x_i$  avendo fissate le altre.

L'interpretazione grafica dell'espansione (3.1) è che in un intorno del punto  $(x, y)$  la funzione  $V$  è ben approssimata da un piano, detto *piano tangente* al grafico. Il problema che avevamo riscontrato con la funzione  $V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  in  $(0, 0)$  si spiega geometricamente con l'assenza di un piano tangente, matematicamente con la non esistenza delle derivate parziali nell'origine.

Osserviamo ora che la relazione (3.4) si può riscrivere in termini di un *prodotto scalare* come

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \cdot ds = \nabla V \cdot ds \quad (3.5)$$

dove abbiamo posto  $ds = (dx, dy)$  lo spostamento vettoriale infinitesimo,  $\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)$  e per semplicità ci siamo ristretti al caso  $n = 2$ . Il vettore  $\nabla V = \nabla V(x, y)$  è detto *gradiente* della funzione  $V$  in  $(x, y)$ . Dalla relazione (3.5) si ricava equivalentemente che

$$dV = |\nabla V| ds \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato da  $\nabla V$  e  $ds$ . Una conseguenza di questo fatto è che  $\nabla V$  punta nella direzione di massima crescita della funzione  $V$ . Un'altra conseguenza è che il primo ordine di espansione di  $V$  si annulla solo per  $\theta = 90^\circ$ , ovvero il gradiente è *ortogonale* alle direzioni lungo cui  $V$  è stabile al primo ordine.

Quanto visto è sufficiente per giustificare molti risultati matematici elementari utili per la fisica. Vediamone uno per esempio.

**Esempio 3.1** (Campi conservativi). Sia  $\mathbf{F}$  un campo di forze conservativo. Sappiamo che per un tale campo di forze è possibile parlare di un *potenziale*, ossia una funzione  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che per ogni percorso  $\gamma$

$$L = -dV \tag{3.6}$$

dove  $L$  è il lavoro fatto dal campo  $\mathbf{F}$  lungo il percorso  $\gamma$ . Per percorsi infinitesimali la precedente relazione diventa

$$\mathbf{F} \cdot ds = dL = -dV = -\nabla V \cdot ds$$

ricavando così l'identità  $\mathbf{F} = -\nabla V$ . Abbiamo quindi verificato che un campo conservativo è sempre il gradiente di una funzione scalare. E proprio poiché il gradiente di una funzione è ortogonale alle direzioni di stabilità al primo ordine, le superfici equipotenziali devono risultare ortogonali a  $\mathbf{F}$  in ogni loro punto.

Con un minimo di conoscenza del calcolo integrale, sarebbe immediato verificare che

- un campo è conservativo *se e solo se* è il gradiente di una funzione scalare;
- una superficie connessa è equipotenziale se e solo se è in ogni punto ortogonale al campo gradiente.

Come per le funzioni in una variabile, ha senso parlare di *punti critici* per una funzione  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Questi sono i punti  $(x, y)$  per cui  $\nabla V(x, y) = 0$ , ovvero quei punti per cui il corrispondente piano tangente è parallelo al piano  $xy$ . Sono questi i punti in cui possiamo avere una qualche speranza di trovare dei massimi e minimi locali per la funzione  $V$ . Come al solito un punto critico può non essere né di massimo né di minimo. Prima di capire come comportarci di fronte ad un *punto critico* è necessario riportare il seguente risultato detto **Teorema di Schwarz**:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$$

dove  $V$  è una funzione sufficientemente regolare (Fare la derivata prima rispetto a  $x$  e poi rispetto a  $y$  o viceversa è indifferente).

Torniamo al nostro obiettivo. Per discriminare se un punto critico è di massimo, di minimo o nessuno dei precedenti, come nel caso unidimensionale bisogna studiare il

segno del primo ordine non nullo. Cominciamo studiando il segno del secondo ordine considerando la superficie di secondo grado che imita le derivate seconde di  $V$  in  $(x_0, y_0)$ .

$$f(x, y) = \frac{1}{2}V_{xx}(x - x_0)^2 + V_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}V_{yy}(y - y_0)^2$$

Dove  $V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ ,  $V_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$  e  $V_{yy} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ . Nell'ipotesi in cui  $(x_0, y_0)$  sia un punto critico di  $V$  (ovvero  $\nabla V(x_0, y_0) = (0, 0)$ ) avremo che il comportamento di  $V$ , in un intorno di  $(x_0, y_0)$ , è (al secondo ordine) come quello di  $f$ . Notiamo che ponendo  $t = \frac{x-x_0}{y-y_0}$  abbiamo

$$f(x, y) = (y - y_0)^2 \left( \frac{1}{2}V_{xx}t^2 + V_{xy}t + \frac{1}{2}V_{yy} \right)$$

dunque si avrà un minimo nel caso in cui  $f \geq 0$  per ogni  $t$  ovvero se  $\Delta = V_{xy}^2 - V_{xx}V_{yy} < 0$  e  $V_{xx} > 0$ , un massimo se  $f \leq 0$  per ogni  $t$  ovvero se  $\Delta < 0$  e  $V_{xx} < 0$ , una cosiddetta sella se  $\Delta > 0$  mentre sarà necessario approfondire lo studio di  $V$  all'ordine successivo nel caso in cui  $\Delta = 0$ .

Nelle figura 3.1 troviamo riassunti i quattro casi. Le funzioni rappresentate sono nell'ordine  $z = -x^2 - 2y^2$ ,  $z = x^2 + 2y^2$ ,  $z = x^2 - 2y^2$ ,  $z = x^3 - 2y^3$ .

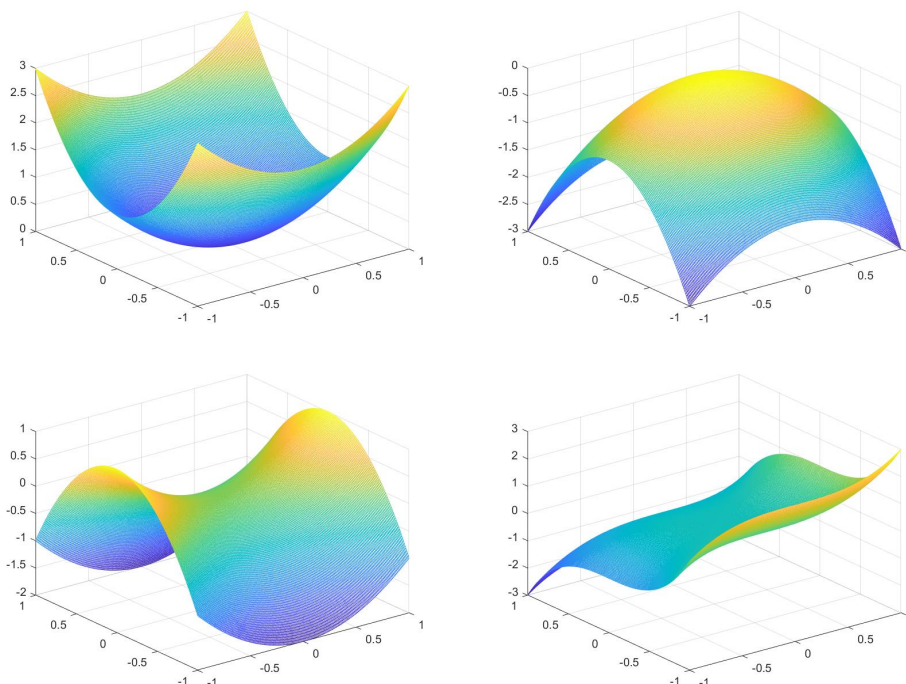


Figura 3.1: Procedendo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso, troviamo delle funzioni con punto critico nell'origine di tipo minimo, massimo, sella e nessuno dei precedenti.

## 3.2 Derivata di una curva

In questa sezione ci occuperemo di generalizzare la nozione di derivata al caso di funzioni  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ovvero le cosiddette curve. Supporremo per semplicità che  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Potremmo immaginare che  $\gamma$  descriva la legge oraria di una particella newtoniana: in quest'ottica la rappresentazione di  $\gamma$  come una traiettoria con delle frecce che ne indichino il verso di percorrenza è più che sufficiente. Proprio alla luce di questa interpretazione

meccanica diremo che  $\gamma$  è funzione della variabile indipendente  $t$  che evochi la nozione di *tempo*.

Come nel caso in una variabile, siamo interessati ad espandere la funzione  $\gamma$  al primo ordine di  $dt$ . Ci sono più modi matematicamente equivalenti di arrivare alle medesime conclusioni.

§ 3.2.1. **Il vettore velocità.** — Un primo modo consiste nel farsi guidare dall'intuizione fisica: se  $\gamma$  descrive la legge oraria di una particella, può risultare abbastanza chiaro che

$$d\gamma = \mathbf{v}dt$$

dove  $d\gamma = d\gamma(t) = \gamma(t+dt) - \gamma(t)$  è lo spostamento vettoriale infinitesimo lungo la curva e  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  è la velocità istantanea della particella all'istante  $t$ .

§ 3.2.2. **La velocità scalare.** — Un secondo modo per arrivare allo stesso tipo di espansione è osservare che in ogni punto  $t$  una curva civile ammette un versore tangente  $\hat{\mathbf{u}}$  che punta nella direzione del moto e che

$$d\gamma = \frac{d\ell}{dt} \hat{\mathbf{u}} dt$$

dove  $\frac{d\ell}{dt} = \frac{d\ell}{dt}(t)$  è la velocità scalare della particella nell'istante  $t$ .

§ 3.2.3. **Guardare componente per componente.** — L'ultimo modo che presentiamo per ottenere un'espansione al primo ordine della funzione  $\gamma$  è vederla come una terna di funzioni  $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di una variabile a valori reali, ovvero scriveremo che

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

e quindi

$$d\gamma = (d\gamma_1, d\gamma_2, d\gamma_3) = \left( \frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right) dt$$

§ 3.2.4. **Risultati.** — L'equivalenza dei metodi presentati ci conduce alle seguenti identità:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\ell}{dt} \hat{\mathbf{u}} = \left( \frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right)$$

Per comodità di notazione si suole scrivere  $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$ . L'ultimo dei tre metodi si basa sul fatto che la variazione infinitesima di  $\gamma$  si esprime in termini delle variazioni di  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Di conseguenza è abbastanza chiaro che per le curve vale Taylor all'ordine  $n$  nella sua forma usuale, ovvero

$$d\gamma = \dot{\gamma} dt + \frac{1}{2} \ddot{\gamma} (dt)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n \gamma}{dt^n} (dt)^n$$

Vediamo ora un esempio molto semplice dove intervengono tutti i concetti appena visti.

**Esempio 3.2** (Moto circolare uniforme). Sia  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$\gamma(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t))$$

la legge oraria di un moto circolare uniforme di frequenza  $\omega$  e raggio  $r$ . Determiniamo con considerazioni geometriche il vettore velocità. A meno di rotazione possiamo supporre che  $t = 0$ . In questo caso

$$\begin{aligned} ds &= (r \cos(\omega dt), r \sin(\omega dt)) - (r, 0) = (r(\cos(\omega dt) - 1), r \sin(\omega dt)) = \\ &= (0, r\omega dt) = r\omega(0, 1)dt \end{aligned}$$

Nel caso generale avremo che  $\mathbf{v}(t) = r\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$ , in quanto  $\|\mathbf{v}(t)\| = r\omega$  e  $\hat{\mathbf{v}}(t)$  deve essere un versore ortogonale a  $\gamma(t)$  e  $\hat{\gamma}(t) \times \hat{\mathbf{v}}(t) = \hat{\mathbf{z}}$  (se li vediamo come vettori sul piano  $xy$  in  $\mathbb{R}^3$ ). Chiaramente la velocità scalare è la stessa in ogni istante di tempo  $t$ . Se la denotiamo con  $\dot{s}$ , risulta che

$$\dot{s} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \dot{s}T = 2\pi r$$

da cui segue che  $\dot{s} = r\omega$ . Inoltre  $\hat{\mathbf{v}}(t)$  è in ogni istante tangente alla traiettoria. Notiamo infine che le componenti del vettore  $\mathbf{v}(t)$  sono le derivate delle rispettive componenti  $\gamma(t)$ .

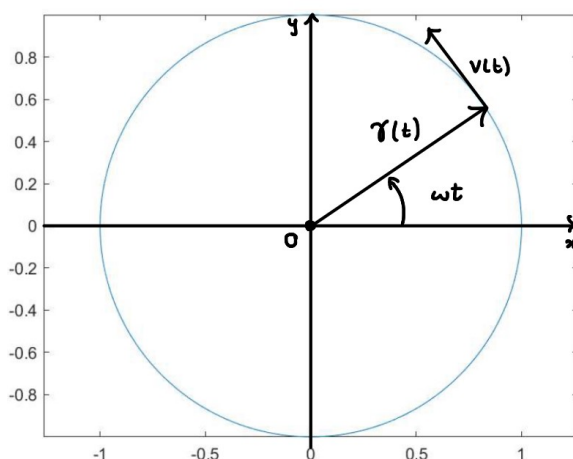


Figura 3.2: Moto circolare uniforme.

### 3.3 Chain Rule

In questa sezione ci occupiamo di generalizzare la regola della derivata composta nel suo caso più semplice. Sia  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva e  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione scalare. A titolo di esempio possiamo pensare che  $\gamma$  sia la legge oraria di una particella e  $V$  l'energia potenziale gravitazionale. Ci chiediamo quale sia la derivata di  $V(\gamma(t))$ . Analogamente a quanto fatto nelle sezioni precedenti, interpretiamo questo problema come *determiniamo l'espansione al primo ordine di  $V(\gamma(t))$* . La risposta è un facile conto:

$$dV(t) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot ds(t) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt} dt = \nabla V \cdot \dot{\gamma} dt$$

da cui otteniamo  $\frac{dV(\gamma(t))}{dt} = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}$ , la cosiddetta chain rule. Quanto appena trovato ha una semplice interpretazione fisica. Infatti sappiamo che  $dV = -dL = -\mathbf{F} \cdot d\gamma = \nabla V \cdot \dot{\gamma} dt$  dove  $dL$  è il lavoro infinitesimo fatto dalla forza di gravità  $\mathbf{F}$ . In definitiva abbiamo scoperto che

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (3.7)$$

Perché abbiamo scritto  $dV(t)$  e non  $dV(\gamma(t))$ ? Da un punto di vista matematico la notazione usata è impropria e sarebbe più corretto scrivere  $dV(\gamma(t))$ . Da un punto di vista fisico invece ha un significato ben preciso. Noi ci stiamo ponendo il problema di capire come varia l'energia potenziale della nostra particella al variare del tempo  $t$ . Chiaramente quello che vorremmo chiamare  $V(t)$  corrisponde formalmente alla funzione  $V$  valutata nel punto  $\gamma(t)$ , però questa precisione formale non deve sviarci dalla comprensione della chain rule. Del resto, la filosofia è la stessa di quando scriviamo

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (3.8)$$

per funzioni di una variabile. Siamo ben consapevoli che la funzione che noi deriviamo rispetto alla  $y$  è *matematicamente* diversa da quella che deriviamo per la  $x$ . Il senso è che però leggiamo la  $y$  come un'altra variabile naturale in cui una stessa quantità fisica  $z$  (quale un'energia, una distanza, ecc.) può essere espressa, e con quest'ottica diamo il giusto significato alle derivate al membro di destra della (3.8).

### 3.4 Caso generale

In questa sezione discutiamo il caso generale di funzioni  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Il problema è sempre quello di determinare un'espansione al primo ordine della funzione  $F$  rispetto alle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Come nel caso delle curve, un'idea che funziona è quella di scrivere

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$$

e di conseguenza

$$dF = (dF_1, dF_2, \dots, dF_m)$$

Se denotiamo con  $ds = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ , per quanto visto sulle funzioni scalari possiamo scrivere

$$dF = (\nabla F_1 \cdot ds, \nabla F_2 \cdot ds, \dots, \nabla F_m \cdot ds)$$

Ricaviamo ora la chain rule in generale: sia  $G: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con variabili indipendenti  $y_1, y_2, \dots, y_l$ . Se lavoriamo sulle componenti del campo  $F$  otteniamo

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_k}$$

dove abbiamo usato l'espressione (3.7).

## SEZ. 4 — COMPLESSI

---

L'insieme dei numeri complessi, indicato con  $\mathbb{C}$ , è un insieme con le operazioni di somma e prodotto definite come vedremo nei prossimi paragrafi. In questo insieme valgono tutte le proprietà delle operazioni come su  $\mathbb{R}$ , ovvero la somma e il prodotto sono commutative e associative, con elementi neutri rispettivamente 0 e 1, vale la proprietà distributiva ed esistono l'opposto di ogni elemento e il reciproco di ogni elemento diverso da 0.

Questo insieme nasce per risolvere il problema della fattorizzazione dei polinomi nei reali, dove, ad esempio, non si trovano soluzioni per  $x^2 + 1 = 0$ . Il problema di fondo è che una potenza pari di un reale è sempre non negativa. Per ovviare a ciò è stata definita l'unità immaginaria<sup>1</sup>,  $i$ , tale che  $i^2 = -1$ . I numeri complessi sono della forma

$$a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

### 4.1 Somma di complessi

Diamo ora due definizioni: la parte reale di un complesso  $z = a + ib$  è così definita:

$$\operatorname{Re}(z) = a$$

la parte immaginaria di un complesso  $z = a + ib$  è così definita:

$$\operatorname{Im}(z) = b$$

quindi  $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ .

Poiché, dato un complesso  $z$ ,  $\operatorname{Re}(z)$  e  $i\operatorname{Im}(z)$  sono a loro volta numeri complessi, possiamo scrivere:

$$(a + ib) + (c + id) = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d)$$

$$\operatorname{Re}(w + z) = \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Re}(z)$$

$$\operatorname{Im}(w + z) = \operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(z)$$

Da ciò emerge che i complessi si sommano “componente per componente”, come se fossero vettori nel piano o polinomi nella variabile  $i$ . Questo ci consente di rappresentarli come vettori nel piano di Gauss, cioè il piano cartesiano con la parte reale sull'asse  $x$  e la parte immaginaria sull'asse  $y$ .

### 4.2 Prodotto di complessi

Il prodotto invece non assomiglia al prodotto scalare dei vettori, né a quello vettoriale. Poiché, se scriviamo  $z = a + ib$ , anche  $a$  e  $ib$  sono dei complessi, abbiamo che il prodotto di due complessi è

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

---

<sup>1</sup>Poiché quando si trattano i circuiti si usa la  $i$  per indicare l'intensità di corrente, capita che l'unità immaginaria si indichi con la  $j$ .

§ 4.2.1. **Notazione polare.** — Determinare un complesso  $z$  specificandone parte reale e parte immaginaria non è l'unica possibilità. Una notazione comoda per esprimere il prodotto è la notazione polare, che determina un complesso  $z$  specificando la lunghezza  $\rho$  (detta modulo) del segmento che unisce l'origine al punto di coordinate  $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$  e l'angolo  $\theta \in [0, 2\pi)$  (detto argomento) che tale segmento forma col semiasse reale positivo. Le proiezioni di tale segmento sugli assi reale e immaginario avranno quindi lunghezza  $\rho \sin \theta$  e  $\rho \cos \theta$ .

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = \rho \cos \theta + \rho i \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

A questo punto, vediamo come si comporta il prodotto usando le coordinate polari.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \\ &\quad i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)) = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

Quindi il prodotto di due complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come angolo la somma degli angoli.

§ 4.2.2. **Notazione esponenziale.** — La funzione esponenziale nei complessi è così definita: si prendano  $a, b \in \mathbb{R}$ , allora

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

Verifichiamo che questa definizione ci consente di espandere con Taylor  $e$ , seno e coseno nei complessi come se fossimo nei reali.

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

$$\frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x)$$

Per Taylor abbiamo che:

$$\sin(z) = \frac{z^0 \sin(0)}{0!} + \frac{z \cos(0)}{1!} + \frac{z^2 (-\sin(0))}{2!} + \frac{z^3 (-\cos(0))}{3!} + \frac{z^4 (-(-\sin(0)))}{4!} + \dots$$

$$\cos(z) = \frac{z^0 \cos(0)}{0!} + \frac{z (-\sin(0))}{1!} + \frac{z^2 (-\cos(0))}{2!} + \frac{z^3 (-(-\sin(0)))}{3!} + \frac{z^4 \cos(0)}{4!} + \dots$$

Cioè, in maniera più compatta:

$$\sin(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^n (-1)^h \frac{z^{2h+1}}{(2h+1)!}$$

$$\cos(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^n (-1)^h \frac{z^{2h}}{(2h)!}$$

Vogliamo verificare che la definizione di  $e^z$  è equivalente a

$$e^z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^n \frac{z^h}{h!}$$

Concentriamoci sul caso particolare  $z = i\theta, \theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^n \frac{(i\theta)^h}{h!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^n i^h \frac{\theta^h}{h!}$$

Sia  $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Cambiamo variabile e, notando che  $n \rightarrow +\infty \Rightarrow k \rightarrow \lfloor \frac{+\infty}{2} \rfloor = +\infty$  scriviamo

$$e^{i\theta} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \sum_{h=0}^k \frac{(i\theta)^{2h}}{(2h)!} + \sum_{h=0}^k \frac{(i\theta)^{2h+1}}{(2h+1)!} \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \sum_{h=0}^k \frac{(i\theta)^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{h=0}^k \frac{i^{2h} \theta^{2h+1}}{(2h+1)!} \right)$$

Notiamo che  $i^n$  è reale per  $n$  pari. Inoltre,  $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$

$$e^{i\theta} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \sum_{h=0}^k \frac{(-1)^h \theta^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{h=0}^k \frac{(-1)^h \theta^{2h+1}}{(2h+1)!} \right)$$

Dagli sviluppi in Taylor di seno e coseno otteniamo

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Che è quello che volevamo. Quindi, prendiamo  $u$  e  $z$  appartenenti a  $\mathbb{C}$ , li riscriviamo come

$$u = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

$$uz = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

che è il complesso che ha come modulo il prodotto dei moduli e come angolo la somma degli angoli, come già abbiamo visto usando la notazione polare.

**§ 4.2.3. Formula di De Moivre.** — Un'utile applicazione dell'esponenziale complesso alla trigonometria è la formula di De Moivre. Siano  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{R}$ , allora

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

perché

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

### 4.3 Il coniugio

Sia  $z = a + ib$  un complesso. Allora si definisce coniugato di  $z$  il complesso  $\bar{z} = a - ib$ . In particolare, notiamo che

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad \bar{z} = \rho e^{-i\theta}$$

perché un complesso e il suo coniugato sono simmetrici rispetto all'asse reale: pensate alla simmetria rispetto all'asse  $x$  nel piano cartesiano, definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

ed è la stessa trasformazione che stiamo applicando al complesso  $z$ .

Notiamo così un forte legame tra coniugio e simmetria, che approfondiremo nei prossimi paragrafi.

§ 4.3.1. **Inverso di un numero complesso.** — I numeri complessi sono un campo, infatti, come citato ad inizio sezione, ogni elemento non nullo ha un inverso. Troviamo l'inverso di  $a + ib$ : stiamo cercando  $c$  e  $d$  reali tali che  $(a + ib)(c + id) = 1$  ovvero

$$c + id = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

da cui  $c = \frac{a}{a^2 + b^2}$  e  $d = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ . L'idea è stata quella di razionalizzare.

## 4.4 Trasformazioni nel piano di Gauss

I complessi si rivelano un potente strumento per descrivere le isometrie nel piano in modo elegante e compatto (più comodo della calcolosa e prolissa geometria analitica).

§ 4.4.1. **Traslazioni.** — Ricordando che i complessi si sommano allo stesso modo dei vettori di  $\mathbb{R}^2$ , per descrivere una traslazione è sufficiente scrivere il vettore che rappresenta lo spostamento dei punti come numero complesso. Nel piano cartesiano, la traslazione di un vettore  $\mathbf{v} = (x_v, y_v)$  è rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = x + x_v \\ y' = y + y_v \end{cases}$$

che, scritto nel linguaggio dei complessi, diventa

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(v) \\ \operatorname{Im}(z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(v) \end{cases}$$

cioè

$$z' = z + v$$

Notiamo che il coniugato è un comodo strumento per ottenere parte reale, parte immaginaria e modulo di un complesso  $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = a + ib - a + ib = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$$

$$z\bar{z} = \rho e^{i\theta} \rho e^{-i\theta} = \rho^2 e^0 = \rho^2$$

§ 4.4.2. **Rotazioni.** — Per scrivere le rotazioni, facciamo alcune osservazioni usando la notazione esponenziale:

$$\rho e^{i\theta} e^{i\phi} = \rho e^{i(\theta+\phi)}$$

Questo descrive una rotazione di un angolo orientato  $\phi$  con centro nell'origine perché conserva il modulo e aumenta l'argomento di un angolo orientato  $\phi$ .

Per scrivere una rotazione di un complesso  $z$  di un angolo  $\phi$  con centro in  $c$ , consideriamo che

$$z = c + (z - c)$$

Ruotare intorno al centro  $c$  equivale a ruotare la componente  $z - c$  di un angolo  $\phi$ , quindi

$$z' = c + (z - c)e^{i\phi}$$

§ 4.4.3. **Simmetrie.** — Abbiamo visto che il coniugio rappresenta la simmetria rispetto all'asse reale. La simmetria rispetto a un generico asse si ottiene facendo coincidere tale asse con l'asse reale, applicando il coniugio e poi facendo coincidere l'asse reale con l'asse di simmetria. Il calcolo è volutamente omissso, in quanto oggetto di un esercizio.

La simmetria centrale è la rotazione di  $\pi$  intorno al centro  $c$ , già vista nel paragrafo precedente. Considerando che  $e^{i\pi} = -1$ , questa particolare rotazione si scrive come

$$z = c - (z - c)$$

## SEZ. 5 — INTEGRALI

---

### 5.1 Integrale indefinito

Una funzione  $F$  si dice primitiva di  $f$  se vale  $F' = f$ . Si può dimostrare che ogni funzione continua ammette sempre una primitiva. Sebbene ogni funzione derivabile abbia una sola derivata, ogni funzione continua ha infinite primitive. Infatti, se  $F$  è una primitiva di  $f$ , allora  $F + C$  è una primitiva di  $f$  per ogni costante  $C$ . Questo si può facilmente verificare sfruttando la linearità della derivata.

Se  $f$  è una funzione continua ed  $F$  una sua primitiva, definiamo l'integrale indefinito di  $f$  come la famiglia delle sue primitive:

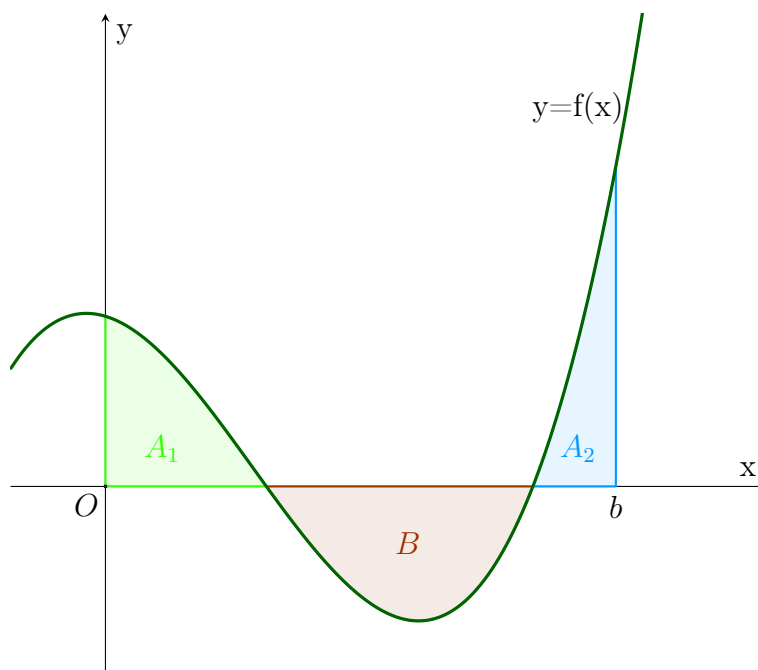
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

### 5.2 Integrale definito

Sia  $f$  una funzione continua<sup>2</sup> in  $[a, b]$  con  $a \leq b$ . Consideriamo i tratti di  $[a, b]$  in cui  $f$  è maggiore o uguale a 0. Sia  $A$  l'area sottesa da  $f$ , ovvero compresa tra  $f$  e l'asse  $x$ , in questi tratti. Analogamente, sia  $B$  l'area sottesa da  $f$  nei tratti di  $[a, b]$  dove  $f$  è minore di 0. L'integrale definito di  $f$  da  $a$  a  $b$  è:

$$\int_a^b f(x)dx = A - B$$

I numeri  $a$  e  $b$  vengono detti *estremi di integrazione*. Ad esempio, per la funzione in figura, si ha  $\int_0^b f(x)dx = A_1 + A_2 - B$ .




---

<sup>2</sup>Ci sono anche casi in cui la funzione è integrabile anche se non è continua: è sufficiente che abbia un numero finito di salti. La trattazione della teoria delle funzioni integrabili esula dagli scopi di questa lezione e di queste dispense.

Vediamo ora intuitivamente che senso ha questa bizzarra notazione.  $f(x)dx$  può essere visto come l'area di un rettangolo di altezza  $|f(x)|$  e base  $dx$ , con segno  $+$  se  $f(x)$  è positiva e con segno  $-$  se è negativa. La  $S$  del simbolo di integrale sembra suggerirci che noi stiamo in un certo senso facendo la somma di tutte queste aree con segno al variare di  $x$  in  $[a, b]$ .

Valgono queste importanti proprietà:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- Sia  $a < b$ , allora si pone  $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ .

Questa proprietà ci dice che quando invertiamo gli estremi di integrazione va cambiato il segno dell'integrale. Tornando alla nostra visione intuitiva scritta sopra, questa proprietà si può capire pensando al fatto che partendo da  $x = b$  e arrivando ad  $x = a$  sommando le aree di tutti i rettangolini, le basi  $dx$  dei rettangolini sono tutte negative. Al contrario, partendo da  $x = a$  e arrivando ad  $x = b$ , le basi  $dx$  sono tutte positive.

- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

### 5.3 Calcolo degli integrali

§ 5.3.1. **Calcolo degli integrali definiti.** — Vi sarete certamente accorti che le notazioni dell'integrale indefinito e di quello definito sono quasi identiche. Questo è perché questi due oggetti sono molto legati tra loro.

Sia  $a$  un qualsiasi elemento del dominio di  $f$ . Definiamo la funzione integrale  $F$  in questo modo:

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Calcoliamo la derivata di  $F$ :

$$dF = \int_a^{x+dx} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+dx} f(t)dt$$

Osserviamo che, moralmente, l'ultimo integrale scritto è la somma di un solo elemento, ovvero  $f(x)dx$ , da cui:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{f(x)dx}{dx} = f(x)$$

Abbiamo perciò scoperto che  $F$  è primitiva di  $f$ , quindi fare l'integrale di una funzione  $f$  significa farne l'"antiderivata". Inoltre, osserviamo che si ha:

$$\int_x^y f(t)dt = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = F(y) - F(x) = (F(y) + C) - (F(x) + C)$$

Da cui segue che, presa una qualsiasi funzione  $\Phi$  primitiva di  $f$ , si ha:

$$\int_x^y f(t)dt = \Phi(y) - \Phi(x) \tag{5.1}$$

Questo, in pratica, ci dà il modo di calcolare gli integrali definiti se sappiamo calcolare quelli indefiniti. Purtroppo, non tutte le funzioni hanno un integrale indefinito che si può esprimere in termini di funzioni elementari, come ad esempio  $e^{-x^2}$ . Nelle prossime sezioni vedremo come integrare alcune funzioni per cui questo è possibile.

§ 5.3.2. **Linearità dell'integrale indefinito.** — Anche l'integrale indefinito è un operatore lineare. Infatti, comunque si prendano due funzioni  $f, g$  ed un reale  $\lambda$  si ha:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

Per verificare questo fatto, basta ricordarsi che anche la derivata è un operatore lineare. Quindi se  $F$  è primitiva di  $f$  e  $G$  è primitiva di  $g$  si ha:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g$$

$$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$$

§ 5.3.3. **Integrali di potenze ed esponenziali.** — Vogliamo integrare  $x^\alpha$ , dove  $\alpha$  è un numero reale diverso da  $-1$ . Osserviamo che si ha:

$$\int x^\alpha dx = \int \frac{1}{\alpha + 1}(\alpha + 1)x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} \int (\alpha + 1)x^\alpha dx$$

Ci accorgiamo però che la derivata di  $x^{\alpha+1}$  è proprio  $(\alpha + 1)x^\alpha$ , da cui:

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C$$

Analogamente, dato  $a > 0; a \neq 1$ , si ottiene:<sup>3</sup>

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + C$$

§ 5.3.4. **Integrale di  $1/x$ .** — Ricordandosi che la derivata di  $\log x$  è  $\frac{1}{x}$ , verrebbe da scrivere:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$$

Tuttavia, c'è un problema:  $\frac{1}{x}$  è definita anche sui negativi, mentre  $\log x$  no, per cui questa formula funziona solo per  $x > 0$ . Proviamo a derivare  $\log(-x)$ :

$$\frac{d \log(-x)}{dx} = \frac{d(-x)}{dx} \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Sappiamo perciò che, per  $x < 0$ , vale:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + C$$

Perciò, più in generale, si ha:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

---

<sup>3</sup>Anche se al liceo il logaritmo naturale viene spesso indicato con  $\ln$  mentre il logaritmo in base 10 con  $\log$ , in questa dispensa adotteremo il simbolo  $\log$  per il logaritmo naturale.

§ 5.3.5. **Integrali di funzioni trigonometriche.** — Ricordando come si derivano seno e coseno, è facile dedurre che:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

Proviamo ad integrare  $\sin^2 x$ . Dalla formula di duplicazione per il coseno otteniamo:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Da cui, sfruttando la linearità dell'integrale:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2} x^0 dx - \int \frac{1}{2} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \int 2 \cos(2x) dx$$

Ci accorgiamo però che la derivata di  $\sin(2x)$  è proprio  $2 \cos(2x)$ , da cui:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

Analogamente, si può calcolare l'integrale di  $\cos^2 x$  (esercizietto).

Calcoliamo ora l'integrale della tangente:

$$\int \tan x dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

Ci accorgiamo però che  $-\sin x$  è la derivata di  $\cos x$ , da cui segue che  $\frac{-\sin x}{\cos x}$  è la derivata di  $\log|\cos x|$ . Si ha perciò:

$$\int \tan x dx = -\log|\cos x| + C$$

Analogamente, si può calcolare l'integrale di  $\cot x$  (altro esercizietto).

§ 5.3.6. **Integrazione per parti.** — Supponiamo di dover calcolare l'integrale indefinito di un prodotto di due funzioni  $f, h$  e di accorgerci che  $h$  è la derivata di una certa funzione  $g$ . Possiamo perciò scrivere che:

$$\int f(x) \cdot h(x) dx = \int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

La tecnica di calcolare gli integrali usando questa relazione è detta integrazione per parti. Questa uguaglianza può essere facilmente dimostrata isolando  $f(x) \cdot g(x)$  e sfruttando la linearità dell'integrale, ottenendo un'uguaglianza equivalente:

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x) dx + \int f'(x)g(x) dx = \int (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) dx$$

Ricordando la regola per derivare il prodotto di due funzioni, questa uguaglianza risulta ovvia. Vediamo un esempio.

$$\int x e^{2x} dx = \int x \left( \frac{e^{2x}}{2} \right)' dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Provate per esercizio ad integrare  $\sin^2 x$  e  $\cos^2 x$  per parti.

§ 5.3.7. **Integrali di logaritmi.** — Cominciamo col calcolare l'integrale di  $\log x$ . Dobbiamo utilizzare l'integrazione per parti:

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int 1 dx$$

Da cui:

$$\int \log x dx = x \log x - x + C = x (\log x - 1) + C$$

A questo punto, ricordandoci la formula del cambio di base dei logaritmi, possiamo tranquillamente integrare  $\log_a x$  per ogni  $a$  positivo diverso da 1:

$$\int \log_a x dx = \int \frac{\log x}{\log a} dx = \frac{x}{\log a} (\log x - 1) + C$$

Provate per esercizio, con lo stesso procedimento, ad integrare l'arcoseno e l'arcocoseno.

§ 5.3.8. **Integrazione per sostituzione (a.k.a. cambio di variabile).** — Talvolta conviene cambiare la variabile di integrazione per riuscire a fare i conti meglio. L'idea è la seguente:

$$\int f dx = \int f \frac{dx}{dt} dt$$

Per poter applicare questa idea c'è bisogno di poter scrivere  $x$  come  $g(t)$ , dove  $g$  è una funzione bigettiva. Scrivendo la formula sopra più esplicitamente, si ha:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

Ossia, più formalmente e in termini di integrali definiti, date  $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$   $C^1$  (cioè derivabile con  $g'$  continua) e  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt$$

Cominciamo a vedere un esempio. Vogliamo calcolare il seguente integrale:

$$\int \sqrt{1 - Rx^2} dx$$

Dove  $R$  è un reale positivo. In questo caso, definiamo  $t$  nel seguente modo:

$$t = \arccos(\sqrt{Rx})$$

Invertendo questa formula otteniamo  $x$  in funzione di  $t$ :

$$x = \frac{\cos t}{\sqrt{R}}$$

Da cui otteniamo:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sin t}{\sqrt{R}}$$

Il nostro integrale diventa perciò:

$$\int \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot \left( -\frac{\sin t}{\sqrt{R}} \right) dt = -\frac{1}{\sqrt{R}} \int \sin^2 t dt = \frac{1}{4\sqrt{R}} \sin(2t) - \frac{1}{2\sqrt{R}} t + C$$

In cui possiamo sostituire la definizione di  $t$  ottenendo:

$$\int \sqrt{1 - Rx^2} dx = \frac{x\sqrt{1 - Rx^2}}{2} - \frac{\arccos(\sqrt{Rx})}{2\sqrt{R}} + C$$

Se il nostro obiettivo era di calcolare un integrale definito, tuttavia, questo ultimo passaggio si poteva saltare. Infatti, volendo cambiare variabile passando dalla variabile  $x$  alla variabile  $t$  legate dalla relazione  $x = g(t)$  con  $g(t)$  bigettiva (e dunque  $t = g^{-1}(x)$ , dove  $g^{-1}$  è la funzione inversa di  $g$ ), si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) dt$$

L'idea è che se  $x$  varia tra  $a$  e  $b$ , allora  $t$  varia tra  $g^{-1}(a)$  e  $g^{-1}(b)$ . Nell'esercizio precedente si ha  $g(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{R}}$ , mentre  $g^{-1}(x) = \arccos(\sqrt{Rx})$ . Alla luce di quanto detto, potevamo infatti scrivere:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 - Rx^2} dx &= \int_\alpha^\beta \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot \left( -\frac{\sin t}{\sqrt{R}} \right) dt = \\ &= \left( \frac{1}{4\sqrt{R}} \sin(2\beta) - \frac{1}{2\sqrt{R}} \beta \right) - \left( \frac{1}{4\sqrt{R}} \sin(2\alpha) - \frac{1}{2\sqrt{R}} \alpha \right) \end{aligned}$$

dove  $\alpha = \arccos(\sqrt{Ra})$  e  $\beta = \arccos(\sqrt{Rb})$ .

Abbiamo dunque capito che quando si cambia variabile, è necessario cambiare anche gli estremi di integrazione.

Vediamo ora alcuni casi semplici ma importanti della formula di sostituzione:

- Traslazione:  $\int_a^b f(x - c) dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x) dx \quad f : [a - c, b - c] \rightarrow \mathbb{R}$
- $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x) dx = \lambda \int_a^b f(\lambda x) dx \quad \forall \lambda > 0$
- se  $f$  è pari,  $\int_a^b f(x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx$
- $f$  dispari  $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$
- se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è  $T$ -periodica e integrabile su tutti gli intervalli, l'integrale di  $f$  su qualunque intervallo di lunghezza  $T$  è lo stesso.

*Dimostrazione.*

$$\int_a^{a+T} f dx = \int_0^{a+T} f dx - \int_0^a f dx = \int_0^T f dx + \int_T^{a+T} f dx - \int_0^a f dx$$

Operiamo una traslazione sul secondo integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^T f dx + \int_T^{a+T} f dx - \int_0^a f dx &= \int_0^T f dx + \int_0^a f(x+T) dx - \int_0^a f dx \\ &= \int_0^T f dx + \left( \int_0^a f(x) dx - \int_0^a f(x) dx \right) \\ &= \int_0^T f dx \end{aligned}$$

□

**§ 5.3.9. Integrali impropri.** — Capita a volte che in un integrale definito la funzione non sia definita in uno degli estremi di integrazione. Ad esempio, può capitare di dover calcolare:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Come abbiamo già visto, l'integrale indefinito di questa funzione è:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

Da cui vorremmo poter scrivere:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2$$

Effettivamente, questa cosa la possiamo scrivere. Formalmente, quello che stiamo facendo è un passaggio al limite, ovvero stiamo calcolando:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Analogamente, possiamo procedere a calcoli di questo tipo quando uno degli estremi di integrazione (o entrambi) è infinito, come ad esempio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Sapendo che l'integrale indefinito di questa funzione è:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

Otteniamo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{b} \right) - \left( -\frac{1}{1} \right) = 0 + 1 = 1$$

§ 5.3.10. **Altri integrali notevoli.** — Come già detto, non siamo in grado di esprimere bene alcuni integrali indefiniti. Esistono però delle formule che consentono di aggirare questo problema quando bisogna calcolare integrali definiti con certi estremi di integrazione. Di seguito, ad esempio, riportiamo l'integrale della gaussiana:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Dove  $a > 0$  (di solito  $a = 1/2$ ).

Esistono delle generalizzazioni di questa formula che talvolta servono, ma non dovete davvero ricordarvele. Per completezza, le riportiamo:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \prod_{k=1}^n (2k-1)$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

Dove  $n \in \mathbb{N}$  e  $a \in \mathbb{R}$  con  $a > 0$ .

## 5.4 Moto unidimensionale

Le derivate (e quindi gli integrali) sono un concetto fondamentale in fisica: definiscono diverse grandezze e ne legano altre con delle relazioni, vedasi ad esempio le equazioni di Maxwell.

Vediamo l'esempio più semplice: il moto unidimensionale. Denotando con  $x(t)$  la posizione del punto all'istante  $t$ , con  $v(t)$  la sua velocità e con  $a(t)$  la sua accelerazione, per definizione valgono le seguenti relazioni:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Supponiamo ora di trovarci nel caso del moto uniformemente accelerato, in cui  $a(t) = a$  dove  $a$  è un valore costante nel tempo. Allora vale

$$v(t) = v(0) + \int_0^t v'(u) du = v(0) + \int_0^t a(u) du = v(0) + at$$

E quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t x'(u) du = x(0) + \int_0^t (v(0) + au) du = x(0) + v(0)t + a \int_0^t u du \\ &= x(0) + v(0)t + \frac{1}{2} at^2 \end{aligned}$$

Abbiamo cioè dimostrato la legge oraria del moto uniformemente accelerato.

## SEZ. 6 — ODE

---

Le equazioni alle derivate ordinarie (ODE) sono delle equazioni in cui compaiono una variabile, una funzione e le sue derivate e in cui l'incognita è la funzione. L'ordine di un'ODE è il massimo tra gli ordini delle derivate che vi compaiono. Indicheremo con  $y$  la funzione e con  $x$  la variabile. Un esempio semplicissimo di ODE di primo ordine è il seguente:

$$y' = x$$

E ha per soluzione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Dove  $C$  è un parametro determinato dalle condizioni iniziali del problema. È importante ricordare che nessuna ODE ha un'unica soluzione, bensì esiste una famiglia di soluzioni. La soluzione generale di un'equazione di  $n$ -esimo ordine dipende da  $n$  parametri. Nel caso dell'esempio, l'equazione era di primo ordine e la soluzione dipendeva da un solo parametro,  $C$ .

Vediamo nelle sezioni seguenti come trovare le soluzioni delle ODE.

### 6.1 Classificazione

Un'ODE si dice *lineare* se  $y$  e le sue derivate compaiono sempre con esponente 1 e mai moltiplicate o divise tra loro. Ad esempio, queste ODE sono lineari:

$$y'' = -y; \quad x^3 y''' + x^2 y + 27 = 0$$

E queste non lo sono:

$$y' = y^2; \quad yy' = x$$

Un'ODE lineare si dice *omogenea* se ogni suo termine è moltiplicato per  $y$  o per una sua derivata. Le seguenti ODE sono lineari omogenee:

$$y'' + y' + y = 0; \quad (x^2 + 1)y'' + y \cdot \sin x = 0$$

E le seguenti non lo sono:

$$y' + y = \sqrt{x}; \quad y'' - 2y' + y = \cos x$$

### 6.2 Variabili separabili

Un'ODE a variabili separabili è un'ODE che può essere espressa nella seguente forma:

$$f(y) \cdot y' = g(x)$$

Dove  $f$  e  $g$  sono funzioni da un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ . L'idea informale per risolvere questo tipo di ODE è pensare  $y' = dy/dx$ , e dunque moltiplicare i due membri per  $dx$  e poi integrare. In pratica, otteniamo:

$$f(y)dy = g(x)dx$$

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

Risolvendo l'integrale e provando a esplicitare  $y$  in funzione di  $x$  si risolve l'ODE. Vediamo ad esempio come risolvere l'equazione mostrata nel paragrafo precedente:

$$\begin{aligned}y' &= x \\dy &= x dx \\ \int dy &= \int x dx \\ y &= \frac{1}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

Si noti come facendo l'integrale indefinito è saltato fuori il parametro. Proviamo ora a risolvere qualcosa di più complicato: dato un certo  $k \in \mathbb{R}$ , proviamo a risolvere:

$$\begin{aligned}y' - ky &= 0 \\ y' &= ky\end{aligned}$$

Per poter separare le variabili, vorremmo poter dividere i due membri per  $y$ . Possiamo farlo, ma dobbiamo stare attenti a verificare se  $y = 0$  risolve l'ODE. È facile verificare che la risolve, perciò sappiamo che le funzioni che risolvono l'ODE sono  $y = 0$  e quelle che risolvono:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}y' &= k \\ \frac{1}{y}dy &= k dx \\ \int \frac{1}{y}dy &= \int k dx \\ \log |y| &= kx + C \\ |y| &= e^{kx+C} \\ y &= \pm e^C e^{kx}\end{aligned}$$

Osserviamo che  $e^C$  può assumere qualunque valore strettamente positivo, per cui  $\pm e^C$  può assumere qualunque valore diverso da 0. Detto  $A = \pm e^C$ , le soluzioni dell'ODE sono quindi:

$$y = 0 \vee y = Ae^{kx} \text{ con } A \neq 0$$

Ovvero:

$$y = Ae^{kx} \text{ con } A \in \mathbb{R}$$

Anche qui, la soluzione dipende da un solo parametro, come ci aspettavamo.

### 6.3 Variabili inseparabili del primo ordine

Vediamo ora come risolvere le ODE a variabili inseparabili del primo ordine, ovvero le equazioni differenziali della forma

$$y' = ya(x) + b(x)$$

Quando abbiamo derivato  $e^x$  abbiamo visto che  $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ . Aver trovato una funzione che è anche la sua derivata è qualcosa che a noi fa estremamente comodo. In particolare, se  $A(x)$  è una primitiva di  $a(x)$ , otteniamo che

$$\frac{d}{dx}(ye^{-A(x)}) = y'e^{-A(x)} - ya(x)e^{-A(x)}$$

Proviamo a rimaneggiare il testo per ottenere qualcosa del genere

$$y' = ya(x) + b(x)$$

$$y' - ya(x) = b(x)$$

$$e^{-A(x)}y' - e^{-A(x)}ya(x) = e^{-A(x)}b(x)$$

Allora possiamo riscrivere il primo membro

$$\frac{d}{dx}(ye^{-A(x)}) = e^{-A(x)}b(x)$$

Integrando rispetto a  $x$  da ambo le parti,

$$ye^{-A(x)} + c_1 = \int (e^{-A(x)}b(x))dx$$

$$ye^{-A(x)} = \int (e^{-A(x)}b(x))dx - c_1$$

Dove  $c_1$  è una costante. Notiamo che l'integrale al secondo membro è un integrale indefinito, quindi è una qualunque primitiva dell'integrando. La famiglia delle primitive di una funzione rimane sé stessa se si aggiunge o toglie una costante. Quindi possiamo riscrivere la soluzione della nostra ODE come

$$ye^{-A(x)} = \int (e^{-A(x)}b(x))dx$$

$$y = e^{A(x)} \int (e^{-A(x)}b(x))dx$$

Osserviamo che questa relazione vale per *qualunque* primitiva  $A(x)$  di  $a(x)$ , quindi nello svolgimento dei calcoli non occorre preoccuparsi della costante da aggiungere ad  $A(x)$ , ma si può aggiungere quella che più fa comodo (che molto spesso è 0). Anche qui, come ci aspettavamo, abbiamo un solo parametro libero.

## 6.4 Oscillatore armonico

Concentriamoci ora su alcune equazioni differenziali omogenee di second'ordine ricorrenti in fisica. La più semplice e diffusa è l'equazione dell'oscillatore armonico (che, come suggerito dal nome, caratterizza il moto armonico semplice)

$$y'' = -ky$$

con  $k > 0$ . Definiamo  $\omega_0 = \sqrt{k}$  e dunque:

$$y'' = -\omega_0^2 y \quad (6.1)$$

La soluzione generale è:<sup>4</sup>

$$y = A \cos(\omega_0 x) + B \sin(\omega_0 x)$$

perché soddisfa l'equazione (6.1) e ha due parametri reali liberi. Verifichiamo che soddisfa.

$$y' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 x) + B\omega_0 \cos(\omega_0 x)$$

$$y'' = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 x) - B\omega_0^2 \sin(\omega_0 x) = -\omega_0^2 y$$

Infine, osserviamo che la soluzione  $y = A \cos(\omega_0 x) + B \sin(\omega_0 x)$  si può riscrivere nella forma:

$$y = D \cos(\omega_0 x + \varphi)$$

infatti:

$$D \cos(\omega_0 x + \varphi) = D[(\cos \varphi)(\cos(\omega_0 x)) + (-\sin \varphi)(\sin(\omega_0 x))]$$

e notando che esistono  $\varphi$  e  $D$  tali che  $A = D \cos \varphi$  e  $B = -D \sin \varphi$ , la soluzione dell'ODE diventa  $y = D \cos(\omega_0 x + \varphi)$ .

**§ 6.4.1. Oscillatore armonico smorzato.** — Vediamo ora un'ODE più complicata, l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato:

$$y'' = -k_1 y - k_2 y'$$

che, per come comparirà nei problemi di fisica, riscriviamo nella forma

$$y'' + \omega_0^2 y + 2\gamma y' = 0$$

Provando una soluzione del tipo  $y = (a + bx)e^{-\alpha x}$  ci accorgiamo che possiamo determinare i parametri  $a, b, \alpha$  in modo che soddisfi l'ODE di partenza.

$$y' = be^{-\alpha x} - (a + bx)\alpha e^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}(b - \alpha(a + bx))$$

$$y'' = -\alpha be^{-\alpha x} + \alpha^2(a + bx)e^{-\alpha x} - b\alpha e^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}(-2\alpha b + \alpha^2(a + bx))$$

Sostituendo nell'ODE iniziale,

$$e^{-\alpha x}[-2\alpha b + \alpha^2(a + bx) + 2\gamma b - 2\gamma\alpha(a + bx) + \omega_0^2(a + bx)] = 0$$

Poiché  $e^{-\alpha x} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$(a + bx)(\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2) + 2b(\gamma - \alpha) = 0$$

<sup>4</sup>In generale, combinazioni lineari di  $e^{i\omega_0 x}$  ed  $e^{-i\omega_0 x}$  soddisfano, ma imponendo che la soluzione sia reale si ottiene questa formula. A tal proposito, proponiamo lo svolgimento dell'esercizio 9, sezione 9.2.

- Se  $\alpha \neq \gamma$ , deve essere  $b = 0$ , altrimenti nel caso  $x = -\frac{a}{b}$  non ottengo 0. Quindi

$$a(\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2) = 0$$

$$\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Poiché sono nel caso  $\alpha \neq \gamma$ , so che le due soluzioni  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono distinte. Ma allora soluzioni del tipo

$$y = ae^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})x}, \quad y = ae^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})x}$$

soddisfano. Quindi, dato che stiamo trattando un'ODE omogenea e la derivata è un operatore lineare, anche una combinazione lineare di queste soluzioni è soluzione. Ottengo così soluzioni del tipo

$$y = e^{-\gamma x} \left( a_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} x} + a_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} x} \right)$$

che, come ci aspettavamo, hanno due parametri liberi. Notare che se  $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$  nella soluzione abbiamo degli esponenziali reali, mentre se  $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$  abbiamo degli esponenziali complessi e in tal caso la soluzione si può riscrivere come:

$$y = e^{-\gamma x} \left( A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x) + B \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x) \right).$$

- Se  $\alpha = \gamma$ , allora  $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma$ , e dunque quelle che prima erano soluzioni distinte ora coincidono. Sembrerebbe che si sia perso un parametro libero, ma all'inizio non sarebbe stato necessario porre  $b=0$ , quindi otteniamo soluzioni della forma

$$y = (a + bx)e^{-\gamma x}$$

che, come ci aspettavamo, hanno due parametri liberi.

## 6.5 ODE lineari non omogenee

Spendiamo infine qualche riga sulle ODE lineari non omogenee. Esse sono equazioni differenziali della forma

$$y^{(n)} + y^{(n-1)} f_{n-1}(x) + \dots + y f_0(x) = h(x). \quad (6.2)$$

In questi casi, per la linearità della derivata, al fine di trovare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea è sufficiente trovare una soluzione particolare  $y = p(x)$  dell'equazione non omogenea e sommarvi la soluzione generale  $y = g(x)$  dell'equazione omogenea associata.

Infatti se dall'equazione (6.2) sottraiamo una soluzione particolare otteniamo:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \dots + y f_0(x) - [p^{(n)}(x) + \dots + p(x) f_0(x)] &= h(x) - h(x) = 0 \\ (y - p(x))^{(n)} + (y - p(x))^{(n-1)} f_{n-1}(x) + \dots + (y - p(x)) f_0(x) &= 0 \end{aligned}$$

e questa è l'omogenea associata, risolta da  $y - p(x) = g(x)$ , quindi otteniamo la soluzione

$$y = p(x) + g(x).$$

## 6.6 Problemi di Cauchy

Per problema di Cauchy si intende un'ODE messa a sistema con delle condizioni iniziali riguardanti la funzione e le sue derivate<sup>5</sup>. Se per esempio l'ODE è del second'ordine, le condizioni iniziali riguarderanno la funzione e la derivata prima. Un esempio di problema di Cauchy è il seguente:

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Come abbiamo già visto, la soluzione generale dell'ODE riportata è:

$$y = A \cos x + B \sin x$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo i valori di  $A$  e  $B$  che ci danno la soluzione particolare che cerchiamo:

$$y(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = A = 1$$

$$y'(x) = -\sin x + B \cos x \Rightarrow y'(0) = B = 0$$

La soluzione particolare è perciò:

$$y(x) = \cos x.$$

## 6.7 Conservazione dell'energia

Sia data una particella di massa  $m$  che si muove, per semplicità, in una dimensione. Supponiamo che se la particella si trova nella posizione  $x$ , allora su di essa agisce una forza  $f(x)$ . Sia  $x(t)$  la posizione della particella in funzione del tempo. Ricordando che l'accelerazione è la derivata temporale seconda e applicando il secondo principio della dinamica si ha:

$$m\ddot{x}(t) = f(x(t))$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per la velocità:

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = f(x(t))\dot{x}(t)$$

Notando ora che  $m\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right]$  e che  $f(x(t))\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} f(y)dy$ , si ha:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right] = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} f(y)dy$$

Cioè:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x(t)} f(y)dy \right] = 0$$

Dato che la derivata si annulla per ogni  $t$ , allora la funzione tra parentesi quadre deve essere uguale ad una costante. Chiamiamo *energia* tale costante, che indichiamo con  $E$ . Dunque per ogni  $t$  si ha:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - \int_{x_0}^{x(t)} f(y)dy = E$$

---

<sup>5</sup>In fisica, spesso ci troviamo a risolvere ODE in cui  $x$  gioca il ruolo del tempo, la funzione  $y$  è la posizione di una particella,  $y'$  è la sua velocità e  $y''$  è la sua accelerazione.

Il termine  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$  è detto *energia cinetica*, mentre il termine  $-\int_{x_0}^{x(t)} f(y)dy$  è detto *energia potenziale* e si indica usualmente con  $U(x)$ . L'equazione diventa dunque:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + U(x(t)) = E.$$

Il punto  $x_0$  nella definizione di energia potenziale può essere scelto in modo arbitrario. L'energia potenziale è dunque definita a meno di una costante additiva.

Osserviamo che se sappiamo calcolare  $U(x)$  (cioè la primitiva della forza  $f(x)$ ), allora dall'equazione precedente possiamo calcolare la velocità della particella in funzione della sua posizione, senza necessariamente conoscere l'espressione esplicita della posizione in funzione del tempo.

Osserviamo che questo è anche un metodo per risolvere equazioni differenziali, infatti l'equazione precedente è a variabili separabili. Dunque se si sanno calcolare le primitive, si può trovare esplicitamente  $x(t)$ .

**§ 6.7.1. Esempio: forza elastica.** — Supponiamo che la nostra particella è soggetta ad una forza elastica del tipo  $f(x) = -k(x - x_c)$ , cioè si ha una molla ideale con lunghezza a riposo nulla, incernierata in  $x = x_c$  e con costante elastica  $k$ .

L'*energia potenziale* elastica è dunque: (scelgo  $x_0 = x_c$ )

$$U(x) = -\int_{x_c}^x f(y)dy = \int_{x_c}^x k(y - x_c)dy = \int_0^{x-x_c} kzdz = \frac{1}{2}k(x - x_c)^2$$

Perciò la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_c)^2 = E.$$

**§ 6.7.2. Esempio: forza gravitazionale.** — Supponiamo di avere una massa  $M$  incollata nell'origine  $x = 0$  e una massa  $m$  vincolata a muoversi nella semiretta  $x > 0$ . La forza agente sulla massa  $m$  è allora  $f(x) = -\frac{GmM}{x^2}$ .

L'*energia potenziale* gravitazionale è dunque (scegliendo  $x_0 = +\infty$ ):

$$U(x) = -\int_{+\infty}^x f(y)dy = \int_{+\infty}^x \frac{GmM}{y^2}dy = -\frac{GmM}{x}$$

Perciò la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{GmM}{x} = E$$

Un analogo calcolo si può fare nel caso in cui le particelle sono elettricamente cariche.

**§ 6.7.3. Esempio: gravità costante .** — Supponiamo di avere una massa  $m$  vincolata a muoversi sull'asse  $z$ . Sulla massa  $m$  agisce una forza costante  $f(z) = -mg$  opposta all'asse  $z$ .<sup>6</sup> L'*energia potenziale* gravitazionale è dunque (scegliendo  $x_0 = 0$ ):

$$U(x) = -\int_0^z f(y)dy = \int_0^z mgdy = mgz.$$

Perciò la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = E.$$

---

<sup>6</sup>Si può immaginare, ad esempio, una situazione fisica in cui c'è una pallina soggetta alla gravità terrestre vincolata a muoversi su un'asta verticale incernierata al pavimento.

## 6.8 Non conservazione dell'energia

Abbiamo fatto un'ipotesi fondamentale sulla forza: cioè che abbia una forma del tipo  $f(x)$ , ovvero che non sia funzione esplicita del tempo. Ad esempio, la forza  $f(x) = -kx$  non ha dipendenza esplicita dal tempo, ma dipende implicitamente dal tempo perchè la posizione  $x$  della particella dipende dal tempo.

Poniamoci ora in un caso particolare. Supponiamo di avere due forze che agiscono sulla particella: una forza che è funzione solo della posizione e un'altra che è funzione solo del tempo. Dunque la forza totale agente sulla massa  $m$ , che si trova al tempo  $t$  nella posizione  $x$ , è del tipo  $f(x, t) = F(x) + G(t)$ : questa è una forza che dipende esplicitamente dal tempo (a causa della funzione  $G(t)$ ). L'energia si conserva o no?

La seconda legge di Newton dice:

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)) + G(t)$$

Moltiplicando per la velocità e osservando che  $m\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right]$  e che  $F(x(t))\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} F(y)dy$ , si ha:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x(t)} F(y)dy \right] = G(t)\dot{x}(t).$$

Nelle parentesi quadre appare la funzione che prima abbiamo chiamato *energia*. Ora però non è costante: la indichiamo dunque con  $E(t)$ . Siamo arrivati all'equazione:

$$\frac{d}{dt}E(t) = G(t)\dot{x}(t)$$

Se la forza  $G(t)$  è tale che  $G(t) = 0$  sempre, allora ci riconduciamo al caso precedente in cui  $E(t) = E = \text{costante}$ . Dunque diciamo che  $G(t)$  è una *forza non conservativa* (perché è sua la colpa della non conservazione dell'energia!). Il termine  $G(t)\dot{x}(t)$  si dice *potenza della forza G* e si indica usualmente con  $P(t)$ . Abbiamo dunque dimostrato che:

$$\frac{d}{dt}E(t) = P(t),$$

cioè che la derivata temporale dell'energia è uguale alla potenza fatta dalle forze non conservative.<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>Ricordiamo che ci siamo posti nel caso particolare  $f(x, t) = F(x) + G(t)$ . In generale possiamo avere anche forze che mischiano la posizione e il tempo, ad esempio forze del tipo  $f(x, t) = k \cdot tx$  con  $k$  costante.

---

# — ESERCIZI —

---

## E.9 Esercizi proposti all'esercitazione

★★★★★ **Esercizio 1** Calcolate la derivata di  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  e di  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

★★★★☆☆ **Esercizio 2** Dimostrare che  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  (Questo è un risultato che si usa spesso, viene ricordato con il nome di "bac meno cab").

★★★★☆☆ **Esercizio 3** Consideriamo una massa  $m$  posta all'estremità di un pendolo ideale, dimostrare che per angoli  $\theta \ll 1$  che il pendolo descrive vale la seguente equazione del moto

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

dove  $l$  è la lunghezza del pendolo e  $g$  l'accelerazione gravitazionale.

★★☆☆☆☆ **Esercizio 4** Calcolare al sesto ordine in  $x$  la funzione  $e^{x^2+\alpha x}$  attorno ad  $x_0 = 0$ .

★★★☆☆☆ **Esercizio 5** Trovare l'espansione in serie di Taylor dell'arcoseno in un intorno di 0. (*Hint: Partire dall'espansione in serie della derivata dell'arcoseno*)

★★★☆☆☆ **Esercizio 6** Considerare  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Trovare il polinomio di Taylor per  $x \rightarrow 0$  di  $f$  per qualsiasi ordine  $n$ .

★★★★☆☆ **Esercizio 7** Dimostrare che  $\nabla r = \hat{\mathbf{r}}$ , dove  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ ,  $r = \|\mathbf{r}\|$  e  $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

★★★★★ **Esercizio 8** Sia  $U = -\frac{GMm}{r}$  e  $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ . Mostrare che  $\mathbf{F} = -\nabla U$ .

★★★★☆☆ **Esercizio 9 Formule trigonometriche** Usare la formula di De Moivre per dimostrare le seguenti formule trigonometriche.

(i)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$

(ii)  $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$

★★★☆☆☆ **Esercizio 10** Calcolare  $\int_0^{2\pi} \cos^4 x (\cos x - \sin x) dx$ .

★★★★☆ **Esercizio 11** La funzione  $y(x)$  soddisfa il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^2 y'' = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Ricavare  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x)$ .

★★★★★ **Esercizio 12** Dire esplicitamente quali integrali bisogna fare per risolvere l'equazione  $F = ma$  nei tre casi in cui  $F$  dipende solo da: (i)  $v$ , (ii)  $t$ , (iii)  $x$ .

★★★★☆ **Esercizio 13** Considerare una fune lunga  $L$  e densità di massa lineare  $\rho(x) = \rho_0 + \rho_1 \left(\frac{x}{L}\right)^2$ .

a) Calcolare la massa della fune.

b) Supporre che la fune è sospesa al soffitto dall'estremità più leggera in presenza di gravità. Fissando la costante arbitraria dell'energia potenziale tale che essa valga 0 al soffitto, calcolare l'energia potenziale totale della fune.

★★★★☆ **Esercizio 14 Oscillatore armonico con forzante sinusoidale**

Considerare la seguente ODE:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) + f \cos(\omega t).$$

dove  $\omega$ ,  $\omega_0$  e  $f$  sono delle costanti.

a) Supponendo  $|\omega| \neq |\omega_0|$ , trovare tutte le soluzioni.

b) Supponendo  $\omega = \omega_0$ , trovare tutte le soluzioni.

*Hint per la domanda b): Provare come soluzione particolare un qualche polinomio di grado basso moltiplicato per coseno e seno della frequenza che vi aspettate e vedere se funziona.*

★★★☆☆ **Esercizio 15** Una palla viene lanciata in aria in verticale. L'attrito è  $F = -\gamma v$ . Trovare velocità e altezza in funzione del tempo.

★★★★☆ **Esercizio 16** Usare l'integrazione per parti per dimostrare la formula

$$x! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$$

Tale espressione è la *funzione Gamma di Eulero*.

★★★★☆☆ **Esercizio 17** a) Calcolare  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ .  
(*Suggerimento*: dove avete già visto questa espressione?)  
b) Calcolare  $\int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2}$ . Il risultato varia al variare di  $\alpha$ ?

## E.10 Esercizi extra

★★☆☆☆ **Esercizio 18** Dati  $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (4, -2, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (7, 3, -1)$  calcolare:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{b}$
- $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

★☆☆☆☆ **Esercizio 19** Determinare il determinante in funzione di  $n$  di una matrice  $n \times n$  formata da 1 sull'antidiagonale e 0 in tutte le altre entrate.

★★★★☆☆ **Esercizio 20** Sia dato un tronco di cono di un materiale di resistività  $\rho$ . I raggi sono rispettivamente  $a$  e  $b$  con  $a \geq b$  e l'altezza è  $h$ . Qual è la resistenza ai capi dell'oggetto? (Nota importante: la soluzione richiesta deve essere valida per  $b \approx a$ . Discutere sul perché quando  $a$  è sensibilmente più grande di  $b$ , la soluzione data in precedenza non funziona.)

★★★★★☆☆ **Esercizio 21 Formule trigonometriche bis** Usare la formula di De Moivre, e in generale i numeri complessi, per dimostrare le seguenti formule trigonometriche. *Consigliamo di svolgere quest'esercizio dopo aver visto l'esercizio 23.*

- (i)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- (ii)  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
- (iii)  $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) - 1}{\cot(\beta) + \cot(\alpha)}$
- (iv)  $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
- (v)  $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
- (vi)  $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$
- (vii)  $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$
- (viii)  $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
- (ix)  $1 + 2\cos(x) + 2\cos(2x) + 2\cos(3x) + \dots + 2\cos(nx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
- (x)  $\sin^3(\alpha)$  in funzione di  $\sin(\alpha), \sin(2\alpha), \sin(3\alpha), \dots$

## § E.10.1. ODE. —

★★★★★ **Esercizio 22** Verificare che, detta  $x$  un'incognita reale,  $\forall \omega_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\forall w, z \in \mathbb{C}$ ,  $w e^{i\omega_0 x} + z e^{-i\omega_0 x}$  è soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' = -\omega_0^2 y$$

★★★★★ **Esercizio 23** Dimostrate, usando quanto ricavato nel paragrafo 4.2.2 della lezione, che

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Queste definizioni di seno e coseno potranno poi esservi utili per dimostrare in maniera più semplice alcune identità goniometriche... e non solo!

★★☆☆☆ **Esercizio 24** Risolvi con una serie di potenze attorno a  $x = 0$  l'ODE

$$y'' + xy = 0.$$

★★★☆☆ **Esercizio 25** Risolvere l'ODE

$$yy' = x(4 - y^2)$$

(*Suggerimento*: usare la separazione delle variabili)

★★★☆☆ **Esercizio 26** Che equazione ha una *Cicloide*? (traiettoria di un punto sul cerchione di una ruota di raggio  $R$ ) Quale ODE risolve la Cicloide (Soluzione:  $y' = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}$ )?

## § E.10.2. Volumetti Infinitesimi. —

★★★☆☆ **Esercizio 27 Formule di Pappo** Vediamo i Teoremi di Pappo. Il primo afferma che la superficie di una superficie di rotazione (ottenuta ruotando la figura bidimensionale di contorno lungo  $L$  intorno ad un asse che non interseca la figura) è uguale alla lunghezza  $L$  per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè  $2\pi R$ , con  $R$  distanza del baricentro del contorno dall'asse di rotazione. Il secondo afferma che il volume di un volume di rotazione (ottenuto ruotando la figura bidimensionale di area  $S$  intorno ad un asse che non interseca la figura) è uguale all'area  $S$  per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè  $2\pi R$ , con  $R$  raggio del baricentro della superficie dall'asse di rotazione.

- (i) Dire perché i due teoremi sono veri, pensando a quale superficie è generata dalla rotazione di un segmento  $d\ell$  e a quale volume è generato dalla rotazione di una superficie  $ds$
- (ii) Trovare superficie e volume di un toro
- (iii) Trovare il volume di un toro a sezione rettangolare.

★★☆☆☆ **Esercizio 28** Trova la formula del raggio di curvatura nel punto  $(x_0, y_0)$  della funzione  $y = f(x)$  in funzione di  $y, y', y''$ .

★★★★★ **Esercizio 29 Momenti d'inerzia** Il *momento d'inerzia* è definito come  $I_0 = \int \rho(\mathbf{r})r^2 dV$  dove  $\mathbf{r}$  è il vettore che punta il volumetto  $dV$ ,  $\rho$  è la densità e  $r^2$  è la distanza dall'asse attorno a cui avviene la rotazione. Calcolare il momento d'inerzia di qualunque cosa. Esempi: sfera, guscio sferico, lastra rettangolare di spessore trascurabile, parallelepipedo a basi rettangolari, asta sottile rispetto al centro, asta sottile rispetto a un estremo, cono rispetto all'asse.

§ E.10.3. Ordini e Limiti. —

★★☆☆☆ **Esercizio 30** Data  $y^5 - y = x$  calcolare fino al quart'ordine non banale  $y(x)$ . (*Soluzione:  $y \approx -x - x^5 - 5x^9 - 35x^{13}$* )

★★☆☆☆ **Esercizio 31** Calcolare al sesto ordine  $e^{x^2+\alpha x}$  in  $\alpha$ .

★★☆☆☆ **Esercizio 32** Calcolare al second'ordine  $\frac{1}{\sqrt{1-2x \cos \theta + x^2}}$  in  $x$ .

★★☆☆☆ **Esercizio 33** Trovare l'espansione in Taylor dell'arcoseno, sapendo la sua derivata.

★★☆☆☆ **Esercizio 34** Se  $1 \gg \alpha \gg \beta$ , ha più senso approssimare  $1 + \alpha + \beta$  al primo ordine in  $\alpha$  o al primo ordine in  $\beta$ ?

§ E.10.4. Fisica. —

★★★★☆☆ **Esercizio 35** Nello spazio sono poste una carica  $-q$  nell'origine e una carica  $+q$  nel punto di coordinate  $(0, 0, d) = \mathbf{d}$ . Trovare il campo elettrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  in un punto  $\mathbf{r}$  con  $d \ll r$ , al prim'ordine in  $\mathbf{d}$ .

★★★★☆☆ **Esercizio 36** Ad una certa ora del mattino inizia a nevicare, e a mezzogiorno uno spalaneve parte per pulire le strade. La neve continua a cadere con intensità costante. Si sa che la velocità con cui procede lo spazzaneve è inversamente proporzionale all'altezza della neve. Nelle prime due ore di lavoro lo spazzaneve riesce a pulire 4 km di strada. Nelle due ore successive invece se ne liberano solo 2 km. A che ora ha iniziato a nevicare?

★★☆☆☆ **Esercizio 37** In presenza di gravità e di una forza di attrito viscoso  $\mathbf{F} = -\lambda \mathbf{v}$ , una particella di massa  $m$  viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale di modulo  $v_0$ . Determinare la massima altezza raggiunta rispetto al punto di partenza.

★★★★☆☆ **Esercizio 38** Ho un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e un campo magnetico  $\mathbf{B}$  ortogonali. Una particella di carica  $q$  parte da ferma e su di essa agisce la forza elettrica  $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$  e la forza di Lorentz  $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Che forma assume la traiettoria? (*Soluzione: è una Cicloide, basta saper risolvere la ODE  $y'' = -y + c$* )

★★★★☆ **Esercizio 39** Una corda lunga  $l$  di massa  $m$  è distesa orizzontalmente su un tavolo eccetto per l'estremità che pende verticalmente per una lunghezza  $x_0$ . In presenza di gravità, come evolve il sistema?

★★★★☆ **Esercizio 40** Su un oscillatore armonico (massa  $m$  e costante elastica  $k$ ) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge  $F = \alpha t$ . È possibile assegnare delle condizioni iniziali a  $t = 0$ s in modo tale che la massa si muova di moto uniforme? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto.

★☆☆☆☆ **Esercizio 41** Su un oscillatore armonico (massa  $m$  e costante elastica  $k$ ) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge  $F = \alpha t^2$ . È possibile assegnare delle condizioni iniziali a  $t = 0$ s in modo tale che la massa si muova di moto uniformemente accelerato? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto.

★★☆☆☆ **Esercizio 42** Un punto materiale si muove su una guida parabolica di equazione  $y = -ax^2$ . È possibile che il punto si stacchi dalla guida? (*Suggerimento*: usare la formula per il raggio di curvatura e la conservazione dell'energia).

★★★★☆ **Esercizio 43** Una scodella a forma di parallelepipedo di massa  $M$  e sezione  $S$  può muoversi liberamente su un piano orizzontale senza attrito. Su di essa cade della pioggia: ciascuna goccia all'arrivo sulla scodella ha una velocità orizzontale  $V_x > 0$  e una verticale  $V_z < 0$ . Inoltre la massa di acqua per unità di tempo che arriva su una superficie  $S$  fissa sul terreno è costante e vale  $\Gamma$ . Supponendo che la pioggia raccolta dalla scodella rimanga in quiete rispetto ad essa, studiarne il moto. Trascurare l'effetto dell'urto della pioggia sulle superfici laterali della scodella. Trovare la traiettoria descritta dalla scodella in funzione di costanti che dipendono dalle condizioni iniziali.

★★★★☆ **Esercizio 44** Un proiettile di massa  $m$  viene lanciato da terra con una velocità iniziale di modulo  $v_0$  che forma un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale. Oltre a un campo di gravità costante è presente una forza di attrito viscoso  $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$ . Trovare l'equazione esplicita della traiettoria, e discutere il limite nel quale si può considerare "piccolo" l'attrito, dicendo in modo preciso che cosa si intende con questo.

★★☆☆☆ **Esercizio 45** L'equipaggio di un razzo inizialmente fermo vuole aumentare la propria velocità espellendo una massa  $\eta m$  di gas. La velocità del gas al momento dell'emissione relativa al razzo è sempre  $-v_0$ . La massa iniziale di quest'ultimo è  $m$  e chiaramente  $0 \leq \eta < 1$ . Indicheremo con  $\mu(t)$  la massa espulsa al tempo  $t$ . Calcolare la velocità finale del razzo nei due casi seguenti:

(i) tutta la massa viene espulsa istantaneamente a  $t = 0$ s;

(ii) la massa espulsa per unità di tempo è costante, e viene espulsa tutta in un tempo  $\tau$ .

Dette  $v_f^{(1)}$  e  $v_f^{(2)}$  le velocità finali del razzo nel primo e nel secondo caso, stabilire se è vero che  $\lim_{\tau \rightarrow 0} v_f^{(2)} = v_f^{(1)}$ .

★★★★☆ **Esercizio 46** Consideriamo un oscillatore armonico forzato, senza

attrito, con una forzante  $F = F_0 \cos \omega t$ , e sia  $\omega_0$  la frequenza naturale dell'oscillatore. Come ci si aspetta che sia la soluzione, qualitativamente? Claimare la soluzione e verificare che soddisfa l'equazione differenziale.

★☆☆☆☆ **Esercizio 47** Una particella di massa  $m$  è soggetta alla forza  $F(v) = -bv^2$ . La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è  $v_0 > 0$ . Trovare  $x(t)$ .

★☆☆☆☆ **Esercizio 48** Una particella di massa  $m$  è soggetta alla forza  $F(x) = -kx$ . La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è  $v_0$ . Trovare  $x(t)$ .

★☆☆☆☆ **Esercizio 49** Una particella di massa  $m$  è soggetta alla forza  $F(x) = +kx$ . La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è  $v_0$ . Trovare  $x(t)$ .

★☆☆☆☆ **Esercizio 50** Una particella di massa  $m$  è soggetta alla forza  $F(t) = F_0 e^{-bt}$ . La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è  $0 \text{ m s}^{-1}$ . Trovare  $x(t)$ .

★★☆☆☆ **Esercizio 51** Un razzo di massa  $m$  e a velocità  $v$  ha ugelli con velocità di scarico pari a  $u$ . Trovare l'equazione del razzo che mette in relazione la massa di carburante consumata e il  $\Delta v$ . Trovare la massa corrispondente a  $\Delta v = 3u$ .

★★★★☆ **Esercizio 52 Strato di ghiaccio su un lago** Supponendo che la temperatura dell'aria sulla superficie di un lago ghiacciato rimanga costantemente pari a  $-5,2$  gradi centigradi per 60 giorni, si formuli un modello per descrivere la rapidità con cui cresce lo spessore del ghiaccio a partire dal suo valore iniziale  $h_0 = 25$  cm. Sapendo, in particolare, che dopo 12 giorni si misura uno spessore di 37 cm e dopo 21 giorni uno spessore di 44 cm, si stimi lo spessore  $h_f$  raggiunto dal ghiaccio dopo 60 giorni. (SNS 2015 1)

### § E.10.5. Integrali. —

★★☆☆☆ **Esercizio 53** Calcolare  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ .  
(Suggerimento: dove avete già visto questa espressione?)  
Calcolare  $\int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2}$ . Il risultato varia al variare di  $\alpha$ ?

★★☆☆☆ **Esercizio 54** Usare l'integrazione per parti per dimostrare l'utile formula ricorsiva

$$f(n) := \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} \theta \, d\theta.$$

Dimostrare che funziona anche con i seni al posto dei coseni e anche integrando da 0 a  $\pi$  anziché da 0 a  $\pi/2$ . Calcolare  $f(8)$ . Calcolare poi  $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta \, d\theta$ . (Suggerimento: usare de Moivre)

★★★★☆ **Esercizio 55** Calcolare  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .  
(Suggerimento: ricondursi a  $(-1/2)!$  con un cambio di variabili.)

★★★★☆ **Esercizio 56** A volte, invece, serve trasformare integrali polinomiali

o con radici quadrate in integrali trigonometrici in seni e coseni (o seni e coseni iperbolici). Ad esempio, cosa vi ricordano i seguenti integrali?, quanto valgono?

$$(i) \int \frac{du}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$$

$$(ii) \int \frac{du}{\sqrt{(u^2-a^2)}}$$

$$(iii) \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+a^2)}}$$

$$(iv) \int \frac{du}{\sqrt{(-u^2-a^2)}}$$

$$(v) \int \frac{du}{a^2+u^2}$$

$$(vi) \int \frac{du}{a^2-u^2}$$

## — RINGRAZIAMENTI —

---

Ringraziamo tutti quelli che hanno contribuito alla stesura delle dispense degli anni scorsi, su cui questa si basa, nonché tutti quelli che hanno segnalato o vorranno segnalare eventuali errori presenti.