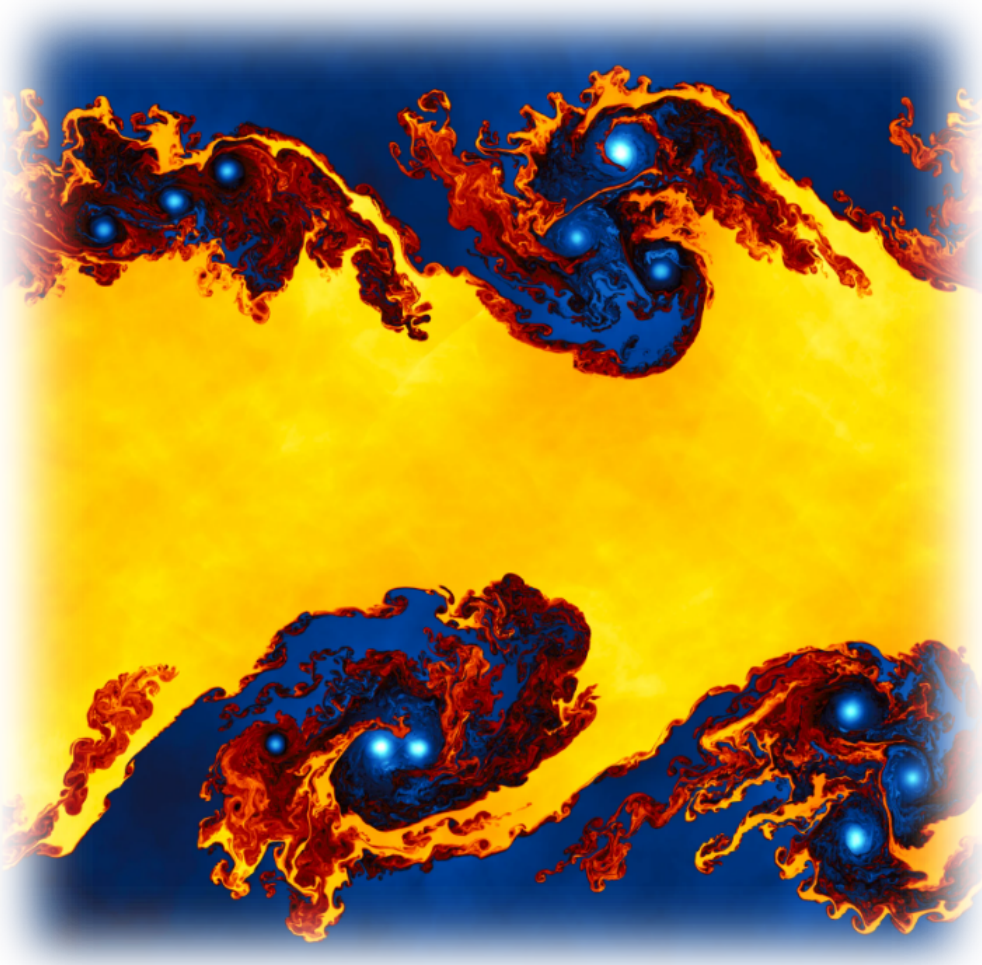


Fluidodinamica

Matteo Caraci*, Giovanni Francesco Zirilli†

6 Febbraio 2025



Sommario

Introduzione semi-formale delle equazioni della fluidodinamica; equilibrio idrostatico, fluidi ideali e equazione di Bernoulli; alcuni esempi notevoli di applicazioni. Cenni alla viscosità e alla turbolenza.

*matteo.caraci@sns.it

†giovanni.zirilli@sns.it

— INDICE —

1	Premessa	4
2	Introduzione	4
2.1	★★★★★★ Cos'è un fluido?	4
2.2	★★★★★★ Come lo modellizziamo?	4
2.2.1	★★★★★★ Ipotesi del continuo	4
2.2.2	★★★★★★ Elemento fluido	5
3	Fluidostatica	5
3.1	★★★★★★ Equilibrio idrostatico	6
3.1.1	★★★★★★ Legge di Stevino	6
3.1.2	★★★★★★ Atmosfera isoterma	7
3.1.3	★★★★★★ Pianeta fluido	7
3.1.4	★★★★★★ Fluido rotante	7
3.2	★★★★★★ Spinta di Archimede	8
3.2.1	★★★★★★ Oscillazioni con Archimede	9
3.3	★★★★★★ Tensione superficiale	9
3.3.1	★★★★★☆☆ Fluido a contatto con un piano solido	11
3.3.2	★★★☆☆☆☆ Capillarità	12
3.4	★☆☆☆☆☆☆ Cos'è la pressione?	12
3.4.1	★☆☆☆☆☆☆ Tensore degli sforzi	12
4	Fluidi ideali	14
4.1	★★★★★★ Equazione di continuità	14
4.1.1	★★★★★★ Conservazione della portata	15
4.2	★☆☆☆☆☆☆ Equazione di Eulero	15
4.3	★★★★★★ Equazione di Bernoulli	16
4.3.1	★★★★★★ Legge di Torricelli	17
4.3.2	★★★★★★ Profilo a velocità costante	18
4.3.3	★★★★★☆☆ Caso non stazionario	18
4.3.4	★★★☆☆☆☆ Caso comprimibile	19
4.4	★★★☆☆☆☆ Analogia con l'elettrostatica	20
4.4.1	★★★★★☆☆ Flusso potenziale	20
4.4.2	★☆☆☆☆☆☆ Equazione della vorticità	20
4.4.3	★★★☆☆☆☆ Sfera immersa in un flusso ideale	21
5	Equazioni di Navier-Stokes	23
5.1	★★★★☆☆ Viscosità	23
5.1.1	★★★★★★ Legge di Stokes	23
5.2	★★★☆☆☆☆ Equazioni di Navier-Stokes	24
5.2.1	★★★☆☆☆☆ Legge di Stokes: derivazione	25
5.3	★★★☆☆☆☆ Linearizzazione	26
5.3.1	★★★☆☆☆☆ Onde sonore	26
5.3.2	★★★★★☆☆ Equazione delle onde	28
5.3.3	★★★★★☆☆ Velocità del suono	28
5.3.4	★★★☆☆☆☆ Onde di superficie: impostazione	29
5.3.5	★★★☆☆☆☆ Onde di superficie: soluzione	30

6	Interazioni non-lineari	32
6.1	★☆☆☆☆ Sovrapporre onde diverse	33
6.2	★☆☆☆☆ La soluzione lineare	34
6.3	★☆☆☆☆ La correzione non-lineare	34
6.4	★☆☆☆☆ Interazione di onde	36
6.5	★☆☆☆☆ Stabilità e connessione con la turbolenza	37
6.6	★☆☆☆☆ Turbolenza e la cascata diretta	38
A	Analisi in più variabili	40
A.1	★★★★★ Gradiente, Divergenza, Rotore e Laplaciano	40
A.1.1	★★★★★ Gradiente	40
A.1.2	★★★★★ Divergenza	41
A.1.3	★★★★★ Rotore	41
A.1.4	★★★★☆☆ Laplaciano	41
A.1.5	★★★★☆☆ Identità ricorrenti	42
A.2	★★☆☆☆☆ Teorema di Stokes	42
A.2.1	★★☆☆☆☆ Teorema della divergenza	42
A.2.2	★★☆☆☆☆ Teorema del rotore	43
B	Algebra lineare	43
B.1	★★★☆☆ Applicazioni lineari	43
B.1.1	★★★☆☆ Notazione di Einstein	44
B.1.2	★★★☆☆ Cambi di base	45
B.1.3	★★☆☆☆☆ Teorema spettrale	45
B.2	★★☆☆☆☆ Tensori	46
B.2.1	★★☆☆☆☆ Definizione operativa	46
B.2.2	★★☆☆☆☆ Tensori isotropi	47
C	Extra	47
C.1	★☆☆☆☆ Legge di Stokes: conti	48
C.2	★☆☆☆☆ Decomposizione del campo di velocità	49
	Esercizi	51
E.3	Esercizi olimpici	51
E.4	Esercizi proposti da noi	67
	Soluzioni	72

SEZ. 1 — PREMESSA

Le seguenti dispense si pongono principalmente due obiettivi.

Il primo, in linea con lo spirito generale dello stage, è quello di fornire una referenza utile per affrontare le olimpiadi di Fisica: si ricaveranno in modo semi-formale le leggi della Fluidostatica e della Fluidodinamica, con particolare attenzione al caso dei fluidi ideali.

Il secondo, è quello di presentare tecniche e notazioni di livello universitario, con lo scopo di orientare gli studenti liceali più motivati.

Per aiutare il lettore a riconoscere quali sezioni si prestano più al primo o al secondo scopo, accanto ad ogni titolo saranno presenti delle stelle: più stelle corrispondono ad una maggiore utilità in ambito olimpico.

SEZ. 2 — INTRODUZIONE

2.1 ★★★★★ Cos'è un fluido?

Una sostanza è un fluido, o meglio, si comporta da fluido, se la posizione relativa dei suoi costituenti cambia significativamente, anche sotto l'effetto di una forza arbitrariamente piccola. In pratica, anche se il fluido è in grado di opporre resistenza ad una deformazione, non è in grado di mantenere sotto l'effetto di quest'ultima una forma propria.

Le sostanze che si comportano da solidi invece, riescono ad opporre una resistenza tale alla deformazione da possedere effettivamente una forma propria.

È importante sottolineare che ci sono sostanze che si comportano sia da solidi che da fluidi, a dipendenza delle circostanze; in pratica le equazioni che scriveremo saranno un buon modello per tutte quelle sostanze che si comportano da fluidi.

La categoria dei fluidi è molto ampia, e comprende sia le sostanze liquide (come l'acqua), che quelle gassose (come l'aria). La differenza fondamentale tra liquidi e gas è la loro comprimibilità: i gas possono essere compressi molto più facilmente dei liquidi, quindi subire variazioni di volume più significative.

2.2 ★★★★★ Come lo modellizziamo?

Come è noto dalla Chimica, le sostanze fluide sono in generale composte da molecole, disposte in modo casuale nello spazio. Queste interagiscono tra di loro mediante forze che sono fortemente repulsive a brevi distanze, e debolmente attrattive su distanze più lunghe. Sebbene sia possibile introdurre dei potenziali modello che rappresentano correttamente tale interazione, modellizzare un fluido tenendo conto della sua struttura granulare vorrebbe dire risolvere un numero di equazioni del moto, accoppiate tra loro, dell'ordine del numero di Avogadro ($6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$); tale approccio è, da un punto di vista computazionale, fuori discussione, per cui è necessaria un'approssimazione che semplifichi il problema.

§ 2.2.1. ★★★★★ **Ipotesi del continuo.** — Per ovviare al problema ci vengono in aiuto le leggi della statistica. Infatti, se consideriamo una porzione di fluido ad una scala abbastanza grande da contenere un grandissimo numero di molecole, le fluttuazioni delle grandezze fisiche che interessano la porzione (ad esempio, la densità) verranno soppresse. Questa scala, che diremo *mesoscopica*, deve però essere in qualche modo più piccola della scala su cui avvengono le variazioni macroscopiche delle grandezze in esame, perché altrimenti non saremmo in grado di assegnare un valore univoco e locale delle grandezze fisiche sulla porzione di fluido. Sperimentalmente, si può determinare caso per caso la dimensione tipica della scala mesoscopica.

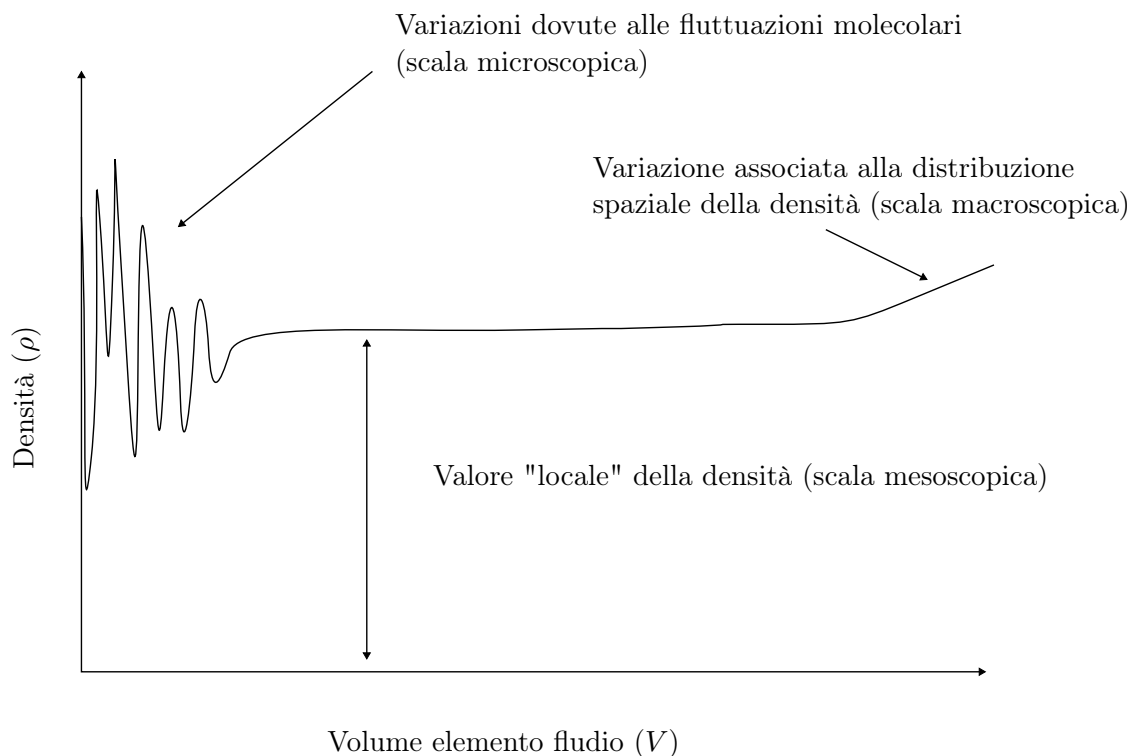


Figura 1: Grafico schematico che rappresenta le diverse scale; il valore della densità viene definito in base al valore "locale" della scala mesoscopica.

§ 2.2.2. ★★★★★ **Elemento fluido.** — A questo punto, dato che abbiamo una buona definizione di grandezza locale, possiamo pensare di dividere il fluido in elementi di volume dV e massa dm , su cui hanno un valore costante tutte le grandezze fisiche rilevanti della fluidodinamica, e su cui risolvere separatamente il problema della dinamica ($F = ma$). In pratica potremo associare ad un dato fluido un campo, cioè una funzione che associa ad ogni punto dello spazio occupato dal fluido (inteso come sottoinsieme di \mathbb{R}^3), una grandezza scalare (come la densità) o vettoriale (come la velocità). Le equazioni della Fluidodinamica (in particolare le equazioni di *Navier-Stokes*) hanno proprio questi campi¹ come incognite: risolvere un fluido significa determinarne

- il campo di velocità $\vec{u}(x, y, z; t)$
- il campo di densità $\rho(x, y, z; t)$
- il campo di pressione $p(x, y, z; t)$

supponendo noto il campo di accelerazione $\vec{g}(x, y, z; t)$ generato dalle forze esterne che agiscono sul fluido stesso. Chiaramente possono esserci altre grandezze fisiche interessanti (come ad esempio il campo di temperatura $T(x, y, z; t)$), per le quali bisognerà chiamare in causa equazioni mutate da altre branche della Fisica (come la Termodinamica).

SEZ. 3 — FLUIDOSTATICA

Come prima cosa analizziamo il comportamento dei fluidi all'equilibrio idrostatico, cioè fluidi in cui $\vec{u}(x, y, z; t)$ è ovunque zero ad ogni istante di tempo. Si avvisa inoltre il lettore che

¹Assumeremo inoltre che questi campi possano essere considerati lisci, cioè derivabili infinite volte; questa è una restrizione non necessaria, infatti esistono fenomeni che prevedono discontinuità nelle grandezze fluidodinamiche, come le onde d'urto. La trattazione che presentiamo varrà sostanzialmente per tutte quelle situazioni fisiche in cui i campi in analisi possono essere considerati sufficientemente regolari.

verranno utilizzate diverse notazioni di analisi in più variabili; si consiglia una lettura preliminare dell'appendice A.

3.1 ★★★★★ Equilibrio idrostatico

All'equilibrio meccanico, la forza totale che agisce su una porzione di fluido si deve annullare. Su tale porzione agiranno innanzitutto le forze di volume, dovute al campo esterno nel quale si trova il fluido, che scriveremo come:

$$\vec{F}_v = \int \rho \vec{F} dV \quad (3.1)$$

Dove l'integrale è esteso a tutto il volume di fluido, e \vec{F} indica la forza esterna per unità di massa (e.g. accelerazione di gravità, accelerazione centripeta, etc); la seconda tipologia di forze saranno le forze di superficie, dovute alla pressione del fluido:

$$\vec{F}_s = - \int p \vec{n} dA \quad (3.2)$$

dove l'integrale è esteso a tutto l'oggetto e la normale è presa uscente da esso. Questa formula merita ulteriori discussioni che coinvolgono la definizione di pressione. Per i più curiosi consiglio di leggere la sezione 3.4.

A questo punto bisogna imporre che le forze di volume, sommate alle forze di superficie, abbiano risultante nulla sulla porzione di fluido, per ottenere:

$$\int \rho \vec{F} dV = \int p \vec{n} dA = \int \vec{\nabla} p dV \quad (3.3)$$

dove si è utilizzato il teorema di Stokes, come spiegato in A.2; dato che la precedente relazione deve valere per ogni volume, si deve avere²:

$$\int_V (\rho \vec{F} - \vec{\nabla} p) dV = 0 \quad \forall V \quad \Rightarrow \quad \rho \vec{F} = \vec{\nabla} p \quad (3.4)$$

Che è l'equazione fondamentale da ricordare in tutti i problemi che richiedono di analizzare un fluido all'equilibrio idrostatico.

§ 3.1.1. ★★★★★ **Legge di Stevino.** — Nel caso gravitazionale la forza esterna per unità di massa \vec{F} è chiaramente \vec{g} , cioè l'accelerazione di gravità. Se adesso consideriamo il gradiente in coordinate cartesiane, e consideriamo \vec{g} uniforme, costante e diretto nel verso negativo dell'asse \hat{z} , e anche la densità è costante e uniforme, troviamo facilmente la legge di Stevino, che tutti conoscete dalla scuola superiore:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow p(z) = p_0 - \rho g z \quad (3.5)$$

dove p_0 è la pressione per $z = 0$. In questo caso abbiamo potuto integrare l'equazione differenziale perché la densità si è supposta costante; vediamo adesso un caso in cui questo non succede, e siamo obbligati a trovare un'ulteriore relazione.

²Formalmente, se abbiamo assunto che tutte le funzioni sono lisce, allora in particolare l'argomento dell'integrale deve essere continuo. A questo punto, se questo non fosse nullo in un punto, allora potremmo prendere un volume sufficientemente piccolo intorno al punto in cui, per continuità, la funzione sarebbe o solo positiva o solo negativa (permanenza del segno); l'integrale su tale volume, ovviamente, non potrebbe essere nullo.

§ 3.1.2. ★★★★★ **Atmosfera isoterma.** — Si consideri un modello molto semplicistico di atmosfera, dove supponiamo che la densità non sia costante ma vari con la pressione. In particolare supponiamo che un certo numero di moli n che occupa un volume V , venga portato ad una diversa pressione mantenendone costante la temperatura durante il processo. Si avrà:

$$p = \frac{n}{V}RT = \frac{RT}{M}\rho \quad (3.6)$$

dove M è la massa molare del gas che costituisce l'atmosfera. Supponendo di considerare una porzione di atmosfera sufficientemente piccola da avere \vec{g} costante in modulo e direzione; segue che avremo:

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho = -g\frac{M}{RT}p \Rightarrow p(z) = p_0 e^{-\frac{gM}{RT}z} \quad (3.7)$$

§ 3.1.3. ★★★★★ **Pianeta fluido.** — Se consideriamo un pianeta sferico di raggio R costituito da un fluido di densità uniforme, tenuto insieme dalla sua stessa forza gravitazionale, possiamo calcolare come varia la pressione in funzione del raggio. Per prima cosa si deve trovare come è fatto \vec{g} , che deve essere radiale per rispettare la simmetria sferica. Sfruttando il teorema di Gauss gravitazionale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \Rightarrow \Phi(\vec{g}) = -4\pi GM_{int} \quad (3.8)$$

si riesce a calcolare il campo gravitazionale generato dal pianeta come:

$$\vec{g}(r) = -\frac{4}{3}\pi\rho G\vec{r} \quad (3.9)$$

a questo punto si integra la solita equazione, dove il gradiente viene scritto in coordinate sferiche, imponendo che la pressione sia nulla sulla superficie esterna del pianeta:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3}\pi\rho^2 Gr \Rightarrow p(r) = \frac{2}{3}\pi\rho^2 G(R^2 - r^2) \quad (3.10)$$

§ 3.1.4. ★★★★★ **Fluido rotante.** — Se consideriamo un fluido che si trova in una bacinella cilindrica di raggio a con la superficie libera inizialmente ad altezza h_0 , possiamo studiare cosa succede al fluido quando viene messo in rotazione con una velocità angolare costante ω . L'idea è che andando nel s.d.r non inerziale solidale con il fluido, il problema diventa un problema di fluidostatica in cui $\vec{F} = \vec{g} + \omega^2\vec{r}$, usando il campo di accelerazione centrifugo. Sfruttando la condizione di equilibrio idrostatico otteniamo:

$$\vec{\nabla}p = -\rho g\hat{z} + \omega^2 r\hat{r} \quad (3.11)$$

ricordando come si scrive il gradiente in coordinate cilindriche, si può così integrare la precedente equazione ottenendo:

$$\vec{\nabla}p = \frac{\partial p}{\partial r}\hat{r} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z} = \omega^2 r\hat{r} - \rho g\hat{z} \Rightarrow p(r, z) = -\rho g z + \rho \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + C \quad (3.12)$$

dove C è una certa costante da determinare. La forma della superficie $p = p_{atm}$, cioè la superficie libera, è quindi:

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + z_{min} \quad (3.13)$$

dove z_{min} è sempre una costante, che questa volta può essere determinata imponendo che il volume del fluido quando ruota sia uguale al volume iniziale. Facendo un po' di conti di geometria si ottengono così le costanti:

$$z_{min} = h_0 - \frac{\omega^2 a^2}{4g} \quad C = p_{atm} + \rho g z_{min} \quad (3.14)$$

Si osservi che tale soluzione funziona finché $z_{min} \geq 0$, cioè quando il fluido non ruota troppo velocemente, perché altrimenti cambia la geometria del sistema; si può risolvere per esercizio anche questo caso e trovare il valore delle costanti.

3.2 ★★★★★ Spinta di Archimede

Un altro argomento tipico di idrostatica, riguarda i corpi immersi nei fluidi in equilibrio. In linea di principio se si immerge un oggetto in un fluido, la forza totale esercitata dal fluido su di esso sarà semplicemente:

$$\vec{F}_A = - \int p \vec{n} dA \quad (3.15)$$

dove l'integrale è esteso a tutta la superficie dell'oggetto. Possiamo però pensare di calcolare tale forza, anche sostituendo il corpo con una porzione di fluido, tale da non modificare lo stato di equilibrio del fluido stesso nella regione esterna. Questo è sicuramente possibile nel caso particolare in cui la forza esterna sia conservativa, cioè:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Psi \Rightarrow -\rho\vec{\nabla}\Psi = \vec{\nabla}p \quad (3.16)$$

dove Ψ è l'energia potenziale per unità di massa associata al campo di forze esterno. Si vede dall'ultima equazione che i gradienti di Ψ e p sono allineati, quindi le due funzioni sono costanti sulle stesse superfici, per la proprietà del gradiente discussa in A.1.1. Prendendo il rotore della 3.2, si ottiene inoltre:

$$\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}\Psi = 0 \quad (3.17)$$

da cui si vede che anche i gradienti di Ψ e ρ sono allineati. In pratica, le superfici equipotenziali del potenziale esterno, coincidono con le superfici isobare e le superfici a densità costante. L'idea, adesso, è di prolungare tali superfici nella regione dove si trova il corpo immerso; in particolare si potrà sostituire l'oggetto con il fluido, in modo che ρ sia costante sui prolungamenti delle superfici a densità costante, e p sia costante sui prolungamenti delle superfici isobare.³

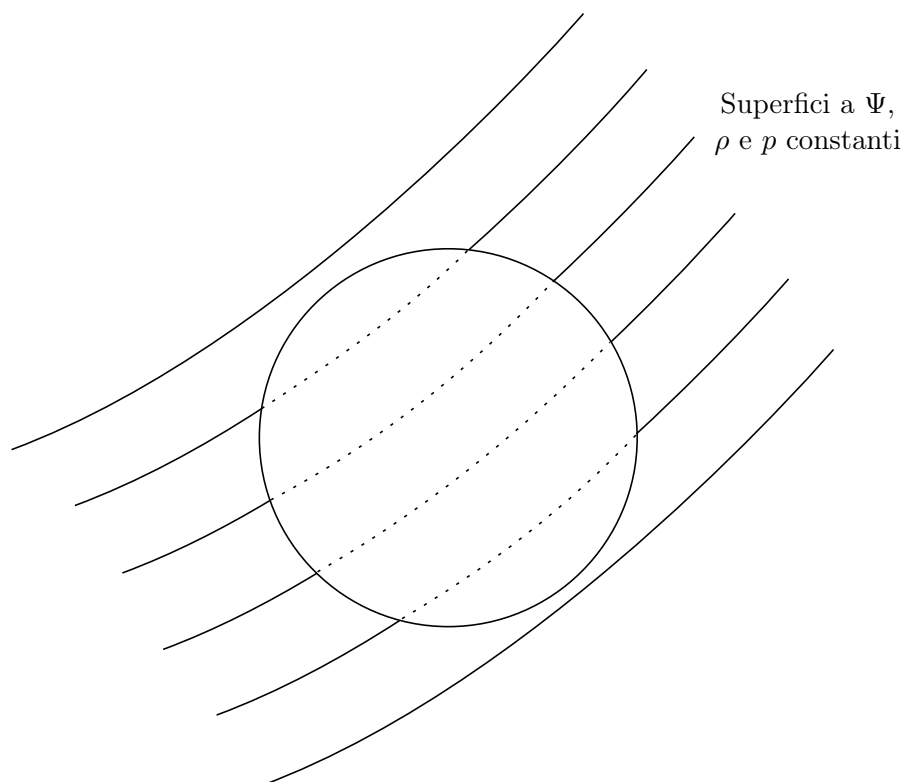


Figura 2: Le superfici a Ψ costante determinano la distribuzione di ρ all'interno della regione sostitutiva.

³L'ipotesi che il campo esterno sia conservativo è importante; in caso contrario potrebbe non essere ovvio determinare pressione e densità nella regione sostitutiva.

Dal momento che la situazione finale continua a verificare l'equazione dell'equilibrio idrostatico punto per punto, potremo scrivere:

$$\int p \vec{n} dA = - \int \rho \vec{\nabla} \Psi dV = \int \rho \vec{F} dV = \quad (3.18)$$

cioè, imporre essenzialmente che il fluido sostituito sia in equilibrio con il fluido nella regione esterna. Considerato che si è lasciata la pressione imperturbata, l'integrale a destra sarà esattamente uguale all'integrale in 3.15. Possiamo quindi concludere:

$$\vec{F}_A = - \int \rho \vec{F} dV \quad (3.19)$$

Dato che il campo gravitazionale è notoriamente conservativo, potremo applicare la formula precedente al caso di un corpo immerso in un fluido soggetto alla forza di gravità. In particolare, se prendiamo il campo gravitazionale uniforme e la densità del fluido costante, otteniamo il ben noto principio di Archimede:

$$\vec{F}_A = -\rho V_{spostato} \vec{g} \quad (3.20)$$

Si osservi come a secondo del caso può essere più comodo calcolare l'integrale di volume, mentre a volte può essere più comodo calcolare l'integrale di superficie.

§ **3.2.1. ★★★★★ Oscillazioni con Archimede.** — Possiamo per esempio studiare l'equilibrio di un cilindro di densità ρ_1 , immerso in un liquido di densità ρ_0 . Immaginiamo che il cilindro sia solo parzialmente immerso; un semplice bilancio di forza gravitazionale e forza di Archimede ci dà:

$$g\rho_1 V_{tot} = g\rho_0 V_{imm} \Rightarrow \frac{h_{tot}}{h_{imm}} = \frac{\rho_0}{\rho_1} \quad (3.21)$$

con la condizione per avere galleggiamento che $\rho_1 < \rho_0$. Adesso, facciamo fare al cilindro delle piccole oscillazioni verticali rispetto alla posizione di equilibrio, e facciamo l'approssimazione che la velocità di oscillazione sia talmente piccola, da poter considerare trascurabile la velocità del fluido, e da poter applicare istante per istante le leggi della fluidostatica. Prendendo come altezza di riferimento quella della base, le equazioni del moto diventano:

$$\rho_1 h_{tot} \ddot{z} = -g\rho_1 h_{tot} - g\rho_0 z \quad (3.22)$$

da cui segue che la frequenza delle oscillazioni è:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho_1 h_{tot}}} = \sqrt{\frac{g}{h_{imm}}} \quad (3.23)$$

3.3 ★★★★★ Tensione superficiale

In questa sezione parleremo essenzialmente delle condizioni al bordo che devono esistere tra due fluidi affinché ci sia equilibrio idrostatico. Modellizziamo la superficie di separazione tra due fluidi, all'equilibrio, come una membrana caratterizzata da una certa tensione superficiale. Intendiamo che preso un elemento di area su questa superficie, il resto della superficie eserciterà su di esso una forza:

$$\vec{F} = \gamma \oint \vec{t} \times \vec{n} dr \quad (3.24)$$

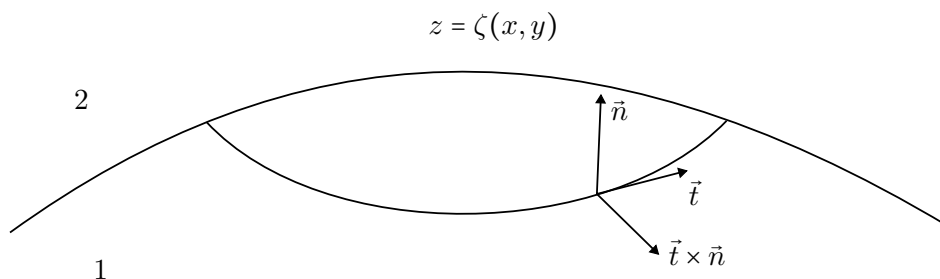


Figura 3: Interfaccia tra due fluidi; la tensione superficiale agisce sul bordo dell'elemento di superficie considerato.

dove, come in figura, \vec{t} è il vettore unitario tangente in ogni punto al bordo delle superficie, e diretto in modo da rispettare la regola della mano destra⁴. In pratica se la superficie ha una curvatura, la forza totale che agisce sull'area considerata sarà diversa da zero. In particolare, come si può verificare, tale forza tende ad appiattire la superficie se γ è positivo, ad accentuare le disomogeneità se è negativo; di conseguenza due liquidi eviteranno di mescolarsi solo se $\gamma > 0$. Questo coefficiente γ si chiama *tensione superficiale*, è fissato dalla coppia di fluidi in esame, e ha le dimensioni di una forza per unità di lunghezza, oppure di un'energia divisa per un'area. Se le pressioni tra le due parti dell'interfaccia sono uguali, la superficie non ha motivo di deformarsi, ma se sono diverse, la superficie può deformarsi in modo che localmente la forza dovuta alla tensione superficiale bilanci esattamente la differenza di pressione. Cerchiamo di essere più quantitativi. Consideriamo una superficie ed un punto su di essa. Prendiamo il piano xy parallelo al piano tangente alla superficie, in modo che nel punto considerato si annulli il gradiente della funzione che descrive il piano nella coordinate xy . L'equazione della superficie considerata sarà:

$$z - \zeta(x, y) = 0 \quad (3.25)$$

Ora, prendiamo una circonferenza di raggio r nel piano xy , e consideriamo la curva δ ottenuta valutando la funzione in tale circonferenza. Vorremmo quindi calcolare la tensione superficiale esercitata su δ , al secondo ordine in r . Innanzitutto, il vettore tangente alla superficie sarà:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}(z - \zeta(x, y))}{|\vec{\nabla}(z - \zeta(x, y))|} \approx \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial x}, -\frac{\partial \zeta}{\partial y}, 1 \right) \quad (3.26)$$

senza perdersi nei dettagli matematici dell'approssimazione, l'unica componente della forza al secondo ordine in r è quella diretta lungo l'asse z (come si può intuire), e il suo corrispettivo valore è, sfruttando il teorema di Stokes (vedi appendice A.2):

$$dF_z = -\gamma \oint_{\delta} \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial x} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx \right) = \gamma \int \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) dA \approx \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big|_0 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \Big|_0 \right) dA \quad (3.27)$$

ricordiamo quindi che quando in una funzione la derivata prima è nulla, la derivata seconda è esattamente il valore della curvatura, cioè l'inverso del raggio della circonferenza osculatrice. Questo è immediato dalla formula:

$$\frac{1}{R} = \kappa = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.28)$$

dove con $y = f(x)$ indichiamo una funzione di una variabile. La forza che abbiamo calcolato, divisa per l'area, nel limite in cui questa tende a zero, restituisce esattamente la differenza di pressione tra i due lati della superficie necessaria per mantenere la curvatura data. Mettendo tutto insieme, otteniamo la legge fondamentale della tensione superficiale:

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.29)$$

⁴se prendiamo \vec{n} uscente ad esempio, \vec{t} girerà in senso antiorario.

dove R_1 e R_2 sono le curvature della superficie in due direzioni ortogonali generiche. Si potrebbe dimostrare, ma non lo faremo, che in effetti la formula ottenuta non dipende dalle direzioni ortogonali scelte. Se ad esempio si avesse una superficie curva in una direzione, ma piatta nella direzione ortogonale, basterebbe mettere il raggio della seconda superficie come infinito.

§ 3.3.1. ★★★★★☆ **Fluido a contatto con un piano solido.** — Consideriamo la situazione in figura; vogliamo sostanzialmente studiare il profilo di un piano di liquido, a contatto con un gas, che incontra una barriera solida verticale.

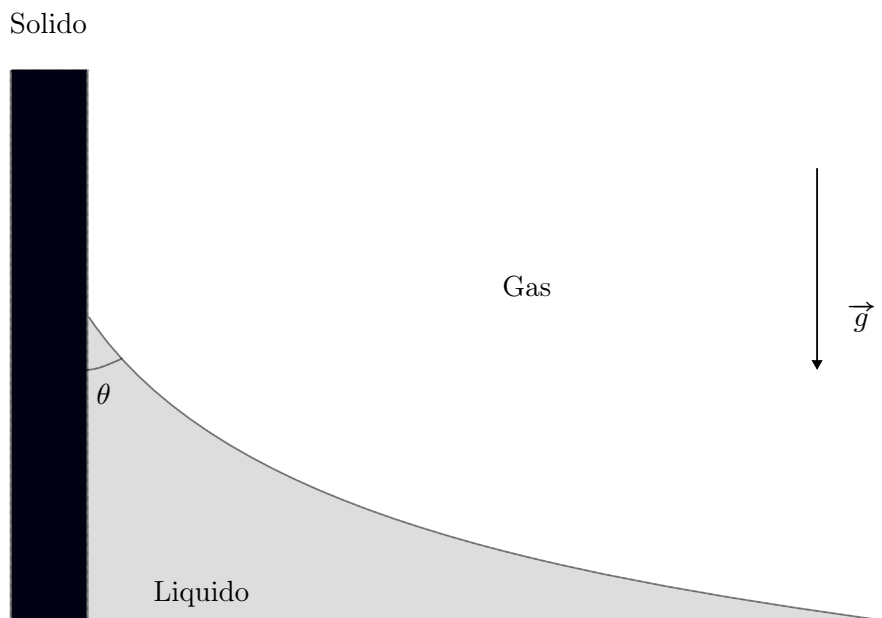


Figura 4: Interfaccia tra liquido, gas e solido; l'angolo di contatto è determinato dalle tre tensioni superficiali.

Al punto di contatto tra i tre mezzi, per imporre l'equilibrio, basta chiedere che le tensioni superficiali sommino vettorialmente a zero; detto θ l'angolo che forma il liquido con la verticale quando incontra il solido, avremo:

$$\gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \gamma_{lg} \cos \theta \quad (3.30)$$

Questo fissa l'angolo θ , e di conseguenza fissa anche la derivata del profilo in $x = 0$. La pressione del fluido molto distante dal solido, sarà sostanzialmente pari alla pressione p_0 del gas, mentre sul bordo del fluido, nella regione rialzata sarà $p_0 - \rho g \zeta$, dove $y = \zeta(x)$ è il profilo cercato. Se imponiamo che la superficie sia a riposo, cioè che il difetto di pressione sia perfettamente bilanciato dalla tensione superficiale, allora:

$$\rho g \zeta = \gamma_{lg} \frac{1}{R_2} = \gamma_{lg} \frac{\zeta''}{(1 + (\zeta')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.31)$$

Come esercizio, questa si può integrare due volte, e si può trovare, imponendo le giuste condizioni al bordo; il risultato, che viene espresso in forma solo implicita, è:

$$\frac{x}{d} = \cosh^{-1} \frac{2d}{\zeta} - \cosh^{-1} \frac{2d}{h} + \left(4 - \frac{h^2}{d^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(4 - \frac{\zeta^2}{d^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

dove:

$$h^2 = 2 \frac{\gamma_{lg}}{\rho g} (1 - \sin \theta) \quad d^2 = \frac{\gamma_{lg}}{\rho g} \quad (3.33)$$

Si osservi che d è in pratica la distanza orizzontale caratteristica dei fenomeni di superficie in questo problema: a distanze molto più grandi di d , l'effetto dell'interfaccia viene sostanzialmente perso.

§ 3.3.2. ★★☆☆☆ **Capillarità.** — Sicuramente avrete sentito che una delle proprietà meglio spiegate dalla tensione superficiale, è il fenomeno della capillarità: tubi di piccole dimensioni con un'estremità immersa in un liquido, portano ad un innalzamento di quest'ultimo. Matematicamente, fissate le tre tensioni superficiali delle tre interfacce, come si è visto nella sezione precedente, vuole dire fissare l'angolo a cui il liquido incontra il solido. Se consideriamo un tubo di raggio a , molto piccolo rispetto a d come definito nella sezione precedente, possiamo approssimare la superficie ad una calotta sferica, di raggio $\frac{a}{\cos\theta}$ (come potete verificare geometricamente). Per mantenere tale curvatura, deve esistere un difetto di pressione del liquido rispetto alla pressione del gas, che il liquido può generare all'interfaccia alzandosi di un'altezza H , tale che:

$$\rho g H = \frac{2\gamma \cos\theta}{a} \Rightarrow H = \frac{2d^2 \cos\theta}{a} \quad (3.34)$$

Si vede da questa formula che per a piccoli, si possono ottenere altezze molto grandi.

3.4 ★☆☆☆☆ **Cos'è la pressione?**

Diciamo che più o meno tutti abbiamo in mente una nozione più o meno intuitiva di pressione. A scuola vi insegnano che in generale la pressione è data dal modulo della forza perpendicolare alla superficie, diviso per l'area su cui agisce tale forza ($p = F/A$). Risulta tuttavia non ovvio, capire come generalizzare la definizione precedente per un mezzo continuo, nel quale la pressione varia punto per punto, nel fluido considerato. In effetti, è possibile formalizzare il concetto di pressione, sfruttando quello che viene chiamato *tensore degli sforzi*. Si tiene a specificare che la seguente sezione è assolutamente non necessaria per risolvere i problemi delle olimpiadi; verrà tuttavia ripresa in alcuni punti nel seguito delle dispense.

§ 3.4.1. ★☆☆☆☆ **Tensore degli sforzi.** — Rimandiamo tutta la teoria matematica relativa all'algebra lineare in appendice B. Dato un elemento fluido potremo scrivere le forze che il resto del fluido esercita sull'elemento in analisi come somma di forze di volume e forze e superficie. Dato un elemento generico di superficie nel fluido, scriveremo:

$$\delta \vec{F}_s = \Sigma(\vec{n}, \vec{x}, t) \vec{n} \delta A \quad (3.35)$$

Dove con Σ indichiamo la forza per unità di superficie esercitata dal fluido sull'elemento in posizione \vec{x} , al tempo t , sulla porzione di superficie dell'elemento δA ; la convenzione vuole che la forza sia esercitata dal fluido che si trova dalla parte della superficie da cui esce \vec{n} . Inoltre potremo indicare le forze di volume come:

$$\delta \vec{F}_v = \vec{F}(\vec{x}, t) \rho(\vec{x}, t) \delta V \quad (3.36)$$

Dove con F indichiamo la forza per unità di massa, mentre con ρ la pressione. Ora, possiamo scrivere l'equazione di Newton per l'elemento fluido:

$$\delta m \vec{a} = \delta \vec{F}_v + \int \delta \vec{F}_s \quad (3.37)$$

dove intendiamo che l'integrale è esteso a tutta la superficie; se poi scegliamo come elemento fluido il tetraedro in figura, si può verificare per esercizio che l'espressione diventa:

$$\rho \vec{a} \delta V = \vec{F} \rho \delta V + [\Sigma_i(\vec{n}) - (a_j \Sigma_i(\vec{a}) + b_j \Sigma_i(\vec{b}) + c_j \Sigma_i(\vec{c})) n_j] \delta A \quad (3.38)$$

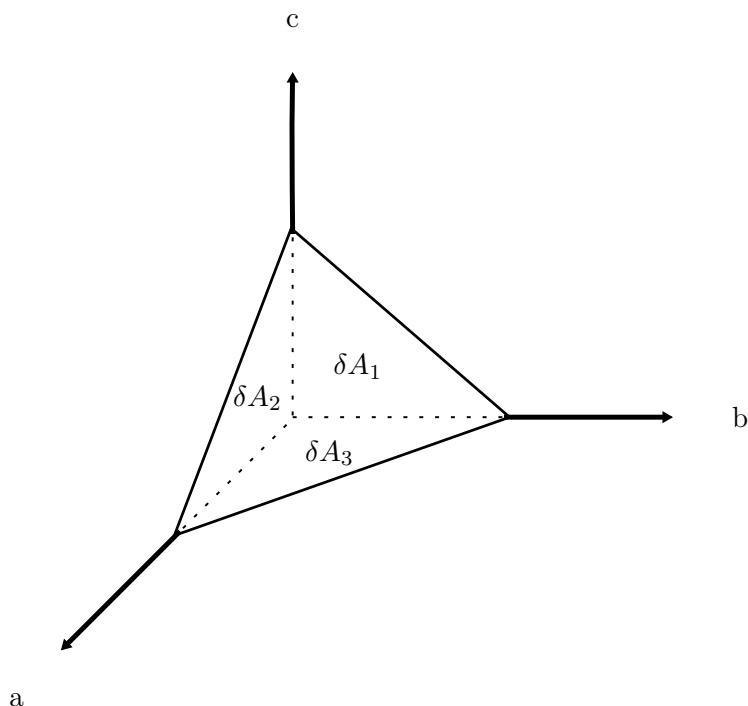


Figura 5: Elemento fluido a forma di tetraedro. Si può verificare che se si chiama la quarta faccia δA , e la sua normale \vec{n} , allora vale ad esempio $\delta A_1 = \vec{a} \cdot \vec{n} \delta A$; così, anche per le altre facce.

Dove, come spiegato in appendice B, si è fatto uso della notazione di Einstein. Ora, se si fa tendere a zero il volume del tetraedro, δV va a 0 come δl^3 mentre δA va a 0 come δl^2 , per cui nel limite deve annullarsi nell'equazione precedente il coefficiente di δA , in modo da avere:

$$\Sigma_i(\vec{n}) = (a_j \Sigma_i(\vec{a}) + b_j \Sigma_i(\vec{b}) + c_j \Sigma_i(\vec{c})) n_j = \sigma_{ij} n_j \quad (3.39)$$

Ecco, σ_{ij} si chiama *tensore degli sforzi*, e si può pensare come una matrice le cui entrate variano con \vec{x} e t , e che preso un vettore di modulo unitario, calcola la forza per unità di superficie esercitata dal fluido su una superficie infinitesima che ha come normale il vettore scelto (questa pressione, viene detta "sforzo"); la convenzione è sempre che si considera solo la forza esercitata dal fluido nella parte di superficie da cui esce \vec{n} . In pratica preso un volume di fluido delimitato da una certa superficie, potremo scrivere che la forza di superficie esercitata dal resto del fluido è ⁵:

$$\vec{F}_{sup} = \int \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{n} dA \Rightarrow F_{sup,i} = \int \sigma_{ij} n_j dA \quad (3.40)$$

L'espressione che abbiamo ottenuto (3.4.1) è l'espressione del tensore in coordinate cartesiane; se lo avessimo voluto in altre coordinate avremmo dovuto cambiare la forma dell'elemento fluido. Ora, possiamo definire la pressione meccanica di un fluido come:

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (3.41)$$

dove σ_{ii} è la traccia del tensore degli sforzi. Essenzialmente, la pressione ci dà informazione sul valore dello sforzo isotropo, cioè quanto vale localmente la forza per unità di superficie che provoca una compressione isotropa degli elementi di fluido. Si osservi che questa definizione di pressione è radicalmente diversa da quella data nel caso termodinamico per un sistema all'equilibrio. Si può mostrare con dei ragionamenti che coinvolgono il momento torcente sull'elemento fluido, che σ_{ij} è simmetrico, cioè $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, quindi la matrice che lo rappresenta il tensore degli stress è

⁵la notazione con la doppia freccia è frequente in letteratura, e il suo significato è quello che abbiamo scritto in notazione di Einstein.

diagonalizzabile in una base ortonormale per il teorema spettrale⁶. In pratica troveremo una base di vettori ortonormali dove potremo scrivere la decomposizione:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{pmatrix}$$

dove la prima parte contiene gli sforzi isotropi, che non deformano l'elemento fluido, mentre la seconda gli sforzi anisotropi, che deformano l'elemento fluido in ciascuna direzione. Nel caso statico, non ci possono essere sforzi anisotropi, quindi tutti gli sforzi principali devono essere uguali tra loro e pari allo sforzo isotropo, cioè σ_{ij} deve essere proporzionale all'identità:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (3.42)$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker. Questo dimostra il risultato usato in precedenza:

$$\vec{F}_{sup} = \int \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dA = - \int p\vec{n} dA \quad (3.43)$$

SEZ. 4 — FLUIDI IDEALI

Passiamo ora ad analizzare i fluidi in moto. La prima famiglia di fluidi che studieremo sono i fluidi *ideali*, cioè fluidi in cui è trascurabile la perdita di energia. Nei fluidi ideali sono trascurabili:

- la viscosità, cioè l'attrito che viene esercitato tra un elemento di fluido e l'elemento di fluido adiacente;
- la conducibilità termica, cioè il coefficiente che determinano quanto è importante il trasporto di calore tra i vari elementi di fluido;

4.1 ★★★★★ Equazione di continuità

La prima equazione fondamentale della Fluidodinamica è l'equazione che esprime la conservazione della massa. Questa vale in generale e non solo nel caso ideale. Data un porzione di fluido, la quantità di massa che istantaneamente esce da tale volume sarà data da:

$$\int \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA \quad (4.1)$$

dove l'integrale è esteso a tutta la superficie. Questo flusso, è il solo responsabile della diminuzione di fluido nel volume, per cui avremo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \int \frac{\partial}{\partial t} \rho dV = \int \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = - \int \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dV = 0 \quad (4.2)$$

dove si è usato sempre il teorema di Stokes (vedi A.2). Dato che ancora questa deve valere per ogni volume di fluido, avremo l'uguaglianza fra gli integrandi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (4.3)$$

Questa si dice *equazione di continuità*. Nel caso in cui ρ sia costante, cioè nel caso di fluido incompressibile, l'equazione si riduce alla condizione di incompressibilità del flusso:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.4)$$

⁶In appendice B si possono trovare ulteriori spiegazioni.

§ 4.1.1. ★★★★★ **Conservazione della portata.** — Se abbiamo un fluido ideale incomprimibile che fluisce in un tubo a sezione variabile, possiamo usare la condizione di incomprimibilità in forma integrale, cioè:

$$\int \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (4.5)$$

su qualsiasi superficie chiusa. Se adesso consideriamo un tubo come in figura 6, possiamo considerare due sezioni di estensione diversa, in modo che queste siano in ogni punto perpendicolari al vettore \vec{v} , e possiamo considerare una superficie chiusa che ha come basi le due sezioni, e poi abbia come superficie laterale la parte di tubo compresa tra le due sezioni. Se trascuriamo completamente il moto del fluido nella direzione radiale, possiamo supporre nullo il flusso sulla superficie laterale. La condizione in questo caso diventa semplicemente:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = Q \quad (4.6)$$

Questa è la ben nota equazione che esprime la conservazione della portata. Si noti che se \vec{u} varia con il tempo, cioè il flusso non è stazionario, la condizione vale sempre istante per istante.

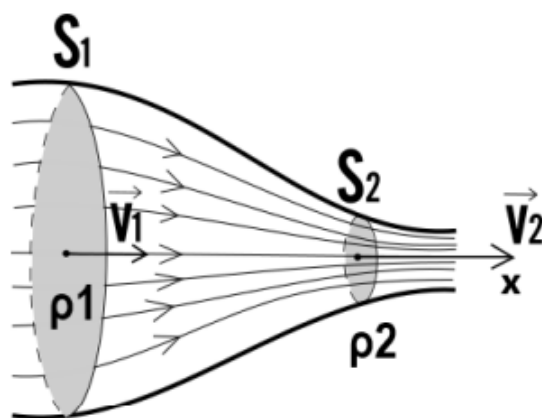


Figura 6: Tubo di sezione variabile a cui applicare l'equazione di continuità.

4.2 ★☆☆☆☆ **Equazione di Eulero**

L'obiettivo di questo paragrafo è di scrivere una sorta di $F = ma$ per i fluidi ideali. Seguiremo un approccio chiamato approccio lagrangiano, cioè scriveremo le equazioni partendo dalla legge di Newton su un elemento fluido che si muove con il fluido stesso. Un buon modo per modellizzare i flussi ideali, è di supporre che anche nel caso ideale valga

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (4.7)$$

cioè che la deformazione degli elementi fluidi sia isotropa e dovuta unicamente alla pressione del fluido. In questo caso, la forza totale che agisce su un elemento fluido è, come visto in precedenza, la somma delle forze di pressione e delle forze esterne, per cui la legge di Newton diventa:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{F} \quad (4.8)$$

dove la derivata si dice *derivata lagrangiana*, e viene fatta tenendo conto della variazione temporale esplicita e della variazione temporale implicita nella posizione:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (4.9)$$

dove sottointendiamo la somma sugli indici ripetuti come spiegato in B.1.1. In pratica l'equazione del moto nella sua forma finale è:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{F} \quad (4.10)$$

Si noti che anche nel caso dei fluidi ideali l'equazione è non-lineare! Questa, è una delle principali ragioni per le quali in molti casi pratici le equazioni della Fluidodinamica devono essere risolte numericamente. Osserviamo che le incognite sono 5:

- le 3 componenti della velocità
- la pressione
- la densità

ma le equazioni sono solo 4:

- le 3 componenti dell'equazione di Eulero
- l'equazione di continuità

quindi manca una condizione! L'equazione che manca è un modello che metta in relazione la pressione alla densità, come ad esempio l'equazione di stato di un gas perfetto.

4.3 ★★★★★ Equazione di Bernoulli

Ora mettiamoci innanzitutto nell'ipotesi che ρ sia costante, cioè che il fluido sia incomprimibile (in pratica possiamo portare ρ dentro il gradiente), e anche che il flusso sia stazionario, in modo che $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$. Sfruttando l'identità:

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 = \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (4.11)$$

possiamo riscrivere l'equazione di Eulero come:

$$\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi \right) \quad (4.12)$$

dove abbiamo supposto anche che le forze esterne siano conservative, in modo che il campo di accelerazione possa essere scritto come il gradiente di un opportuno potenziale:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \phi \quad (4.13)$$

Ora, chiameremo linee di flusso, quelle curve in \mathbb{R}^3 tali per ogni punto la velocità sia allineata con il loro vettore tangente; in particolare sono tutte quelle curve che rispettano l'equazione differenziale:

$$\frac{d\vec{x}_s}{ds} \times \vec{u}(\vec{x}_s) = 0 \quad (4.14)$$

che è un'equazione che ammette infinite soluzioni, che corrispondono alle infinite parametrizzazioni che possono essere assegnate alla linea di flusso. Notiamo che se il flusso è stazionario gli elementi fluidi seguono le linee di flusso, se non è stazionario le linee di flusso cambiano istante per istante, e gli elementi fluidi seguono una data linea di flusso solo istantaneamente.

Adesso, proiettiamo l'Equazione di Eulero che abbiamo ottenuto sulle linee di flusso moltiplicando scalarmente per u , ottenendo:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi \right) = 0 \quad (4.15)$$

In pratica, abbiamo ottenuto che il gradiente nell'equazione non ha nessuna componente lungo la linea di flusso. Come discusso in appendice A.1.1, il gradiente proiettato in una certa direzione, ha il significato di derivata direzionale. In pratica potremo dire che lungo le linee di flusso, si conserva la quantità:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + \phi = \text{cost} \quad (4.16)$$

Notiamo come la proiezione sulle linee di flusso è stata in pratica necessaria per eliminare il termine con il rotore. Quindi, tale passaggio non sarebbe necessario se fosse vero ad esempio che

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \quad (4.17)$$

Quando un fluido verifica questa ipotesi si dice *irrotazionale*. In pratica, per un fluido irrotazionale la quantità di Bernoulli è costante in tutto il fluido.⁷

§ 4.3.1. ★★★★★ **Legge di Torricelli.** — Nel caso gravitazionale, quando \vec{g} è costante e uniforme, la costante di Bernoulli è:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = \text{cost} \quad (4.18)$$

Se applichiamo tale equazione ad un contenitore con un fluido a riposo, ideale e incompressibile, con superficie libera ad altezza h , sulla cui superficie laterale viene fatto un buco di larghezza trascurabile⁸ ad altezza h_0 , troviamo:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{sup}^2 + gh = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{1}{2}v_0^2 + gh_0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g(h - h_0)} \quad (4.19)$$

dove abbiamo trascurato la velocità del liquido alla superficie perché il foro è di dimensioni trascurabili. Inoltre, osserviamo come abbiamo potuto applicare Bernoulli perché dato che la superficie libera scende molto lentamente, la situazione è pressoché stazionaria, cioè la derivata temporale del campo di velocità è piccola.

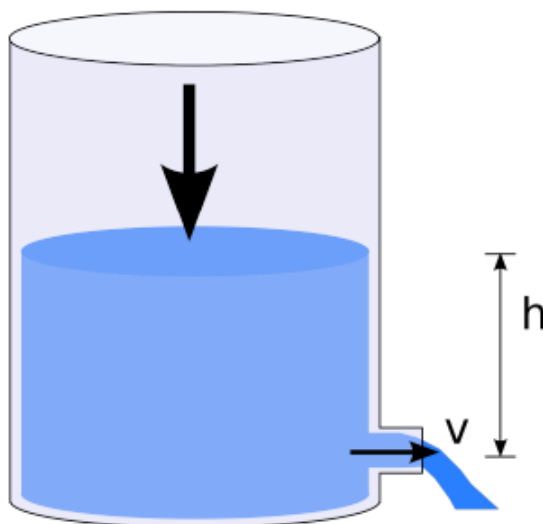


Figura 7: Contenitore a cui viene fatto un foro.

⁷Il lettore probabilmente ha visto il famoso argomento scolastico del tubo a sezione variabile, in cui si applica la conservazione dell'energia ad un cilindro di fluido. L'argomento è sbagliato per diversi motivi, ma può essere reso rigoroso; per i più curiosi, potete dare un'occhiata al paper "*Classic Bernoulli's principle derivation and its working hypotheses*, Edson R Marciotto".

⁸si intende che la superficie del foro è molto più piccola della superficie libera del fluido.

§ 4.3.2. ★★★★★ **Profilo a velocità costante.** — Ora supponiamo che il foro sia al centro della base, e supponiamo che il contenitore sia a sezione circolare, in modo che l'altezza iniziale sia h_0 e il raggio iniziale sia R_0 . Supponiamo inoltre che il foro sia circolare di raggio r , in modo che $r/R_0 \ll 1$. Vogliamo trovare il profilo che deve avere il contenitore affinché la velocità a cui fuoriesce il fluido sia costante durante il processo. Possiamo usare l'approssimazione precedente e scrivere che all'istante iniziale:

$$v = \sqrt{2gh_0} \quad (4.20)$$

Sfruttando l'equazione di continuità possiamo calcolare la velocità a cui scende la superficie, cioè:

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{r}{R_0}\right)^2 \sqrt{2gh_0} \quad (4.21)$$

Se imponiamo che questa rimanga costante otteniamo:

$$\left(\frac{r}{R_0}\right)^2 \sqrt{2gh_0} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2gh} \Rightarrow R(h) = R_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.22)$$

Il risultato è chiaramente approssimato, perché l'equazione di Bernoulli non vale davvero istante per istante. Nella successiva sezione vedremo come modificarla per calcolare la velocità a cui esce l'acqua in un caso non stazionario.

§ 4.3.3. ★★★★★☆☆ **Caso non stazionario.** — Se nella dimostrazione iniziale non eliminiamo il termine $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$, chiamando \hat{l} il versore unitario tangente ad una linea di flusso, dopo la proiezione lungo le linee di flusso stesse si otterrà:

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz \right) = -\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \hat{l} \quad (4.23)$$

che si può integrare lungo una linea di flusso tra due punti A e B per ottenere:

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B + \int_A^B \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{dl} \quad (4.24)$$

questa equazione può essere interpretata come una generalizzazione non stazionaria di Bernoulli. Adesso prendiamo una configurazione simile al problema precedente, ma supponiamo che la forma del recipiente sia cilindrica, e che il buco venga fatto al centro della faccia inferiore. Supponiamo inoltre che il buco sia circolare e abbia superficie arbitraria, non necessariamente molto più piccola dell'area di base del cilindro. Chiamiamo questa volta per semplicità la superficie di base del cilindro A , e la superficie di base del buco a . Varrà sempre l'equazione di continuità, per cui:

$$av = -A \frac{dh}{dt} \quad (4.25)$$

Possiamo considerare la linea di flusso che parte dal centro della superficie e finisce al centro del buco. Supponiamo che la velocità in tutto il recipiente sia uniforme e diretta verso il basso (se trascuriamo il moto nella direzione radiale, l'equazione di continuità implica che la velocità rimanga costante con la sezione). Calcoliamo su di essa il termine correttivo, che è semplice da calcolare perché supponiamo la velocità costante:

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = \frac{a}{A} h \frac{dv}{dt} \quad (4.26)$$

Segue, che Bernoulli generalizzato si scrive come segue (abbiamo già sostituito al suo interno l'equazione di continuità):

$$gh = \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) \frac{v^2}{2} + \frac{a}{A} h \frac{dv}{dt} \quad (4.27)$$

cambiando variabile con la regola della catena, possiamo scrivere:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{a}{A} \frac{d(v^2)}{dh} \Rightarrow 2gh = \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) v^2 - \frac{a^2}{A^2} h \frac{d(v^2)}{dh} \quad (4.28)$$

che è un'equazione del primo ordine in v^2 con coefficienti variabili. Non ci dilungheremo nella risoluzione, comunque la soluzione, considerando un'altezza iniziale h_0 con il liquido che parte da fermo è:

$$v(h) = \sqrt{2gh \frac{1 - \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{1-2r}{r}}}{1-2r}} \quad (4.29)$$

dove $r = (a/A)^2$. Questa, se $r \rightarrow 0$ si riconduce alla legge di Torricelli, mentre per $r = 1$ si riconduce alla formula che si otterrebbe considerando ogni elemento di fluido in caduta libera:

$$v(h; r \rightarrow 0) = \sqrt{2gh} \quad v(h; r = 1) = \sqrt{2g(h_0 - h)} \quad (4.30)$$

Nelle dispense del 2023, potete trovare lo stesso risultato, ricavato però con considerazioni energetiche.

§ 4.3.4. ★☆☆☆☆ **Caso comprimibile.** — Questa sezione presenta un'ulteriore generalizzazione di Bernoulli, nel caso in cui il fluido sia comprimibile. Ricordiamo che nella definizione di fluido ideale, abbiamo l'assenza di scambi di calore che coinvolgono l'elemento fluido. Supponendo inoltre che l'elemento fluido subisca solo trasformazioni reversibili, possiamo sfruttare il legame che esiste tra calore scambiato e variazione di entropia:

$$dQ = TdS \Rightarrow dS = 0 \quad (4.31)$$

In pratica, ogni elemento fluido subisce solo trasformazioni adiabatiche, e la sua entropia non varia durante il moto. Matematicamente, questo significa che la derivata materiale dell'entropia per unità di massa è nulla:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (4.32)$$

Se aggiungiamo l'ipotesi più forte, che s sia costante in tutto il fluido, cioè se il flusso è isoentropico, possiamo semplificare ulteriormente il problema. Infatti, l'entalpia⁹ di un elemento fluido si può scrivere:

$$W = U + pV \Rightarrow dW = TdS - pdV + pdV - Vdp = TdS - Vdp \quad (4.33)$$

dove abbiamo differenziato e usato il primo principio della termodinamica. Ora, consideriamo il differenziale dell'entalpia per unità di massa:

$$dw = Tds + Vdp = \frac{dp}{\rho} \quad (4.34)$$

dove con V si intende il volume per unità di massa, e la semplificazione è dovuta alla costanza di s . Questa è un'identità tra i differenziali¹⁰, da cui segue in modo naturale l'uguaglianza dei rispettivi gradienti¹¹:

$$\vec{\nabla} w = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \quad (4.35)$$

Adesso, se ripetiamo lo stesso procedimento che si è usato per ricavare Bernoulli, ma introducendo il gradiente dell'entalpia per unità di massa, possiamo dire che nel caso comprimibile isoentropico la costante di Bernoulli è:

$$w + \frac{1}{2}v^2 + \phi = cost \quad (4.36)$$

⁹per chi non l'avesse mai vista, l'entalpia è un potenziale termodinamico simile all'energia interna, con la differenza che le sue variabili naturali, invece di essere V e S , sono P e S

¹⁰data f , con differenziale intendiamo la funzione $df(\vec{v}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}$.

¹¹due vettori che hanno prodotto scalare uguale con tutti i vettori di \mathbb{R}^3 , sono uguali.

4.4 ★★☆☆☆☆ Analogia con l'elettrostatica

Questa sezione è dedicata allo studio di un particolare problema: vogliamo determinare il campo di velocità che risulta posizionando una sfera in un flusso ideale e incomprimibile che ha velocità costante. Per prima cosa serve introdurre l'importante concetto di *flusso potenziale*.

§ 4.4.1. ★★☆☆☆☆ **Flusso potenziale.** — Similmente a quanto avviene per il campo elettrico, un campo vettoriale che ha circuitazione nulla su tutti i percorsi chiusi, cioè:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.37)$$

è conservativo, e può essere scritto come gradiente di un potenziale. Sfruttando le identità vettoriali classiche, si ha che il rotore di un gradiente deve sempre essere nullo, per cui:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad (4.38)$$

Questa condizione può essere invertita, a patto che il dominio in cui è nullo il rotore sia semplicemente connesso¹². Nel caso della velocità, il suo rotore si chiama *vorticità*, e si indica con $\vec{\omega}$. Ci sono diversi casi rilevanti in cui le soluzioni delle equazioni di Eulero, si possono cercare nell'ipotesi che la vorticità sia ovunque nulla. Quando questo accade, e il dominio è semplicemente connesso, il flusso ottenuto si chiama "flusso potenziale", e si può trovare ϕ tale che¹³:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi \quad (4.39)$$

A questo punto, per un fluido incomprimibile, l'equazione di continuità diventa:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.40)$$

e cioè un flusso potenziale incomprimibile verifica quella che si chiama equazione di Laplace; questa equazione è ad esempio la stessa che governa il comportamento del potenziale scalare del campo elettrico nelle regioni prive di carica. Esiste un teorema che afferma come la soluzione di tale equazione esista e sia unica una volta fissate le condizioni al contorno sul potenziale. Tali condizioni possono riguardare il valore del potenziale sul bordo del dominio, o della sua derivata¹⁴.

§ 4.4.2. ★☆☆☆☆ **Equazione della vorticità.** — La seguente sezione è riguarda la vorticità, e in particolare le sue proprietà di trasporto. Prendendo le equazioni di Eulero nella forma:

$$\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi \right) \quad (4.41)$$

possiamo prendere il rotore di ambo i membri, e sfruttando la condizione di incomprimibilità (si può fare il conto per esercizio), otteniamo:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (4.42)$$

dove è stata anche sostituita la definizione di vorticità. L'equazione ottenuta in pratica esprime come varia nel tempo la vorticità di un elemento di fluido che si muove con il flusso. In particolare, anche senza soffermarci sui dettagli matematici, se un elemento fluido ha ad un certo istante vorticità nulla, allora anche la sua derivata materiale sarà nulla, imponendo che la vorticità rimanga nulla in tutti gli istanti successivi di tempo¹⁵.

¹²In insieme è semplicemente connesso se ogni curva può essere deformata in modo continuo fino a diventare un punto; nel caso due dimensionale, un dominio è semplicemente connesso se è moralmente privo di buchi

¹³Per pura convenzione abbiamo preso il potenziale con il segno invertito rispetto al solito.

¹⁴Per essere precisi, della sua derivata nella direzione normale.

¹⁵Questo a patto che durante il moto dell'elemento fluido, i gradienti di velocità rimangano essenzialmente finiti; questo però accade sicuramente nel caso in cui siamo interessati solo a soluzioni lisce delle equazioni di Eulero, come nel nostro caso.

§ 4.4.3. ★★☆☆☆ **Sfera immersa in un flusso ideale.** — Possiamo ora affrontare il problema della sfera. Prendiamo un fluido incomprimibile e ideale, che all'infinito in tutte le direzioni ha velocità costante e uniforme $\vec{u} = u_0 \hat{x}$. Pensiamo di mettere una sfera di raggio R nell'origine; la condizione al bordo che chiederemo nel caso ideale è semplicemente che $u_r(r = R) = 0$, cioè che la velocità radiale sia nulla sulla sfera (questa non viene penetrata dal flusso). Ora se consideriamo il flusso all'infinito prima della sfera, questo è chiaramente privo di vorticità (un campo di velocità uniforme ha rotore nullo). A patto di supporre che il campo di velocità cercato sia sufficientemente regolare, e che tutte le linee di flusso partano dall'infinito, tale vorticità rimarrà essenzialmente nulla in tutto lo spazio, come conseguenza di quanto detto nella sezione precedente. Non è quindi particolarmente restrittivo, cercare la soluzione del problema in cui si considera la vorticità nulla in ogni punto, quindi nell'ipotesi in cui il campo di velocità sia gradiente di un potenziale¹⁶. In pratica, supponiamo di poter scrivere

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \quad (4.43)$$

Possiamo ora sfruttare ora la teoria sviluppata in precedenza, per impostare il problema di Laplace per la sfera, lavorando in coordinate sferiche per l'evidente simmetria assiale. Riassumiamo l'equazione da risolvere con le sue condizioni al contorno:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \phi(r, \theta, \phi) = u_0 r \cos \theta \quad \text{per } r \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \phi(R, \theta, \phi)}{\partial r} = 0 \quad (4.44)$$

le quali, come può essere verificato, riproducono correttamente il campo di velocità sul bordo (le coordinate sferiche sono definite prendendo l'angolo θ dall'asse x). Questo adesso può essere pensato come un problema di elettrostatica¹⁷. Infatti se pensiamo di immergere una sfera conduttrice all'interno di un campo elettrico costante, la carica su quest'ultima si disporrà in modo da schermare il campo elettrico, è avere potenziale costante sulla sfera. Questo problema classico di elettrostatica può essere risolto mettendo un dipolo immagine al centro della sfera, che riproduce le condizioni al bordo desiderate; nel caso elettrostatico però, si richiede che sulla sfera il potenziale sia nullo, nel caso del flusso vorremmo che fosse nulla la sua derivata radiale. In realtà, l'idea del dipolo immagine funziona anche in questo caso, per cui se introduciamo un potenziale con l'andamento tipico del potenziale di un dipolo allineato lungo \hat{x} :

$$\phi = -A \frac{\hat{x} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (4.45)$$

con A da determinare, possiamo imporre che la somma del potenziale che da il campo di velocità costante, con il campo di dipolo, abbia derivata radiale nulla sulla sfera; se facciamo ciò:

$$2A \frac{\cos \theta}{R^3} + u_0 \cos \theta = 0 \Rightarrow A = -\frac{u_0 R^3}{2} \quad (4.46)$$

alla fine quindi il dipolo, rispetto al caso elettrostatico, è semplicemente invertito; la soluzione del potenziale sarà:

$$\phi(r, \phi) = u_0 R \left(\frac{r}{R} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (4.47)$$

da cui possiamo calcolare il campo di velocità:

$$u_r(r, \theta) = u_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad u_\theta = -u_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (4.48)$$

¹⁶Per i più pignoli, \mathbb{R}^3 tolta una sfera, è semplicemente connesso.

¹⁷Solo che, per la convenzione che abbiamo usato di prendere il potenziale con il segno +, dovremo usare tutta la teoria elettrostatica nota in cui il potenziale ha il segno invertito.

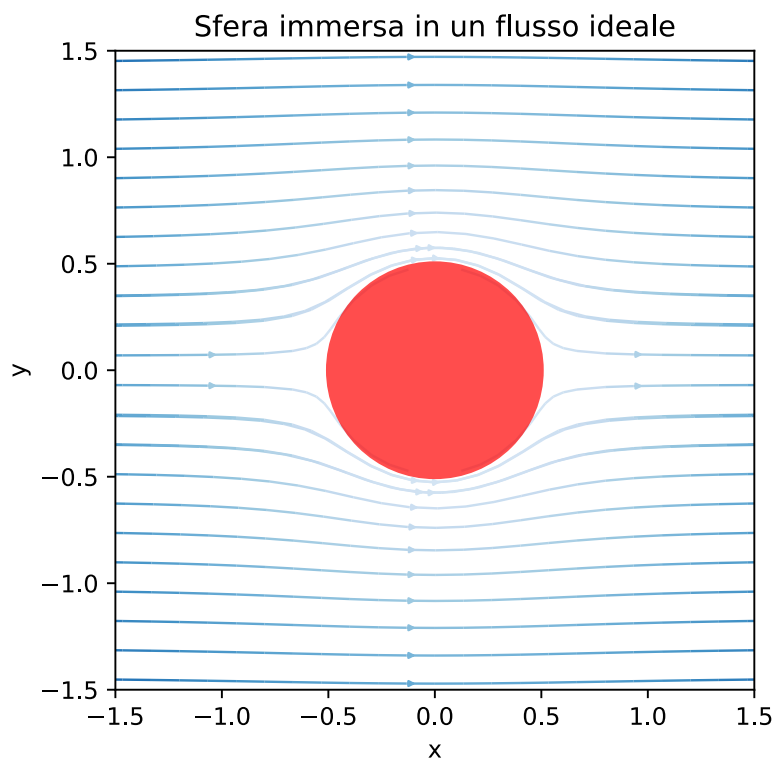


Figura 8: Grafico che rappresenta le linee di flusso trovate.

A questo punto dato che il flusso è irrotazionale, e la costante di Bernoulli è la stessa in tutto il fluido, si può calcolare all'infinito:

$$B = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}u_0^2 \quad (4.49)$$

con p_0 pressione all'infinito, e usarla per ottenere in ogni punto la pressione, conoscendo il campo di velocità. Facendo i conti, risulta che la pressione sulla sfera è:

$$p(R, \theta, \phi) = p_0 - \frac{1}{16}\rho u_0^2 + \frac{9}{16}\rho u_0^2 \cos(2\theta) \quad (4.50)$$

che, come si nota, è massima per $\theta = 0, \pi$, quando si annulla il campo di velocità¹⁸. Essendo simmetrica in θ , quando viene integrata sulla superficie della sfera deve dare un contributo nullo: il fatto che la sfera non subisca una forza netta è noto come paradosso di d'Alambert, ed è una proprietà di tutti i flussi ideali irrotazionali. Come si risolve il paradosso? L'idea è che anche a viscosità molto basse, quando il fluido si può considerare ideale, le equazioni di Eulero funzionano bene, tranne in un piccolo strato a contatto con il corpo, noto come *strato limite*. Questo strato è il principale responsabile sia della forza che agisce sulla sfera, sia della separazione delle linee di flusso in corrispondenza del corpo, dopo le quali si crea un zona turbolenta e dove la vorticità è diversa da zero. In pratica, per le applicazioni reali, l'approssimazione di fluido irrotazionale non è una buona approssimazione, è il conto che abbiamo fatto fallisce a prevedere i risultati sperimentali. Vedremo successivamente qual è la soluzione esatta considerando anche la viscosità, almeno nel caso in cui siano le forze viscosi a dominare il flusso, e non quelle inerziali.

¹⁸Questo è il comportamento tipico dovuto all'equazione di Bernoulli; a basse velocità, la pressione aumenta, ad alte velocità, la pressione diminuisce.

SEZ. 5 — EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

In questo capitolo esprimeremo nella loro completezza le equazioni che governano il moto dei fluidi, senza trascurare la loro viscosità. Una seconda parte del capitolo è dedicata invece alla linearizzazione delle equazioni di Navier-Stokes, da cui deriveremo in due casi differenti l'equazione delle onde, che ci permetterà di descrivere come evolvono le piccole perturbazioni della pressione e del campo di velocità.

5.1 ★★★★★☆☆ Viscosità

Iniziamo introducendo il concetto di viscosità. Consideriamo un fluido in cui il campo di velocità è del tipo $\vec{u} = (u_x(y), 0, 0)$, e consideriamo un piano orizzontale in posizione y . Se il fluido non è ideale, ci aspettiamo che esista un attrito tra la porzione di liquido sopra il piano e la porzione sotto il piano; per la convezione introdotta in sezione 3.4, avremo che la porzione di liquido superiore esercita su un elemento dA sul piano, una forza:

$$dF_x = (\vec{\sigma} \vec{n}) \cdot \hat{x} dA = \sigma_{12} dA \quad (5.1)$$

dove $\vec{n} = (0, 1, 0)$. Ora, supponiamo che tale forza sia essenzialmente dovuta all'attrito esercitato dal liquido superiore sul liquido inferiore. In particolare, se la velocità aumenta con l'aumentare di y , il liquido in basso dovrà subire una forza di attrito nella direzione positiva delle \hat{x} , che compensi la differenza di velocità. Introduciamo ora un modello, cioè supponiamo che tale forza di attrito sia direttamente proporzionale all'area di contatto, e dipenda solo linearmente dalla variazione di u_x nella direzione verticale, cioè dalla sua derivata. Il modello è un'approssimazione ragionevole, ma la sua validità andrebbe verificata sperimentalmente; comunque ci permette di scrivere:

$$dF_x = \sigma_{12} dA = \mu \frac{du_x}{dy} dA = dF_{att} \Rightarrow \sigma_{12} = \mu \frac{du_x}{dy} \quad (5.2)$$

dove μ è un coefficiente di proporzionalità che si chiama viscosità dinamica, ed è una proprietà intrinseca del fluido. Come potete verificare, ha le dimensioni di una pressione per un tempo, quindi si misura in $\text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Spesso, risulta utile lavorare anche con la viscosità cinematica, definita come:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (5.3)$$

e che si misura in $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

§ 5.1.1. ★★★★★★ **Legge di Stokes.** — La viscosità non è solo presente tra diversi strati di fluido, ma agisce anche sugli oggetti che si muovono all'interno del fluido stesso. Tale forza si chiama attrito viscoso, ed è una forza che si oppone al moto ed è in generale dissipativa. L'obiettivo di questa sezione è trovare una formula che esprima la forza di attrito viscoso che agisce su una sfera, sfruttando la potenza dell'analisi dimensionale. Bisogna chiedersi come prima cosa da cosa possa dipendere tale forza. Dato che tale forza è dovuta all'integrale del tensore degli stress esteso alla superficie della sfera, dipenderà sostanzialmente:

- dallo stato del fluido, che è completamente determinato fissando v , μ e ρ
- dalla geometria della sfera, che è completamente determinata dal raggio R

Per una ragione che vedremo in sezione 5.2.1, nel caso in cui la velocità della sfera sia piccola, si può escludere a priori che la densità compaia nella formula finale.

Adesso ci chiediamo avendo a disposizione v , μ e R , come possiamo ottenere una forza. Semplice,

basta scrivere un prodotto delle tre grandezze con coefficienti generici, e poi imporre che le unità di misura complessive siano quelle di una forza. Procedendo in questo modo si ottiene:

$$F = k\mu^a R^b v^c \Rightarrow \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{kg}^a \cdot \text{m}^{b+c-a} \cdot \text{s}^{-a-c} \Rightarrow F = k\mu Rv \quad (5.4)$$

purtroppo per ricavare k , la costante adimensionale, bisogna risolvere completamente il problema. Lo faremo dopo aver introdotto l'equazione del moto per i fluidi viscosi: le equazioni di Navier-Stokes.

5.2 ★☆☆☆☆ Equazioni di Navier-Stokes

Nel caso non ideale, la i -esima componente della forza totale agente su un volume di fluido, si scriverà, come:

$$F_{tot,i} = \int \rho F_i dV + \int \sigma_{ij} n_j dA = \int \rho F_i dV + \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (5.5)$$

Quindi possiamo pensare che l'argomento dell'integrale di destra sia la forza che agisce su un singolo elemento fluido, per unità di volume; ora, similmente a quanto fatto con l'equazione di Eulero (4.2), si otterrà:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (5.6)$$

dove il simbolo di derivata con la D maiuscola indica sempre la derivata Lagrangiana. Il problema adesso è cercare in qualche modo di legare σ_{ij} alla velocità. Come prima cosa, secondo quanto detto nella sezione 3.4, dividiamo il tensore degli sforzi come:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij} \quad (5.7)$$

dove d_{ij} è un tensore simmetrico a traccia nulla. Ora, il modello che permette la chiusura del problema, è supporre che tale tensore dipenda punto per punto in modo lineare dalle derivate della velocità rispetto alla posizione; in formule:

$$d_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (5.8)$$

come sempre, questa è un'approssimazione e va verificata sperimentalmente. Il tensore A_{ijkl} dipende dalla struttura del fluido, ma se ipotizziamo che tale struttura sia essenzialmente isotropa, cioè invariante per rotazioni, si deve avere:

$$A_{ijkl} = \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu'\delta_{il}\delta_{jk} + \mu''\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (5.9)$$

come spiegato in appendice B. Dato che d_{ij} è simmetrico si deve avere $\mu = \mu'$. Risulta:

$$d_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu'' (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \delta_{ij} \quad (5.10)$$

Infine, si può usare il fatto che d_{ij} abbia traccia nulla per ottenere che $\mu'' = -\frac{2}{3}\mu$. Il risultato finale, è quindi:

$$d_{ij} = \mu \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \delta_{ij} \right) \quad (5.11)$$

Il problema è finalmente chiuso, perché sostituendo quest'equazione nella legge di Newton (5.2), si ottiene l'equazione del momento nella sua forma più generale. Questa, insieme all'equazione di continuità costituisce quelle che vengono chiamate *Equazioni di Navier-Stokes*. Inoltre, si può mostrare che il coefficiente μ coincide proprio con la viscosità dinamica già introdotta nella sezione 5.1. Si può verificare infine che nel caso incomprimibile l'equazione prende la seguente forma:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (5.12)$$

§ 5.2.1. ★☆☆☆☆ **Legge di Stokes: derivazione.** — Iniziamo con l'impostazione del problema. Ci mettiamo nel sistema di riferimento in cui la sfera è a riposo e il fluido ha velocità v all'infinito, diretta nella direzione positiva dell'asse \hat{x} . Prendiamo il flusso come viscoso, incomprimibile e stazionario. Le equazioni da risolvere sono in pratica:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} \quad (5.13)$$

queste equazioni sono non-lineari e di difficile risoluzione; serve qualche approssimazione per poter sperare di risolverle analiticamente. Procediamo come segue, introducendo:

- una lunghezza caratteristica $L = R$, il raggio della sfera
- una velocità caratteristica $U = v$, la velocità del fluido all'infinito

e ricaviamo da queste una pressione caratteristica $P = \mu U/L$, possiamo riscalar¹⁹ tutte le grandezze dell'equazione per renderle adimensionali; in particolare, se indichiamo le grandezze e le loro derivate riscalate con un asterisco, otterremo:

$$\frac{\rho v R}{\mu} (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* = -\vec{\nabla}^* p^* + (\nabla^*)^2 \vec{u}^* \quad (5.14)$$

la quantità $Re = \frac{\rho v R}{\mu}$ si chiama numero di Reynolds, e noi supporremo $Re \ll 1$ per poter sbarazzarci del termine quadratico in u . In pratica se il fluido è molto viscoso, la velocità molto piccola, la densità molto piccola, o la sfera molto piccola, varrà la legge di Stokes. Le equazioni da risolvere saranno:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \vec{\nabla} p = \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (5.15)$$

con le condizioni al contorno: $\vec{u} = v\hat{x}$ per $|\vec{r}| \rightarrow \pm\infty$ e $\vec{u} = 0$ sulla sfera²⁰, e che la pressione sia p_0 all'infinito²¹. Ora è chiaro perché la densità era irrilevante: nelle approssimazioni in cui ci siamo messi, sparisce dalle equazioni! Da questo punto in avanti il conto diventa abbastanza tecnico; non volendo ammorbare il lettore, ci limiteremo a fornire i risultati, dedicando al conto esplicito la sezione C.1. L'idea comunque è che il sistema ha un'unica soluzione, e che le velocità in coordinate polari sono:

$$u_r = v \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{R}{r} \right) \cos \theta \quad u_\theta = v \left(-1 + \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{R}{r} \right) \sin \theta \quad (5.16)$$

mentre la pressione è:

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \frac{\mu v R}{r^2} \cos \theta \quad (5.17)$$

Ora, la forza totale nella direzione \hat{x} sarà data da:

$$F_D = - \int \sigma_{r\theta}|_{r=R} \sin \theta dA + \int \sigma_{rr}|_{r=R} \cos \theta dA \quad (5.18)$$

dove gli integrali sono estesi sulla superficie sferica. Dato che è noto il campo di velocità, è possibile anche calcolare le componenti richieste del tensore degli sforzi²²:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = -p_0 + \frac{3}{2} \frac{\mu v}{R} \cos \theta \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R} = -\frac{3}{2} \frac{\mu v}{R} \sin \theta \quad (5.19)$$

¹⁹La velocità sarà ad esempio $u = vu^*$, l'operatore nabla invece $\nabla = \nabla^*/L$.

²⁰Questa è la condizione che nel caso viscoso si richiede al contatto con i corpi solidi.

²¹Questa è semplicemente una pressione di background, non influisce sulla sfera perché il suo integrale sulla superficie, che è un dominio simmetrico rispetto al centro, è nullo.

²²Non ricaveremo da nessuna parte la forma del tensore degli sforzi in coordinate sferiche; il lettore tuttavia, può fare una ricerca e convincersi delle formule date.

e dopo un po' di fatica possiamo eseguire l'integrale per ottenere:

$$F_D = 6\pi\mu Rv \quad (5.20)$$

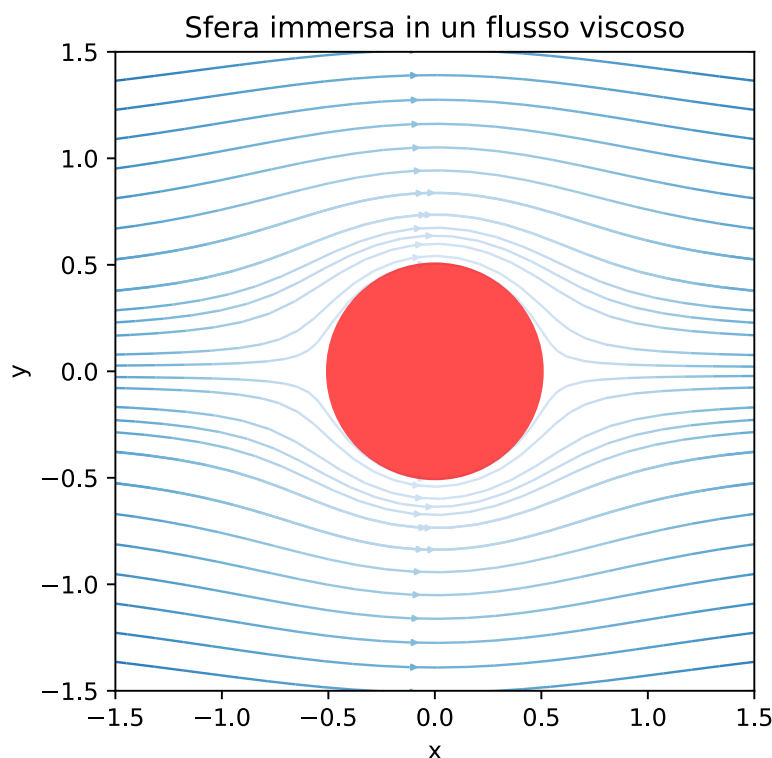


Figura 9: Grafico che rappresenta le linee di flusso trovate; si ricorda che il risultato è realistico solo per piccoli numeri di Reynolds

5.3 ★★☆☆☆☆ Linearizzazione

Come abbiamo visto le equazioni di Navier-Stokes sono un complesso sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non-lineari, che in molti casi non ammettono una soluzione analitica. Nella sezione precedente abbiamo visto però come delle opportune approssimazioni, possono trasformare un problema non-lineare in un problema lineare: questo processo è noto come linearizzazione.

§ 5.3.1. ★☆☆☆☆ **Onde sonore.** — Il primo esempio di linearizzazione che analizziamo coinvolge il fenomeno delle onde sonore. Consideriamo un fluido non viscoso, ma comprimibile, per il quale le equazioni di Navier-Stokes si riducono a:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (5.21)$$

Notiamo che una soluzione di tali equazioni consiste nel considerare un fluido a riposo $\vec{u} = 0$, con pressione di background p_0 e densità ρ_0 . L'idea adesso è di considerare piccole perturbazioni da questa situazione:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad p = p_0 + p_1 \quad \vec{v} = \vec{v}_1 \quad (5.22)$$

dove $\rho_1 \ll \rho_0$, $p_1 \ll p_0$. Avendo messo a zero la velocità a riposo, non abbiamo una scala di riferimento esplicita per confrontare \vec{v}_1 . Vedremo che in realtà esiste una velocità caratteristica

implicita nella relazione tra densità e pressione; detta c_s tale velocità la condizione sulla velocità affinché valga la linearizzazione è $|\vec{v}_1| \ll c_s$. Procediamo con l'eliminazione nelle due equazioni di tutti i termini che vanno oltre il primo ordine:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1 \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1 = 0 \quad (5.23)$$

Vediamo a questo punto che abbiamo due equazioni e tre incognite; supponiamo quindi che il fluido sia barotropico, cioè che la pressione dipenda unicamente dalla densità $p = p(\rho)$. Possiamo a questo punto espandere in serie di Taylor questa pressione attorno al valore di background della densità per ottenere, al primo ordine:

$$p(\rho) = p(\rho_0) + \frac{dp}{d\rho}(\rho_0)(\rho - \rho_0) \Rightarrow p_1 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_0)\rho_1 \quad (5.24)$$

A questo punto possiamo notare che il rapporto tra una pressione e una densità è il quadrato di una velocità; in pratica, abbiamo trovato la velocità caratteristica che cercavamo:

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)} \quad (5.25)$$

Tornando alle equazioni, si trova, prendendo il rotore della prima, che:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{u}_1) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{u}_1 = \text{cost} \quad (5.26)$$

Come discusso nella sezione C.2, fissata la distribuzione della vorticità in tutto il fluido, è anche fissata la parte del campo di velocità con rotore diverso da zero, (e divergenza nulla). In pratica potremo scrivere:

$$\vec{u}_1 = \vec{u}'_1 + \vec{u}''_1 \quad (5.27)$$

dove la prima componente ha rotore uguale a zero, mentre la seconda è la parte a rotore non nullo completamente determinata dalla vorticità; questa seconda componente, essendo la vorticità costante, è anch'essa costante, e possiamo restringerci a studiare solo la parte irrotazionale, che indicheremo per brevità solo con \vec{u}_1 . Per questa, è possibile, come già spiegato in sezione 4.4.1, introdurre un potenziale:

$$\vec{u}_1 = \vec{\nabla} \phi \quad (5.28)$$

Introducendo tale potenziale nella prima equazione, e scambiando l'operatore nabla con la derivata parziale rispetto al tempo²³, otteniamo:

$$\vec{\nabla} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \vec{\nabla}(-c_s^2 \rho_1) \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c_s^2 \rho_1 \quad (5.29)$$

da cui si vede che ci basta ottenere ϕ per conoscere anche ρ_1 . Si noti anche che la costante di cui differiscono gli argomenti dei gradienti è nulla, come si può verificare per la soluzione in cui $\vec{u}_1 = 0$, per la quale si può prendere $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, e chiaramente $\rho_1 = 0$, dato che la densità coincide con quella di background. Sostituendo infine ρ_1 nella prima equazione, si arriva ad ottenere finalmente:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.30)$$

che è l'equazione delle onde per il potenziale scalare del campo di velocità. Tale equazione è molto importante, e dedicheremo un po' di spazio alla sua analisi.

²³Cosa che, a meno di prendere casi patologici, si può sempre fare.

§ 5.3.2. ★★★★★☆ **Equazione delle onde.** — Se consideriamo la propagazione di onde sonore planari, ovvero onde sonore in cui il campo di velocità, e quindi anche il potenziale, è omogeneo sui piani yz , l'equazione delle onde si restringe a:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.31)$$

Per trovare la soluzione generale a tale equazione, può provare la sostituzione $\xi = x - ct$ e $\eta = x + ct$, per ottenere (lo si verifichi per esercizio):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (5.32)$$

che ha come soluzione generale, integrando due volte:

$$\phi = f_1(x - c_s t) + f_2(x + c_s t) \quad (5.33)$$

Quanto abbiamo ottenuto, in poche parole, è che la soluzione all'equazione delle onde nel caso monodimensionale è sempre data da due contributi, dove ciascuno contributo è costituito da una funzione che trasla a velocità costante c_s , e in un caso di muove verso destra mentre nell'altro si muove verso sinistra. Nel caso tridimensionale²⁴, un onda piana si scrive come:

$$\phi = h(\vec{n} \cdot \vec{x} - c_s t) \quad (5.34)$$

dove \vec{n} è un vettore unitario, \vec{x} è il vettore posizione, e $h(\epsilon)$ è il profilo dell'onda. Questa è una funzione che è costante sui piani perpendicolari a \vec{n} , e varia nella direzione parallela secondo la forma di h . Come è naturale, \vec{n} si chiama direzione di propagazione. Nel caso in analisi, la velocità relativa ad un'onda piana, sarà:

$$\vec{u}_1 = h'(\vec{n} \cdot \vec{x} - c_s t) \vec{n} \quad (5.35)$$

che si vede essere sostanzialmente allineata con la direzione di propagazione: le onde sonore piane sono longitudinali. Questo non è sempre il caso, a volte l'equazione delle onde emerge in contesti, come l'Elettromagnetismo, in cui le onde sono trasversali. Infine, una classe molto importante di onde piane, sono le soluzioni del tipo:

$$\phi = \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \psi) \quad (5.36)$$

con ψ fase arbitraria. Queste, si chiamano onde piane monocromatiche, e sono soluzioni dell'equazione delle onde solo se:

$$\omega = c_s k \quad (5.37)$$

D'ora in poi, la relazione funzionale tra ω e k verrà chiamata *relazione di dispersione*.

§ 5.3.3. ★★★★★☆ **Velocità del suono.** — Concludiamo il discorso calcolando esplicitamente c_s per un gas ideale. Le onde sonore si propagano sostanzialmente in modo adiabatico, cioè in modo che sia trascurabile la trasmissione di calore tra i vari elementi fluidi e la dissipazione. Possiamo quindi uguagliare la variazione di energia interna in un elemento fluido, al lavoro compiuto durante l'espansione, con segno negativo:

$$dU = nc_V dT = -pdV = -\frac{p}{\rho^2} m d\rho \quad (5.38)$$

²⁴Si tiene a specificare che nel caso tridimensionale le onde piane sono soluzioni, ma ovviamente non è più vero che ne bastano due per ottenere una generica soluzione all'equazione delle onde; non discuteremo come sono fatte le soluzioni generiche di questa equazione.

Possiamo inoltre usare l'equazione dei gas perfetti per calcolare il differenziale di temperatura:

$$p = \frac{R}{\mu} T \rho \Rightarrow dT = \frac{\mu}{R} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho \right) \quad (5.39)$$

Dove con μ si intende la massa molare. Sostituendo nella prima equazione questo differenziale, è possibile trovare infine:

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{c_P}{c_V} \frac{p}{\rho} = \gamma \frac{RT}{\mu} \quad (5.40)$$

da cui conosciamo la velocità del suono in funzione della specie molecolare che costituisce il gas e della temperatura.

§ 5.3.4. ★☆☆☆☆ **Onde di superficie: impostazione.** — Passiamo adesso al secondo problema che coinvolge la linearizzazione delle equazioni di Navier-Stokes. Consideriamo un fluido incomprimibile e non viscoso, che occupa tutto il semispazio inferiore $z < 0$, soggetto alla forza di gravità; ci occuperemo successivamente del problema di mettere un "fondo" che delimiti il liquido inferiormente. Inoltre, supponiamo che sulla superficie del fluido la pressione sia sempre uguale al valore costante p_{atm} , e trascuriamo la tensione superficiale del fluido nel semipiano inferiore.

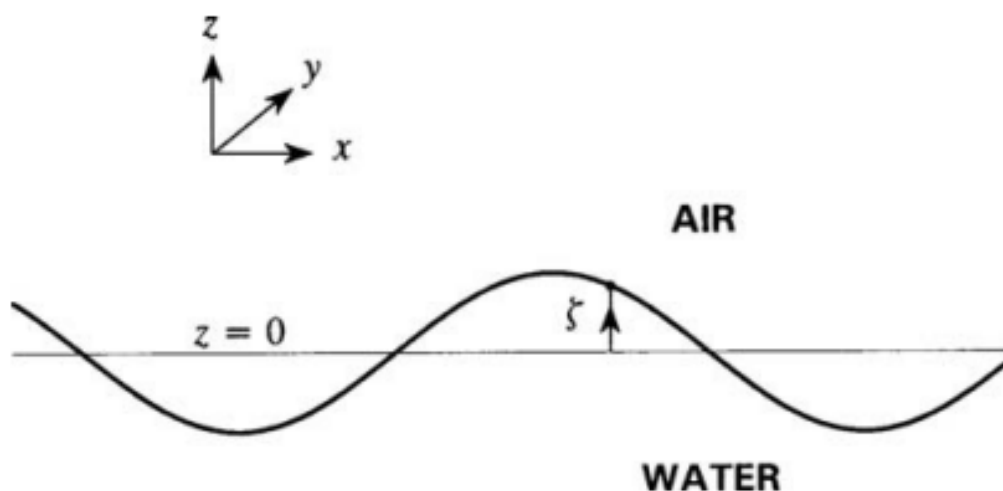


Figura 10: Immagine che rappresenta la superficie libera d'acqua perturbata.

Vogliamo essenzialmente studiare il moto oscillatorio della superficie libera, che è lo stesso moto responsabile delle onde di superficie che si possono osservare ad esempio al mare. Iniziamo scrivendo le equazioni di Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (5.41)$$

Come nel caso precedente vorremmo sbarazzarci del termine non-lineare supponendo che la velocità sia piccola; la condizione è essenzialmente che il campo di velocità sia sempre piccolo rispetto alla velocità di propagazione delle onde²⁵, che calcoleremo in seguito. Partiamo dalla soluzione di equilibrio:

$$\vec{u}_0 = 0 \quad p_0 = p_{atm} - \rho g z \quad (5.42)$$

L'idea ora, è considerare delle piccole perturbazioni u e $p_e = p - p_0$, e scrivere le equazioni linearizzate per queste ultime. Tali equazioni risultano essere:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_e \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (5.43)$$

²⁵oppure che l'ampiezza dell'oscillazione sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda.

Come per il conto precedente, dalla prima si deduce essenzialmente che la vorticità deve essere costante, quindi il campo di velocità generato da quest'ultima deve anche esso conservarsi. Se questo si conserva, dalla prima equazione si vede che il gradiente della pressione deve annullarsi, ma questo è possibile solo la pressione è costante in tutto il fluido; questo, può accadere solo se la pressione è nulla.²⁶ In pratica, possiamo di nuovo restringerci a studiare la componente della velocità irrotazionali, per cui:

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi \quad (5.44)$$

In questo caso, la seconda equazione si riduce a:

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (5.45)$$

Questa si chiama equazione di Laplace, ed è un'equazione fondamentale della Fisica, dalle ben note soluzioni, che dipendono strettamente dalle condizioni al bordo del problema. In effetti ciò che genererà un moto ondulatorio saranno proprio le condizioni al bordo sulla superficie superiore, come vedremo in seguito. La prima condizione al bordo consiste nel richiedere che la pressione sia quella atmosferica sulla superficie perturbata. Detta $\zeta(x, y; t)$ la funzione che descrive tale superficie, avremo:

$$p_e(\zeta) = \rho g \zeta \quad (5.46)$$

che come si può verificare mantiene sempre la superficie perturbata alla pressione atmosferica. Dalla prima equazione si ricava, come nel conto precedente:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -p_e \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} = -g\zeta \quad (5.47)$$

Al primo ordine possiamo valutare la derivata parziale direttamente in $z = 0$; per convincerci di ciò possiamo applicare il teorema di Lagrange, per scrivere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \Big|_{z^* \in (0, \zeta)} = \zeta \frac{\partial u_z}{\partial t} \Big|_{z^* \in (0, \zeta)} \approx 0 \quad (5.48)$$

dato che l'ultimo è il prodotto tra due quantità piccole. La seconda è invece una condizione cinematica: in pratica vogliamo che un elemento di fluido sulla superficie, ci rimanga durante il moto, perciò:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} \quad (5.49)$$

questa, al prim'ordine, ripetendo lo stesso ragionamento fatto sopra, diventa:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (5.50)$$

Mettendo tutto insieme, abbiamo finalmente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -g \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (5.51)$$

§ 5.3.5. ★☆☆☆☆ **Onde di superficie: soluzione.** — Ci limiteremo a trovare una soluzione che funziona e a studiare il suo comportamento. Immaginiamo di restringerci a moti invarianti per traslazioni nella direzione \hat{y} ; in pratica prendiamo un potenziale che dipende solo da x e da z . Un tentativo che possiamo fare è:

$$\phi = \Phi(z) \cos(kx - \omega t) \quad (5.52)$$

²⁶Una pressione costante non nulla porterebbe ad uno spostamento complessivo della superficie verticale; implicitamente vorremmo anche la media delle perturbazioni sia nulla, per conservare la massa.

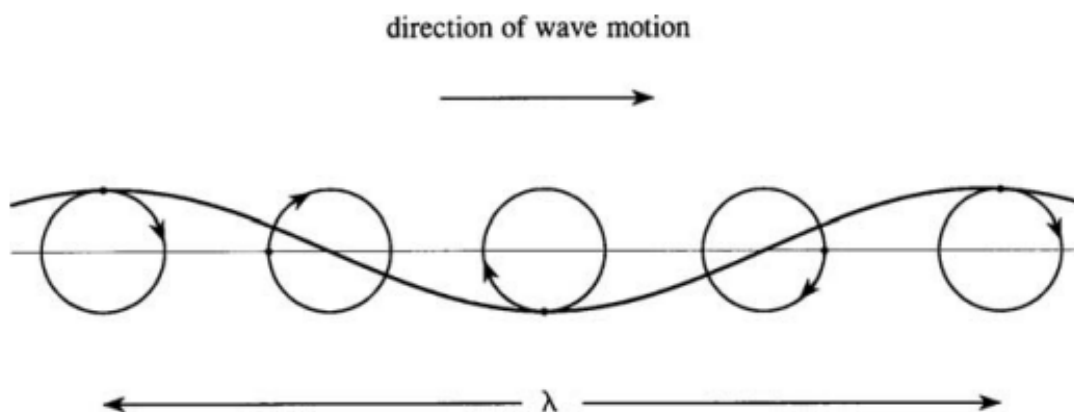


Figura 11: Le particelle si muovono lungo delle piccole circonferenze, con il raggio che diminuisce con la profondità.

cioè un'onda monocromatica modulata da un profilo verticale variabile. L'equazione di Laplace impone, come si può verificare:

$$\Phi''(z) = k\Phi(z) \quad (5.53)$$

che è una ben nota equazione differenziale con soluzioni:

$$\Phi(z) = \Phi_0 e^{\pm kz} \quad (5.54)$$

Ora, se supponiamo che le acque sono molto profonde, quindi la velocità ci aspettiamo tenda a zero per profondità elevate, prenderemo solo l'esponenziale decrescente, e il campo di velocità risultante sarà:

$$u_x = -k\Phi_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad u_z = k\Phi_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t) \quad (5.55)$$

In pratica il campo di velocità fissata la posizione, ruota su delle circonferenze (in senso orario), che diventano sempre più piccole man mano che l'altezza decresce. La condizione al bordo impone invece:

$$-\omega^2 \Phi_0 \cos(kx - \omega t) = -gk\Phi_0 \cos(kx - \omega t) \Rightarrow \omega = \sqrt{gk} \quad (5.56)$$

Questo risultato, si poteva ricavare, in maniera decisamente più rapida, anche sfruttando l'analisi dimensionale; dato k , dato g e data ρ (che sono gli unici parametri fisici del sistema), l'unico modo di ottenere ω è quello che abbiamo appena ricavato. Si noti come la relazione di dispersione non sia lineare; in questi casi, si definiscono, rispettivamente, la velocità di fase e la velocità di gruppo come:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (5.57)$$

Non ci addentreremo nei dettagli, ma il fatto che queste due siano diverse, implica che il mezzo in cui le onde si propagano è dispersivo. Se invece avessimo voluto mettere un fondale, avremmo dovuto imporre $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ in $z = -H$. Per fare in modo che tale condizione sia verificata, si possono tenere le due soluzioni esponenziali, sommandole nel modo opportuno; facendo così si ottiene:

$$\phi = \Phi_0 \cosh k(z + H) \cos(kx - \omega t) \quad (5.58)$$

con relativa relazione di dispersione:

$$\omega^2 = gk \tanh kH \quad (5.59)$$

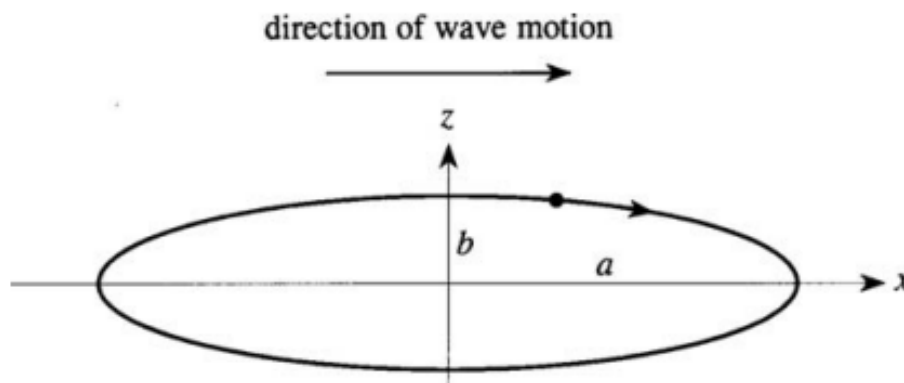


Figura 12: In acque di altezza finita il moto delle particelle avviene lungo piccole ellissi, che hanno eccentricità crescente con la profondità (si schiacciano nella direzione z).

Si osservi come questa volta l'analisi dimensionale non sarebbe stata sufficiente. In questo caso il relativo campo di velocità è:

$$u_x = -k\Phi_0 \cosh[k(z+H)] \sin(kx - \omega t) \quad u_z = k\Phi_0 \sinh[k(z+H)] \cos(kx - \omega t) \quad (5.60)$$

Come si può verificare, fissata la posizione, il vettore velocità in un punto percorre delle traiettorie ellittiche con assi:

$$a = k\Phi_0 \cosh[k(z+H)] \quad b = k\Phi_0 \sinh[k(z+H)] \quad (5.61)$$

queste aumentano la loro eccentricità con la profondità, fino a schiacciarsi sul fondo.

SEZ. 6 — INTERAZIONI NON-LINEARI

Il risultato delle onde di gravità appena discusso per quanto sia un risultato coerente con quanto osserviamo resta, come molti altri risultati nel settore, un'approssimazione della teoria completa. E per quanto buona e generale un'approssimazione può essere, resta un'approssimazione e in quanto tale non coglie appieno tutti gli aspetti della teoria di fondo.

In questo caso abbiamo eseguito una *linearizzazione* della teoria fluidodinamica, ossia ci siamo ridotti a considerare solo i termini lineari nel campo di velocità. Proprio per questo motivo le equazioni che abbiamo ottenuto sono risolte non solo dalle onde piane monocromatiche che abbiamo ricavato ma anche da qualsiasi sovrapposizione lineare di queste. Questo aspetto, in prima approssimazione, coincide con quanto ci aspetteremmo a livello intuitivo: le onde non vengono influenzate le une dalle altre e quando si incrociano si *sovrappongono* senza deformarsi a vicenda. Tuttavia se torniamo a guardare le equazioni di partenza (Eulero o N.S.) i termini non-lineari, prima rimossi, ora impediscono che le soluzioni godano del principio di sovrapposizione, indicando dunque che ci debba essere una forma di *autointerazione*: il campo che influenza sé stesso. Questo punto di vista è ovviamente contro intuitivo se lo confrontiamo con l'intuito che ci siamo costruiti con le particelle classiche. Ciononostante è facile pensare a degli esempi in cui anche l'intuito ci dice che non può valere il principio di sovrapposizione lineare. Ad esempio, consideriamo due *blob* di acqua posti agli estremi opposti di una guida a forma di U. Se li consideriamo uno alla volta potremmo aspettarci che per via della forma della guida questi oscillano un po' per poi stabilizzarsi al centro, se invece li consideriamo assieme è naturale aspettarsi che quando si incrociano ci sia un'interazione non banale fra i due che li porti a *frenarsi* a vicenda e formare una massa unica nella valle della guida.

Esempio 6.1. Calcoliamo per verifica il termine non-lineare su una sovrapposizione lineare a coefficienti costanti di campi di velocità.

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{tot}} &= \sum_i \alpha_i \vec{v}_i \\ \vec{v}_{\text{tot}} \cdot \nabla \vec{v}_{\text{tot}} &= \sum_{(i,j)} \alpha_i \alpha_j \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_j\end{aligned}\tag{6.1}$$

Spinti da queste idee, nelle prossime sezioni andremo a studiare gli effetti che si hanno *riaccendendo* l'interazione non-lineare del campo di velocità. In particolar modo andremo a considerare ciò che accade nel momento in cui si considerano più onde di gravità che si muovono sulla superficie del mare. Ricaveremo delle equazioni che descrivono come queste *interagiscono* l'una con l'altra producendo *nuove* onde a frequenza diversa.

6.1 ★☆☆☆☆ Sovrapporre onde diverse

Nel ricavare le onde di gravità abbiamo cercato una soluzione *potenziale* del campo di velocità, ossia una soluzione della forma:

$$\vec{v} = \nabla \varphi(\vec{x})\tag{6.2}$$

Il risultato finale in verità sarà valido anche per soluzioni più generali, ma per semplicità di esposizione continueremo a lavorare con soluzioni di questo tipo. Come primo passo è necessario capire come possiamo *sovrapporre* le soluzioni che abbiamo trovato prima. Come dicevamo non è più sufficiente considerare sovrapposizioni a coefficienti costanti come in eq. 6.1 per via del termine non-lineare. Quindi siamo costretti a moltiplicare per *funzioni* che in linea di principio possono dipendere sia dallo spazio che dal tempo in modo non banale. Prendere una combinazione di questo genere però rischia di modificare eccessivamente ciò che vorremmo interpretare come una sovrapposizione di onde di gravità; ad esempio se avessimo una dipendenza spaziale nei coefficienti non sarebbe più neanche chiaro *dove* sia l'onda piana o che ampiezza abbia. Il modo più semplice di procedere è scegliere i coefficienti come funzioni esclusivamente del tempo. Tale scelta infatti presenta molti vantaggi:

1. non dobbiamo specificare *dove* prendiamo una combinazione lineare, se sul potenziale o sul campo di velocità: una funzione del tempo si comporta come una costante quando si deriva nello spazio dunque una combinazione lineare dei potenziali corrisponde alla *stessa* sovrapposizione lineare dei campi di velocità associati ai potenziali. In formule:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{tot}} &= f_1(t)\varphi_1(\vec{x}, t) + f_2(t)\varphi_2(\vec{x}, t) + \dots \\ \vec{v}_{\text{tot}} = \nabla \varphi_{\text{tot}} &= f_1(t)\vec{v}_1(\vec{x}, t) + f_2(t)\vec{v}_2(\vec{x}, t) + \dots \\ \vec{v}_i &= \nabla \varphi_i(\vec{x}, t)\end{aligned}\tag{6.3}$$

2. il termine non-lineare dipende dal campo di velocità e dalle sue derivate spaziali, dunque anche qui come prima dato che le funzioni f_i della combinazione lineare dipendono solo dal tempo si comportano come delle costanti. Dunque questo termine si riconduce al termine quadratico che abbiamo già trovato in eq. 6.1.
3. L'interpretazione di quanto scritto sul campo di velocità è chiara, non stiamo modificando la *forma* delle soluzioni ma ne stiamo modulando l'ampiezza al variare del tempo. Ad esempio se otteniamo che la f_i , associata ad un'onda ad una data frequenza, è nulla al tempo iniziale e poi cresce fino a stabilizzarsi su un certo valore, allora vorrà dire che quell'onda inizialmente non era presente nel sistema e che viene *prodotta* dall'evoluzione temporale del sistema.

6.2 ★☆☆☆☆ La soluzione lineare

Prima di procedere con i calcoli che ci porteranno ad ottenere la modulazione delle ampiezze, studiamo come risolvere l'equazione linearizzata trovata precedentemente 5.51 nel caso in cui si hanno più onde.²⁷ Stiamo considerando dunque un caso in cui vogliamo risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} &= \sum_i \alpha_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -g\zeta \\ \varphi &= \sum_i \alpha_i \varphi_i\end{aligned}\tag{6.4}$$

Dove le funzioni $\varphi_i = e^{k_i z} \cos(k_i x - \omega_i t)$ sono diverse dalle 5.52 solo nel fatto che abbiamo fissato il parametro $\Phi_0 = 1$, o per meglio dire li abbiamo esplicitati nella somma. Notiamo dunque che se ripetiamo i passaggi della sezione 5.3.5, le equazioni sono risolte esattamente dal potenziale φ , questo in virtù della linearità del sistema. Pertanto non c'è nulla da risolvere, anzi l'equazione 6.4 può essere usata per ottenere l'altezza totale ζ della superficie del mare²⁸. Com'è intuitivo pensare, le onde si sovrappongono e dunque l'altezza totale è data dalla somma delle altezze delle singole onde.

Aggiungiamo qui un ultimo dettaglio, necessario per la sezione successiva. Quando abbiamo ottenuto la forma $\varphi_i = e^{k_i z} \cos(k_i x - \omega_i t)$ nella sezione 5.3.5 non abbiamo fatto differenze fra questa e la soluzione che si otterrebbe usando il sin al posto del cos. Infatti, per le equazioni scritte in precedenza questo scambio non porta ad alcuna variazione del risultato. Tuttavia nella sezione successiva saranno rilevanti le derivate nella direzione di propagazione dell'onda e le due scelte portano un cambio di segno. Distingueremo dunque le due soluzioni con apici distinti, inoltre dato che sono due soluzioni **indipendenti** a ciascuna andrà associata la relativa ampiezza.

$$\begin{aligned}\varphi^{(-1)} &= e^{k_i z} \cos(k_i x - \omega_i t) \\ \varphi^{(1)} &= e^{k_i z} \sin(k_i x - \omega_i t)\end{aligned}\tag{6.5}$$

Queste due soluzioni *fisicamente* si distinguono l'una dall'altra per il verso di rotazione della velocità nella prima in senso orario mentre nella seconda in verso antiorario.

Nota. Con i nomi dati a ciascuna soluzione si ha:

$$\frac{\partial \varphi^{(s)}}{\partial x} = s k \varphi^{(-s)}\tag{6.6}$$

6.3 ★☆☆☆☆ La correzione non-lineare

In questa sezione affronteremo l'arduo compito di ricavare le equazioni soddisfatte dalle ampiezze f_i . Dato che abbiamo intenzione di mantenere termini quadratici nei potenziali dobbiamo sviluppare anche la pressione a riposo al secondo ordine. Tuttavia questa presenta solo una dipendenza lineare dalla coordinata z e dunque non si hanno contributi aggiuntivi oltre quello lineare. Inoltre la soluzione che stiamo considerando è ancora una soluzione potenziale, dunque possiamo partire dall'equazione di Bernoulli ricavata nella sezione 5.3.4 senza cancellare i termini del secondo ordine. Sviluppando il termine destro al primo ordine e mantenendo i termini che avevamo precedentemente trascurato, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} \Big|_{z=0} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \varphi_{tot} + \frac{1}{2} v^2 \Big|_{z=0} &= -g\zeta \\ \frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_{\perp} \varphi_{tot} \cdot \nabla_{\perp} \zeta &= \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial z} \Big|_{z=0} + \zeta \frac{\partial^2 \varphi_{tot}}{\partial z^2}\end{aligned}\tag{6.7}$$

²⁷In questa sezione torniamo a considerare sovrapposizioni lineari a coefficienti costanti, nella sezione successiva useremo ampiezze dipendenti dal tempo.

²⁸Rispetto alla superficie a riposo, data da $z = 0$.

Le equazioni 6.7 vanno risolte simultaneamente al secondo ordine perturbativo. Dato che nell'equazione compaiono termini con potenza diversa nei potenziali e nello spostamento ζ non tutti i termini dovranno essere noti allo stesso ordine. Ad esempio nei termini quadratici, ossia che coinvolgono prodotti fra due ampiezze dei potenziali o fra un potenziale e uno spostamento ζ , i singoli termini del prodotto sarà sufficiente esprimerli al primo ordine perturbativo cosicché il loro prodotto sia un termine del secondo ordine. Se si mantenessero infatti termini del secondo ordine nei fattori allora si otterrebbero termini del terzo ordine (o superiore) nel prodotto, termini che dunque andrebbero trascurati²⁹. Quanto appena detto **NON** è valido per i termini lineari che invece andranno espressi mantenendo tutti i termini fino al secondo ordine perturbativo. Un ulteriore fatto da ricordare è che le ampiezze f_i che abbiamo *promosso* a funzioni del tempo, non possono essere funzioni *generiche* del tempo in quanto non devono modificare la soluzione al primo ordine del problema. Pertanto è *necessario* richiedere che la derivata temporale delle ampiezze sia un termine del secondo ordine perturbativo. Tale richiesta equivale a richiedere che le ampiezze siano funzioni *lentamente* variabili nel tempo. In termini matematici, se ϵ è il parametro di espansione piccolo qui stiamo assumendo che:

$$f_i = \epsilon g(\epsilon t) \quad (6.8)$$

Dove $g(t)$ è una funzione che assume valori dell'ordine dell'unità. Iniziamo dunque a semplificare le equazioni 6.7 usando quanto appena detto. Nei termini non-lineari in cui compare ζ è sufficiente sostituire il suo valore al primo ordine ottenuto dalla prima equazione.

$$\frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} = -g\zeta \quad (6.9)$$

Da cui abbiamo:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \varphi_{tot} \cdot \nabla_{\perp} \zeta &= \nabla_{\perp} \varphi_{tot} \cdot \nabla_{\perp} \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{tot} \right) = -\frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\perp} \varphi_{tot} \cdot \nabla_{\perp} \varphi_{tot}) \\ \zeta \frac{\partial^2 \varphi_{tot}}{\partial t \partial z} &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_{tot}}{\partial t \partial z} \\ \zeta \frac{\partial^2 \varphi_{tot}}{\partial z^2} &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_{tot}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Il termine $\frac{1}{2}v^2$ è semplice da trattare in quanto è sufficiente usare $v = \nabla \varphi_{tot}$ ed espandere le somme ottenute. Non sembra che la situazione si sia semplificata significativamente in quanto abbiamo spostato il problema dal calcolo della ζ ad una combinazione delle derivate temporali che però hanno due contributi uno dall'ampiezza f_i ed uno dall'oscillazione dovuta alla soluzione lineare. Dunque in quest'ultimo fattore sembra che vadano considerati quattro termini mentre dal primo se ne ottengono due. Fortunatamente, proprio come si diceva prima, è sufficiente approssimare ciascun fattore solo al primo ordine perturbativo per cui vanno **trascurate** le derivate delle ampiezze f_i (del secondo ordine). Abbiamo dunque ottenuto:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} \right|_{z=0} - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \varphi_{tot} + \frac{1}{2} v^2 \Big|_{z=0} &= -g\zeta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\perp} \varphi_{tot} \cdot \nabla_{\perp} \varphi_{tot}) + \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_{tot}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Derivando dunque la prima nel tempo possiamo sostituire la seconda così da ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{tot}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \varphi_{tot} + \frac{1}{2} v^2 \right) &= \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\perp} \varphi_{tot} \cdot \nabla_{\perp} \varphi_{tot}) - g \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_{tot}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

²⁹Attenzione quando detto vale specificatamente in quanto le singole ampiezze sono già termini del primo ordine. Se avessero un contributo costante allora quanto detto non sarebbe vero.

E manipolando i termini può essere riscritta come:

$$(\partial_t^2 + g\partial_z)\varphi_{tot} = \frac{1}{2g}\partial_t\partial_z(\partial_t\varphi_{tot})^2 + \partial_t\varphi_{tot}\partial_z^2\varphi_{tot} - \frac{1}{2}\partial_t(\partial_z\varphi_{tot})^2 - \partial_t(\nabla_{\perp}\varphi_{tot})^2 \quad (6.13)$$

Quest'equazione è abominevole, tuttavia ha il pregio che tutti i termini *brutti* sono rilegati ai coefficienti quadratici per cui è sufficiente considerare solo i contributi lineari dei vari fattori. Pertanto, ci aspettiamo che nello sviluppare i conti l'unico termine dove possono comparire le derivate delle ampiezze è il primo. Tutti gli altri potranno essere espressi come combinazioni di coefficienti **noti** dalla teoria lineare moltiplicati per due ampiezze f_i . In formule:

$$\sum_i \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) f_i \varphi_i = \sum_{i,j} A_{i,j} f_i f_j \varphi_i \varphi_j \quad (6.14)$$

6.4 ★☆☆☆☆ Interazione di onde

L'equazione 6.13³⁰ va usata per risolvere nel tempo l'andamento delle ampiezze. Il primo aspetto da studiare meglio è la presenza di una dipendenza spaziale che non si semplifica banalmente³¹. In questa sezione vedremo come scomporre l'equazione 6.14 in più equazioni ciascuna che coinvolge le ampiezze relative a tre onde diverse.

Il primo passo è riconoscere che le funzioni del tipo $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ con n intero sono linearmente indipendenti, ossia non è possibile riscrivere una come combinazione lineare delle altre. L'idea è dunque quella di partire dall'equazione 6.14 e ridistribuire i termini in questa raccogliendo in modo da ottenere un'uguaglianza del tipo:

$$\sum_n a_n(t) \cos(nx) + b_n(t) \sin(nx) = 0 \quad (6.15)$$

La proprietà di indipendenza lineare dei coseni e seni ci permette di concludere che ciascuno dei coefficienti a_n e b_n deve annullarsi.

Nota. L'insieme di funzioni del tipo $\cos(nx)$ include anche la funzione costante che si ottiene per $n = 0$ e per la quale valgono gli stessi risultati citati sopra

I termini più problematici sono i termini quadratici. Questi possono essere ricondotti a termini della forma desiderata con le formule di Werner. Pertanto il termine non-lineare dipende dalla somma di seni e coseni (le combinazioni esatte dipendono dalle combinazioni di partenza) con vettore d'onda pari alla somma o differenza dei vettori d'onda iniziali. Quindi affinché due modi \vec{p} e \vec{q} contribuiscano all'evoluzione del modo \vec{k} è necessario che valga $\vec{p} + \vec{q} = \vec{k}$ o $\vec{p} - \vec{q} = \vec{k}$. Tali regole possono essere interpretate come *conservazione della quantità di moto* durante l'interazione.

Per procedere è necessario dunque usare la scrittura esplicita di 6.13 nella forma 6.14 riportata in eq. 6.16.

$$\sum_{i,s} 2s\omega_i \frac{\partial f_i^{(s)}}{\partial t} \varphi_i^{(-s)} = \sum_{i,j,s,r} A_{i,j}^{s,r} f_i^{(s)} f_j^{(r)} \varphi_i^{(-s)} \varphi_j^{(r)} \quad (6.16)$$

$$A_{i,j}^{s,r} = 2r (k_i k_j \omega_j - \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j \omega_i)$$

Inoltre assumiamo che siano presenti solo tre onde, otteniamo così un sistema di tre equazioni non-lineari accoppiate. Ad esempio assumiamo siano presenti tre onde tutte con elicità pari a -1 per cui si ha $\vec{k} + \vec{p} + \vec{q} = 0$. Sviluppando il termine non-lineare e trascurando i termini che non

³⁰Quando sviluppata nella forma 6.14

³¹Dato che le ampiezze per ipotesi non dipendono dalla posizione l'equazione differenziale che ne descrive l'evoluzione non può dipendere dalla coordinata spaziale.

danno contributo si ha:

$$\begin{aligned}
\varphi_p^{(1)} \varphi_q^{(-1)} &= \sin(\vec{p} \cdot \vec{x} - \omega_p t) \cos(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega_q t) \\
&= \frac{1}{2} [\sin((\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{x} - (\omega_p + \omega_q)t) + \sin((\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{x} - (\omega_p - \omega_q)t)] \\
&= -\frac{1}{2} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} + (\omega_p + \omega_q)t) + Nc \\
&= -\frac{1}{2} [\sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t) \cos((\omega_k + \omega_p + \omega_q)t) + \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t) \sin((\omega_k + \omega_p + \omega_q)t)] + Nc \\
&= -\frac{1}{2} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t) \cos((\omega_k + \omega_p + \omega_q)t) + Nc
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Si ottiene dunque come equazione finale:

$$\begin{aligned}
2\omega_k \frac{\partial f_k}{\partial t} &= -\frac{1}{2} (A_{p,q}^{-1,-1} + A_{q,p}^{-1,-1}) f_p f_q \cos((\omega_k + \omega_p + \omega_q)t) \\
&= \frac{1}{2} (\omega_p + \omega_q) ((p+q)^2 - k^2) f_p f_q \cos((\omega_k + \omega_p + \omega_q)t)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Passando ad una notazione esponenziale e scrivendo $\chi_i = f_i e^{-\omega_i t}$ la precedente si può riscrivere come la parte reale della prima delle equazioni in 6.19. Le altre due equazioni si ottengono in modo analogo e descrivono l'evoluzione delle ampiezze delle onde p e q .

$$\begin{aligned}
\chi_k' + i\omega_k \chi_k &= \frac{(\omega_p + \omega_q) ((p+q)^2 - k^2)}{4\omega_k} \chi_p^* \chi_q^* \\
\chi_p' + i\omega_p \chi_p &= \frac{(\omega_k + \omega_q) ((k+q)^2 - p^2)}{4\omega_p} \chi_k^* \chi_q^* \\
\chi_q' + i\omega_q \chi_q &= \frac{(\omega_p + \omega_k) ((p+k)^2 - q^2)}{4\omega_q} \chi_p^* \chi_k^*
\end{aligned} \tag{6.19}$$

6.5 ★☆☆☆☆ Stabilità e connessione con la turbolenza

Il sistema di equazioni 6.19 è un sistema di equazioni non-lineare non facile da risolvere in generale³². Lo studio si può semplificare osservando che se due delle tre ampiezze sono nulle e la terza è costante si ha una soluzione. A partire da questa soluzione, banale, possiamo studiare il comportamento di soluzioni che deviano poco da essa. Tale studio prende il nome di studio della stabilità della soluzione³³ che può risultare stabile (se le perturbazioni rimangono piccole nel tempo) o instabile (se invece si ha una divergenza delle ampiezze delle perturbazioni)³⁴. Scriviamo dunque:

$$\begin{aligned}
\chi_k &\approx \chi_k^0 (1 + \delta_k) \\
\chi_p &\approx \chi_p^0 \delta_p \\
\chi_q &\approx \chi_q^0 \delta_q
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Con la richiesta che ciascuna delle perturbazioni sia *piccola*, ossia valga: $\delta_i \ll 1$. Approssimiamo dunque al primo ordine non banale le equazioni 6.19:

³²Soprattutto nel momento in cui si considerano i vincoli a cui sarebbe soggetto lo stesso sistema, vincoli non riportati sopra

³³Soluzione iniziale

³⁴Attenzione, la divergenza della perturbazione non dice nulla sul comportamento per tempi grandi della soluzione iniziale: l'approssimazione di piccola perturbazione sarà violata dopo un tempo finito invalidando dunque anche la soluzione trovata

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_k}{\partial t} &\propto \delta_p \delta_q \approx 0 \\ \chi_p^0 \delta_p' + i\omega_p \chi_p^0 \delta_p &= \frac{(\omega_k + \omega_q) \left((k+q)^2 - p^2 \right)}{4\omega_p} \chi_k^{0*} \chi_q^{0*} \delta_q^* \\ \chi_q^0 \delta_q' + i\omega_q \chi_q^0 \delta_q &= \frac{(\omega_k + \omega_p) \left((k+p)^2 - q^2 \right)}{4\omega_q} \chi_k^{0*} \chi_p^{0*} \delta_p^* \end{aligned} \quad (6.21)$$

In approssimazione lineare dunque l'onda dominante è costante nel tempo $f_1 \approx 1$, mentre le due ampiezze rimanenti sono regolate da un'equazione lineare del tipo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\lambda f \quad (6.22)$$

che ha come soluzioni esponenziali crescenti o seni e coseni in base al segno di λ ³⁵. Quest'equazione si ottiene dalle precedenti derivando nuovamente nel tempo. Non è necessario studiare in modo separato δ_p e δ_q in quanto sono soluzione della stessa equazione differenziale e dunque avranno lo stesso andamento temporale.

Il segno del termine lineare è regolato dal prodotto $\gamma = \left((k+q)^2 - p^2 \right) \left((k+p)^2 - q^2 \right)$ e come detto in precedenza è questo a determinare il comportamento del sistema. Abbiamo due possibili casi:

1. **Stabile** se $\gamma < 0$ il che si ha quando $k+q < p$ e $k+p > q$ (oppure per una condizione simmetrica in p e q). Pertanto l'onda in ingresso non deve essere l'onda con vettore d'onda di modulo massimo.
2. **Instabile** se $\gamma > 0$ il che si ha quando $k+q > p$ e $k+p > q$. Ad esempio questa condizione è verificata quando k è il vettore d'onda di modulo massimo.

Dunque sono i moduli dei vettori d'onda a regolare il comportamento del sistema. In alcuni casi stabile ed in altri instabile. Ovviamente non abbiamo risolto le soluzioni del sistema globale ma solo gli andamenti in prossimità di soluzioni di equilibrio. Questo ci permette comunque di dedurre che se il nostro sistema ad un certo punto della sua evoluzione si trova in prossimità di uno di questi punti, allora possiamo prevederne l'andamento qualitativo con quanto appena trovato. Dunque possiamo concludere che il sistema, nella sua evoluzione si *allontanerà* dalle configurazioni in cui l'ampiezza massima è concentrata nell'onda con frequenza massima (le configurazioni instabili) e rimarrà *intorno* alle configurazioni in cui l'onda dominante ha frequenza più piccola di quella delle altre onde. Sebbene quanto appena detto sia stato ricavato nel caso in cui si abbiano solo tre onde, è suggestiva l'idea di estenderlo al caso generico. Un'onda dunque cedrebbe energia alle onde con modulo maggiore e ne prenderebbe da quelle con modulo minore. Si avrebbe dunque *cascata* di energia dalle frequenze più alte a quelle più basse. Questo fenomeno è noto come *cascata inversa* ed è uno degli aspetti fondamentali della turbolenza bidimensionale.

6.6 ★☆☆☆☆ Turbolenza e la cascata diretta

Tutti sappiamo riconoscere la turbolenza quando la vediamo e poco di quello che abbiamo fatto finora in questa dispensa sembra includerla. Ci siamo immaginati dei fluidi con un campo di velocità molto liscio e regolare, *prevedibile*, tutto il contrario dell'irregolarità, complessità strutturale e imprevedibilità di un moto turbolento. Ciononostante le equazioni di Navier Stokes riescono a prevedere l'esistenza della turbolenza ma per via della complessità uno studio analitico della soluzione esatta è troppo complicato. Si opta invece per uno studio *probabilistico* della turbolenza, ossia si rinuncia a sapere il valore esatto della velocità in un punto chiedendosi invece

³⁵ seni e coseni per λ positive ed esponenziali crescenti per λ negativi

quali valori assume e con che frequenza. Tale approccio nasce con Kolmogorov che pone le basi di uno studio probabilistico della turbolenza partendo sia da concetti astratti come omogeneità, isotropia e *universalità* che da osservazioni sperimentali. Di queste ultime la principale è anche la più semplice, nota sin dai tempi di Leonardo da Vinci (e sicuramente anche prima): quando c'è turbolenza ci sono vortici di tante dimensioni che convivono nel fluido, il moto non sembra avere una scala caratteristica ma al contrario sembra avere un moto non banale ad ogni scala. Ciò avviene indipendentemente da come viene *forzato* il moto che sia una mano che agita l'acqua o una cascata, si formano sempre vortici di dimensioni più piccole. Lewis Richardson introdusse per primo il concetto della *cascata diretta* secondo cui i vortici più grandi si *spezzano* in vortici più piccoli. Dunque quando la nostra mano agita l'acqua vengono prodotti vortici con dimensioni comparabili a quelle della mano, questi poi per via della cascata diretta vanno a formare vortici via via più piccoli. L'energia dunque in questo caso viene trasportata dal fluido da moti con scale caratteristiche più grandi (i vortici più grossi) a moti con scale caratteristiche più piccole (i vortici più piccoli). Queste affermazioni tuttavia non sono legate ai *vortici* in senso stretto³⁶ ma si può mostrare che sono delle proprietà del moto dei fluidi derivanti dal termine nonlineare nelle equazioni.

Dunque potremmo riportare questo ragionamento sulle onde e dato che la loro scala caratteristica (la lunghezza d'onda) è legata all'inverso del modulo del vettore d'onda si ha che l'energia viene trasferita da onde a vettore d'onda piccoli verso quelle a vettori d'onda grandi. Attenzione, alla luce di quanto ottenuto nella sezione precedente, questo risultato dovrebbe stupirci, avevamo trovato un andamento contrario del flusso di energia dai vettori d'onda grandi verso quelli piccoli. La differenza è legata al fatto che nella descrizione della turbolenza abbiamo parlato di fluidi tridimensionali mentre nella sezione precedente abbiamo analizzato delle onde di *superficie*; un moto bidimensionale in quanto le onde si possono propagare solo sul piano xy e non nella direzione z .³⁷ Per i moti bidimensionali infatti il risultato della *cascata diretta* non è più valido. In due dimensioni si hanno delle altre quantità conservate e questo porta l'energia ad essere trasferita dalle scale più piccole a quelle più grandi. In accordo dunque col risultato trovato precedentemente.

Nota. Un esempio di fluido bidimensionale (che non vive in laboratorio) è l'atmosfera. Dato che il suo spessore (una decina di chilometri) è molto più piccolo del suo diametro (dell'ordine del diametro terrestre, dunque decine di migliaia di chilometri) in prima approssimazione è possibile descrivere la sua dinamica con quella di un fluido bidimensionale. Per quanto diverse dalle onde di superficie trovate precedentemente è possibile studiare le onde che si propagano in tale fluido e anche in questo caso si ottiene una cascata inversa. Pertanto si avranno onde con scale caratteristiche sempre più grandi che potrebbero raggiungere le scale planetarie. Qui la cascata si ferma e si hanno dei moti collettivi su scala globale. Tali moti difatti si osservano, come gli jet stream nell'atmosfera o le fasce di convezione. Tuttavia, per quanto possa sembrare che il semplice ragionamento fatto ne possa giustificare la formazione, non è esattamente così. Tali trattazioni vanno ben oltre lo scopo di queste dispense e quindi ci accontenteremo della prima intuizione.

³⁶fatto sta che non abbiamo neanche definito per bene cosa sia un vortice o un insieme di vortici

³⁷Si possono ripetere le stesse valutazioni fatte nella sezione precedente per onde tridimensionali e si otterrebbero delle condizioni opposte a quelle ottenute in precedenza, indice della cascata diretta.

SEZ. A — ANALISI IN PIÙ VARIABILI

A.1 ★★★★★☆ **Gradiente, Divergenza, Rotore e Laplaciano**

Supponiamo di considerare una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, come ad esempio, un campo di temperatura o di pressione, e di voler generalizzare il concetto di derivata. Ad esempio, potremmo considerare le derivate prese muovendosi lungo uno solo degli assi cartesiani; questo tipo di operazione si chiama derivata parziale e si indica:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

dove in questo caso si è scelta come direzione l'asse x . Come la derivata prima manda funzioni in funzioni, anche le derivate parziali mandano funzioni di più variabili in funzioni di più variabili. Ai fini pratici, fare la derivata parziale ad esempio di una funzione $f(x, y, z)$ vuol dire considerare come variabile solo la direzione in cui si sta derivando (ad esempio x), e le altre direzioni come costanti (in questo caso y e z). Queste derivate sono molto importanti, e ci permetteranno di definire delle operazioni molto utili in Fluidodinamica: gradiente, divergenza, rotore e laplaciano.

§ A.1.1. ★★★★★☆ **Gradiente.** — La prima operazione che definiamo è il gradiente di una funzione $f(x_1, x_2, x_3)$; Il gradiente, prende una funzione scalare f e restituisce un vettore, definito come:

$$\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{x}_i \quad (\text{A.2})$$

Va da sé che per funzioni di una variabile si ha la usuale derivata, mentre per funzioni da \mathbb{R}^2 si riduce la somma alle due componenti spaziali. Si può dimostrare inoltre che il gradiente è un vettore con una proprietà molto importante; se volessimo calcolare la derivata direzionale in una direzione specifica data dal vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, il suo valore sarebbe semplicemente:

$$D_{\vec{v}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} \quad (\text{A.3})$$

Da questa proprietà si vede anche che scegliendo \vec{v} di modulo unitario, la derivata direzionale è massima nella direzione allineata con il gradiente, quando l'angolo tra i due vettori è nullo: in pratica il gradiente determina la direzione di massima variazione della funzione. Inoltre, il gradiente possiede un'altra importante proprietà: esso, è sempre ortogonale alle curve di livello di una funzione³⁸, cioè le superfici caratterizzate da $f(x, y, z) = \text{cost}$.

Il gradiente in altri sistemi di coordinate è sempre definito dalla proprietà A.1.1, e avrà di conseguenza forme diverse³⁹. Nelle dispense infine, useremo la seguente notazione per indicare il gradiente di A nella direzione di \vec{B} :

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) A = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial A}{\partial x_i} \quad (\text{A.4})$$

Tale operazione, ripetuta componente per componente, può essere anche applicata ad un vettore; ad esempio:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \Rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_j = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \forall j \quad (\text{A.5})$$

³⁸intuitivamente, la derivata direzionale lungo le direzioni tangenti alle curve di livello deve annullarsi; ma se il gradiente non è nullo, questo può accadere solo se $\vec{\nabla} f \cdot \vec{v} = 0$.

³⁹non ricaveremo né riporteremo questi operatori in tutti i sistemi di coordinate; potete comunque vedere queste formule nella maggior parte dei testi e formulari.

§ **A.1.2. ★★★★★☆ Divergenza.** — Consideriamo questa volta una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cioè $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ ⁴⁰, dove ciascuna componente è funzione a sua volta delle tre direzioni spaziali. Definiremo la divergenza, come un'operazione che prende un campo vettoriale, e restituisce un campo scalare, dato da:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (\text{A.6})$$

In due dimensioni, basta sommare sulle due dimensioni spaziali. In questo caso la sua proprietà caratterizzante in un sistema di coordinate generico, è la seguente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} \vec{f} \cdot \vec{n} dA \quad (\text{A.7})$$

cioè preso un punto, e preso un volume che nel limite diventa infinitesimo tendendo al punto, la divergenza calcola il rapporto tra il flusso di \vec{f} sul bordo del volume, e il volume stesso.

§ **A.1.3. ★★★★★☆ Rotore.** — Il rotore invece, è un'operazione che prende come la divergenza funzioni $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, e restituisce un campo vettoriale, definito da:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \quad (\text{A.8})$$

Nel caso due dimensionale, il rotore restituisce invece uno scalare definito da:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad (\text{A.9})$$

per la sua definizione nel caso di coordinate generiche, si consideri un punto e un vettore unitario \vec{n} che punta in una direzione arbitraria. Si prenda quindi il piano perpendicolare a \vec{n} , e una curva chiusa che contiene il punto. Allora:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{f}) \cdot \vec{n} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{\partial A} \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad (\text{A.10})$$

cioè la sua componente lungo \vec{n} e il rapporto tra la circuitazione di \vec{f} lungo la curva, fratto l'area della curva stessa, nel limite in cui questa si contrae al punto.

§ **A.1.4. ★★★★★☆☆ Laplaciano.** — Gli operatori che abbiamo visto fin'ora coinvolgono solo le derivate prime. Il laplaciano invece coinvolge le derivate seconde, e trasforma un campo scalare in un altro campo scalare come segue:

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (\text{A.11})$$

cioè, non altro che la divergenza del gradiente⁴¹! Solo che è talmente importante e compare talmente spesso, da meritare un nome a parte. Quando invece si prende il laplaciano di un campo vettoriale, si intende che il risultato è un vettore che ha come componenti il laplaciano di ciascuna componente del vettore iniziale.

⁴⁰come ad esempio il campo di velocità di un fluido.

⁴¹inoltre attenzione, quest'ultimo non ha nulla a che fare con il gradiente della divergenza.

§ A.1.5. ★★★☆☆ **Identità ricorrenti.** — Ci sono una serie di identità ricorrenti che riportiamo di seguito:

- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} A) = 0$
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$
- $\vec{\nabla} \cdot (A\vec{B}) = (\vec{\nabla} A) \cdot \vec{B} + A(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$
- $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{A}|^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{A}$

Qui si sono riportate le identità usate nelle dispense; in realtà ce ne sarebbero molte altre, ma si recuperano facilmente su qualsiasi libro di testo o formulario.

A.2 ★★★☆☆ **Teorema di Stokes**

Spesso accade di dover calcolare in Fisica integrali di volume o di superficie. Il teorema di Stokes è uno strumento molto potente che permette di calcolare degli integrali che coinvolgono l'interno di un volume o di una superficie, passando a calcolare un integrale sui rispettivi bordi. Il teorema è molto generale, ma qui ci limiteremo a presentare le due forme a noi più utili: il teorema della divergenza e il teorema del rotore.⁴²

§ A.2.1. ★★★☆☆ **Teorema della divergenza.** — Consideriamo una funzione $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, dove i casi di nostro interesse sono $d = 2$ e $d = 3$. Supponiamo inoltre che Ω sia sufficientemente regolare, così come f ⁴³. Allora vale la seguente formula:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{n} dA \quad (\text{A.12})$$

dove $\partial\Omega$ indica il bordo del dominio e \vec{n} la sua normale uscente. Inoltre, consideriamo il caso particolare in cui \vec{f} sia del tipo $\vec{f} = f\vec{v}$, dove f è un campo scalare, mentre \vec{v} è un campo vettoriale uniforme arbitrario; sfruttando una delle formule in A.1.5, il teorema della divergenza si riduce a:

$$\vec{v} \cdot \int_{\Omega} \vec{\nabla} f dV = \vec{v} \cdot \int_{\partial\Omega} f \vec{n} dA \Rightarrow \int_{\Omega} \vec{\nabla} f dV = \int_{\partial\Omega} f \vec{n} dA \quad (\text{A.13})$$

dove si è sfruttato anche il fatto che se due vettori hanno lo stesso prodotto scalare con tutti i vettori di \mathbb{R}^3 , allora devono essere uguali.

Per esempio, Un'applicazione importante di questo teorema è il passaggio dalla legge di Gauss integrale per il campo elettrico, a quella differenziale:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{A.14})$$

⁴²la nomenclatura qui, può creare confusione; l'idea è che esiste un teorema generale in geometria differenziale che lega l'integrale della derivata esterna di una forma differenziale di una varietà, all'integrale della forma differenziale stessa sul bordo, inteso come sottovarietà; il teorema della divergenza e del rotore, sono in questo senso solo dei casi particolari di questo teorema generale.

⁴³Qui restiamo vaghi con le ipotesi perché la formalità non è il nostro obiettivo.

§ A.2.2. ★★☆☆☆ **Teorema del rotore.** — Si consideri ora una superficie S sufficientemente regolare con bordo ∂S . Prendiamo $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, in modo che A contenga la superficie, allora vale che:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \cdot \vec{n} dA = \int_{\partial^+ S} \vec{f} \cdot \vec{dl} \quad (\text{A.15})$$

dove l'orientazione di \vec{n} è stabilita arbitrariamente, ma il segno di percorrenza del bordo deve essere positivo rispetto a \vec{n} . Cosa vuol dire positivo? Senza perderci in formalità, possiamo ragionare come segue: se immaginiamo un omino che sta in piedi nella direzione del vettore normale alla superficie, lui percorrerà la curva nel verso positivo se la sua mano sinistra è sempre diretta verso la superficie; ad esempio, se prendiamo un cilindro e orientiamo la sua faccia superiore verso l'alto, il verso di percorrenza positivo della base superiore è quello antiorario. In due dimensioni, il teorema del rotore si riduce a quella che si chiama formula di Green:

$$\int_{\partial S} f dx + g dy = \int_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA \quad (\text{A.16})$$

dove f e g sono funzioni di due variabili sufficientemente regolari definite sulla superficie. Mostriamo ora un'applicazione tipica del teorema del rotore: passare dalla legge dell'induzione integrale a quella differenziale:

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dA = - \int_S \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dA \quad (\text{A.17})$$

SEZ. B — ALGEBRA LINEARE

B.1 ★★☆☆☆ Applicazioni lineari

Spiegare diffusamente i concetti di algebra lineare che esporremo richiederebbe un intero corso universitario; ci limiteremo quindi a riportare i risultati generali utili per capire la notazione usata nelle dispense, e per avere un *flavour* dell'argomento. Daremo per note la definizione di spazio vettoriale, di base, e di dimensione di uno spazio vettoriale, che comunque il lettore può recuperare su qualsiasi testo introduttivo. Per i casi di nostro interesse, limitiamoci⁴⁴ a considerare come spazio vettoriale \mathbb{R}^d , con $d = 1, 2, 3$. Una funzione $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ si dice applicazione lineare se verifica le seguenti proprietà:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d \quad f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{B.1})$$

Un teorema molto importante, afferma che un'applicazione lineare è univocamente determinata dal valore di f sugli elementi di base. Se quindi fissiamo una base di \mathbb{R}^d , tutta l'informazione utile consiste nel determinare quali vettori vengono associati ai vettori di base. Questa informazione si può organizzare in una tabella che si chiama matrice, costruita come segue⁴⁵:

$$[f] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

dove in particolare⁴⁶:

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

⁴⁴ma i risultati che esporremo, saranno validi per qualsiasi d .

⁴⁵qui presentiamo il caso $d = 3$, che viene rappresentato da una matrice 3×3 ; si potrebbe lavorare con matrici che rappresentano applicazioni da \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n , che sarebbero rappresentate da matrici $n \times m$.

⁴⁶Quando si lavora con le matrici è importante che i vettori si scrivano come vettori colonna; ai vettori riga viene riservato invece il ruolo di covettori, ma non ci addenteremo nella questione

ora, tutto ciò è costruito per funzionare nel seguente modo:

$$[v] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow [f(v)] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

dove le matrici vengono moltiplicate nell'usuale metodo "riga per colonna".

§ B.1.1. ★★☆☆☆ Notazione di Einstein. — Molto comunemente in Fisica, le operazioni vettoriali e matriciali vengono sintetizzate grazie a quella che viene chiamata notazione di Einstein. La notazione consiste nel sottintendere una sommatoria su tutti gli indici che vengono ripetuti in un prodotto tra diversi termini. Il modo migliore per capire cosa questo significhi è vedere degli esempi pratici:

- Vettore espresso in una certa base $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{x}_i = v_i \hat{x}_i \quad (\text{B.3})$$

- Prodotto tra un vettore $\vec{v} = v_i \hat{x}_i$ e una matrice con $[A]_{ij} = A_{ij}$ 3×3 :

$$v_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} v_j = A_{ij} v_j \quad (\text{B.4})$$

- Prodotto scalare tra due vettori con tre componenti:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^3 v_i w_i = v_i w_i \quad (\text{B.5})$$

- Prodotto tra due matrici⁴⁷ 3×3 :

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} B_{kj} = A_{ik} B_{kj} = B_{kj} A_{ik} \quad (\text{B.6})$$

- traccia di una matrice 3×3 ⁴⁸:

$$\text{Tr}[A] = \sum_{i=1}^3 A_{ii} = A_{ii} \quad (\text{B.7})$$

e si potrebbe procedere ancora molto. L'unico modo per abituarci a tale convenzione è vederla usare molte volte; una volta imparata però, risulta molto utile e naturale. Come ultimo appunto, in notazione di Einstein, l'identità (cioè la matrice che ha tutti zeri tranne uni sulla diagonale), si scrive attraverso quella che si chiama delta di Kronecker:

$$[Id]_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{B.8})$$

dove $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ altrimenti.

⁴⁷si osservi che in notazione di Einstein le matrici si possono comodamente commutare.

⁴⁸ovvero la somma dei suoi elementi diagonali; la traccia di una matrice è molto importante perché è invariante per cambio di base.

§ **B.1.2. ★★☆☆☆ Cambi di base.** — Una applicazione lineare è una funzione che non dipende dalla scelta della base degli spazi vettoriali in partenza e in arrivo, per cui la sua rappresentazione in forma matriciale deve cambiare una volta cambiata la base. L'idea è che i cambi di base, sono in generale delle applicazioni lineari invertibili dallo spazio vettoriale in sé stesso, che possono essere rappresentati a loro volta da matrici ⁴⁹. Se ad esempio fissiamo una base, e supponiamo di volere trovare il cambio di base che porta tutti i vettori scritti nella base $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, alla base $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$, e di voler esprimere la matrice nella prima base. Allora ogni vettore della vecchia base, viene mandato in una colonna di tale matrice, che deve rappresentare lo stesso vettore, solo che ora le sue componenti sono espresse nella nuova base. In pratica se rispetto alla seconda base le componenti dei vettori sono:

$$\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}_{B_2} \quad \hat{x}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}_{B_2} \quad \hat{x}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}_{B_2}$$

la matrice che porta ciascun vettore dalla prima base alla seconda sarà:

$$[M]_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Inoltre, è possibile trasformare anche le matrici stesse una volta nota la matrice di cambio di base. Indicando con M^{-1} la matrice inversa di M , cioè la matrice tale che:

$$[M][M^{-1}] = [M^{-1}][M] = [Id] \quad (\text{B.10})$$

possiamo esprimere, senza dimostrarlo, che la trasformazione di una matrice A da una prima base a una seconda base si può scrivere come:

$$[A]_{B_2} = [M]_{B_1 \rightarrow B_2} [A]_{B_1} [M]_{B_2 \rightarrow B_1} = [M]_{B_1 \rightarrow B_2} [A]_{B_1} [M^{-1}]_{B_1 \rightarrow B_2} \quad (\text{B.11})$$

In pratica, in notazione di Einstein:

$$A'_{ij} = M_{ik} A_{kl} M_{lj}^{-1} = M_{ik} M_{lj}^{-1} A_{kl} \quad (\text{B.12})$$

Se adesso il cambio di base fosse una rotazione, l'espressione si semplificherebbe leggermente; infatti si può mostrare che le rotazioni sono applicazioni lineari con la particolare proprietà che: $R^{-1} = R^T$, dove con la seconda notazione indichiamo la matrice trasposta⁵⁰. Essenzialmente, la proprietà di trasformazione di una matrice quando il sistema di riferimento viene ruotato è:

$$A'_{ij} = R_{ik} R_{jl} A_{kl} \quad (\text{B.13})$$

Detto brutalmente, stiamo "ruotando" ogni indice. Come vedremo, è proprio da questa proprietà che caratterizzeremo in generale i tensori.

§ **B.1.3. ★☆☆☆☆ Teorema spettrale.** — In questa sezione presentiamo in maniera piuttosto informale le ipotesi e la tesi del teorema spettrale, un importante risultato di algebra lineare, con particolare enfasi alla sua interpretazione. Supponiamo di avere un'applicazione lineare, rappresentata da una matrice A $d \times d$, con la particolare proprietà di essere simmetrica; in notazione di Einstein, questa si esprime come:

$$A_{ij} = A_{ji} \quad (\text{B.14})$$

Ora, il teorema spettrale afferma che è possibile trovare una base ortonormale, cioè una base di d vettori

⁴⁹con la proprietà particolare, di avere determinante non nullo.

⁵⁰la trasposta è la matrice con le righe e le colonne scambiate; in notazione di Einstein basta scambiare i due indici.

- con prodotto e scalare a due a due nullo
- tutti di norma unitaria

in modo che, in tale base, la matrice A sia diagonale:

$$[A]_{B_2} = [M]_{B_1 \rightarrow B_2} [A]_{B_1} [M]_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Con M che verifica⁵¹ $M^{-1} = M^T$, e con i numeri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ che si chiamano autovalori. Quello che stiamo dicendo è che le applicazioni lineari rappresentate da matrici simmetriche ammettono d direzioni ortogonali lungo le quali agiscono semplicemente come delle dilatazioni ($|\lambda| > 1$), o delle contrazioni ($|\lambda| < 1$), a cui si può aggiungere un'inversione se ($\lambda < 0$).

B.2 ★☆☆☆☆ Tensori

§ B.2.1. ★☆☆☆☆ **Definizione operativa.** — Consideriamo uno spazio vettoriale \mathbb{R}^d ; un tensore a k indici (o di rango 4), è un insieme ordinato di k^d numeri, opportunamente indicizzati come segue:

$$T_{i_1, i_2, \dots, i_k} \quad \text{con} \quad i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, d\} \quad (\text{B.16})$$

con la proprietà che, cambiando la base di \mathbb{R}^d con una trasformazione ortogonale R , il tensore trasformi come:

$$T'_{i_1, i_2, \dots, i_k} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_k j_k} T_{j_1, j_2, \dots, j_k} \quad (\text{B.17})$$

Si usa dire a tal proposito: "Un tensore è una cosa che ruota come un tensore". Questa è la definizione "operativa" di tensore che viene solitamente insegnata ai fisici e agli ingegneri, che però presenta diversi limiti;

- la definizione data coinvolge dei numeri, e assume di aver fissato una certa base, affinché questi numeri abbiano senso. Come per le applicazioni lineari però, si dovrebbe trovare una definizione che fa riferimento solo alle funzioni e alle loro proprietà, in modo che queste siano indipendenti dalla scelta di una base.
- in realtà abbiamo ignorato un fatto importante: i tensori possono avere indici in alto oppure in basso, e il significato della loro posizione è rilevante. Tuttavia, nel contesto specifico di \mathbb{R}^d con la metrica piatta⁵², ovvero dei tensori cartesiani, allora gli indici possono stare indifferentemente in alto o in basso.
- Abbiamo ristretto le proprietà di trasformazione alle sole trasformazioni ortogonali; e ci chiedessimo come trasforma un tensore per un cambio di base generico? Per fare questo dovremmo introdurre la distinzione tra indici varianti e covarianti, ma dato che non è mai rilevante nel corso delle dispense, eviteremo di farlo.

In conclusione, dare la definizione più generale possibile di tensore, come viene insegnata nei corsi di Matematica, è decisamente al di là dei nostri interessi, e ci dovremo accontentare. Ora, secondo la definizione data, le applicazioni lineari sono dei tensori, come si può notare dalle loro proprietà di trasformazione sotto rotazioni. Anche il tensore degli sforzi, infatti se ruotiamo il sistema di coordinate:

$$F'_j = R_{ji} F_i \quad n'_j = R_{ji} n_j \quad \Rightarrow \quad F'_i = R_{ij} R_{kl} \sigma_{jl} n_k = \sigma'_{ik} n_k \quad (\text{B.18})$$

⁵¹le applicazioni che verificano questa proprietà si dicono ortogonali; le rotazioni sono particolari applicazioni ortogonali.

⁵²non ci addentreremo nei dettagli di cosa sia una metrica, vi basti sapere se lavorate in \mathbb{R}^d e per fare il prodotto scalare usate il prodotto scalare standard $\vec{v} \cdot \vec{w}$, allora state impiegando una metrica piatta.

come si può verificare. Sottolineiamo però, per ragioni nelle quali non ci addentreremo, che il tensore degli sforzi non è propriamente un'applicazione lineare⁵³; ciononostante, dato che è rappresentato da una matrice simmetrica, per tale matrice che lo rappresenta vale il teorema spettrale. Ma dato il cambio di base diagonalizzante è ortogonale, e il tensore degli stress sotto trasformazioni ortogonali trasforma come un'applicazione lineare, in questo caso tutto funziona come dovrebbe: esiste una particolare orientazione degli assi cartesiani per cui il tensore degli stress è diagonale:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

§ **B.2.2.** ★☆☆☆☆ **Tensori isotropi.** — Questa sezione è dedicata ad un tipo particolare di tensori: i tensori isotropi. Un tensore si dice isotropo se è invariante sotto rotazioni, cioè se vale per ogni rotazione R :

$$T_{i_1, i_2, \dots, i_k} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_k j_k} T_{j_1, j_2, \dots, j_k} \quad (\text{B.20})$$

Questi, sono tensori importanti, che mantengono la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento cartesiani. Ad esempio, quando nelle dispense (5.2) si studia la relazione tra d_{ij} e le derivate della velocità $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; se si chiede che la relazione sia lineare, allora risulta:

$$d_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (\text{B.21})$$

Inoltre, dato che le quantità a sinistra e destra trasformano sotto rotazioni⁵⁴ come:

$$d'_{ij} = R_{ik} R_{jl} d_{kl} \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = R_{ik} R_{jl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (\text{B.22})$$

allora A_{ijkl} deve essere un tensore. Se supponiamo che la struttura del fluido sia isotropa⁵⁵, cioè invariante per rotazioni, una volta ruotato il sistema non si devono vedere variazioni nel tensore. Si può mostrare prendendo la condizione B.2.2 e facendo un po' di conti che:

- per $k = 2$, il tensore isotropo più generale è proporzionale alla delta di Kronecker:

$$T_{ij} = \mu \delta_{ij} \quad (\text{B.23})$$

- per $k = 3$, invece è proporzionale al tensore di Levi-Civita⁵⁶:

$$T_{ijk} = \mu \epsilon_{ijk} \quad (\text{B.24})$$

- infine, nel caso $k = 4$:

$$T_{ijkl} = \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk} + \mu'' \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{B.25})$$

SEZ. C — EXTRA

Queste pagine finali sono dedicate a espandere alcuni punti, che nella sezione principale sono stati tralasciati per mancanza di spazio.

⁵³Le applicazioni lineari sono tensori di tipo (1,1), mentre il tensore degli stress è di tipo (2,0), cioè puramente covariante; in pratica tutte le applicazioni lineari sono tensori di rango 2, ma non tutti i tensori di rango 2 sono applicazioni lineari.

⁵⁴può essere un esercizio interessante, capire come mai la derivata trasforma così sotto rotazioni.

⁵⁵che, data la struttura molecolare dei fluidi è un'ipotesi sensata.

⁵⁶Il tensore di Levi-Civita è un tensore che è diverso da zero solo se tutti i tre indici sono diversi; se sono tutti diversi e la permutazione degli indici è pari, vale 1; se invece la permutazione degli indici è dispari, vale -1.

C.1 ★☆☆☆☆ Legge di Stokes: conti

Per gli amanti dei conti, qui presentiamo la risoluzione delle equazioni 5.2.1. Per prima cosa, ricordiamo l'identità vettoriale (vedi A.1.5):

$$\nabla^2 \vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \quad (\text{C.1})$$

così, si può prendere il rotore dell'equazione del momento:

$$\vec{\nabla} p = -\mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})) = 0 \quad (\text{C.2})$$

Dato che il problema è a simmetria assiale, e il campo di velocità ha divergenza nulla, possiamo introdurre una funzione $\Psi(r, \theta)$ chiamata *stream function*, da cui possiamo derivare la velocità nella direzione \hat{r} e nella direzione θ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = u_r r^2 \sin \theta \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -u_\theta r \sin \theta \quad (\text{C.3})$$

In effetti, si può verificare per sostituzione nell'equazione di continuità:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) = 0 \quad (\text{C.4})$$

che un campo di velocità derivato dalla stream function ha immediatamente divergenza nulla. A questo punto, dopo molti conti, che consistono sostanzialmente nello scrivere il rotore di \vec{u} in funzione di Ψ , poi il rotore del rotore, e così via, si riesce ad ottenere:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r \sin \theta} (\mathcal{L}^2 \Psi) \hat{\phi} = 0 \quad (\text{C.5})$$

dove \mathcal{L} è l'operatore lineare dato da:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (\text{C.6})$$

L'equazione non è particolarmente invitante. Si può usare una tecnica furba però, che consiste nel guessare una funzione che verifichi immediatamente le condizioni al bordo all'infinito, moltiplicata per un coefficiente incognito che dipende solo da r ; si parte quindi dal comportamento del potenziale a grandi distanze:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\Psi}{\theta} = v \cos \theta \quad - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\Psi}{\partial r} = -v \sin \theta \quad \forall \theta, t \rightarrow \infty \quad (\text{C.7})$$

da cui, integrando, ed eliminando la costante di integrazione (dato che la *streamfunction* è definita a meno di una costante):

$$\Psi = v \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta \quad (\text{C.8})$$

considerato che la forma deve valere per ogni θ , possiamo guessare:

$$\Psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta \quad (\text{C.9})$$

A questo punto ci siamo ricondotti a risolvere un'equazione differenziale alle derivate ordinarie, che si vede essere:

$$F'' - \frac{2}{r^2} F = 0 \quad \text{con} \quad F(r) = f'' - \frac{2}{r^2} f \quad (\text{C.10})$$

Qui, si procede integrando "un po' a mano" l'equazione⁵⁷:

$$f(r) = \frac{A}{10} r^4 - \frac{B}{2} r + C r^2 + \frac{D}{r} \quad (\text{C.11})$$

⁵⁷Si fa prima un guess del tipo $F(r) = \lambda r^a$, ottenendo $a = 2, -1$; poi si ottiene una seconda equazione che ha la stessa soluzione per l'omogenea, e della quale si trova guessando una soluzione particolare in forma polinomiale.

Adesso $A = 0$ perché il potenziale deve crescere come r^2 , mentre l'andamento all'infinito fissa il valore di C . Restano i due parametri liberi B e D , che sono fissati chiedendo che valga la *no slip condition*, cioè che la velocità si annulli al contatto con la sfera:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(R, \theta) = 0 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r}(R, \theta) = 0 \quad (\text{C.12})$$

Finalmente, si ottiene il risultato:

$$\Psi = \frac{1}{4}vR^2 \left(\frac{R}{r} - 3\frac{r}{R} + 2\frac{r^2}{R^2} \right) \sin^2 \theta \quad (\text{C.13})$$

da qui in poi, si conclude sostanzialmente il conto come nella sezione 5.2.1; si spera che il lettore abbia preso consapevolezza di quanto possa essere utile l'analisi dimensionale: ricordiamo che tutta questa fatica, è valse un 6π . Qualcuno puntualizzerebbe, che si tratta comunque di un ordine di grandezza.

C.2 ★☆☆☆☆ Decomposizione del campo di velocità

Nella sezione 5.3.1 abbia fatto riferimento al fatto che, conoscere in ogni punto del liquido la sua vorticità, permette di determinare la parte del campo di velocità con rotore non nullo. In questa sezione, attraverso un'analogia con l'elettromagnetismo, vedremo come ciò sia possibile. Partiamo dal seguente problema: ci viene dato un liquido in una certa regione di spazio, e supponiamo di conoscere in ogni punto il suo rotore e la sua divergenza (supponiamo inoltre che questi siano nulli fuori da dominio, nel caso in cui questo sia finito⁵⁸); cosa possiamo dire sul campo di velocità stesso. Analizziamo il problema per casi:

- Supponiamo prima di avere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1 = \Delta \quad \vec{\nabla} \times \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{C.14})$$

Osserviamo che sostanzialmente questo problema è formalmente equivalente, al problema di conoscere esattamente una distribuzione di carica, e di voler determinare il campo da essa generato; in effetti, si hanno esattamente le stesse equazioni:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (\text{C.15})$$

Anche senza dimostrarlo formalmente, ci aspettiamo che la soluzione ad un problema simile, se esiste, allora è anche unica. Dato che "le stesse equazioni hanno le stesse soluzioni", possiamo scrivere la soluzione attraverso la legge di Coulomb integrale:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (\text{C.16})$$

che è quindi la soluzione cercata.

- Ora invece, mettiamoci nelle ipotesi opposte, cioè cerchiamo un campo di velocità tale che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_2 = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{u}_2 = \vec{\omega} \quad (\text{C.17})$$

Questa volta l'analogia vincente è quella con il campo magnetico, dato che le equazioni di Maxwell per \vec{B} sono, nel caso statico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{C.18})$$

⁵⁸comunque, il dominio può anche essere preso infinito.

essenzialmente, la vorticità genera il campo \vec{u}_2 , come la densità di corrente genera il campo magnetico; a questo, possiamo sfruttare la forma integrale della legge di Biot-Savart integrale per la densità di corrente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\omega}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (\text{C.19})$$

- Analizziamo infine, il caso generale, in cui siano fissati:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \Delta \quad \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\omega} \quad (\text{C.20})$$

Di sicuro, grazie alla linearità di divergenza e rotore, il campo $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, avrà divergenza e rotore nulli, come si può facilmente verificare; a questo punto sappiamo che \vec{v} deve verificare:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \quad (\text{C.21})$$

Ma queste sono esattamente le equazioni verificate dal campo elettrico nelle regioni prive di carica, da cui si ricava l'equazione di Laplace per il potenziale elettrico:

$$\nabla^2 \vec{V} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \vec{\phi} = 0 \quad (\text{C.22})$$

dove abbiamo introdotto il potenziale della velocità ϕ . Questa equazione ammette esistenza e unicità una volta specificate le condizioni al bordo (su ϕ o sulla sua derivata, cioè la velocità); in pratica se nella regione considerata conosciamo il rotore e il gradiente, e sappiamo ad esempio il valore della componente normale al bordo della velocità, possiamo ricostruire il campo di velocità.

Di conseguenza, se ad esempio sappiamo che la vorticità si conserva nel tempo, la componente \vec{u}_2 si conserverà analogamente, e l'unica parte del campo di velocità che può avere una dipendenza temporale è $\vec{u}_1 + \vec{v}$, che è indivergente. Possiamo perciò restringerci a studiare le soluzioni caratterizzate da un flusso irrotazionale.

— ESERCIZI —

E.3 Esercizi olimpici

La seguente sezione contiene 15 problemi presi da gare di livello nazionale e internazionale, che di conseguenza hanno un'importanza elevata. Soprattutto alle IPhO, capita spesso che siano presupposte alcune delle leggi che abbiamo esposto nelle dispense; gli argomenti in generale più ricorrenti sono la fluidostatica e la tensione superficiale.

★★★★★ Esercizio 1 IPhO 2024 P3 B - Analisi della Stabilità di una Stella

In questa sezione, studiamo la stabilità di una singola stella. Consideriamo una stella contenente un particolare tipo di materia con l'equazione di stato $p = K\rho^\gamma$, dove K e γ sono costanti. Siano $p(r)$ e $\rho(r)$ rispettivamente la pressione e la densità a una distanza r dal centro della stella. La pressione e la densità al centro della stella sono indicate con p_c e ρ_c . In tutti gli esercizi che seguono, consideriamo positivi tutti i vettori orientati verso l'esterno.

- 1. Determina l'accelerazione gravitazionale vicino al centro della stella in termine di r e delle costanti G e ρ_c .
- 2. Ricava un'equazione differenziale per determinare $\rho(r)$ in equilibrio, e scrivila nella seguente forma:

$$\frac{d}{dr} \left[h_1(\rho, r) \frac{d\rho}{dr} \right] + h_2(r)\rho = 0.$$

Trova le funzioni $h_1(\rho, r)$ e $h_2(r)$.

- 3. Costruisci una quantità r_0 della forma $r_0 = G^\ell p_c^m \rho_c^n$ con la dimensione di una lunghezza.
- 4. Riformula l'equazione differenziale del punto 2 nella seguente forma:

$$\frac{d}{dx} \left[A_1(u, x) \frac{du}{dx} \right] + A_2(x)u(x) = 0,$$

dove $x = \frac{r}{r_0}$ e $u = \frac{\rho}{\rho_c}$. Trova le funzioni $A_1(u, x)$ e $A_2(x)$.

- 5. Per $\gamma = 2$, si trova $u(x) = \frac{f(x)}{x}$. Determina $f(x)$.
- 6. Supponi che, per una particolare stella, $\frac{du}{dx}$ in funzione di x sia dato dalla curva nella figura 13. Utilizza il comportamento della curva nelle vicinanze del punto $x = 0$ per determinare γ .
- 7. Per analizzare la stabilità del sistema, supponiamo che la stella si discosti leggermente dal suo stato di equilibrio: assumiamo che il guscio sferico, che era in equilibrio al raggio r , ora abbia un raggio \tilde{r} ; analogamente, i parametri g , p e ρ cambiano rispettivamente in \tilde{g} , \tilde{p} e $\tilde{\rho}$. Per comodità, consideriamo solo piccoli $\epsilon(t)$ vicino al centro della stella, per i quali possiamo assumere che $\tilde{r} = r(1 + \epsilon(t))$, dove $\epsilon(t) \ll 1$. Trova $\tilde{\rho}$ e \tilde{g} in termini di ρ , g ed ϵ al primo ordine in ϵ .
- 8. Usando l'equazione di Newton per il moto dello strato sferico con raggio di equilibrio r , trova $\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2}$ in termini di \tilde{g} , $\tilde{\rho}$, K , γ e $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$ (dove $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$ indica la derivata di $\tilde{\rho}$ rispetto a \tilde{r} a t costante).
- 9. Ottieni $\frac{d^2\epsilon}{dt^2}$ in termini di ϵ e delle costanti fornite nel problema. Determina il valore minimo di γ per un equilibrio stabile e trova la frequenza angolare di oscillazione della stella.

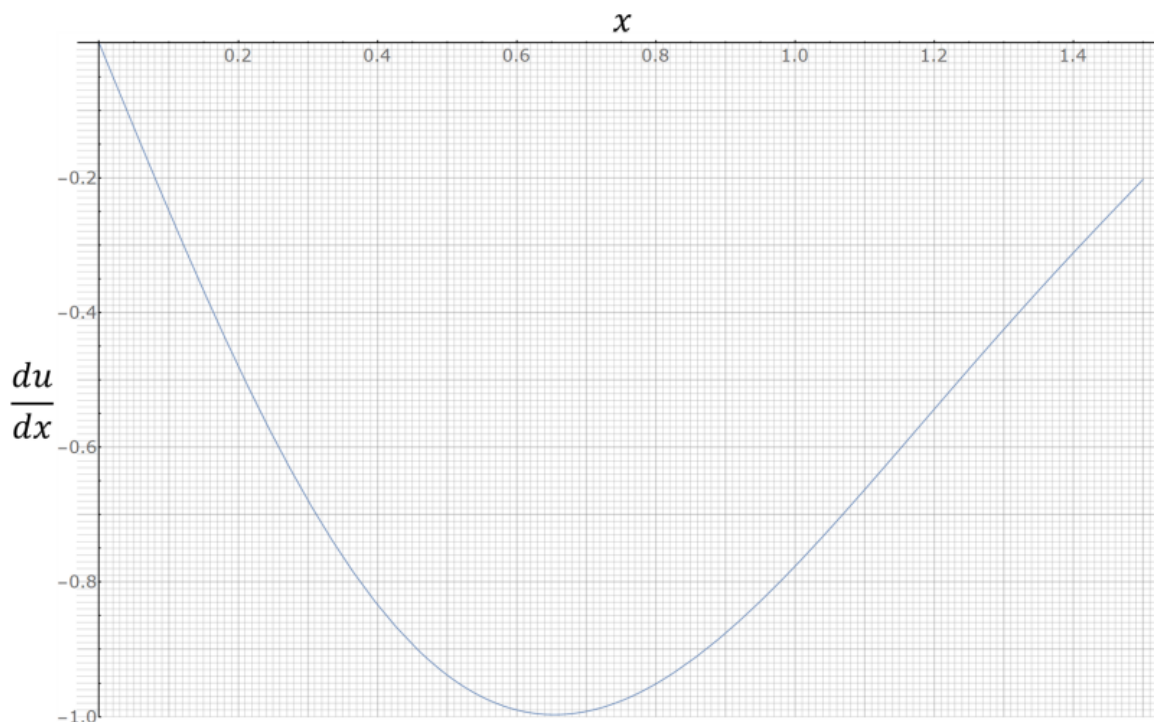


Figura 13: Grafico di $\frac{du}{dx}$

★★★★★ Esercizio 2 EuPhO 2022 T1 - Cilindro galleggiante

Un cilindro solido e uniforme di altezza $h = 10$ cm e area di base $s = 100$ cm² galleggia in un bicchiere cilindrico di altezza $H = 20$ cm e area interna $S = 102$ cm², riempito con un liquido. Il rapporto tra la densità del cilindro e quella del liquido è $\gamma = 0.70$. Il fondo del cilindro si trova alcuni centimetri sopra il fondo del bicchiere. Il cilindro viene fatto oscillare verticalmente, in modo che il suo asse coincida sempre con quello del bicchiere.

L'ampiezza delle oscillazioni del livello del liquido è $A = 1$ mm.

Trova il periodo delle oscillazioni T . Trascura la viscosità del liquido.

hint: a differenza del conto presente nelle dispense, qui il recipiente ha dimensioni confrontabili con l'oggetto che galleggia. Capire come mai, questo implica che *non è possibile* usare la legge di Archimede.

★★★★★ Esercizio 3 IPhO 2021 P1 A - Dorsale Oceanica

Consideriamo un grande recipiente d'acqua situato in un campo gravitazionale uniforme con accelerazione di caduta libera g . Due piastre rettangolari verticali parallele l'una all'altra sono montate nel recipiente in modo che i bordi verticali delle piastre siano a stretto contatto senza spazi con le pareti verticali del recipiente. Un tratto di lunghezza h di ogni piastra è immerso in acqua. La larghezza delle piastre lungo l'asse y è w , la densità dell'acqua è ρ_0 .

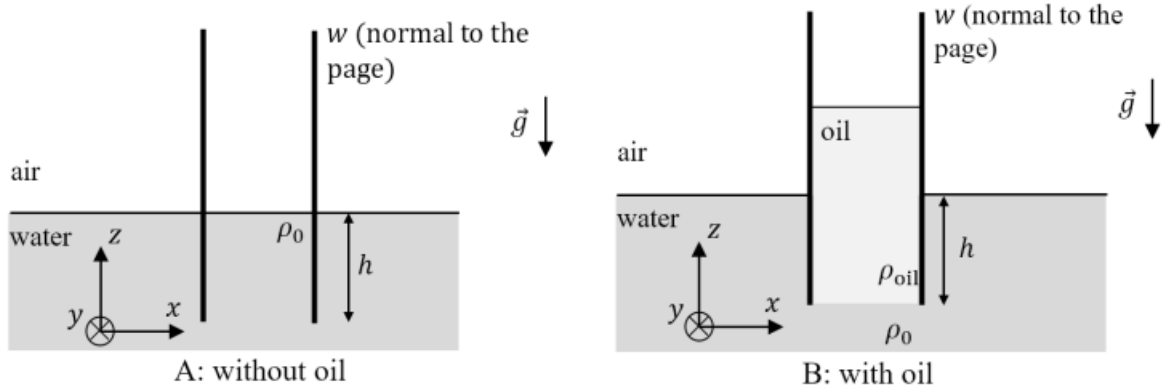


Figura 14: Piastre parallele in acqua.

Olio di densità ρ_{oil} ($\rho_{oil} < \rho_0$) viene versato nello spazio tra le piastre fino a quando il livello inferiore dell'olio ha raggiunto i bordi inferiori delle piastre. Supponiamo che le piastre e i bordi del recipiente siano abbastanza alti da non far traboccare l'olio. La tensione superficiale e la miscelazione dei fluidi possono essere trascurate.

- 1. Qual è la componente x della forza totale F_x che agisce sulla piastra destra (intensità e direzione)?

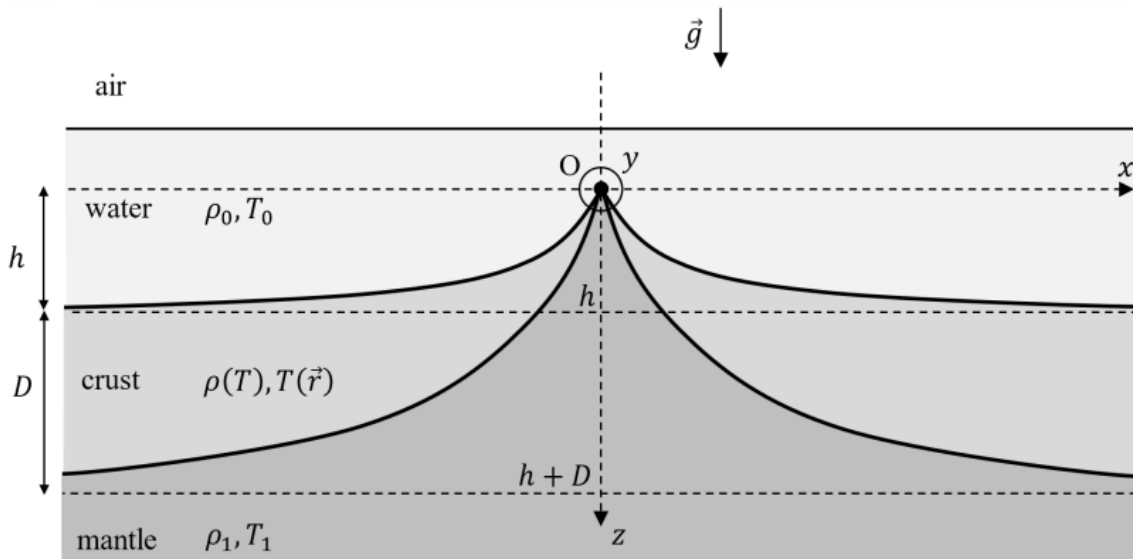


Figura 15: Dorsale oceanica; nota che l'asse delle z punta verso il basso.

La figura 15 mostra una sezione trasversale di una dorsale oceanica. Consiste di strati sovrapposti di mantello, crosta e acqua oceanica. Il mantello è composto da rocce che supponiamo possano scorrere in tempi geologici. Perciò in questo problema sarà trattato come un fluido. Lo spessore della crosta è molto più piccolo della lunghezza caratteristica nella direzione x , quindi la crosta si comporta come una piastra liberamente pieghevole. Una tale dorsale può essere modellata con alta precisione come un sistema bidimensionale, senza alcuna variazione delle quantità lungo l'asse y , che è perpendicolare al piano della figura. Assumiamo che la lunghezza L della dorsale lungo l'asse y sia molto più grande di qualsiasi altra lunghezza introdotta in questo problema.

Al centro della dorsale si assume che lo spessore della crosta sia nullo. La crosta si fa più spessa al crescere della distanza orizzontale x dal centro e si avvicina ad uno spessore costante D

quando $x \rightarrow \infty$. Di conseguenza, il fondale oceanico si abbassa di un'altezza verticale h sotto la sommità della dorsale O , che definiamo come l'origine del nostro sistema di coordinate.

La densità dell'acqua ρ_0 e la sua temperatura T_0 possono essere assunte uniformi nello spazio e costanti nel tempo. La stessa assunzione può essere fatta per la densità del mantello ρ_1 e la sua temperatura T_1 . Anche la temperatura della crosta T è costante nel tempo ma può dipendere dalla posizione.

È noto che, con elevata precisione, il materiale crostale si espande linearmente con la temperatura T . Poiché si presume che le temperature dell'acqua e del mantello siano costanti, è conveniente utilizzare un'espressione adimensionale del coefficiente di espansione termica. Pertanto,

$$l(T) = l_1 \left[1 - k_l \frac{(T_1 - T)}{(T_1 - T_0)} \right],$$

dove l è la lunghezza di un tratto del materiale della crosta, l_1 è la sua lunghezza alla temperatura T_1 , e k_l è il coefficiente di espansione termico adimensionale, che può essere assunto come costante.

- 2. Assumendo che la crosta sia isotropica, trovare come la sua densità ρ dipende dalla sua temperatura T . Assumendo che $|k_l| \ll 1$, scrivere la risposta nella forma appropriata

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right]$$

dove i termini dell'ordine k_l^2 e superiori sono trascurati. Successivamente, identificare la costante k .

- 3. Assumendo che il mantello e l'acqua si comportino come un fluido incomprimibile in equilibrio idrostatico, esprimere lo spessore della crosta a grande distanza D in funzione di h , ρ_0 , ρ_1 e k . Qualsiasi movimento del materiale può essere trascurato.
- 4. Trova, al prim'ordine in k , la forza orizzontale totale F che agisce sulla metà destra ($x > 0$) della crosta in funzione di ρ_0 , ρ_1 , h , L , k e g .
- 5. Utilizzando l'analisi dimensionale o l'ordine di grandezza, stimare il tempo caratteristico τ in cui la differenza tra la temperatura superficiale superiore e quella inferiore della crosta lontana dall'asse della dorsale diminuirà approssimativamente a zero. Puoi presumere che τ non dipende dalle due temperature superficiali iniziali della crosta.

★★★★★ Esercizio 4 IPhO 2013 P3 3.1-3.6 - Lo strato di ghiaccio della Groenlandia

Questo problema prende in considerazione la fisica dello strato di ghiaccio della Groenlandia, il secondo più grande ghiacciaio del mondo. Per semplicità, la Groenlandia è schematizzata come un'isola rettangolare di ampiezza $2L$ e lunghezza $5L$ con il terreno al livello del mare e completamente ricoperta di ghiaccio non comprimibile (di densità costante ρ). Il profilo dell'altezza $H(x)$ dello strato di ghiaccio non dipende dalla coordinata y e aumenta da zero sulla costa dove $x = \pm L = 0$ fino ad una massima altezza H_m lungo l'asse centrale nord-sud (l'asse y), noto come il divisore del ghiaccio, vedi figura 16.

In questo problema possiamo utilizzare l'integrale:

$$\int \sqrt{1+x^n} dx = \frac{2}{3}$$

e l'approssimazione

$$(1+x)^\epsilon \approx 1 + \epsilon x, \quad \text{valida per } |x| \ll 1.$$

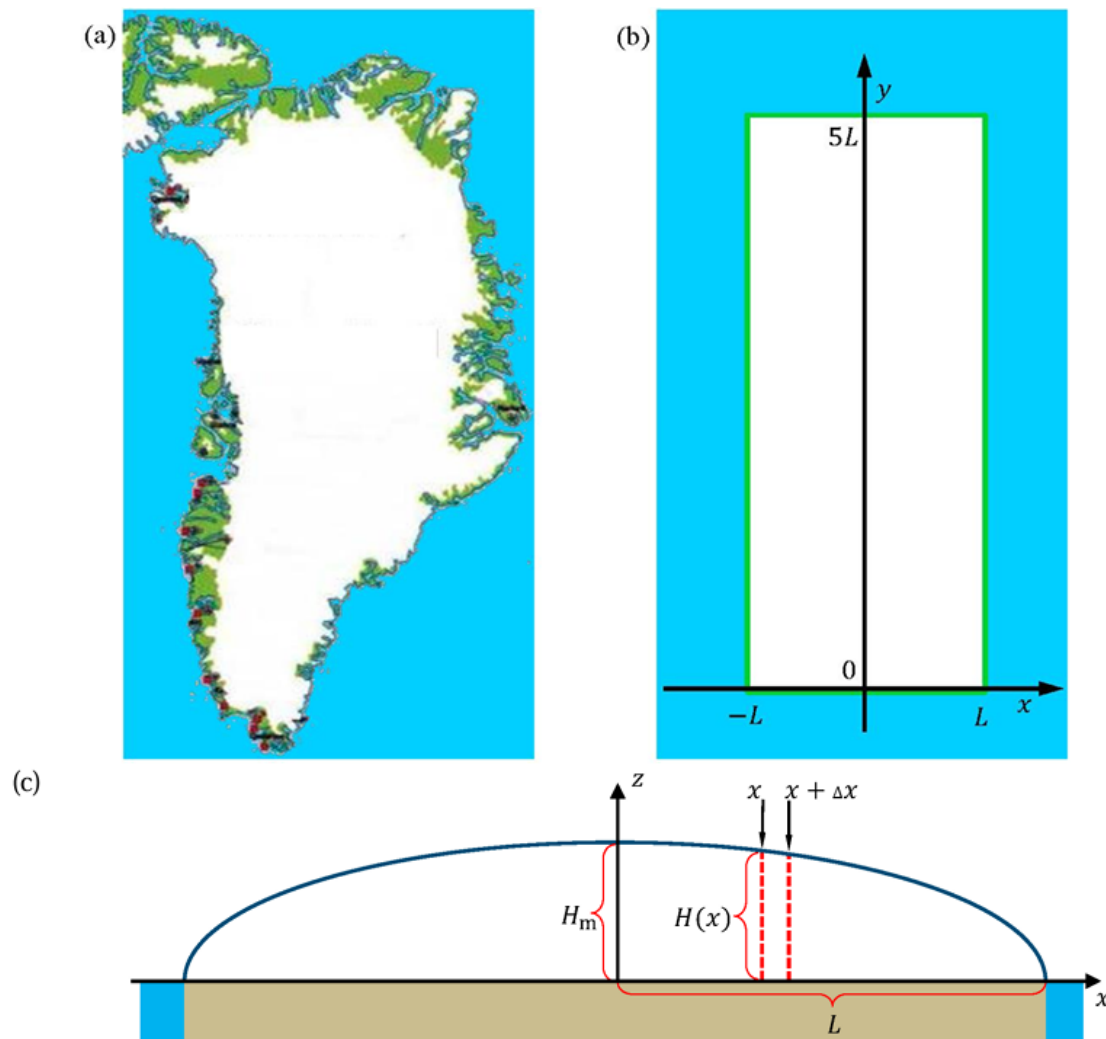


Figura 16: (a) Una mappa della Groenlandia che mostra l'estensione dello strato di ghiaccio (bianco), la zona libera da ghiaccio, cioè la regione lungo la costa (verde), e l'oceano circostante (blu). (b) il modello semplificato dello strato di ghiaccio della Groenlandia che ricopre un'area rettangolare nel piano xy con lati rispettivamente $2L$ e $5L$. Il divisore di ghiaccio, cioè la linea di massima altezza dello strato di ghiaccio H_m si sviluppa lungo l'asse y . (c) Una sezione verticale (nel piano xz) attraverso lo strato di ghiaccio che mostra il profilo dell'altezza $H(x)$ (linea blu). $H(x)$ è indipendente dalla coordinata y per $0 < y < 5L$, mentre scende bruscamente a zero per $y = 0$ e $y = 5L$. L'asse z segna la posizione del divisore di ghiaccio. Per chiarezza della figura, le dimensioni verticali sono aumentate rispetto alle dimensioni orizzontali. La densità ρ del ghiaccio è costante.

Su brevi scale temporali il ghiacciaio è un sistema idrostatico non comprimibile con uno fissato profilo dell'altezza $H(x)$.

- 1. Scrivi l'espressione della pressione $p(x, z)$ all'interno dello strato del ghiaccio in funzione dell'altezza verticale z sopra al terreno e a distanza x dal divisore del ghiaccio. Trascura la pressione atmosferica.

Considera una certa porzione verticale dello strato di ghiaccio in equilibrio, che ricopre una piccola base orizzontale di area $\Delta x \Delta y$ tra x e $x + dx$, come mostrato dalle linee rosse tratteggiate

nella figura 16. La dimensione di Δy non è importante. La componente orizzontale della forza risultante ΔF sulle due pareti verticali della porzione, generata dalla differenza di altezza al centro rispetto alla parti periferiche della porzione, è bilanciata dalla forza di attrito $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ prodotta dal terreno sulla base di area $\Delta x \Delta y$, dove $S_b = 100 \text{ kPa}$.

- 2. Per un fissato valore di x , mostra che nel caso limite $\Delta x \rightarrow 0$, si ha $S_b = kH \frac{dH}{dx}$, e determina k .
- 3. Determina un'espressione per il profilo dell'altezza $H(x)$ in funzione di S_b , L , g , ρ e la distanza x dal divisore di ghiaccio. Il risultato mostrerà che la massima altezza del ghiacciaio H_m dipende dalla semi ampiezza L come $H_m \propto L^{1/2}$.
- 4. Determina l'esponente n con cui il volume totale V dello strato di ghiaccio dipende dall'area A dell'isola rettangolare, $V \propto A^n$.

Su scale temporali più lunghe, il ghiaccio si comporta come un fluido viscoso non comprimibile che per gravità scorre dalla parte centrale verso la costa. In questo modello il profilo dell'altezza $H(x)$ del ghiaccio mantiene uno stato stazionario, nel quale l'accumulo di ghiaccio a causa della neve che cade nella regione centrale è bilanciato dalla fusione lungo la costa.

Oltre alla geometria dello strato di ghiaccio, si fanno le seguenti ipotesi:

- Il ghiaccio fluisce parallelamente all'asse x allontanandosi dal divisore di ghiaccio (l'asse y).
- Il tasso c (m/anno) di accumulo del ghiaccio nella regione centrale è costante.
- Il ghiaccio può lasciare il ghiacciaio solamente per fusione lungo la costa a $x = \pm L$.
- La componente orizzontale $u_x(x)$ della velocità di scorrimento del ghiaccio è indipendente da z .
- La componente verticale $u_z(z)$ della velocità di scorrimento del ghiaccio è indipendente da x .

Considera solamente la regione centrale definita da $|x| \ll L$ vicina al centro dello strato di ghiaccio, dove le variazioni d'altezza dello strato di ghiaccio sono molto piccole e possono quindi essere trascurate, cioè $H(x) \approx H_m$

- 5. Utilizza la conservazione della massa per ricavare un'espressione per la velocità orizzontale di scorrimento del ghiaccio $u_x(x)$ in funzione di H_m , x e c .

Dalla condizione di incomprimibilità del ghiaccio, la conservazione della massa implica la seguente restrizione sulle componenti delle velocità di scorrimento del ghiaccio:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

- 6. Scrivi un'espressione per la dipendenza da z della componente verticale u_z della velocità di scorrimento del ghiaccio.
- 7. Ricava un'espressione per la traiettoria di tale scorrimento $z(x)$.

Sulla base delle componenti della velocità di scorrimento $u_x(x)$ e $u_z(z)$ dello strato di ghiaccio, è possibile stimare l'età $\tau(z)$ del ghiaccio ad una specifica profondità $H_m - z$ dalla superficie dello strato di ghiaccio.

- 8. Scrivi una espressione per l'età $\tau(z)$ del ghiaccio in funzione dell'altezza z rispetto al terreno, esattamente al divisore del ghiaccio $x = 0$.

★★★★☆ Esercizio 5 Senigallia 2013 P1 - Un "velo" viscoso

La viscosità è una proprietà che quantifica la resistenza dei fluidi allo scorrimento relativo di uno strato di fluido sull'altro. Il coefficiente di viscosità dinamico μ (nel seguito semplicemente "viscosità") è definito considerando la forza che occorre applicare ad uno strato di fluido per farlo scorrere ad una velocità diversa rispetto ad un altro strato, adiacente al primo, posto ad una distanza Δx , ovvero

$$\mu = \frac{F \Delta x}{S \Delta v},$$

dove F è la forza applicata, Δv la differenza di velocità tra i due strati e S la porzione considerata di superficie di contatto tra i due strati.

Per un'ampia classe di liquidi, la viscosità è indipendente sia dal rapporto F/S (chiamato sforzo di taglio) sia dal rapporto $\Delta v/\Delta x$ (gradiente di velocità): questi liquidi vengono chiamati liquidi newtoniani. In questi, la viscosità diminuisce all'aumentare della temperatura secondo la relazione di Arrhenius

$$\mu = \mu_0 e^{E/(RT)},$$

dove μ_0 è una costante legata al peso molecolare e al volume molare del liquido, E è una costante caratteristica del liquido chiamata energia di attivazione ed è riferita a una mole, R la costante dei gas e T la temperatura assoluta.

I dati in tabella riportano l'andamento della viscosità del mercurio in funzione della temperatura.

Temperatura t (°C)	Viscosità μ (10^{-3} Pas)
0	1.681
10	1.621
20	1.552
30	1.499
40	1.450
50	1.407
60	1.367
70	1.327
100	1.232

Tabella 1: Andamento della viscosità del mercurio in funzione della temperatura.

- 1. Si vogliono determinare i valori delle costanti μ_0 ed E per il mercurio. A tale scopo, si tracci un grafico utilizzando i dati riportati nella tabella, dopo aver scelto nel modo più opportuno le grandezze da riportare sui due assi. Da tale grafico si ricavino i valori richiesti.

Si vuole studiare la velocità di un liquido newtoniano, di densità ρ , che sotto l'azione della forza di gravità scorre su una parete verticale, formando un cosiddetto velo d'acqua di piccolo spessore s . La natura del fluido è irrilevante. A tal fine si consideri una certa quantità di questo fluido, di altezza h e larghezza ℓ (come mostrato in figura) molto minori dell'altezza e della larghezza della parete. Si supponga che la porzione considerata sia sufficientemente lontana dai bordi della parete.

In condizioni di regime, il flusso è stazionario e, se lo spessore s è piccolo, anche laminare. Di conseguenza, il vettore velocità è in ogni punto del velo d'acqua sempre parallelo all'asse y .

Per uniformità, la velocità del fluido non dipende dalla coordinata z . Inoltre, essendo la porzione di liquido considerata lontana dal bordo superiore della parete, la velocità risulta indipendente anche da y . Ovviamente, però, la velocità dipende dalla distanza dalla parete: $v = v(x)$. A causa delle forze di adesione tra liquido e parete, si può assumere che la velocità dell'acqua a contatto con la parete sia nulla: $v(0) = 0$.

Si consideri un piano σ parallelo alla parete, a distanza x da essa, con $0 < x < s$.

- 2. Si ricavi la forza peso agente sulla porzione del velo d'acqua compresa tra x e s .
- 3. Si ricavi la forza d'attrito viscoso agente lungo il piano σ sulla porzione del velo d'acqua compresa tra x e s .
- 4. Dalla considerazione che ci si trova in condizione di regime, si determini la dipendenza del modulo della velocità v dalla distanza x dalla parete.
- 5. Si ricavi la portata volumetrica del velo d'acqua, relativamente alla porzione considerata.

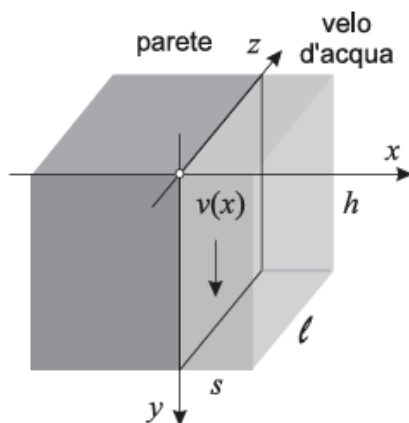


Figura 17: Immagine dello strato d'acqua viscoso.

★★★★★ Esercizio 6 IPhO 2017 P1 C - La materia oscura

La materia oscura è una forma di materia invisibile che non emette, assorbe o riflette luce, rendendone impossibile l'osservazione diretta con strumenti astronomici tradizionali. Tuttavia, la sua presenza è dedotta dagli effetti gravitazionali che esercita sulla materia visibile, sulla radiazione e sulle strutture cosmiche.

In questo esercizio vogliamo cercare di stimare la densità di materia oscura presente all'interno di una galassia. Consideriamo una galassia giovane la cui massa è composta prevalentemente da gas interstellare e materia oscura (trascuriamo la massa delle stelle). Il gas interstellare è composto da particelle identiche di massa m_p . La densità numerica $n(r)$ e la temperatura $T(r)$ del gas dipendono dalla distanza r dal centro della galassia. Sebbene nel gas abbiano luogo molti processi fisici, si può assumere che il gas sia in un equilibrio idrostatico causato dalla sua pressione e dall'attrazione gravitazionale della galassia.

- 1. Determina il gradiente di pressione del gas $\frac{dP}{dr}$, in funzione di $m'(r)$, r e $n(r)$. Qui $m'(r)$ è la massa totale di gas e materia oscura all'interno di una sfera di raggio r misurato dal centro della galassia.
- 2. Assumendo che il gas interstellare sia un gas perfetto, trova $m'(r)$ in funzione di $n(r)$, $T(r)$ e delle loro derivate rispetto ad r .

Si assuma ora per semplicità che il gas si trovi in una distribuzione isoterma alla temperatura T_0 e che densità numerica del gas sia data dalla formula

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

dove α e β sono delle costanti.

- 3. Trova la densità di massa della materia oscura come funzione di r all'interno della galassia.

★★★★★ Esercizio 7 IPhO 2011 P2 2.1-2.5 - Una bolla di sapone elettrificata

Una bolla di sapone sferica con raggio R_0 , densità dell'aria all'interno ρ_i e temperatura interna T_i , è circondata da aria con densità ρ_a , pressione atmosferica P_a e temperatura T_a . La pellicola di sapone ha tensione superficiale γ , densità ρ_s e spessore t . Si assume $R_0 \gg t$. La massa e la tensione superficiale del sapone non cambiano con la temperatura.

- 1. Trovare il rapporto $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ in funzione di γ , R_0 e P_a .
- 2. Trovare il valore numerico di $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ usando $\gamma = 0.0250 \text{ N m}^{-1}$, $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ e $R_0 = 1.00 \text{ cm}$.
- 3. Supponiamo che l'aria interna sia inizialmente più calda di quella esterna. Trovare il minimo valore numerico che deve avere r se vogliamo che la bolla non scenda nell'aria ferma. Si usi $T_a = 300 \text{ K}$, $\rho_s = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_a = 1.3 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$ e $t = 100 \text{ nm}$.

Dopo un po' di tempo dalla formazione, la bolla sarà in equilibrio termico con l'ambiente. In aria ferma, questa bolla scenderà naturalmente verso il suolo.

- 4. Trovare la minima velocità u che deve avere una corrente d'aria ascensionale per impedire alla bolla, in equilibrio termico con l'ambiente, di cadere al suolo. Esprimere la soluzione in funzione di ρ_s , R_0 , g , t e del coefficiente di viscosità dell'aria, η . Potete assumere che la velocità sia bassa in modo da poter applicare la legge di Stokes, e assumere che il raggio all'equilibrio termico sia R_0 . La forza di attrito espressa dalla legge di Stokes è $F_d = 6\pi\eta R_0 u$.
- 5. Calcolare il valore numerico di u usando $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

I calcoli precedenti suggeriscono che i termini dovuti alla tensione superficiale γ influiscono molto poco sull'accuratezza del risultato.

★★★★★ Esercizio 8 IPhO 2008 P3 1 - Variazione della temperatura dell'aria con l'altitudine

In questo problema modellizziamo l'atmosfera con un gas perfetto con massa molare $\mu = 29 \text{ g mol}^{-1}$

- 1. Supponete che la temperatura dell'aria sia uniforme e uguale a T_0 . Scrivete l'espressione della pressione atmosferica p in funzione dell'altitudine z .

Assumete ora che la temperatura dell'atmosfera dipenda dall'altitudine secondo la relazione:

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

dove Λ è una costante, chiamata tasso di caduta della temperatura dell'atmosfera (il gradiente verticale della temperatura è $-\Lambda$).

- 2. Scrivete l'espressione della pressione atmosferica p in funzione dell'altezza z .
- 3. Quando la densità dell'aria aumenta con l'altezza si verifica un processo chiamato convezione libera. Per quali valori di Λ si verifica questo processo?

★★★★★ Esercizio 9 USAPhO 2020 B1 - Formaggio a strisce

- 1. Quando un rubinetto viene aperto, un flusso d'acqua scorre verso il basso con velocità iniziale v_0 all'uscita del beccuccio. In questo problema, definiamo y come la coordinata verticale con direzione positiva verso l'alto.

Assumendo che la velocità dell'acqua sia influenzata solo dalla gravità durante la caduta, trova la velocità dell'acqua $v(y)$ all'altezza y . Definisci lo zero di y in modo che l'equazione per v^2 abbia un solo termine e trova y_0 , l'altezza del beccuccio.

- 2. Supponiamo che il flusso d'acqua che cade dal rubinetto abbia simmetria cilindrica rispetto ad un asse verticale che passa per il centro del flusso. Supponiamo inoltre che il volume d'acqua per unità di tempo uscente dal beccuccio sia costante e che la forma del flusso d'acqua rimanga invariata nel tempo.

In questo caso, il raggio r del flusso d'acqua è una funzione della posizione verticale y . Sia r_0 il raggio all'uscita del rubinetto. Usando il risultato del punto 1, trova $r(y)$.

Il fatto che $r(y)$ non è costante, implica che l'acqua abbia una certa velocità radiale durante la caduta, in contraddizione con le ipotesi della parte 1 secondo cui il moto è puramente verticale. Si può assumere che qualsiasi velocità radiale sia trascurabile rispetto a quella verticale.

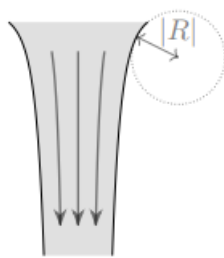


Figura 18: Immagine del flusso d'acqua.

- 3. L'interfaccia acqua-aria ha una certa tensione superficiale, σ . L'effetto della tensione superficiale è quello di modificare la pressione nel flusso secondo l'equazione di Young-Laplace,

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right),$$

dove ΔP è la differenza di pressione tra il flusso e l'atmosfera e R è il raggio di curvatura del profilo verticale del flusso. ($R < 0$ per il flusso d'acqua; il raggio di curvatura sarebbe positivo solo se il profilo del flusso curvasse verso l'interno.)

Per questa parte del problema, assumiamo che $|R| \gg |r|$, in modo che la curvatura del profilo verticale del flusso possa essere ignorata. Assumiamo inoltre che l'acqua sia incomprimibile.

Considerando la pressione nel flusso, trova una nuova equazione che metta in relazione $r(y)$ con σ , r_0 , v_0 e ρ , la densità dell'acqua. Non è necessario risolvere l'equazione per r .

- 4. Dopo essere caduto per una certa distanza, il flusso d'acqua di solito si rompe in goccioline più piccole. Questo accade perché piccole perturbazioni casuali della forma del flusso crescono nel tempo, fino a rompere il flusso stesso, formando delle gocce.

Per il resto del problema, consideriamo una colonna d'acqua in assenza di gravità, in cui l'acqua scorre verso il basso a velocità costante, e studiamo come evolvono nel tempo delle variazioni casuali del suo raggio. Possiamo trascurare la variazione di velocità dovuta alle piccole perturbazioni del raggio.

Tali perturbazioni possono essere scomposte in una somma di perturbazioni sinusoidali del raggio della colonna, ciascuna con un diverso numero d'onda k . Possiamo analizzare queste diverse perturbazioni sinusoidali indipendentemente.

Consideriamo una colonna d'acqua il cui raggio segue la relazione

$$r(y) = r_0 + A \cos(ky),$$

dove $A \ll r_0$ è l'ampiezza della perturbazione. Per analizzare tale colonna, è sufficiente considerare solo le parti più spesse e più sottili del flusso.

Considerando entrambe le fonti di curvatura, trova una condizione su r_0 e k tale che l'ampiezza delle perturbazioni aumenti nel tempo.

hint: Ricordate che in un fluido il moto dell'acqua si oppone al gradiente di pressione, nel senso che ogni elemento fluido tende a muoversi dalle regioni ad alta pressione, verso le regione a bassa pressione.

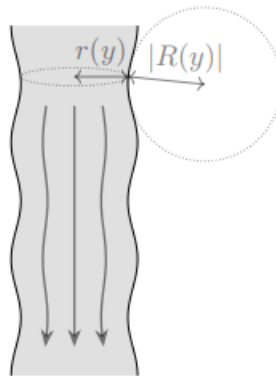


Figura 19: Immagine della perturbazione sinusoidale.

★★★★☆ Esercizio 10 IPhO 2006 P3 3.12-3.13 - Vasi Capillari

Consideriamo il sangue come un fluido viscoso incomprimibile con una densità μ simile a quella dell'acqua e una viscosità dinamica $\eta = 4.5 \text{ g m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Modellizziamo i vasi sanguigni come tubi cilindrici rettilinei di raggio r e lunghezza L e descriviamo il comportamento del flusso sanguigno mediante la legge di Poiseuille:

$$\Delta p = RD,$$

che rappresenta l'analogo fluidodinamico della legge di Ohm in elettricità. Nel nostro caso, Δp è la differenza di pressione tra l'ingresso e l'uscita del vaso sanguigno, $D = Su$ è la portata in volume attraverso la sezione trasversale S del vaso sanguigno e u è la velocità del sangue. La resistenza idraulica R è data da:

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}.$$

Per la circolazione sistemica del sangue (quella che va dal ventricolo sinistro del cuore all'atrio destro del cuore), il flusso del sangue vale circa $D \approx 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ per un uomo a riposo. Rispondi alle seguenti domande nell'ipotesi che tutti i vasi capillari siano connessi in parallelo e che ciascuno di loro abbia un raggio $r = 4 \mu\text{m}$, una lunghezza $L = 1 \text{ mm}$ e sia sottoposto a una differenza di pressione $\Delta p = 1 \text{ kPa}$.

- 1. Quanti vasi capillari ci sono nel corpo umano?
- 2. Qual è la velocità u con la quale il sangue scorre attraverso un vaso capillare?

★★★★★ Esercizio 11 IPhO 2014 P1 B - Tre Problemi

Una bolla di raggio $r = 5.00 \text{ cm}$, che contiene un gas perfetto biatomico, è formata da una pellicola di sapone di spessore $h = 10.0 \mu\text{m}$ ed è posta nel vuoto. La pellicola di sapone ha una tensione superficiale $\sigma = 4.00 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$ e una densità $\rho_s = 1.10 \text{ g cm}^{-3}$.

- 1. Trovare la formula per la capacità termica molare del gas nella bolla per un processo in cui il gas è riscaldato così lentamente che la bolla rimane in equilibrio meccanico e successivamente calcolarne il valore.
- 2. Trovare la formula per la frequenza ν delle piccole oscillazioni del raggio e calcolarne il valore assumendo che la capacità termica della pellicola di sapone sia molto maggiore della capacità termica del gas nella bolla. Si assuma anche che l'equilibrio termico all'interno della bolla sia raggiunto molto più rapidamente della durata del periodo di oscillazione.

hint: Laplace ha dimostrato che c'è una differenza di pressione tra i due spazi separati da una superficie curva generica, la quale è causata dalla tensione superficiale che si forma sull'interfaccia che separa un liquido da un gas, ovvero:

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

★★★★☆ Esercizio 12 IPhO 2014 P2 C1 - Equazione di stato di Van der Waals

Si consideri un liquido che non bagna le pareti di un capillare (angolo di contatto uguale a 180°). Quando il capillare è immerso nel liquido, il liquido nel capillare si abbassa fino ad un certo livello a causa della tensione superficiale (vedi figura 20).

- Trovare la (piccola) variazione di pressione Δp_T del vapore saturo che si trova al di sopra della superficie curva del liquido. Esprimere il risultato in termini della densità del vapore, ρ_s , della densità del liquido, ρ_L , della tensione superficiale, σ , e del raggio di curvatura r della superficie.

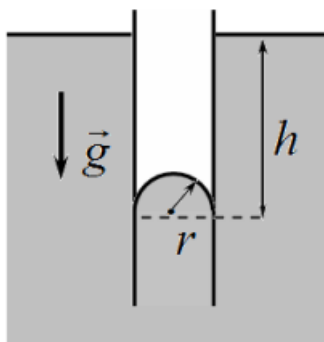


Figura 20: Capillare immerso in un liquido che non bagna le pareti.

★★★★★ Esercizio 13 USAPhO 2013 A4

Un cilindro graduato è parzialmente riempito con dell'acqua; una paperella di gomma galleggia sulla superficie. Nel cilindro graduato viene versato lentamente dell'olio, in modo che il volume di olio versato per unità di tempo sia costante. Nella seguente immagine si può vedere, in funzione del tempo, come varia la posizione, rispetto alla scala graduata del cilindro, delle superfici di acqua e di olio. Durante il processo, i due fluidi non si mescolano.

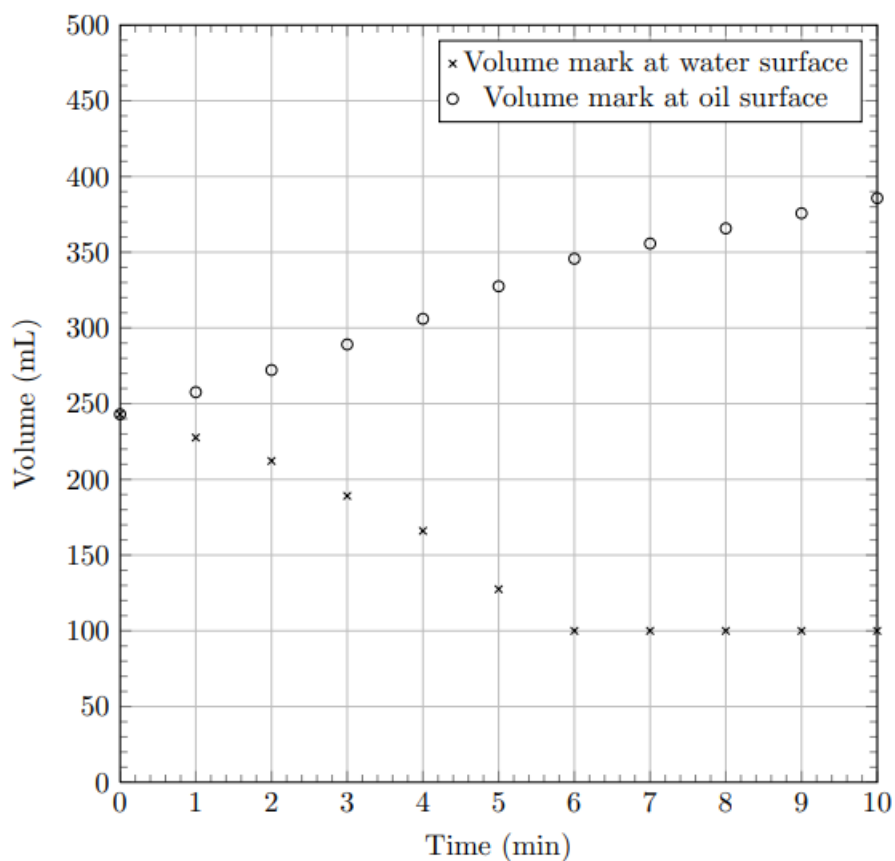


Figura 21: Evoluzione temporale delle superfici di acqua e olio.

L'acqua ha una densità $\rho_a = 1.00 \text{ g mL}^{-1}$; la densità dell'aria è trascurabile, così come gli effetti di superficie.

- 1. Trova la densità dell'olio

★★★★☆ Esercizio 14 IPhO 2023 P3 A - Acqua e Oggetti

Come mostrato in figura 22, consideriamo due gocce d'acqua sferiche stazionarie sulla superficie di un materiale super-idrofobo, cioè per il quale esistono intense forze repulsive tra il materiale e l'acqua.

Sulla superficie sono posizionate due gocce d'acqua sferiche identiche inizialmente vicine tra loro; successivamente queste due gocce si fondono dopo essersi toccate e formano una goccia d'acqua sferica più grande, che improvvisamente salta verso l'alto.

- 1. Il raggio a di entrambe le gocce d'acqua prima della fusione è $100\ \mu\text{m}$. La densità dell'acqua ρ è $1.00 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}$. La tensione superficiale γ è $7.27 \times 10^{-2}\ \text{J m}^{-2}$. Una frazione k della differenza di energia di superficie ΔE tra prima e dopo la fusione è trasformata in energia cinetica della sfera che salta verso l'alto. Determinare quindi la velocità iniziale di salto, v , della goccia d'acqua fusa con due cifre significative in base alle seguenti ipotesi:
 - $k = 0.06$
 - Prima e dopo la fusione, il volume totale di acqua viene conservato.

hint: La tensione superficiale può anche essere pensata come una forma di energia immagazzinata dalla superficie per unità di area; in questi termini è possibile dire che il contributo di una superficie all'energia di una sistema è $E = \gamma A$.

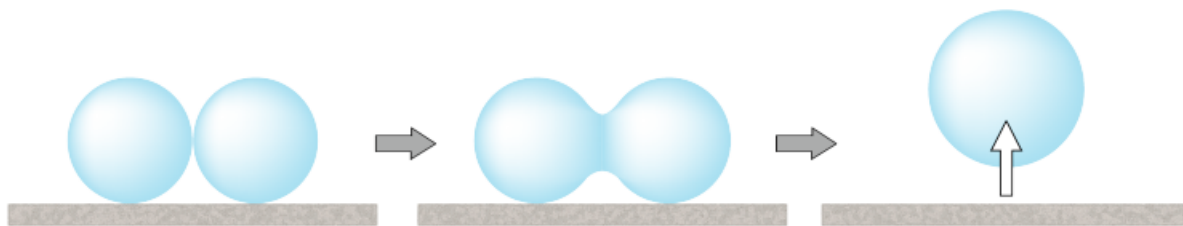


Figura 22: Fusione di due gocce d'acqua e salto della goccia d'acqua fusa.

★★★★★ Esercizio 15 IPhO 2023 P3 B-C - Acqua e Oggetti

In questo problema consideriamo i fenomeni causati dall'interazione tra acqua e oggetti collegati alla tensione superficiale.

Se necessario, si può usare il fatto che se la funzione $y(x)$ soddisfa l'equazione differenziale $y''(x) = ay(x)$ (a è una costante positiva), allora la sua soluzione generale è

$$y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x},$$

dove A e B sono costanti arbitrarie.

Una tavola piatta viene immersa verticalmente in acqua. La figura 23 mostra rispettivamente le forme della superficie dell'acqua per materiali idrofili (attrattivi) e idrofobi. Si trascuri lo spessore della tavola.

La superficie della tavola si trova sul piano yz e la superficie orizzontale dell'acqua lontana dalla tavola si trova sul piano xy con $z = 0$. La forma della superficie non dipende dalla coordinata y . Sia $\theta(x)$ l'angolo tra la superficie dell'acqua e il piano orizzontale in un punto (x, z) della superficie dell'acqua nel piano xz . Qui $\theta(x)$ è misurato rispetto all'asse positivo x e la

rotazione antioraria è considerata positiva. Sia $\theta(x)$ pari a θ_0 nel punto di contatto tra la tavola e la superficie dell'acqua ($x = 0$). Nel seguito, θ_0 è fissato dalle proprietà del materiale della tavola.

La densità dell'acqua ρ e la tensione superficiale dell'acqua γ sono uniformi. L'accelerazione gravitazionale è data da g . Si assuma uniforme la pressione atmosferica P_0 . Si noti che l'unità di misura della tensione superficiale è J m^{-2} ma anche N m^{-1} . Si determini la forma della superficie dell'acqua con i seguenti passaggi.

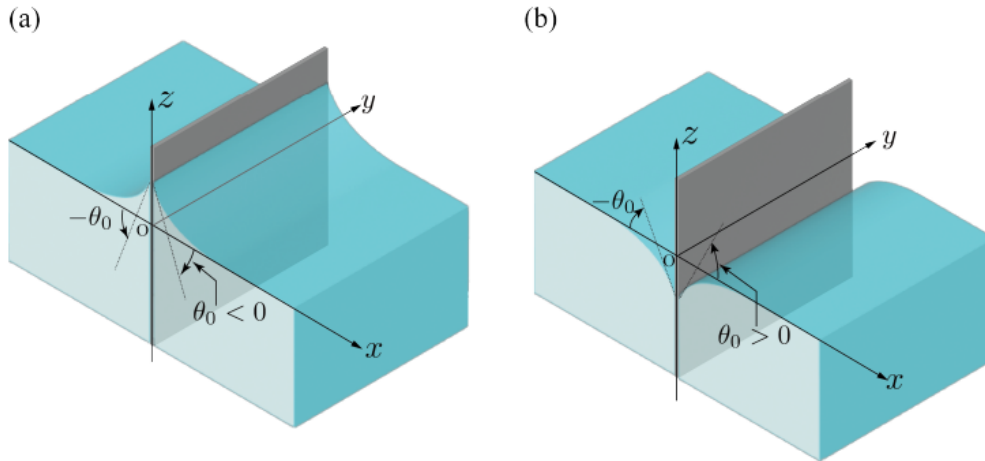


Figura 23: Tavole immerse verticalmente nell'acqua. A sinistra c'è il caso idrofilo, a destra il caso idrofobo.

- 1. Si consideri il caso di una tavola idrofila. Si noti che la pressione dell'acqua, P , soddisfa le condizioni $P < P_0$ per $z > 0$ e $P = P_0$ per $z = 0$. Si determini P alla quota z in funzione di ρ , g , z , e P_0 .
- 2. Si consideri un blocco d'acqua la cui forma è mostrata ombreggiata in figura 24. La sua sezione trasversale nel piano xz è mostrata dall'area tratteggiata. Siano z_1 e z_2 rispettivamente le coordinate del bordo sinistro e destro del confine (superficie dell'acqua) tra il blocco d'acqua e l'aria. Ricavare la componente orizzontale (componente x) della forza risultante per unità di lunghezza lungo l'asse y , esercitata sul blocco d'acqua a causa della pressione, in funzione di ρ , g , z_1 e z_2 . Si noti che la presenza della pressione atmosferica P_0 non determina una forza orizzontale netta sul blocco d'acqua.

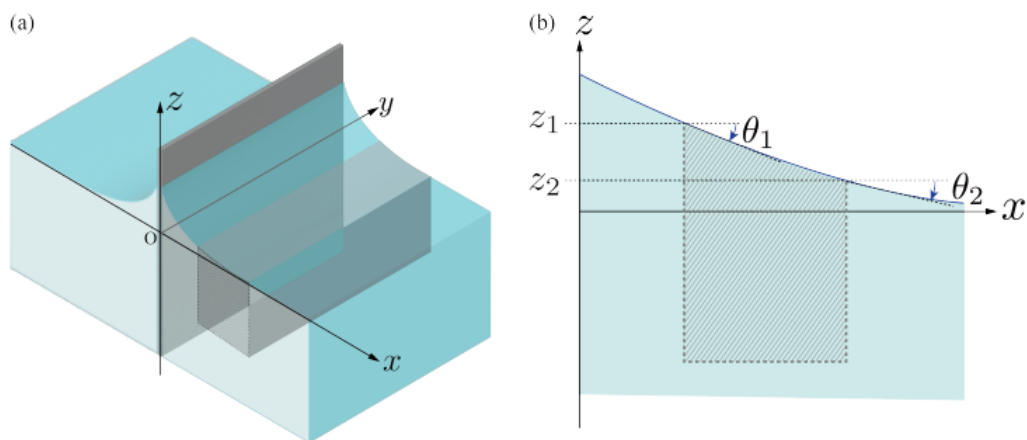


Figura 24: Forma del blocco d'acqua. A sinistra è rappresentata in vista a volo d'uccello, a destra in sezione.

- 3. La tensione superficiale che agisce sul blocco d'acqua è bilanciata dalla forza f_x discussa nel punto 2. Si definiscano rispettivamente θ_1 e θ_2 gli angoli tra la superficie dell'acqua e il piano orizzontale ai bordi sinistro e destro. Ricavare f_x in funzione di γ , θ_1 e θ_2 .
- 4. La seguente equazione vale in un punto arbitrario (x, z) sulla superficie dell'acqua,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{l} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{costante}.$$

Determinare l'esponente a ed esprimere la costante l in funzione di γ e ρ . Si noti che questa equazione è valida per materiali della tavola sia idrofili sia idrofobi.

- 5. Nell'equazione (1) nel punto 4, si assuma che la variazione della superficie dell'acqua sia lieve, cioè $|z'(x)| \ll 1$, in modo da poter sviluppare $\cos \theta(x)$ in serie di $z'(x)$ fino al secondo ordine. Successivamente, differenziando l'equazione risultante rispetto a x , si ottiene l'equazione differenziale soddisfatta da $z(x)$. Risolvere quest'equazione differenziale e determinare $z(x)$ per $x \geq 0$ in funzione di $\tan \theta_0$ e l . Si noti che le dimensioni verticali nelle figure 23 e 24 sono esagerate per ragioni grafiche e non soddisfano la condizione $|z'(x)| \ll 1$.

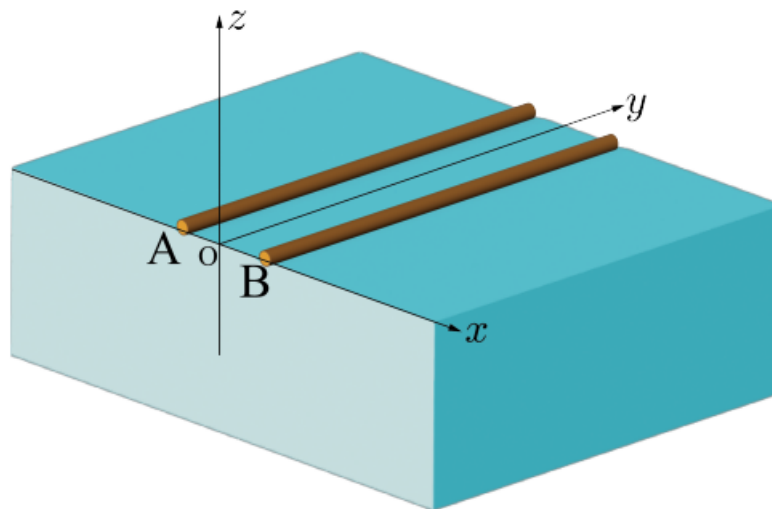


Figura 25: Due aste A e B che galleggiano sulla superficie dell'acqua.

Le aste identiche A e B, di uno stesso materiale, galleggiano parallelamente tra loro sulla superficie dell'acqua e sono poste simmetricamente alla stessa distanza dall'asse y (figura 25).

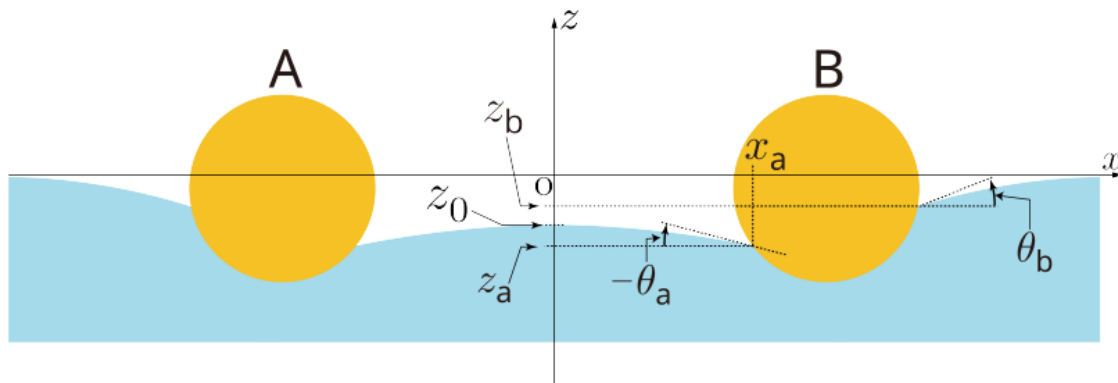


Figura 26: Vista verticale in sezione di due aste che galleggiano sulla superficie dell'acqua..

- 6. Nei punti di contatto tra l'asta B e l'acqua, si definiscano le coordinate z e gli angoli come mostrato in Fig. 5. Determinare la componente orizzontale della forza, F_x , sull'asta B per unità di lunghezza lungo l'asse y in funzione di θ_a , θ_b , z_a , z_b , ρ , g , e γ .

hint: si può pensare che la tensione superficiale agisca sul corpo solido nella direzione tangente alla superficie dell'acqua nel punto di contatto con il corpo solido stesso.

- 7. Si definisca z_0 la coordinata z della superficie dell'acqua nel punto medio tra le due aste nel piano xz . Esprimere la forza F_x ottenuta nel punto 6 senza utilizzare θ_a , θ_b , z_a e z_b .
- 8. Sia x_a la coordinata x nel punto di contatto tra la superficie dell'acqua e la parte sinistra dell'asta B. Utilizzando l'equazione differenziale ottenuta nel punto 5, esprimere la coordinata z_0 del livello dell'acqua del punto medio di queste due aste A e B in funzione di x_a e z_a . Si può utilizzare la costante l introdotta nel punto 4.

E.4 Esercizi proposti da noi

Questa sezione contiene 15 problemi inerenti agli argomenti trattati nelle dispense. Abbiamo deciso di mettere anche esercizi che fanno uso di tecniche universitarie, dato che da una parte queste sono state utilizzate nel corso delle dispense, dall'altra riteniamo che sia comunque istruttivo per gli studenti liceali motivati prendere confidenza con questi metodi.

★★★★☆ Esercizio 16 Cilindro rotante

Consideriamo un recipiente di forma cilindrica completamente pieno d'acqua, che assumiamo essere un fluido incomprimibile, di densità ρ . Supponiamo che il cilindro stia ruotando ad una velocità costante Ω rispetto al suo asse di simmetria, e che questo asse sia collocato in posizione orizzontale rispetto al campo gravitazionale terrestre. Dimostrare che le superfici isobare del sistema, sono dei cilindri con raggio variabile, che condividono tutti lo stesso asse di simmetria, che è orizzontale e distante g/Ω^2 dall'asse del recipiente.

★★☆☆☆ Esercizio 17 Riempimento di un buco

Si consideri uno spazio infinito riempito da un fluido incomprimibile di densità ρ . All'istante $t = 0$ si forma improvvisamente un buco sferico di raggio a e il fluido inizia a riempire il buco. Supponiamo nulla la pressione nel buco e supponiamo costante durante il processo la pressione p_0 del fluido all'infinito. Vogliamo trovare quanto tempo ci mette il fluido a riempire tutto il buco.

hint: all'interfaccia tra il vuoto e il fluido la pressione deve essere continua.

- 1. Cosa si può dire del campo di velocità e di pressione, sfruttando la simmetria del problema?
- 2. Controllando su un formulario l'espressione per gli operatori differenziali in coordinate sferiche, scrivere in questo caso le equazioni di Eulero e l'equazione di continuità.
- 3. Trovare in funzione del tempo una relazione che lega il raggio del buco $R(t)$, al campo di velocità $V(t)$ in corrispondenza dell'interfaccia tra il fluido e il vuoto.
- 4. Risolvere le equazioni con un opportuno cambio di variabile, determinando $V(R)$.
- 5. A questo punto, trovare il tempo di riempimento.

★★★★☆ Esercizio 18 Adesione di una sfera

Consideriamo una sfera solida e rigida, posta su piano orizzontale composto da un solido, e immersa nell'atmosfera a pressione p_0 . Supponiamo che vicino al punto di contatto ci sia una piccola quantità di liquido, disposto in modo da avere la forma di una lente piana da un lato, e concava dall'altro, di raggio r , in modo che $r \ll a$ (vedi fig 27). Supponiamo inoltre che la tensione superficiale dell'interfaccia liquido gas valga γ . Si osserva che la sfera risente di una forza di adesione alla superficie orizzontale: dimostrare che il modulo di tale forza è $4\pi a\gamma$.

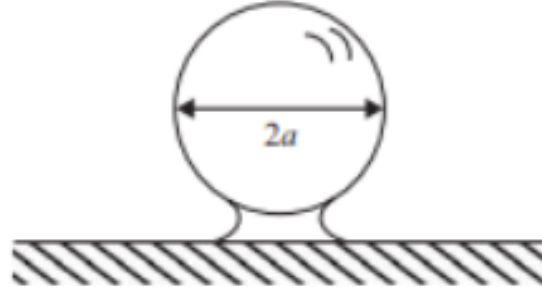


Figura 27: Immagine della sfera; il raggio di base del fluido è r , e vale $r \ll a$; le dimensioni del fluido sono esagerate per chiarezza.

★★★★★ Esercizio 19 Tempo di svuotamento

Calcolare il tempo di svuotamento di un recipiente con sezione costante di altezza h_0 ed area di base A , supponendo che la sezione del foro alla base sia $S \ll A$.

★★☆☆☆ Esercizio 20 Onde in un recipiente

Consideriamo un contenitore a forma di parallelepipedo di altezza h , e dimensioni orizzontali a e b , che contiene un fluido incompressibile. Vogliamo studiare la propagazione delle onde di superficie in questo contenitore. Sappiamo quale deve essere la dipendenza caratteristica delle soluzioni con la coordinata z , e vogliamo studiare soluzioni dell'equazione di Laplace del tipo:

$$\phi(x, y, z, t) = f(x, y) \cosh k(z + h) \cos \omega t$$

- 1. Trovare anche per funzioni di questo tipo la dipendenza fra k e ω , sia nel limite in cui $kh \gg 1$ che nel limite in cui $kh \ll 1$.
- Ora, per trovare $f(x, y)$, si può usare una tecnica chiamata separazione delle variabili. In pratica è possibile fare un guess di questo tipo:

$$f(x, y) = X(x)Y(y)$$

dove $X(x)$ e $Y(y)$ dipendono rispettivamente da x e da y . Capire come possono essere fatte le soluzioni.

hint: Se vale una relazione del tipo

$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) = 0$$

allora $f_i(x_i)$ è costante $\forall i$

- 2. Le condizioni al bordo forzano la quantizzazione di k (cioè possono esistere soluzioni solo se k assume certi valori discreti). Trovare la relazione tra k , n e m , dove n e m sono interi naturali.
- 3. Trovare a questo punto la condizione di quantizzazione su ω , nel limite in cui $kh \gg 1$ e $kh \ll 1$.

★★☆☆☆ Esercizio 21 Flusso potenziale di un cilindro

Similmente a quanto fatto con una sfera, vogliamo risolvere il problema del flusso potenziale per un cilindro. Mandiamo un flusso a velocità costante u_0 diretta lungo x , contro un cilindro con l'asse di simmetria lungo l'asse z . Vogliamo determinare il campo di velocità in tutto lo spazio.

- 1. Dato che nel caso della sfera è stato utile il dipolo immagine, nel caso del cilindro proviamo a studiare il potenziale generato da due fili uniformemente carichi distanti a e con carica λ e $-\lambda$, in modo che $a \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$, ma il prodotto tra i due rimanga costante.
- 2. Provare a risolvere l'equazione di Laplace, sovrapponendo al potenziale del campo uniforme di velocità, il potenziale ottenuto al punto precedente.
- 3. Calcolare velocità e campo di pressione, verificando il paradosso di d'Alambert.

★★★★☆☆ Esercizio 22 flusso viscoso tra due lastre

Consideriamo due lastre parallele al piano orizzontale xy : una giacente sul piano stesso, e una ad una distanza h sopra la prima, che si muove ad una velocità u lungo x . Supponiamo che ci sia tra di loro un fluido viscoso e incompressibile con viscosità cinematica ν e densità ρ , in modo che il suo campo di velocità sia unicamente diretto lungo x , dipenda solo da z , e non ci siano gradienti di pressione lungo x . All'interfaccia solido-fluido, affinché valga la no-slip condition, la velocità relativa tra il fluido e il solido si deve annullare. Usare le equazioni di Navier-Stokes per risolvere il problema, trovando il campo di velocità, la portata totale del flusso e la forza agente su ciascuno dei due piani orizzontali.

★★★★★ Esercizio 23 Svuotamento di un cono

Calcolare il tempo di svuotamento di un cono di altezza H , con area di base A , supponendo che il foro sia fatto in corrispondenza del vertice, e che abbia un'area $a \ll A$.

Il conto precedente ha un problema: quando il livello dell'acqua è molto basso, si rompe l'approssimazione di staticità di Bernoulli, dato che la sezione della superficie libera diventa confrontabile con quella del foro. Consideriamo quindi un cono diverso dal precedente, che ha la superficie libera d'acqua ad altezza H rispetto al vertice del cono, e la superficie di fuoriuscita ad altezza h_0 , sempre rispetto al vertice del cono. Provare ad utilizzare la versione dinamica di Bernoulli per trovare un'equazione differenziale che leghi v^2 , la velocità di fuoriuscita dell'acqua, e h , l'altezza della superficie libera.

★★★★☆☆ Esercizio 24 Goccia rotante

Si consideri una goccia d'acqua di densità ρ immersa in aria a pressione atmosferica, tenuta insieme dalla tensione superficiale γ . La goccia inizia a ruotare con una piccola velocità angolare

ω , e assume la forma di uno sferoide (cioè un ellissoide con due assi principali su tre uguali tra loro). Se a e b sono rispettivamente l'asse maggiore e l'asse minore dello sferoide, definiamo:

$$\epsilon = \frac{a-b}{a} \quad r_m = (a^2 b)^{1/3}$$

dimostrare, al primo ordine in ϵ , che vale:

$$\epsilon = \frac{\rho \omega^2 r_m^2}{8\gamma}$$

★★☆☆☆ Esercizio 25 Flusso potenziale in prossimità di un angolo

Si hanno due piani che si incontrano formando un angolo α . Facciamo scorrere un fluido nel piano perpendicolare ai due piani; vogliamo determinare il termine dominante del flusso potenziale nelle prossimità dell'origine.

- 1. Guardare su un formulario la forma del Laplaciano in coordinate polari; ora vogliamo risolvere l'equazione di Laplace con la tecnica della separazione delle variabili (vedi 20); in pratica scriveremo:

$$\phi(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$$

Si suggerisce di guessare $R(r) = r^k$; la condizioni al contorno fanno sì che un tale k sia quantizzato. Trovare k in funzione in n , dove n è un numero naturale.

- 2. Scartando le soluzioni singolari nel dominio considerato, scrivere la soluzione completa per k ammissibile e generico.
- 3. Adesso consideriamo solo la soluzione che domina per piccoli r ; di questa calcolare il campo di velocità.
- 4. Dire cosa cambia se $\alpha < \pi$ o se $\alpha > \pi$.

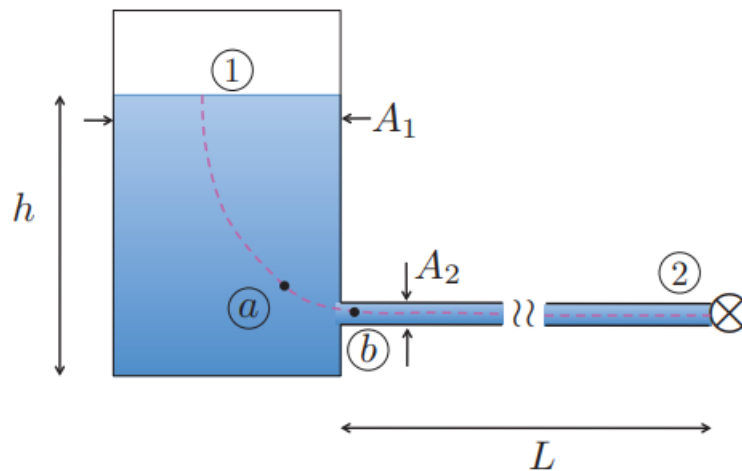


Figura 28: Immagine che rappresenta il recipiente, da cui parte il tubo di lunghezza L .

★★★★☆☆ Esercizio 26 Svuotamento rivisitato

Consideriamo un recipiente di sezione costante A_1 contenente del liquido, con attaccato un tubo orizzontale ad altezza h dalla superficie libera. La lunghezza del tubo è L , e la sua sezione

è A_2 , in modo che $A_2 \ll A_1$; si veda figura 28. Inizialmente l'estremità del tubo è chiusa, poi all'istante $t = 0$ viene aperta; vogliamo ottenere la velocità di fuoriuscita v in funzione di t . Supponiamo inoltre che all'esterno ci sia aria a pressione p_0 , e che pure l'aria all'interno del recipiente sia a questa pressione p_0 .

★★★☆☆ Esercizio 27 Fluido viscoso su piano inclinato

Si consideri un piano inclinato ad un angolo θ , su cui si trova uno strato di fluido con spessore h , come mostrato in figura 29. La superficie libera del fluido è a contatto con dell'aria a pressione p_0 . Supponiamo che il fluido sia incompressibile con densità ρ , e sia viscoso con viscosità cinematica ν . Chiamata x la coordinata parallela al piano inclinato, e z quella perpendicolare, supponiamo di avere un campo di velocità unicamente lungo x che dipende solo da z , e tale che non ci sia gradiente di pressione lungo x . Usando le equazioni di Navier-Stokes, determinare il campo di velocità, quello di pressione, e la portata totale.

hint: la superficie di contatto tra acqua e aria risente di un attrito che possiamo stimare essere nullo; capire come questo impone una condizione al bordo.

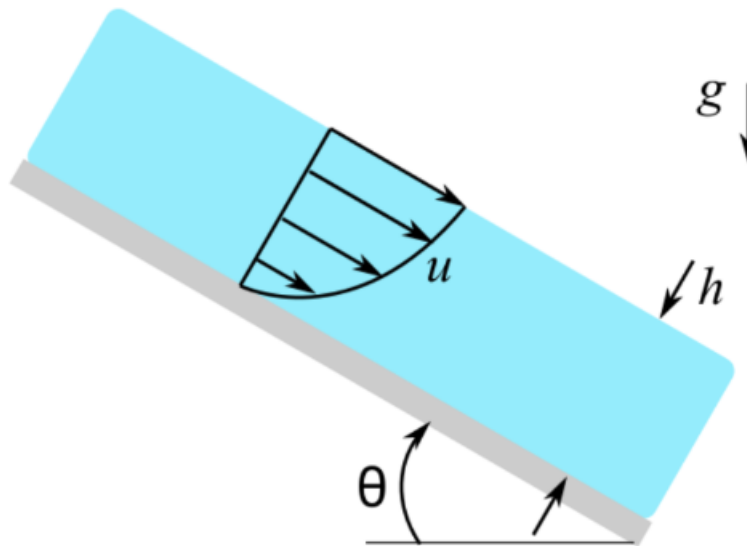


Figura 29: Piano inclinato su cui scorre uno strato di fluido viscoso.

★★☆☆☆ Esercizio 28 Ellissoide potenziale

Consideriamo un contenitore a forma di ellissoide che ruota intorno ad un suo asse principale con velocità angolare Ω ; chiamiamo a , b e c i suoi assi principali. Supponiamo che al suo interno vi sia del fluido incompressibile ad una densità ρ , e che sul bordo del contenitore il fluido si muova esattamente come il contenitore; se supponiamo che all'interno dell'ellissoide ci sia flusso potenziale, vogliamo determinare il campo di velocità.

- 1. Per prima cosa, esprimere in funzione della posizione, la velocità di un punto arbitrario sul recipiente.
- 2. Ora, ricordando come si calcola il vettore normale alla superficie, e conoscendo l'equazione di un ellissoide, trovare un modo di esprimere la condizione al bordo verificata da ϕ .
- 3. Trovare una soluzione dell'equazione di Laplace che verifichi le condizioni al bordo.

- 4. Trovare il campo di velocità in ogni punto dell'ellissoide, e ottenere anche il campo di velocità relativa tra il fluido e il recipiente; capire come si muovono gli elementi fluidi a causa della velocità relativa.

★★☆☆☆ **Esercizio 29** Onde all'interfaccia tra due fluidi

Immaginiamo di avere due fluidi con densità ρ_1 e ρ_2 . Il primo, quello di densità ρ_1 , si trova nella regione di spazio tra $z = 0$ e $z = -h_1$, cioè quella inferiore; il secondo, quello di densità ρ_2 , si trova nella regione tra $z = 0$ e $z = h_2$, cioè quella superiore. Supponiamo di voler studiare le onde di superficie che si possono propagare. Facciamo il guess:

$$\phi_1 = A \cosh k(z + h_1) \cos(kx - \omega t) \quad \phi_2 = B \cosh k(z + h_2) \cos(kx - \omega t)$$

che sappiamo verificare l'equazione di Laplace singolarmente nelle due regioni.

- Ricavare dal bilancio di pressione tra le due interfacce, la funzione $\zeta(x, t)$, esprimendola nei termini dei parametri noti e dei parametri incogniti A e B .
- A questo punto, utilizzare una condizione cinematica all'interfaccia per trovare ulteriori condizioni che le due soluzioni devono verificare; sfruttare queste ultime per ricavare la relazione di dispersione $\omega(k)$.
- Approssimare la relazione di dispersione nei due casi in cui entrambi i fluidi siano molto profondi ($hk \gg 1$), e nel limite in cui la lunghezza d'onda è molto più grande dell'altezza ($hk \ll 1$).

★★☆☆☆ **Esercizio 30** Flusso viscoso in un tubo

Vogliamo studiare il campo di velocità di un fluido incomprimibile, con densità ρ , e viscoso con viscosità cinematica ν , all'interno di un cilindro di lunghezza l e raggio r . Supponiamo che il flusso sia solo nella direzione dell'asse di simmetria del cilindro.

- Dimostrare che la caduta di pressione per unità di lunghezza sul tubo è costante, e scriverla nei termini della caduta di pressione totale Δp e della lunghezza del tubo l .
- Andando a cercare la forma del laplaciano in coordinate cilindriche, e sfruttando le condizioni al contorno (no slip condition), trovare il campo di velocità.
- Trovare infine la portata del flusso.

— SOLUZIONI —

Per le soluzioni degli esercizi olimpici si rimanda ai siti delle rispettive organizzazioni. Invece, per quanto riguarda gli esercizi proposti da noi, le soluzioni verranno presto caricate sul sito dello stage.