

Introduzione alla relatività ristretta

Nico Kleijne*

7 febbraio 2025

Sommario

Partendo dai postulati della teoria della relatività ristretta, si ricavano la perdita di simultaneità, la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze. Si deduce quindi la forma delle trasformazioni di Lorentz e da queste la composizione relativistica delle velocità. Si introducono gli intervalli invarianti e i diagrammi di Minkowski. Considerando un urto elastico fra due oggetti puntiformi si giustificano le definizioni relativistiche di quantità di moto, di energia e di massa invariante. Infine, si introduce il concetto di quadri-vettore.

*nico.kleijne@sns.it

— INDICE —

1	Introduzione	4
2	Motivazioni	4
2.1	Trasformazioni di Galileo	4
2.2	Equazioni di Maxwell	5
2.3	Esperimento di Michelson e Morley	5
3	Postulati	7
3.1	Tutti sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti	7
3.2	La velocità della luce è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali	7
4	Conseguenze dei postulati	7
4.1	Definizioni operative	7
4.1.1	Orologio luce e misure di tempo	7
4.1.2	Regolo rigido e misure di distanze	8
4.1.3	Sincronizzazione degli orologi	8
4.2	Perdita di simultaneità	8
4.3	Dilatazione dei tempi	10
4.4	Contraazione delle lunghezze	11
5	Trasformazioni di Lorentz	13
6	Composizione relativistica delle velocità	14
6.1	Velocità parallela al boost	14
6.2	Velocità perpendicolare al boost	15
7	Intervalli invarianti	15
7.1	Intervallo luce	15
7.2	Intervallo di tipo temporale	15
7.3	Intervallo di tipo spaziale	16
8	Diagrammi di Minkowski	16
9	Definizioni di quantità di moto, energia e massa invariante	18
9.1	Quantità di moto relativistica	18
9.2	Energia relativistica	19
9.3	Massa invariante	20
10	Definizione di forza	21
11	Quadrivettori	21
11.1	Definizione di quadrivettore	21
11.2	Linearità e prodotto scalare	22
11.3	Quadrivettore velocità	22
11.4	Quadrivettore energia e quantità di moto	22
11.5	Quadrivettore accelerazione	23
12	Urti e decadimenti	23
13	Effetto Doppler relativistico	24

14 Unità di misura in fisica delle particelle

27

Esercizi

28

SEZ. 1 — INTRODUZIONE

Le leggi della meccanica Newtoniana che avete sempre studiato e usato per risolvere i problemi non sono corrette, o almeno non sono sempre valide. La meccanica Newtoniana è valida solo nel cosiddetto limite non relativistico in cui tutte le velocità in gioco sono molto inferiori alla velocità della luce, $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$.¹ Nei problemi di tutti i giorni le velocità degli oggetti difficilmente superano la velocità del suono, $v \approx 300\text{ m/s}$. Se dobbiamo trattare il moto di un pallone da calcio, di un'automobile o anche di un caccia supersonico, commettiamo un errore microscopico nell'usare la meccanica Newtoniana. Anzi, se dopo aver studiato la relatività ristretta, decidessimo di usarla al posto della meccanica Newtoniana per risolvere problemi che non lo richiedono, staremmo commettendo un grosso errore di valutazione.

Al contrario, quando studiamo esperimenti con altissime precisioni o con altissime velocità dobbiamo usare la teoria della relatività ristretta formulata da Einstein nel 1905. In queste dispense introdurremo i postulati della relatività ristretta e deriveremo dal punto di vista teorico molte delle conseguenze di questi postulati.

Alcune di tali conseguenze sono note come *paradossi*, come per esempio il famoso *paradosso dei gemelli*. In realtà, non esiste alcun paradosso e la teoria è perfettamente coerente sia teoricamente che sperimentalmente. Molti risultati sono estremamente controintuitivi perché non siamo abituati a pensare a oggetti che si muovono a velocità prossime a quella della luce. Dobbiamo quindi fare molta attenzione quando risolviamo un problema di relatività ristretta e ci dobbiamo attenere rigorosamente ai postulati e alle regole per evitare di incappare in errori o falsi paradossi.

Per quanto l'intera teoria sia molto bella ed elegante, essa è valida unicamente perché tutte le sue predizioni sono sempre verificate sperimentalmente. All'acceleratore LHC del CERN i protoni viaggiano a circa $0.99993c$ e i principi della relatività ristretta vengono usati e verificati quotidianamente.

Nel caso che, oltre alle alte velocità, dovessimo considerare anche l'effetto della gravità, la relatività ristretta non ci basterebbe e dovremmo usare la teoria della relatività generale formulata da Einstein nel 1915. La relatività generale è parte della lezione di relatività avanzata e non verrà trattata in queste dispense.

SEZ. 2 — MOTIVAZIONI

2.1 Trasformazioni di Galileo

Consideriamo due persone, l'osservatore A a bordo di un treno che si muove con velocità rettilinea uniforme e orizzontale, $\vec{v} = v\hat{x}$, rispetto all'osservatore B che è fermo a terra. Chiamiamo S' il sistema di riferimento inerziale di A e S il sistema di riferimento inerziale di B. Consideriamo due eventi che accadono sul treno, per esempio una persona che fa un salto e un'altra che schiocca le dita. Nel sistema S' questi eventi sono separati da una distanza spaziale orizzontale $\Delta x'$ e da una distanza temporale $\Delta t'$, mentre nel sistema S la loro distanza spaziale orizzontale è Δx e la loro distanza temporale è Δt . In meccanica Newtoniana, queste distanze sono legate dalle trasformazioni di Galileo

$$\begin{aligned}\Delta t &= \Delta t', \\ \Delta x &= \Delta x' + v\Delta t',\end{aligned}\tag{2.1}$$

dove la distanza temporale è uguale nei due sistemi di riferimento, come ci suggerisce il nostro senso comune applicato ai problemi di tutti i giorni. Le distanze perpendicolari alla velocità

¹Si, la velocità della luce è esattamente un numero intero quando è misurata in m/s. Non è un caso, la velocità della luce è così importante che 1 m viene definito come la distanza percorsa dalla luce in un tempo $t = 1/299\,792\,458\text{ s}$.

\vec{v} non cambiano, $\Delta y = \Delta y'$ e $\Delta z = \Delta z'$, esattamente come ci suggerisce sempre il nostro senso comune.

Il principio di relatività Galileiana afferma che tutte le leggi della fisica sono invarianti per le trasformazioni di Eq. (2.1). Per esempio, il secondo principio della dinamica, $\vec{F} = m\vec{a}$, è invariante, perché l'accelerazione di un oggetto è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

2.2 Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell, scritte per la prima volta nel 1864, predicono la propagazione di onde elettromagnetiche con velocità costante pari a c . Risolvendo le equazioni di Maxwell nel vuoto, si ottiene che il campo elettrico \vec{E} e il campo magnetico \vec{B} soddisfano

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x_i^2} &= 0, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x_i^2} &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Non è importante capire nel dettaglio cosa c'è scritto nelle Eq. (2.2). Se però si prova a trasformare le Eq. (2.2), usando le Eq. (2.1), sostituendo x con x' e t con t' , si vede che le nuove equazioni hanno una forma diversa dall'originale. Sembra quindi esistere un sistema di riferimento inerziale preferenziale S , in cui le equazioni di Maxwell predicono onde elettromagnetiche che si propagano con velocità c . In un qualunque altro sistema di riferimento inerziale S' , la soluzione delle equazioni di Maxwell è più complessa. Detta in altro modo, se si compongono le velocità secondo le Eq. (2.1), le onde elettromagnetiche risultanti propagano a una velocità $c + v \neq c$. Per risolvere questo disaccordo fra la relatività Galileiana e le equazioni di Maxwell abbiamo due possibili soluzioni.

- Assumiamo che le trasformazioni di Galileo e la meccanica Newtoniana siano sempre valide, in tutti i sistemi di riferimento. Al contrario, le equazioni di Maxwell sono valide solo in un sistema di riferimento inerziale, quello del cosiddetto *etere* in cui la luce propaga a velocità c . Questa era l'ipotesi più in voga a fine '800: molti esperimenti provarono a verificarla, ma senza alcun successo.
- Assumiamo, come fatto da Einstein, che le equazioni di Maxwell siano sempre valide e che la luce si propaghi sempre a c in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Al contrario, le trasformazioni di Galileo sono valide solo nel limite in cui consideriamo velocità molto basse rispetto a quella della luce. Quando consideriamo velocità comparabili a quella della luce dobbiamo usare le più complete trasformazioni di Lorentz, che si riducono a quelle di Galileo nel limite $v \ll c$.

2.3 Esperimento di Michelson e Morley

A fine '800 l'ipotesi comunemente accettata era che le trasformazioni di Galileo fossero sempre valide e che esistesse un unico sistema di riferimento inerziale preferenziale in cui la velocità della luce è c . Per giustificare la scelta di un sistema di riferimento preferenziale, si ipotizzò la presenza di un mezzo fisico noto come *etere* in cui la luce si propaga a velocità c , proprio come il suono si propaga a velocità v_s nell'aria. Il sistema di riferimento inerziale preferenziale sarebbe quindi quello in cui l'etere è fermo.

Date queste ipotesi, era naturale chiedersi quale fosse la velocità relativa della Terra rispetto all'etere. Furono condotti molti esperimenti per misurare tale velocità; quello storicamente più noto è l'esperimento di Michelson e Morley. In Fig. 1 è riportato uno schema dell'apparato dell'esperimento, noto come interferometro. Un fascio di luce viene fatto incidere su uno specchio semiriflettente e viene separato in due fasci perpendicolari. I due fasci percorrono due bracci di

uguale lunghezza L , riflettono su due specchi, tornano indietro e, dopo essere passati attraverso lo specchio semiriflettente, si ricombinano su uno schermo.

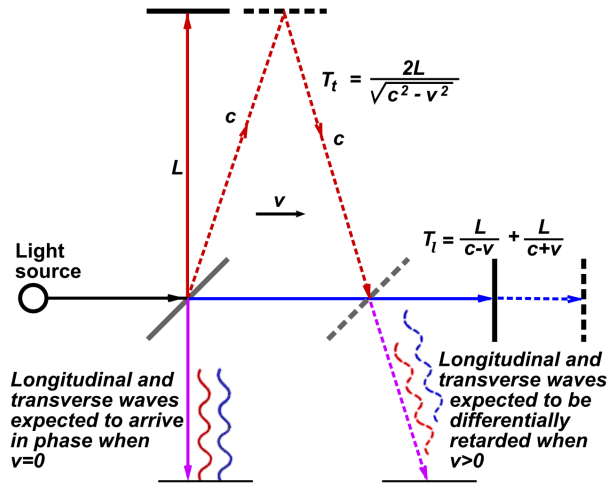


Figura 1: Apparato dell'esperimento di Michelson e Morley.

Se assumiamo che l'apparato sia fermo rispetto all'etere, la velocità dei fasci è uguale a c in entrambe le direzioni perpendicolari. I due fasci impiegano quindi lo stesso tempo $t_1 = t_2$ a percorrere i due bracci, e quando si ricombinano sullo schermo sono in fase, dando luogo a un'interferenza costruttiva.

Dato che la Terra ruota intorno al sole a una velocità di circa 30 km/s, ripetendo l'esperimento tutti i giorni dell'anno, deve esistere un momento in cui la velocità della Terra rispetto all'etere \vec{v} è almeno 30 km/s. Supponiamo ora di orientare un braccio dell'interferometro parallelamente alla velocità della Terra rispetto all'etere e calcoliamo i tempi che impiegano i due raggi di luce a percorrere i rispettivi bracci. Per trattare il problema immaginiamo di metterci nel sistema di riferimento dell'etere in cui la velocità della luce vale c in tutte le direzioni. Per percorrere il braccio parallelo a \vec{v} all'andata serve un tempo $L/(c-v)$ perché lo specchio si sta allontanando dal fascio, mentre al ritorno serve un tempo $L/(c+v)$ perché lo specchio si sta avvicinando al fascio. In totale, il tempo di andata e ritorno nella direzione parallela è

$$t_{\parallel} = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}.$$

Per percorrere il braccio perpendicolare a \vec{v} serve una componente non nulla della velocità della luce c per poter inseguire lo specchio che si sta spostando parallelamente a \vec{v} . Con il teorema di Pitagora si dimostra che la componente perpendicolare della velocità del fascio è uguale all'andata e al ritorno e vale $\sqrt{c^2 - v^2}$. In totale, il tempo di andata e ritorno nella direzione perpendicolare è

$$t_{\perp} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

La differenza fra i due tempi vale quindi

$$\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp} = \frac{2L}{c} \left[\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] \approx \frac{2L}{c} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \right] = \frac{Lv^2}{c^3}, \quad (2.3)$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo espanso in serie di Taylor nel piccolo parametro $v/c \approx 10^{-4}$. Quando i due fasci si ricombinano sullo schermo, quello parallelo è leggermente in ritardo. Aggiustando opportunamente la lunghezza dell'apparato e la frequenza della luce si potrebbe ottenere un'interferenza distruttiva che dimostrerebbe che $v \neq 0$. Michelson e Morley ripeterono quindi l'esperimento molte volte e in diversi periodi dell'anno. Sorprendentemente, per quanto si sforzassero di migliorare la precisione dell'apparato, ottennero sempre come risultato $v = 0$.

Questo risultato mostrò che le trasformazioni e la composizione delle velocità di Galileo non sono esatte. Come fece Einstein, dobbiamo invece assumere che l'etere e il sistema di riferimento preferenziale non esistono. La velocità della luce è una costante, indipendentemente dal sistema di riferimento inerziale.

SEZ. 3 — POSTULATI

La teoria della relatività di Einstein si basa su due semplici postulati.

3.1 Tutti sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti

Il primo postulato sostanzialmente afferma che una legge della natura, espressa nelle coordinate (t, x) di un sistema inerziale S ha la stessa forma in un altro sistema inerziale S' se scritta nelle coordinate (t', x') . Attenzione! Questo postulato era valido pure in meccanica classica. La differenza fra la relatività di Galileo e quella di Einstein è nella forma delle trasformazioni usate per passare dalle coordinate di S alle coordinate di S' . Le Eq. (2.1) non sono le trasformazioni corrette. Per trovare la corretta forma delle trasformazioni di Lorentz ci serve il secondo postulato di Einstein.

3.2 La velocità della luce è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Il secondo postulato è molto meno intuitivo, e consente subito di predire qualche caratteristica della nuova teoria. In particolare segue subito che le velocità non possono essere additive in relatività ristretta, altrimenti la velocità della luce non sarebbe la stessa in differenti sistemi inerziali.

Per esempio, un treno sta viaggiando alla velocità costante v rispetto a noi che siamo a terra. I fari del treno irraggiano luce nella direzione del moto. I passeggeri del treno osservano la luce muoversi alla velocità c . In maniera controintuitiva, anche noi che da terra osserviamo la luce muoversi a velocità c , anziché $c + v$.

SEZ. 4 — CONSEQUENZE DEI POSTULATI

4.1 Definizioni operative

Come vedremo, i segnali non possono propagarsi più velocemente della luce. Da ciò segue che dobbiamo porre attenzione a come misuriamo nella pratica le distanze e gli intervalli temporali. Diamo adesso un modo operativo per misurare i tempi e le distanze in relatività ristretta.

§ 4.1.1. Orologio luce e misure di tempo. — Per misurare i tempi utilizziamo un cosiddetto *orologio luce*.

Questo dispositivo è costituito da due superfici piane e parallele, separate da una distanza L . Su una superficie poniamo un sensore di luce e un laser puntato perpendicolarmente verso la seconda superficie, che è uno specchio riflettente. Il laser emette un impulso di luce che giunge allo specchio, viene riflesso perpendicolarmente e torna indietro sul sensore. Una volta che la luce è stata rilevata, il laser emette immediatamente un nuovo impulso di luce e il ciclo si ripete. Il tempo trascorso fra un'emissione di un impulso di luce e la successiva vale $2L/c$ e corrisponde alla nostra unità fondamentale di tempo.

In pratica misurare il tempo significa *contare* quante volte arriva un impulso di luce sul sensore. Il tempo misurato da un osservatore nel sistema di riferimento solidale con l'orologio luce è detto *tempo proprio* e spesso viene indicato con la lettera τ .

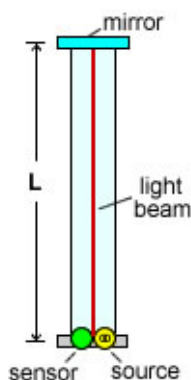


Figura 2: orologio luce.

§ 4.1.2. **Regolo rigido e misure di distanze.** — Per misurare la distanza fra diversi punti dello spazio, dobbiamo costruire un reticolo Cartesiano tridimensionale e poi usare il teorema di Pitagora per calcolare le distanze, sommando in quadratura le componenti Cartesiane, $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Per costruire il reticolo Cartesiano, poniamo uno specchio sull'asse x in un punto da cui vogliamo misurare la distanza, ci spariamo contro un impulso di luce dall'origine e misuriamo il tempo t di andata e ritorno del raggio, stando fermi nell'origine con l'orologio. Definiamo naturalmente la distanza fra l'origine e il punto come $x = ct/2$. Ripetendo la procedura nelle tre direzioni ortogonali, possiamo facilmente costruire il sistema di coordinate Cartesiane.

Una volta costruito il sistema Cartesiano, possiamo calcolare la lunghezza di una sbarra ferma nel nostro sistema di riferimento semplicemente misurando la distanza Cartesiana fra gli estremi della sbarra. La lunghezza di un oggetto misurata nel sistema di riferimento in cui l'oggetto è fermo è detta *lunghezza propria* o *lunghezza a riposo*.

Come possiamo misurare la lunghezza se invece il corpo è in moto relativo rispetto a noi, per esempio lungo l'asse x ? Per semplicità consideriamo una sottile sbarra orientata lungo l'asse x . Definiamo come lunghezza la distanza Cartesiana delle estremità misurando le loro coordinate spaziali allo stesso istante t . Questa prescrizione è utilizzata anche per misurare lunghezze in meccanica Newtoniana e ci risulta naturale e intuitiva. Mentre non ci sono particolari problemi nel misurare lunghezze di un oggetto a riposo, per poter misurare correttamente la lunghezza di un oggetto in movimento abbiamo bisogno di avere due orologi sincronizzati fra di loro e posti alle due estremità dell'oggetto.

§ 4.1.3. **Sincronizzazione degli orologi.** — Supponiamo che ci siano due osservatori A e B entrambi dotati di orologi luce a riposo nello stesso sistema di riferimento inerziale S . Entrambi possono utilizzare i loro orologi per misurare i tempi a cui avviene un qualche evento nei rispettivi punti spaziali. Se però A e B non sincronizzano i loro orologi, ossia se non pongono un'origine del tempo comune, le misure fatte sono del tutto inutili.

Per sincronizzare gli orologi, A e B possono azionarli nello stesso punto contemporaneamente, e poi allontanarsi a vicenda molto lentamente, in modo da rendere piccole a piacere eventuali dilatazioni temporali.

4.2 Perdita di simultaneità

Consideriamo un osservatore A (sistema S') che si trova sulla carrozza di un treno che si muove a velocità v e in direzione x rispetto a un osservatore B che si trova a terra (sistema S). Supponiamo che A si trovi al centro della carrozza, equidistante dalle pareti anteriore e posteriore, entrambe a distanza l' . L'osservatore A possiede un laser che può emettere contemporaneamente due impulsi luminosi, uno in avanti e l'altro indietro. Se A attiva il laser, le pareti della carrozza

verranno colpite dagli impulsi luminosi simultaneamente nel suo sistema di riferimento S' , dopo un tempo l'/c .

Al contrario, l'osservatore B non vedrà le due pareti del treno colpite simultaneamente. L'osservatore B vede gli impulsi luminosi partire dal centro del treno a distanza l dalle pareti. La distanza l non è necessariamente uguale alla distanza l' , ma nel cambio di sistema di riferimento è lecito assumere che si conservino le proporzioni. Assumendo il secondo postulato di Einstein, anche nel sistema di riferimento S entrambi gli impulsi viaggiano a velocità c .

La parete posteriore si sta muovendo verso l'impulso di luce e verrà colpita dopo un tempo $t_p = l/(c+v)$. La parete anteriore si sta allontanando dall'impulso di luce e verrà colpita dopo un tempo $t_a = l/(c-v)$. Pertanto i due eventi simultanei nel sistema di riferimento S' non sono simultanei nel sistema S , in cui si ha $t_a > t_p$.

Per concludere, immaginiamo che le pareti della carrozza siano completamente riflettenti. Una volta che gli impulsi luminosi raggiungono gli estremi della carrozza, vengono riflessi e tornano verso il punto di emissione. È evidente che in S' gli impulsi luminosi tornano al centro della carrozza simultaneamente. Ci chiediamo se anche l'osservatore B in S veda gli impulsi luminosi tornare al centro della carrozza nello stesso istante. La risposta è affermativa: basta considerare che dopo essere stati riflessi le situazioni dei due impulsi si scambiano; si ha $t_p = l/(c-v)$ e $t_a = l/(c+v)$.

Un altro modo per giustificare la risposta affermativa è notare che in S' gli impulsi tornano nello stesso punto spaziale allo stesso istante. Pertanto, la situazione è analoga all'emissione: impulsi emessi allo stesso istante e nello stesso punto in S' lo devono essere pure in S !

Proviamo ora ad analizzare una situazione diversa. Immaginiamo che i due impulsi luminosi partano in direzioni opposte da un certo punto del treno, non necessariamente al centro della carrozza. Il punto di partenza degli impulsi luminosi è tale che nel sistema di riferimento S l'osservatore B vede i due impulsi colpire le pareti della carrozza allo stesso istante.

Immaginiamo che dentro alla carrozza ci siano due orologi solidali con A e con il sistema di riferimento S' , uno vicino alla parete posteriore e uno vicino alla parete anteriore. I due orologi sono sincronizzati nel sistema S' . Ci chiediamo se gli orologi siano sincronizzati anche nel sistema di riferimento S . In altre parole, nell'istante in cui l'osservatore B vede i due impulsi luminosi colpire le pareti, che tempo viene letto dall'osservatore B sui due orologi?

Nel sistema di riferimento S i due impulsi non possono essere partiti dal centro della carrozza se arrivano alle pareti nello stesso istante. In particolare, devono essere partiti a una distanza $l(c+v)/c$ dalla parete posteriore che si sta avvicinando e a una distanza $l(c-v)/c$ dalla parete anteriore che si sta allontanando. In questa maniera, entrambi gli impulsi luminosi impiegano un tempo l/c a raggiungere le pareti.

Nel sistema di riferimento S' le proporzioni sono le stesse del sistema di riferimento S e dunque gli impulsi luminosi partono a una distanza $l'(c+v)/c$ dalla parete posteriore e a una distanza $l'(c-v)/c$ dalla parete anteriore. Notiamo di nuovo che la distanza l non è necessariamente uguale alla distanza l' . Nel sistema di riferimento S' le pareti sono ferme, un impulso luminoso impiega un tempo $t_p = l'(c+v)/c^2$ a raggiungere la parete posteriore, mentre l'altro impulso impiega un tempo $t_a = l'(c-v)/c^2$ a raggiungere la parete anteriore. Nel sistema di riferimento S' , i due impulsi luminosi raggiungono quindi le pareti in istanti diversi. In particolare, la parete posteriore viene colpita dopo un tempo

$$\Delta t = t_p - t_a = \frac{2l'v}{c^2} = \frac{L'v}{c^2}, \quad (4.1)$$

dove $L' = 2l'$ è la lunghezza propria dell'intera carrozza. Quando un impulso luminoso raggiunge la parete posteriore, l'orologio lì vicino segna un tempo Δt più grande dell'orologio vicino alla parete anteriore, quando quest'ultima viene colpita dall'altro impulso luminoso. Dato che l'arrivo di un impulso luminoso e la posizione delle lancette di un orologio sono due eventi che avvengono nello stesso punto e allo stesso istante, continuano ad avvenire nello stesso punto e allo stesso

istante in tutti i sistemi di riferimento. La differenza Δt è quindi proprio la differenza di tempo segnata dagli orologi e letta da B , che vede l'orologio posteriore più avanti di quello anteriore.

4.3 Dilatazione dei tempi

Consideriamo un osservatore A che si trova sulla solita carrozza di un treno con un orologio luce i cui raggi siano visibili anche a osservatori esterni. Chiamiamo S' il sistema di riferimento inerziale di A .

Il treno sta sfrecciando a velocità uniforme v in direzione orizzontale \hat{x} rispetto all'osservatore B che è a terra. L'osservatore B vuole misurare nel suo sistema di riferimento S con il suo orologio luce il tempo Δt che intercorre fra l'emissione del raggio luminoso dell'orologio di A e la rivelazione dello stesso raggio luminoso, sempre da parte dell'orologio di A . In pratica vuole misurare l'unità di tempo che A usa per misurare i propri tempi in funzione della propria unità di tempo.

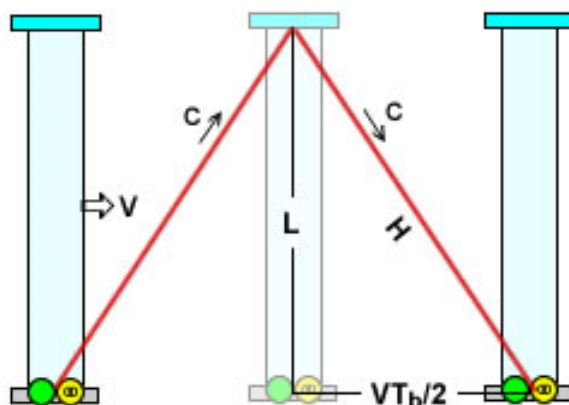


Figura 3: Traiettoria dei raggi di luce dell'orologio di A visti da B .

Il percorso del raggio di luce dell'orologio di A visto nel sistema S dell'osservatore B è riportato in figura 3. L'intervallo Δt è per definizione il tempo impiegato in S dal raggio di luce dell'orologio di A per fare andata e ritorno. Utilizzando il teorema di Pitagora, è facile accorgersi che la distanza percorsa dalla luce in S è

$$d = 2\sqrt{L^2 + v^2 \frac{\Delta t^2}{4}} = \sqrt{4L^2 + v^2 \Delta t^2}.$$

Osserviamo che, come indicato dal secondo postulato di Einstein, la velocità del raggio di luce dell'orologio di A visto in S è comunque c ! Segue quindi che

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \sqrt{4 \frac{L^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \Delta t^2}.$$

Ma $\Delta t' = 2L/c$ per definizione!² Segue quindi la relazione:

$$\Delta t^2 = \Delta t'^2 + \frac{v^2}{c^2} \Delta t^2,$$

da cui segue l'importante formula

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \cdot \Delta t', \quad (4.2)$$

²Stiamo assumendo che le lunghezze in direzione ortogonale al moto relativo siano uguali nei due sistemi.

dove abbiamo definito due notazioni estremamente utili e usate ovunque, sia in queste dispense che da qualunque testo di fisica,

$$\begin{aligned}\beta &\equiv \frac{v}{c}, \\ \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Usando il secondo postulato di Einstein, cioè che la velocità della luce è uguale in tutti i sistemi di riferimento, abbiamo trovato un altro risultato molto controintuitivo. L'intervallo temporale fra due eventi che avvengono nella stessa coordinata x' nel sistema di riferimento S' si dilata di un fattore $\gamma > 1$ per $v < c$ nel sistema di riferimento S . Le lancette dell'orologio con cui l'osservatore A misura il tempo appaiono rallentate all'osservatore B . Osserviamo anche che nel limite classico $v \ll c$, si ha che $\gamma \approx 1$, ossia $\Delta t' \approx \Delta t$, in accordo con le trasformazioni di Galileo e la nostra intuizione di tutti i giorni. Quando prendiamo un treno normale che non viaggia a velocità prossime a quelle della luce, non ci preoccupiamo di eventuali rallentamenti degli orologi.

Precisiamo una cosa importante, in tutta la discussione precedente abbiamo supposto che, durante le sue misurazioni, l'osservatore B tenga in conto del tempo finito richiesto alla luce emessa dalle lancette dell'orologio di A per propagarsi fino agli occhi di B . La sottrazione di questo tempo di ritardo può essere considerata senza problemi anche in meccanica Newtoniana e non dipende dal secondo postulato di Einstein. L'osservatore B potrebbe usare un segnale sonoro per ricevere l'informazione sulle lancette, sottraendo il ritardo dovuto alla velocità finita del suono v_s . L'effetto fondamentale è la dilatazione dei tempi e se l'osservatore B è un buon fisico sperimentale misurerà sempre un tempo in accordo con Eq. (4.2), indipendentemente dal metodo pratico con cui propaga l'informazione finale. C'è una grossa differenza fra ciò che B vede e ciò che B ricostruisce. La dilatazione dei tempi che viene ricostruita è un effetto relativo al sistema di riferimento S rispetto al sistema di riferimento S' , indipendentemente dalla presenza fisica dell'osservatore B . Un albero che cade in una foresta senza osservatori emette comunque un bel po' di rumore!

Facciamo un'altra precisazione molto importante, la semplice formula di dilatazione dei tempi di Eq. (4.2) vale perché i due eventi *emissione dell'impulso luminoso* e *rilevazione dell'impulso luminoso* avvengono in punti aventi la stessa coordinata x' (direzione del moto relativo) in S' .³ Proprio per questo motivo non è lecito utilizzare la formula di dilatazione dei tempi *al contrario*, invertendo i ruoli di S e S' : gli eventi che abbiamo considerato avvengono nella stessa x' solo nel sistema S' .

Un'ultima osservazione, nella derivazione della dilatazione dei tempi abbiamo assunto che entrambi gli osservatori A e B possedessero orologi luce. Questa condizione non è necessaria, se per esempio l'osservatore A possedesse solo un orologio meccanico, potremmo comunque immaginare senza problemi una situazione equivalente in cui A possiede anche un orologio luce. L'osservatore A potrebbe confrontare i due orologi e verificare che restino coordinati nel tempo. Se così non fosse A avrebbe modo di scoprire che il suo sistema di riferimento si sta muovendo, affermazione che viola il primo postulato di Einstein. In questa situazione anche B vedrebbe i due orologi di A sempre coordinati nel tempo, perché si trovano nello stesso punto, e quindi entrambi gli orologi dovrebbero apparire rallentati dello stesso fattore γ . La scelta di quale orologio usare risulta quindi arbitraria e, di conseguenza, tutti i processi fisici che avvengono nel sistema di riferimento S' , compresa la velocità di crescita dei capelli di A , appaiono rallentati nel sistema di riferimento S .

4.4 Contrazione delle lunghezze

Il fatto che l'intervallo temporale tra due eventi sia diverso per due osservatori in sistemi di riferimento inerziali differenti si riflette sulle distanze spaziali.

³Con il formalismo delle trasformazioni di Lorentz sarà più chiaro il perché.

Consideriamo ancora una volta il nostro treno con l'osservatore A a bordo nel sistema di riferimento inerziale S' , che si muove a velocità relativistica v in direzione \hat{x} rispetto all'osservatore B a terra nel sistema di riferimento inerziale S . Immaginiamo ora che A orienti il proprio orologio luce nella direzione parallela al moto. Nel sistema di riferimento S' il tempo impiegato dall'impulso luminoso per fare andata e ritorno resta sempre

$$t' = 2L'/c,$$

dove ora usiamo L' perché non è necessariamente vero che L' è uguale a L quando la lunghezza misurata è nella stessa direzione del moto relativo.

Nel sistema S' l'impulso luminoso impiega un tempo $L/(c-v)$ a percorrere l'andata perché lo specchio si sta allontanando, mentre impiega un tempo $L/(c+v)$ a percorrere il ritorno perché lo specchio si sta avvicinando. In totale il viaggio di andata e di ritorno richiede un tempo

$$t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2-v^2} = \frac{2L\gamma^2}{c}.$$

Ma dalla dilatazione dei tempi di Eq. (4.2) sappiamo già che

$$t = \gamma t',$$

dove si può usare la dilatazione dei tempi in questo modo perché nel sistema S' l'impulso luminoso parte e arriva nello stesso punto. Sostituendo, segue che

$$L = \frac{L'}{\gamma}. \quad (4.4)$$

Siccome $\gamma \geq 1$, un oggetto visto da un altro sistema di riferimento inerziale appare contratto nella direzione del moto relativo rispetto alla lunghezza propria dell'oggetto quando è fermo. Ripetiamo quindi che la formula Eq. (4.4) è valida solo se si usa come sistema di riferimento S' quello in cui l'oggetto è fermo.

Teniamo a precisare che la lunghezza misurata nel sistema del laboratorio è effettivamente minore della lunghezza della sbarra misurata nel sistema in cui questa è a riposo. La contrazione delle lunghezze non è un effetto dovuto ai ritardi della luce utilizzata per misurare.

Il lettore più attento potrebbe contestare che nella derivazione della dilatazione dei tempi abbiamo assunto che la distanza che separa i due estremi dell'orologio luce di A sia lunga L in entrambi i sistemi di riferimento, S e S' . In effetti si può mostrare che lunghezze ortogonali alla direzione del moto relativo dei due osservatori sono le stesse in entrambi i sistemi di riferimento. Un argomento che si può utilizzare per giustificare questo fatto è il seguente: consideriamo due osservatori C e D che si corrono incontro. Entrambi hanno in mano dei bastoni che tengono orizzontalmente e ortogonalmente alla direzione del moto. Le punte dei due bastoni sono colorate con vernice fresca. Se ci fosse una contrazione delle lunghezze ortogonali al moto relativo, C dovrebbe vedere il bastone di D più corto del suo. Pertanto, dopo l'urto fra C e D , il bastone di C riporterebbe delle tacche di vernice sul manico causate dal bastone di D . Se ripetiamo il ragionamento dal punto di vista di D , essendo la situazione completamente simmetrica, è il bastone di D ad avere le tacche sul proprio manico. Quando C e D si fermano e confrontano l'accaduto, devono mettersi d'accordo su quanto successo. Quindi non può esserci stata alcuna contrazione delle lunghezze ortogonali, altrimenti C e D non potrebbero concordare sul risultato dello scontro. Ribadiamo che, a differenza delle situazioni studiate per spiegare la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze lungo la direzione del moto relativo, questa situazione è simmetrica per i due osservatori.

La contrazione delle lunghezze spiega perché l'esperimento di Michelson e Morley fornisce risultati negativi. Nel calcolo del tempo t_{\parallel} di Eq. (2.3) dobbiamo considerare anche la contrazione di L di un fattore γ lungo la direzione del moto. In meccanica Newtoniana questo fattore non esiste, ma tenendolo in conto secondo la più corretta meccanica relativistica si ha una cancellazione perfetta dei tempi, $\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp} = 0$.

SEZ. 5 — TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Come visto nella Sez. 1, in meccanica Newtoniana per passare dalle coordinate di un sistema di riferimento inerziale S' che si muove con velocità v lungo \hat{x} alle coordinate del sistema di riferimento inerziale S si usano le trasformazioni di Galileo di Eq. (2.1). Come si è visto dalle discussioni delle sezioni precedenti, le trasformazioni di Galileo sono corrette solamente nel limite $v \ll c$, mentre nel caso di velocità relativistiche si devono usare le trasformazioni di Lorentz. Sfruttando i risultati della Sez. 4, possiamo ricavare la forma delle trasformazioni di Lorentz.

Innanzitutto, assumiamo che i due sistemi di riferimento abbiano gli assi allineati, escludendo per ora possibili rotazioni. Come si può capire dalla discussione che abbiamo fatto in Sez. 4.4 a proposito delle lunghezze perpendicolari alla direzione del moto, non succede nulla di interessante in quelle direzioni e si ha $\Delta y' = \Delta y$ e $\Delta z' = \Delta z$, esattamente come nel caso delle trasformazioni di Galileo. A questo punto dobbiamo assumere che le trasformazioni siano lineari e della forma

$$\begin{aligned}\Delta x &= A\Delta x' + B\Delta t', \\ \Delta t &= C\Delta x' + D\Delta t',\end{aligned}$$

dove i coefficienti A , B , C e D dipendono dalla velocità v .

Possiamo ricavare il valore di D dalla dilatazione dei tempi. Se consideriamo due eventi che accadono nello stesso punto nel sistema S' , abbiamo $\Delta x' = 0$. A questo punto possiamo applicare la dilatazione dei tempi $\Delta t = \gamma\Delta t'$, da cui $D = \gamma$.

Possiamo ricavare il valore di A dalla contrazione delle lunghezze. Consideriamo un bastone steso lungo \hat{x} e fermo nel sistema di riferimento S . Nel sistema S si può misurare la lunghezza del bastone Δx prendendo le coordinate dei due estremi in due istanti non necessariamente simultanei perché il bastone è fermo e le coordinate degli estremi non cambiano. Nel sistema S' il bastone si sta muovendo con velocità v e le coordinate dei due estremi vanno misurate nello stesso istante con $\Delta t' = 0$. In questo caso dobbiamo applicare Eq. (4.4) invertendo i ruoli di S e di S' , perché il bastone è in movimento nel sistema S' . Nel sistema S' il bastone appare quindi contratto di un fattore γ e si ha dunque $\Delta x = \gamma\Delta x'$, da cui segue $A = \gamma$.

Dalla definizione di velocità relativa, abbiamo che un oggetto fermo nel sistema di riferimento S con $\Delta x = 0$, nel sistema di riferimento S' deve avere coordinate $\Delta x' = -v\Delta t'$. Da ciò segue che $B/A = v$ e cioè che $B = \gamma v$.

Infine, dalla derivazione di Eq. (4.1) sappiamo che due eventi simultanei nel sistema S con $\Delta t = 0$ sono separati da un tempo $\Delta t' = -v\Delta x'/c^2$ nel sistema S' , dove il meno indica che l'evento che avviene spazialmente più indietro rispetto alla velocità relativa risulta avvenire più avanti nel tempo. Da questo segue che $D/C = v/c^2$, cioè che $D = \gamma v/c^2$.

A questo punto possiamo scrivere la versione finale delle trasformazioni di Lorentz dal sistema S' al sistema S come

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t'), \\ \Delta t &= \gamma(v\Delta x'/c^2 + \Delta t').\end{aligned}\tag{5.1}$$

Notiamo alcune cose, si può provare a invertire queste trasformazioni per trovare $\Delta x'$ e $\Delta t'$ in funzione di Δx e Δt . Il risultato finale è

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t), \\ \Delta t' &= \gamma(-v\Delta x/c^2 + \Delta t).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Questo risultato si può ottenere senza invertire le Eq. (5.1), basta considerare che stiamo facendo una trasformazione da un sistema di riferimento a un altro che si muove con velocità $-v$. Se nelle Eq. (5.1), si effettuano le sostituzioni $\Delta x' \leftrightarrow \Delta x$, $\Delta t' \leftrightarrow \Delta t$ e $v \rightarrow -v$ si ottengono proprio le Eq. (5.2).

Se si considera il limite non relativistico delle Eq. (5.1) per $v \ll c$, cioè $\gamma \rightarrow 1$ e $v\Delta x/c^2 \ll 1$ si riottengono le trasformazioni di Galileo di Eq. (2.1).

All'inizio della derivazione delle trasformazioni di Lorentz abbiamo assunto che gli assi dei due sistemi di riferimento fossero allineati. In realtà questo non deve essere necessariamente vero. Le trasformazioni di Eq. (5.1) descrivono un cosiddetto *boost* in cui si passa da un sistema di riferimento inerziale a un altro sistema di riferimento in moto relativo con velocità v . La più generica trasformazione di Lorentz è un boost composto con una *rotazione* degli assi spaziali. Per esempio, se gli assi y' e z' del sistema S' sono ruotati rispetto agli assi y e z del sistema S di un angolo θ , si usano le seguenti trasformazioni

$$\begin{aligned}\Delta y &= \cos\theta\Delta y' - \sin\theta\Delta z', \\ \Delta z &= \sin\theta\Delta y' + \cos\theta\Delta z'.\end{aligned}\tag{5.3}$$

SEZ. 6 — COMPOSIZIONE RELATIVISTICA DELLE VELOCITÀ

Per comporre le velocità nel caso relativistico bisogna distinguere i due casi di velocità parallele e perpendicolari. Nel caso siano presenti entrambe le componenti, le due si trasformano in maniera indipendente e si ricompongono dopo la trasformazione.

6.1 Velocità parallela al boost

Consideriamo un oggetto che si muove con velocità \vec{v}_1 lungo \hat{x} nel sistema di riferimento S' . Il sistema di riferimento inerziale S' si muove con velocità \vec{v}_2 parallela a \vec{v}_1 rispetto al sistema di riferimento inerziale S . Vogliamo determinare la velocità \vec{u} dell'oggetto nel sistema di riferimento S . Avendo a disposizione le trasformazioni di Lorentz, la derivazione è molto semplice. Nel sistema S' l'equazione oraria dell'oggetto si legge $\Delta x' = v_1 t'$. Nel sistema S l'equazione oraria si legge

$$\begin{aligned}u \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{\Delta x' + v_2 \Delta t'}{\Delta t' + v_2 \Delta x' / c^2} \\ &= \frac{\Delta x' / \Delta t' + v_2}{1 + v_2 (\Delta x' / \Delta t') / c^2} \\ &= \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2},\end{aligned}\tag{6.1}$$

dove nel primo passaggio abbiamo usato Eq. (5.1) e nell'ultimo passaggio abbiamo usato la definizione di v_1 nel sistema S' .

Notiamo alcune proprietà della formula di composizione di velocità parallele relativistica Eq. (6.1):

- è simmetrica nello scambio $v_1 \leftrightarrow v_2$ poiché possiamo scambiare i ruoli dell'oggetto e del sistema S .
- Nel limite non relativistico $v_1 v_2 \ll c^2$ si riduce alla composizione Galileiana $u \approx v_1 + v_2$.
- Se $v_1 = c$ o $v_2 = c$ si ottiene $u = c$, in accordo con il secondo postulato di Einstein che richiede che la velocità della luce sia indipendente dal sistema di riferimento.
- Se $v_1 < c$ e $v_2 < c$ si ottiene $u < c$, se un oggetto non si muove alla velocità della luce in un qualunque sistema di riferimento inerziale, allora non si muove alla velocità della luce in nessun sistema di riferimento inerziale.

6.2 Velocità perpendicolare al boost

La derivazione è molto simile al caso delle velocità parallele. Il sistema di riferimento S' si muove a velocità \vec{v} lungo \hat{x} rispetto al sistema di riferimento S . Scomponiamo la velocità di un oggetto nel sistema di riferimento S' in una componente parallela a \vec{v} che chiamiamo u'_x e una componente perpendicolare a \vec{v} che, senza perdita di generalità, mettiamo lungo \hat{y} e chiamiamo u'_y . La componente della velocità u_y nel sistema S è data da

$$\begin{aligned} u_y \equiv \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{\Delta y'}{\gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)} \\ &= \frac{\Delta y'/\Delta t'}{\gamma(1 + v(\Delta x'/\Delta t')c^2)} \\ &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

dove nel primo passaggio abbiamo trasformato Δt secondo Eq. (5.1) ma non Δy perché perpendicolare al boost. Notiamo che la nuova componente u_y dipende sia da u'_y che da u'_x .

SEZ. 7 — INTERVALLI INVARIANTI

Nel sistema di riferimento inerziale S consideriamo due eventi separati da un tempo Δt e da delle distanze fisiche Δx , Δy e Δz . Definiamo la quantità

$$(\Delta s)^2 \equiv c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (7.1)$$

Usando Eq. (5.1) possiamo riscrivere $(\Delta s)^2$ in funzione delle coordinate del sistema di riferimento inerziale S' come (per semplicità di notazione tralasciamo le Δ)

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= \gamma^2 [c^2 (t' + vx'/c^2)^2 - (x' + vt')^2] - y'^2 - z'^2 \\ &= \gamma^2 [(c^2 - v^2)t'^2 - (1 - v^2/c^2)x'^2] - y'^2 - z'^2 \\ &= \gamma^2 [c^2 t'^2/\gamma^2 - x'^2/\gamma^2] - y'^2 - z'^2 \\ &= c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Abbiamo quindi scoperto che la quantità $(\Delta s)^2$, o anche più semplicemente s^2 , ha lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento inerziale essa venga calcolata. Una quantità con questa proprietà di non dipendere dal sistema di riferimento inerziale viene detta *invariante relativistico*. In particolare s^2 è noto come *intervallo invariante* ed è il primo di una serie di invarianti che troveremo. Gli intervalli invarianti si suddividono in tre categorie:

7.1 Intervallo luce

Consideriamo i due eventi emissione di un fotone dall'origine e rivelazione dello stesso fotone nel punto x . Per il fotone vale $x^2 = c^2 t^2$ e quindi l'intervallo invariante è nullo, $s^2 = 0$.

7.2 Intervallo di tipo temporale

Consideriamo due eventi per cui valga $c^2 t^2 > x^2$ e cioè $s^2 > 0$. In pratica stiamo dicendo che un fotone che parte dal punto spaziale in cui avviene il primo evento nell'istante in cui avviene il primo evento può arrivare nel punto spaziale del secondo evento prima che il secondo evento

accada. In questo caso si può trovare una $v < c$ tale per cui $x = vt$. Dato che la separazione spaziale fra due eventi trasforma con

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (7.3)$$

per due eventi separati da un intervallo di tipo temporale $s^2 > 0$ si può sempre trovare un sistema di riferimento inerziale in cui i due eventi accadono nello stesso punto spaziale. Il tempo che intercorre fra due eventi che accadono nello stesso punto è definito come *tempo proprio* e spesso si indica con la lettera τ . Per intervalli di tipo temporale si ha quindi $s^2/c^2 = \tau^2$.

7.3 Intervallo di tipo spaziale

Consideriamo due eventi per cui valga $c^2 t^2 < x^2$ e cioè $s^2 < 0$. In pratica stiamo dicendo che un fotone che parte dal punto spaziale in cui avviene il primo evento nell'istante in cui avviene il primo evento non può arrivare nel punto spaziale del secondo evento prima che il secondo evento accada. In questo caso si può trovare una $v < c$ tale per cui $t = vx/c^2$. Dato che la separazione spaziale fra due eventi trasforma con

$$t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad (7.4)$$

per due eventi separati da un intervallo di tipo spaziale $s^2 < 0$ si può sempre trovare un sistema di riferimento inerziale in cui i due eventi accadono nello stesso istante. Lo spazio che separa due eventi che accadono allo stesso istante è definito come *lunghezza propria*. Notiamo che l'ordine cronologico di due eventi separati da un intervallo di tipo spaziale dipende dal sistema di riferimento; in alcuni sistemi avviene prima l'evento A e poi l'evento B, mentre in altri sistemi avviene prima l'evento B e poi l'evento A. Questo risultato è controintuitivo ma non viola alcun principio, incluso l'ordinamento causale degli eventi. Infatti, per avere una comunicazione causale che stabilisca quale dei due eventi avviene per primo indipendentemente dal sistema di riferimento, sarebbe necessario inviare un segnale più veloce della luce.

SEZ. 8 — DIAGRAMMI DI MINKOWSKI —

Spesso è utile visualizzare in modo intuitivo come appaiono le coordinate di eventi in sistemi di riferimento diversi, come S e S' aventi velocità relativa v . Per farlo possiamo usare i cosiddetti diagrammi di Minkowski.

Gli assi cartesiani delle coordinate $ct' - x'$ misurate nel sistema S' appaiono inclinati nel piano delle coordinate $ct - x$ misurate nel sistema S . Le coordinate nel nuovo sistema di riferimento vanno lette in modo diverso: si tracciano rette parallele ai nuovi assi passanti per il punto di cui si cercano le coordinate e si leggono i valori delle intersezioni con i nuovi assi.

Usando le trasformazioni di Lorentz di Eq. (5.2), l'equazione per l'asse dei tempi $x' = 0$ di S' si legge $xc/v = ct$. L'angolo fra l'asse ct e l'asse ct' vale quindi $\tan \theta = \beta$. Il punto ($x' = 0$, $ct' = 1$) corrisponde al punto ($x = \gamma v/c$, $ct = \gamma$), che dista $\gamma\sqrt{1 + v^2/c^2}$ dall'origine. La lunghezza sul foglio dell'unità di misura del tempo è diversa fra S e S' . Nel diagramma in cui gli assi di S sono perpendicolari vale

$$\frac{\text{unità di } ct'}{\text{unità di } ct} = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}. \quad (8.1)$$

Usando le trasformazioni di Lorentz di Eq. (5.2), l'equazione per l'asse dei tempi $ct' = 0$ di S' si legge $xv/c = ct$. L'angolo fra l'asse x e l'asse x' vale quindi $\tan \theta = \beta$. Il punto ($x' = 1$, $ct' = 0$) corrisponde al punto ($x = \gamma$, $ct = \gamma v/c$), che dista $\gamma\sqrt{1 + v^2/c^2}$ dall'origine. La lunghezza sul foglio dell'unità di misura del tempo è diversa fra S e S' . Nel diagramma in cui gli assi di S sono perpendicolari vale

$$\frac{\text{unità di } x'}{\text{unità di } x} = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}. \quad (8.2)$$

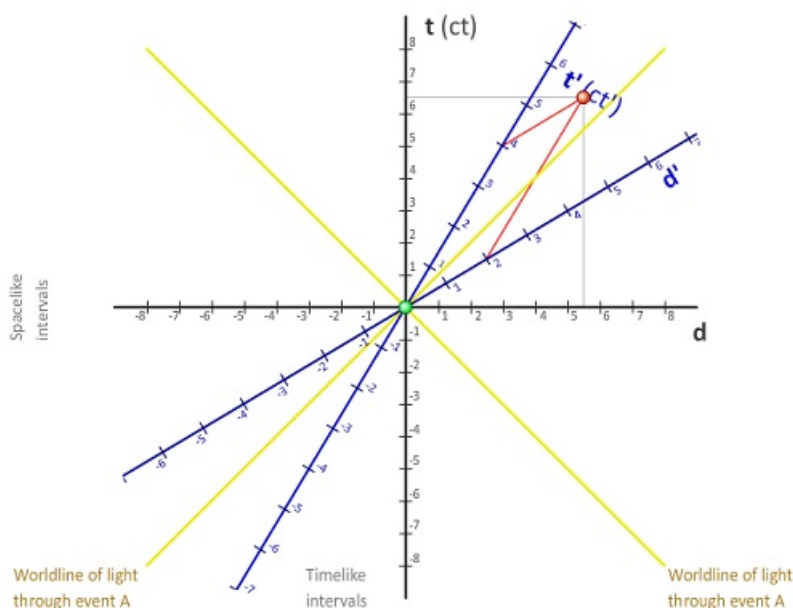


Figura 4: diagramma di Minkowski.

Entrambe gli assi delle coordinate vengono stirati dello stesso fattore e inclinati dello stesso angolo.

Usando i diagrammi di Minkowski è facile vedere come eventi simultanei nel sistema a riposo S , che quindi giacciono sulla retta orizzontale a t costante, non giacciono su una retta a t' costante. Questo significa che gli eventi non sono simultanei in S' ! Analogo discorso si può fare per la contrazione delle lunghezze o dilatazione dei tempi fra due eventi.

Osserviamo che la retta che rappresenta la traiettoria di un raggio luminoso emesso dall'origine resta la stessa in entrambi i sistemi di riferimento: è sempre la bisettrice dell'angolo compreso fra gli assi. Le due bisettrici vengono indicate con il nome di *cono luce*.

Ci si convince facilmente che eventi all'interno del cono luce sono di tipo tempo (ossia con $s^2 > 0$), mentre punti all'esterno di questo sono di tipo spazio ($s^2 < 0$).

Sempre dal diagramma di Minkowski è semplice identificare tre regioni:

- Il futuro assoluto: è la regione all'interno del cono luce a tempi positivi. Questa è la regione di eventi su cui cose che accadono nell'origine spazio-temporale possono avere influenza causale. Per entrambi i sistemi di riferimento considerati questi eventi sono nel futuro (ossia t e t' positivi).
- Il passato assoluto: è la regione all'interno del cono luce a tempi negativi. Questi sono gli eventi che possono aver avuto influenza causale su un evento collocato nell'origine. Anche in questo caso, osservatori in diversi sistemi di riferimento sono comunque d'accordo sul fatto che un evento passato sia passato (ossia t e t' negativi).
- Altrove: è la regione esterna al cono luce. Per osservatori diversi questi eventi possono essere avvenuti a tempi positivi o negativi. Questo non è problematico visto che questi eventi non possono avere avuto influenza causale su un evento collocato nell'origine.

SEZ. 9 — DEFINIZIONI DI QUANTITÀ DI MOTO, ENERGIA E MASSA INVARIANTE

In questa sezione verificheremo che le nuove definizioni relativistiche di quantità di moto e di energia siano ragionevoli. Le definizioni sono considerate valide indipendentemente da queste considerazioni teoriche, poiché vengono regolarmente usate e verificate dagli esperimenti.

9.1 Quantità di moto relativistica

La quantità di moto relativistica è definita come

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad (9.1)$$

che nel limite $v \ll c$ per cui $\gamma \approx 1$ si riduce alla definizione della meccanica Newtoniana.

Immaginiamo ora un esperimento mentale che ci permetta di verificare la ragionevolezza di questa definizione. Consideriamo due palline identiche con la stessa massa che si muovono una verso l'altra con la stessa velocità in modulo. A un certo punto le due palline si urtano come mostrato in Fig. 5. Dalla simmetria del problema e dalla conservazione della quantità di moto, possiamo concludere che le palline dopo l'urto si muovono con lo stesso modulo della velocità che avevano prima dell'urto, ma ora si allontanano l'una dall'altra. Consideriamo ora la stessa

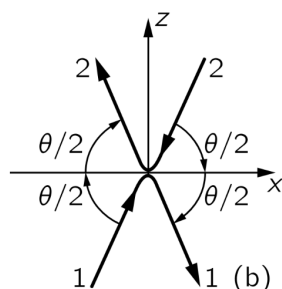


Figura 5

collisione vista dal sistema di riferimento in cui la pallina 1 si muove solo verticalmente, come mostrato nella parte sinistra di Fig. 6. Al contrario, la pallina 2 si muove orizzontalmente con una velocità molto alta. Notiamo che l'angolo α formato dalla traiettoria della pallina 2 con l'asse orizzontale deve essere uguale prima e dopo l'urto a causa della simmetria del problema e della conservazione della quantità di moto. Chiamiamo u la componente orizzontale della velocità della pallina 2 e w la velocità solamente verticale della pallina 1. Consideriamo ora la stessa collisione

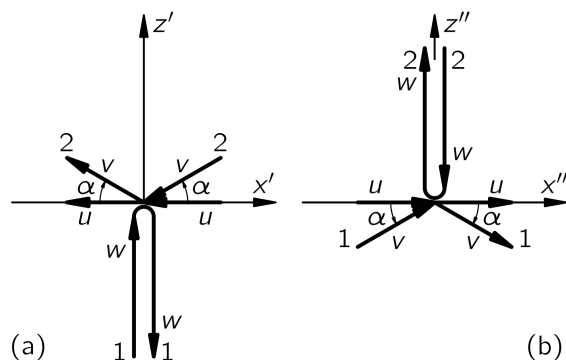


Figura 6

dal sistema di riferimento che si muove a velocità u verso sinistra. La situazione in questo nuovo

sistema di riferimento è mostrata nella parte destra di Fig. 6, dove ora la pallina 2 si muove solo verticalmente con velocità w mentre la pallina 1 ha una componente di velocità orizzontale di modulo u verso destra. Le quantità $u \tan \alpha$ e la quantità w sono legate dalla formula per le trasformazioni di velocità perpendicolari al boost di Eq. (6.2)

$$u \tan \alpha = w \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (9.2)$$

Consideriamo ora il limite in cui $w \ll u$ e usiamo la definizione di quantità di moto relativistica di Eq. (9.1). In questo limite la componente verticale della quantità di moto della pallina 1 che si muove solo verticalmente vale $p_y^1 = mw$ mentre la componente verticale della quantità di moto della pallina 2 che si muove in obliquo vale $p_y^2 = mu \tan \alpha / \sqrt{1 - u^2/c^2}$, dove per entrambe le palline abbiamo trascurato i piccoli contributi delle componenti verticali delle velocità nel calcolo di γ . Usando Eq. (9.2) si vede che in effetti $p_y^1 = p_y^2$ e la quantità di moto è conservata nella collisione. La definizione di quantità di moto relativistica di Eq. (9.1) è quindi compatibile con la conservazione della quantità di moto, cosa che viene continuamente verificata negli esperimenti di fisica delle particelle.

9.2 Energia relativistica

L'energia relativistica è definita come

$$E = \gamma mc^2. \quad (9.3)$$

Consideriamo due palline identiche di massa m che si muovono una contro l'altra, ciascuna con velocità di modulo u . Le due palline si scontrano e rimangono attaccate formando una sola pallina di massa M che per simmetria e per la conservazione della quantità di moto resta ferma. Notiamo che non necessariamente $M = 2m$. Consideriamo ora lo stesso urto nel sistema di riferimento che si muove di velocità relativa u rispetto al primo e in cui una delle due palline di massa m è ferma. La trasformazione delle velocità di Eq. (6.1) ci dice che l'altra pallina di massa m si muove con velocità $v = 2u/(1 + u^2/c^2)$ mentre la pallina di massa M si muove con velocità u dopo l'urto. Per la particella di massa m che si muove si ha

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 + u^2/c^2}{1 - u^2/c^2}. \quad (9.4)$$

Applichiamo ora la conservazione del momento prima e dopo l'urto

$$m \left(\frac{1 + u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} \right) \left(\frac{2u}{1 + u^2/c^2} \right) = \frac{Mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (9.5)$$

da cui si ricava

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (9.6)$$

La massa M non vale quindi $2m$, solo nel limite $u \ll c$ che corrisponde a $\gamma \approx 1$ si recupera il risultato intuitivo di tutti i giorni.

Verifichiamo che con questo valore di M ottenuto dalla conservazione della quantità di moto anche l'energia definita da Eq. (9.3) è conservata. Nel sistema di riferimento inerziale iniziale si verifica immediatamente. Nel sistema di riferimento in cui una massa m è inizialmente ferma si ha

$$m \left(\frac{1 + u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} \right) c^2 + mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (9.7)$$

che si verifica essere un'identità sempre valida dopo aver sostituito Eq. (9.6).

Anche in questo caso la vera prova della validità della definizione di energia relativistica di Eq. (9.3) è lasciata agli esperimenti.

Possiamo provare a espandere Eq. (9.3) in serie di Taylor nel limite non relativistico di $v \ll c$. Si ottiene

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \dots \right) \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (9.8)$$

Nella meccanica Newtoniana il primo termine mc^2 è sempre conservato perché la massa si conserva, mentre il secondo termine $\frac{1}{2}mv^2$ è la familiare definizione di energia cinetica. In meccanica relativistica la definizione di energia cinetica è data da $mc^2(\gamma-1)$. In quest'ultimo caso, l'energia cinetica non è necessariamente conservata perché la massa non è nemmeno conservata.

9.3 Massa invariante

Fino ad ora abbiamo implicitamente assunto che la massa m fosse una proprietà intrinseca di ogni oggetto indipendente dal sistema di riferimento in cui si osserva l'oggetto. Questa assunzione è effettivamente valida. Consideriamo la quantità

$$\begin{aligned} E^2 - p^2c^2 &= \gamma^2m^2c^4 - \gamma^2m^2v^2c^2 \\ &= \gamma^2m^2c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= m^2c^4. \end{aligned} \quad (9.9)$$

La massa m di un oggetto può essere definita come la quantità tale per cui vale che

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \quad (9.10)$$

Come verificheremo più avanti, quest'affermazione è indipendente dal sistema di riferimento che si considera. Per questo motivo la massa m viene detta *massa invariante*.

Un caso particolare è quello degli oggetti per cui $m = 0$, come ad esempio il fotone, per cui vale

$$E = pc. \quad (9.11)$$

Recuperando le definizioni di quantità di moto di Eq. (9.1) e di energia di Eq. (9.3) e si richiede che siano consistenti con Eq. (9.11), si conclude che per un fotone deve essere necessariamente vero che $\beta = 1$, ovvero che qualunque particella priva di massa deve sempre viaggiare alla velocità della luce in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Al contrario, qualunque oggetto con massa non nulla deve necessariamente viaggiare a velocità v minore di c , altrimenti avrebbe energia infinita.

In alcuni vecchi libri di fisica si trova una definizione di massa che può confondere. In questi testi la massa invariante viene anche definita come *massa a riposo* per distinguerla dalla massa in movimento e definita come $m_v = m\gamma$. Si tratta di una semplice notazione che però può creare molta confusione e per questo sconsigliamo caldamente di usarla. Notiamo anche che la famosa formula di relatività ristretta in assoluto più famosa usa questa definizione di massa in movimento

$$E = m_v c^2, \quad (9.12)$$

che è equivalente a Eq. (9.3) ma crea molta confusione quando ci si dimentica che m_v dipende dalla velocità dell'oggetto.

SEZ. 10 — DEFINIZIONE DI FORZA

La definizione di forza relativistica è equivalente a quella della meccanica Newtoniana ed è data da

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (10.1)$$

dove $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$. A differenza del caso Newtoniano, anche nel caso di massa costante, la forza relativistica non è uguale a $m\vec{a}$. Consideriamo ora il caso unidimensionale in cui forza e velocità sono parallele. Per derivare la forma della forza partiamo con il derivare γ

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{va}{c^2(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{\gamma^3 va}{c^2}. \quad (10.2)$$

Se assumiamo m costante nel tempo otteniamo

$$F = \frac{d(\gamma mv)}{dt} = mv \frac{d\gamma}{dt} + m\gamma \frac{dv}{dt} = ma\gamma \left(\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} + 1 \right) = \gamma^3 ma, \quad (10.3)$$

che si riduce al limite non relativistico nel caso $\gamma \approx 1$.

Consideriamo ora la derivata dell'energia rispetto alla posizione

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d(\gamma mc^2)}{dx} = \gamma^3 mv \frac{dv}{dx}. \quad (10.4)$$

Usando il fatto che $v dv/dx = (dx/dt)(dv/dx) = dv/dt = a$ si ottiene che

$$\frac{dE}{dx} = \gamma^3 ma = F, \quad (10.5)$$

che è proprio il teorema dell'energia cinetica che si ottiene anche in meccanica Newtoniana. L'unica differenza è nelle nuove definizioni di forza, energia e quantità di moto.

Partendo dalla definizione di forza di Eq. (10.1), si può dimostrare che nel caso di forza perpendicolare alla direzione del moto vale

$$F = m\gamma a. \quad (10.6)$$

Nel caso più generale, dalla definizione di forza segue che $(F_{\parallel}, F_{\perp}) = (m\gamma^3 a_{\parallel}, m\gamma a_{\perp})$. Si ha quindi che in meccanica relativistica forza e accelerazione non sono sempre allineati e che è più facile accelerare un oggetto nella direzione perpendicolare al suo moto.

SEZ. 11 — QUADRIVETTORI

I quadrivettori sono uno strumento più avanzato e potente per trattare tutti i problemi di relatività ristretta.

11.1 Definizione di quadrivettore

Un quadrivettore è un insieme di 4 quantità (A_0, A_1, A_2, A_3) con la proprietà che sotto un boost esse si trasformano nella stessa maniera in cui le quantità (ct, x, y, z) si trasformano secondo Eq. (5.1). In formule

$$\begin{aligned} A_0 &= \gamma(A'_0 + \beta A'_1), \\ A_1 &= \gamma(A'_1 + \beta A'_0), \\ A_2 &= A'_2 \\ A_3 &= A'_3. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Trasformazioni simili sono valide anche se il boost è lungo \hat{y} o \hat{z} , anziché lungo \hat{x} . In più, le ultime tre componenti del quadrivettore devono poter ruotare come un vettore tridimensionale e per questo sono dette componenti *spaziali*. Al contrario, la prima componente è detta componente *temporale*. Per semplicità di notazione indicheremo i quadrivettori con lettere in stampatello maiuscolo come A , mentre i vettori tridimensionali sono indicati con la solita notazione con la freccia come \vec{a} .

11.2 Linearità e prodotto scalare

I quadrivettori si sommano per componenti come i vettori tridimensionali, se $C = aA + bB$ abbiamo che

$$C = (aA_0 + bB_0, aA_1 + bB_1, aA_2 + bB_2, aA_3 + bB_3). \quad (11.2)$$

Esiste l'equivalente di un prodotto scalare fra quadrivettori ed è definito come

$$A \cdot B \equiv A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 \equiv A_0B_0 - \vec{a}\vec{b}. \quad (11.3)$$

Il prodotto scalare fra due quadrivettori è invariante per le trasformazioni di Lorentz di Eq. (11.1)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 \\ &= [\gamma(A'_0 + \beta A'_1)][\gamma(B'_0 + \beta B'_1)] - [\gamma(A'_1 + \beta A'_0)][\gamma(B'_1 + \beta B'_0)] - A'_2B'_2 - A'_3B'_3 \\ &= \gamma^2 A'_0B'_0(1 - \beta^2) + \gamma^2 A'_0B'_1(\beta - \beta) + \gamma^2 A'_1B'_0(\beta - \beta) - \gamma^2 A'_1B'_1(1 - \beta^2) - A'_2B'_2 - A'_3B'_3 \\ &= A'_0B'_0 - A'_1B'_1 - A'_2B'_2 - A'_3B'_3 \equiv A' \cdot B'. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Questa è una delle proprietà più potenti dei quadrivettori, se si riesce a scrivere il giusto prodotto invariante alcuni problemi complicati diventano estremamente semplici.

Se si considera il prodotto scalare di un quadrivettore con sé stesso si ottiene la *norma quadra* del quadrivettore.

$$A \cdot A = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = A_0^2 - |\vec{a}|^2. \quad (11.5)$$

L'intervallo invariante s^2 è proprio la norma quadra del quadrivettore posizione.

11.3 Quadrivettore velocità

Per un oggetto che si muove nello spazio tridimensionale con velocità \vec{v} , il quadrivettore velocità può essere costruito derivando il quadrivettore posizione (ct, x, y, z) rispetto al tempo proprio τ . Il risultato è un quadrivettore perché τ è un invariante di Lorentz. Nel sistema di riferimento in cui l'oggetto si muove con velocità \vec{v} , dalla dilatazione dei tempi si ha che $t = \gamma\tau$. Da questo ultimo fatto si ottiene che

$$V \equiv \frac{d}{d\tau}(ct, x, y, z) = \frac{d}{dt}(ct, x, y, z) \frac{dt}{d\tau} = (c, v_x, v_y, v_z)\gamma = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (11.6)$$

11.4 Quadrivettore energia e quantità di moto

Il quadrivettore energia e quantità di moto, noto anche come *quadrimpulso*, si costruisce moltiplicando il quadrivettore velocità per la massa invariante m dell'oggetto e per c .

$$P \equiv (\gamma mc^2, \gamma m\vec{v}c) = (E, \vec{p}c). \quad (11.7)$$

Notiamo alcune cose di questo quadrivettore. La sua norma quadra vale

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4\gamma^2(1 - \beta^2) = m^2c^4, \quad (11.8)$$

che è proprio la relazione di Eq. (9.10). Dato che il quadrimpulso è un quadrivettore possiamo facilmente determinare come trasformano energia e quantità di moto usando Eq. (11.1)

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + \beta c p'_x), \\ p_x &= \gamma(p'_x + \beta E'/c), \\ p_y &= p'_y, \\ p_z &= p'_z. \end{aligned} \quad (11.9)$$

11.5 Quadrivettore accelerazione

Il quadrivettore quadriaccelerazione A si costruisce derivando il quadrivettore velocità V rispetto al tempo proprio τ

$$A \equiv \frac{dV}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\gamma c, \gamma \vec{v}) = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} c, \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} \right), \quad (11.10)$$

usando $d\gamma/dt = v\dot{v}/c^2(1 - \beta^2)^{3/2} = \gamma^3 v\dot{v}/c^2$ si ottiene

$$A = (\gamma^4 \beta \dot{v}, \gamma^4 \beta \vec{\beta} \dot{v} + \gamma^2 \vec{a}), \quad (11.11)$$

con $\vec{a} \equiv d\vec{v}/dt$. Nel sistema di riferimento tangenziale in cui l'oggetto è istantaneamente fermo si ha $A = (0, \vec{a})$.

SEZ. 12 — URTI E DECADIMENTI

Per risolvere i problemi di urti in meccanica relativistica si usa la stessa strategia che si usa in meccanica Newtoniana. Si impone la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Usando il linguaggio dei quadrivettori, stiamo chiedendo che il quadrimpulso totale di tutti gli oggetti coinvolti si conservi prima e dopo l'urto:

$$\sum_i P_i = \sum_f P_f. \quad (12.1)$$

Per esempio, consideriamo un urto di una pallina avente massa m che viaggia a velocità relativistica con energia E e urta un'altra pallina di massa m a riposo. Dopo l'urto entrambe le palline si muovono con la stessa energia E' . Come possiamo trovare l'angolo θ che forma ciascuna pallina con la direzione di volo iniziale della pallina prima dell'urto? I quadrimpulsi delle due palline prima dell'urto sono

$$P_1 = (E, pc, 0, 0) \quad \text{e} \quad P_2 = (mc^2, 0, 0, 0), \quad (12.2)$$

con $pc = \sqrt{E^2 - m^2 c^4}$. Dopo l'urto i quadrimpulsi sono

$$P'_1 = (E', p'c \cos \theta', p'c \sin \theta', 0) \quad \text{e} \quad P'_2 = (E', p'c \cos \theta', -p'c \sin \theta', 0), \quad (12.3)$$

con $p'c = \sqrt{E'^2 - m^2 c^4}$ e dove abbiamo già imposto la conservazione della quantità di moto lungo \hat{y} e \hat{z} . La conservazione dell'energia e della quantità di moto lungo \hat{x} ci dicono che

$$E + mc^2 = 2E' \quad \text{e} \quad p = 2p' \cos \theta'. \quad (12.4)$$

I quadrimpulsi dopo l'urto valgono quindi

$$P'_{1,2} = \left(\frac{E + mc^2}{2}, \frac{pc}{2}, \pm \frac{pc}{2} \tan \theta, 0 \right). \quad (12.5)$$

Ma sappiamo da Eq. (11.8) che le norme quadre dei due quadrimpulsi devono essere m^2 da cui segue che

$$m^2 c^4 = \frac{(E + mc^2)^2}{4} - \frac{p^2 c^2}{4} - \frac{p^2 c^2}{4} \tan^2 \theta = \frac{1}{4} \left[(E + mc^2)^2 - \frac{E^2 - m^2 c^2}{\cos^2 \theta} \right], \quad (12.6)$$

e di conseguenza

$$\cos^2 \theta = \frac{E + mc^2}{E + 3mc^2}. \quad (12.7)$$

Nel limite relativistico di $E \gg m$ si ha $\cos \theta \approx 1$ e le due palline sono collineari. Nel limite non relativistico $E \approx m$ si ha $\cos \theta \approx 1/\sqrt{2}$: ciascuna pallina forma un angolo di 45° con la direzione iniziale e formano un angolo di 90° fra di loro, come sappiamo dal risultato classico per le palle da biliardo.

Consideriamo ora una particella di massa M a riposo che decade in due particelle di massa m_1 e m_2 . Possiamo trovare le energie e le quantità di moto delle particelle dopo il decadimento sfruttando la conservazione del quadrimpulso totale. Dalla conservazione della quantità di moto abbiamo

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (12.8)$$

Le due particelle devono necessariamente avere lo stesso modulo della quantità di moto e direzioni opposte $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$. Dalle norme quadre dei quadrimpulsi sappiamo che

$$E_1 = \sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} \quad e \quad E_2 = \sqrt{m_2^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (12.9)$$

Scriviamo ora la conservazione del quadrimpulso e calcoliamo la norma quadra come

$$\begin{aligned} P - P_1 &= P_2, \\ P^2 + P_1^2 - 2P \cdot P_1 &= P_2^2, \\ M^2 c^4 + m_1^2 c^4 - 2M c^2 E_1 &= m_2^2 c^4, \\ E_1 &= \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2. \end{aligned} \quad (12.10)$$

In maniera analoga si ricava l'energia dell'altra particella come

$$E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} c^2. \quad (12.11)$$

Infine si ricava la quantità di moto di entrambe le particelle

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{c} \sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{M^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2}{4M^2} c^4 - m_1^2 c^4} \\ &= c \sqrt{\frac{M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2}{4M^2}}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Notiamo che in entrambe gli esempi non abbiamo mai considerato esplicitamente le velocità degli oggetti coinvolti. In generale, nella risoluzione di problemi di dinamica con urti e decadimenti è consigliabile non usare mai la velocità ma fare conti più semplici e diretti sfruttando le proprietà dei quadrimpulsi.

SEZ. 13 — EFFETTO DOPPLER RELATIVISTICO —

Spesso nei problemi di relatività compare una nuova entità, il fotone, di cui si dice poco o niente e ci si aspetta che lo studente sia in grado di arrangiarsi. Cercheremo in pochi paragrafi di

spiegare degli aspetti qualitativi e quantitativi del tutto per permettervi di fare i problemi. Un fotone è un oggetto di massa $m = 0$ che trasporta dell'energia e della quantità di moto. Dalla relazione Eq. (9.10), si ottiene, facendo il limite di un fotone per $m \rightarrow 0$

$$E^2 = m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2 \Rightarrow E = |\vec{p}|c. \quad (13.1)$$

Notiamo che la relazione $E = |\vec{p}|c$ è anche banalmente soddisfatta da $E = 0 = |\vec{p}|$. Come fa un oggetto di massa nulla a trasportare energia? Possiamo pensare di fare la seguente procedura di limite, non estremamente intuitiva, ma che può dare un'interpretazione semplificata della Fisica più avanzata. Supponiamo di fare il limite simultaneo $v \rightarrow c$ e $m \rightarrow 0$. Evidentemente, se $v \rightarrow c$, allora sarà $\gamma \rightarrow +\infty$. Ci sono un sacco di modi di fare il limite su una coppia di variabili, ma noi ne facciamo uno in particolare, perché fa saltare fuori il risultato interpretativo che ci interessa. In particolare, facciamo il limite $\gamma \rightarrow \infty$, $m \rightarrow 0$, ma con la quantità $\gamma m = \text{costante} \equiv h\nu/c^2$. Il nome che abbiamo dato alla costante non è casuale e fra poco vedremo di che cosa si tratta. In questo modo, quantità di moto ed energia diventano

$$\begin{aligned} E &= \gamma m c^2 = h\nu, \\ p &= \gamma m \beta c = h\nu/c\beta \rightarrow h\nu/c. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Quindi effettivamente è possibile fare una procedura di limite che spieghi, almeno qualitativamente, come possiamo ottenere $E \neq 0$ anche con massa nulla.

Cerchiamo ora di giustificare perché si dice che il fotone è il quanto della luce, ovvero di un'onda elettromagnetica. Possiamo considerare la più semplice fra le onde elettromagnetiche, un'onda piana che si propaga nel vuoto nel verso positivo dell'asse x . I campi elettrico e magnetico di questa onda si scrivono

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{y}, \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{c} E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{z}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Da questi possiamo scrivere il vettore di Poynting

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu_0 c} |E_0|^2 \cos^2(kx - \omega t) \hat{x}. \quad (13.4)$$

Il vettore di Poynting va interpretato come la potenza trasportata dall'onda elettromagnetica per unità di superficie incidente A

$$|\vec{S}| \equiv \frac{1}{A} \frac{dE}{dt}. \quad (13.5)$$

Questa energia non è portata in modo continuo ma da un numero grandissimo di particelle, chiamate fotoni. In realtà, quest'onda trasporta anche quantità di moto. Nel nostro caso è semplice trovare il modulo della quantità di moto di un singolo fotone, perché è sufficiente usare $E = |\vec{p}|c$. In questo caso i fotoni vanno tutti nella stessa direzione.

$$|\vec{S}| = \frac{1}{A} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} c \Rightarrow \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{|\vec{S}|}{c}. \quad (13.6)$$

La derivata rispetto al tempo della quantità di moto è la forza, che se viene divisa per un'area dà una pressione, chiamata pressione di radiazione

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{c} |\vec{S}|. \quad (13.7)$$

Fate attenzione all'utilizzo improprio di questa formula. Per esempio, se la luce incide su uno specchio, la pressione esercitata sullo specchio è due volte il valore trovato di Eq. (13.7).

La meccanica quantistica ci dice inoltre che ogni fotone trasporta un'energia e una quantità di moto che incredibilmente non dipendono dall'intensità del campo \vec{E}_0 ma che dipendono solamente dalla frequenza dell'onda. In particolare, si ha $E = h\nu = \hbar\omega$, dove h è la costante di Planck. Dobbiamo assumere questa proprietà del fotone senza porci troppe domande. Dato che per un'onda nel vuoto si ha $\lambda\nu = c$, possiamo legare il numero d'onda angolare $k = 2\pi/\lambda$ alla quantità di moto

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi h\nu}{ch} = \frac{2\pi}{ch} E = \frac{2\pi}{h} p = \frac{1}{h} p \Rightarrow p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}. \quad (13.8)$$

Tutto ciò che abbiamo dimostrato finora non vale solo per le onde piane, ma in generale per tutte le onde elettromagnetiche.

Dato che quando trattiamo il fotone abbiamo a che fare con delle onde elettromagnetiche, ci aspettiamo di osservare l'effetto Doppler. Il metodo più semplice per ottenere le corrette relazioni che descrivono quantitativamente l'effetto Doppler relativistico è considerare la luce come composta di fotoni e sfruttare il fatto che il quadrimpulso è un quadrivettore. Ci sono due casi notevoli che vale la pena studiare. Il caso in cui ci stiamo muovendo parallelamente al fotone e il caso in cui ci stiamo muovendo perpendicolarmente allo stesso.

Formalizziamo la questione dicendo che in un certo sistema di riferimento S esiste una sorgente di luce monocromatica di frequenza ν che emette luce lungo \hat{x} . Il quadrivettore P corrispondente sarà

$$P = (h\nu, h\nu, 0, 0) = (\hbar\omega, \hbar\omega, 0, 0) = \left(\frac{\hbar c}{\lambda}, \frac{\hbar c}{\lambda}, 0, 0 \right). \quad (13.9)$$

A questo punto possiamo fare un boost di β lungo \hat{x} e vedere come cambia la frequenza della luce che stiamo osservando

$$P' = (h\nu\gamma(1 - \beta), h\nu\gamma(1 - \beta), 0, 0) = \gamma(1 - \beta) (h\nu, h\nu, 0, 0) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} (h\nu, h\nu, 0, 0). \quad (13.10)$$

Per cui la nuova frequenza è semplicemente

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \quad (13.11)$$

per $\beta \ll 1$ si riottiene la forma classica dell'effetto.

Oltre a questo semplice effetto quantitativo, la parte caratteristica dell'effetto Doppler relativistico è che esiste anche l'effetto Doppler trasverso. In meccanica Newtoniana, per un'onda che si propaga in un mezzo *fermo*, se l'osservatore si muove perpendicolarmente alla direzione di propagazione non vede alcun effetto. Al contrario in meccanica relativistica, possiamo trasformare il quadrimpulso con un boost lungo \hat{y}

$$\begin{aligned} P &= (h\nu, h\nu, 0, 0), \\ P' &= (h\nu\gamma, h\nu\gamma, -h\nu\gamma\beta, 0). \end{aligned} \quad (13.12)$$

Per cui si ha un cambio di frequenza e stavolta la nuova frequenza vale

$$\nu' = \gamma\nu. \quad (13.13)$$

Questo risultato può essere semplicemente interpretato come una dilatazione degli intervalli temporali fra l'arrivo all'osservatore di un picco d'onda e il successivo picco d'onda. La dilatazione di questi intervalli temporali viene vista dal sistema di riferimento della sorgente.

SEZ. 14 — UNITÀ DI MISURA IN FISICA DELLE PARTICELLE

Come detto diverse volte nelle sezioni precedenti, la meccanica relativistica viene continuamente testata con gli acceleratori di particelle. La fisica delle particelle studia i mattoncini di cui è fatta la materia, come protoni, elettroni e neutroni. Per produrre altre particelle che non sono presenti in natura si sfrutta la meccanica relativistica: si fanno collidere particelle con massa piccola come elettroni e protoni e con tanta energia e si producono nuove particelle con grande massa come i bosoni W , Z e di Higgs.

Proviamo a calcolare l'energia a riposo di un protone

$$E_p = m_p c^2 = (1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 1,5 \times 10^{-10} \text{ J.} \quad (14.1)$$

In fisica delle particelle si usa una diversa unità di misura per l'energia. Normalmente per accelerare una particella con carica unitaria e come un elettrone o un protone, la si fa passare attraverso una differenza di potenziale misurata in V . L'*elettronvolt* si definisce come l'energia acquisita da un elettrone che attraversa una differenza di potenziale di 1 V

$$1 \text{ eV} \equiv (1,602 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J.} \quad (14.2)$$

Convertendo, l'energia a riposo di un protone vale

$$E_p = 938 \text{ MeV,} \quad (14.3)$$

mentre l'energia a riposo di un elettrone vale

$$E_e = 511 \text{ KeV.} \quad (14.4)$$

Dato che l'energia a riposo di una particella vale $E_0 = mc^2$ spesso si usa il valore dell'energia a riposo diviso c^2 per indicare la massa della particella. Per esempio, si dice che la massa di un protone vale

$$m_p = 938 \text{ MeV}/c^2. \quad (14.5)$$

I fisici delle particelle sono pigri e capita molto spesso che si dimentichino di indicare potenze di c quando parlano. Formalmente la massa si misura in eV/c^2 e la quantità di moto si misura in eV/c , ma molto spesso capita che vengano indicate con eV .

In generale, mentre si fanno i conti per risolvere un problema, può capitare di perdersi qualche fattore c in giro. Anzi, a volte, per velocizzare i conti, si decide convenzionalmente di imporre $c = 1$. In ogni caso, alla fine dei conti si può sempre recuperare la giusta potenza di c a fattore facendo una rapida analisi dimensionale.

— ESERCIZI —

Problema E.1 (Paradosso dei tre gemelli). Consideriamo tre gemelli A , B e C . Ciascuno di loro ha un orologio identico a quello dei suoi gemelli. Nel sistema di riferimento di A , B si muove con velocità v verso destra. Quando A e B si trovano nello stesso punto, sincronizzano i loro orologi a 0. Nel frattempo, sempre nel sistema di riferimento di A , C si sta muovendo con velocità v verso sinistra. Quando B e C si passano vicino, C sincronizza il proprio orologio a quello di B , in modo che i tempi letti siano identici. Infine, A e C si passano vicino e in quel momento i due orologi di A e C segnano i tempi T_A e T_C , rispettivamente.

- Lavorando nel sistema di riferimento di A si dimostri che $T_A = \gamma T_C$.
- Lavorando nel sistema di riferimento di B si dimostri che $T_A = \gamma T_C$.
- Lavorando nel sistema di riferimento di C si dimostri che $T_A = \gamma T_C$.

Problema E.2 (Esperimento di Fizeau). Consideriamo l'esperimento di interferenza in figura 7. Una sorgente di luce coerente emette luce di lunghezza d'onda λ che segue il percorso di specchi indicato in figura. Dentro al tubo vi è un liquido di indice di rifrazione n che si muove a velocità costante v rispetto alle pareti del tubo. Si supponga che gli unici tratti che contribuiscono ad accumulare differenza di cammino ottico siano quelli orizzontali in cui la luce si propaga dentro al fluido. Si supponga anche che le sezioni orizzontali del tubo siano lunghe L .

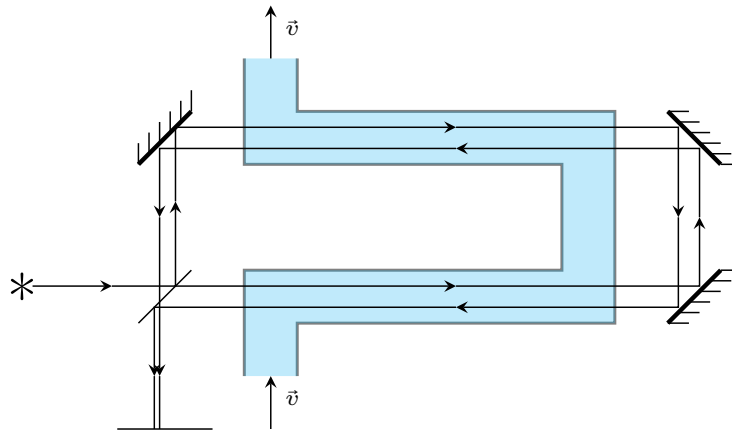


Figura 7: esperimento di Fizeau.

Si mostri che la differenza di fase $\Delta\phi$ fra i due raggi che seguono i due percorsi diversi vale

$$\Delta\phi = 8\pi \frac{L}{\lambda} c \frac{un^2}{c^2 - n^2u^2}.$$

Problema E.3 (Effetto Compton). Si consideri l'urto elastico di un fotone di frequenza ν contro un elettrone di massa m_e ⁴, inizialmente fermo nel sistema S . Il fotone viene emesso con un angolo ϕ rispetto alla direzione di volo iniziale. Si calcoli la differenza $\lambda' - \lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda del fotone prima dell'urto e λ' è la lunghezza d'onda del fotone dopo l'urto.

Problema E.4 (Decadimento del π^0). Il π^0 (si legge *pione zero*) è un mesone carico con una massa di circa $m_\pi = 135 \text{ MeV}/c^2$. Si assuma che nel riferimento in cui il π^0 è a riposo, la probabilità di decadimento in una certa direzione sia uniforme, ovvero che sia ugualmente probabile decadere in una qualsiasi direzione. Nel riferimento del laboratorio il π^0 si muove con una velocità $v_\pi = \beta c$ lungo l'asse x .

⁴Nel problema non si richiedono calcoli numerici, ma il lettore può essere interessato a conoscerne il valore di $m_e = 511 \text{ keV}$. Inoltre, può essere comodo ricordare che $hc = 197 \text{ MeV fm}$.

- Si calcoli qual è l'angolo minimo possibile fra i due fotoni nel riferimento del laboratorio.
- Si ricavi la distribuzione in energia dei prodotti di decadimento nel sistema di riferimento del laboratorio, ovvero la distribuzione di probabilità che uno dei due fotoni abbia una certa energia.⁵
- Si calcoli la distribuzione di probabilità del numero di eventi in funzione dell'angolo α compreso fra i due fotoni nel riferimento del laboratorio.⁶

Problema E.5 (Decadimento del mesone D^0). Il mesone D^0 è una particella neutra studiata dall'esperimento LHCb al CERN, avente una massa di circa $M_D = 2000 \text{ MeV}/c^2$ e una vita media di circa $\tau_D = 0,4 \text{ ps}$. Dopo essere stato prodotto nella collisione fra i protoni, entrambi di energia 7 TeV , nel sistema di riferimento del laboratorio il D^0 ha un impulso tipico molto maggiore della sua massa. Per semplicità, assumiamo che il D^0 venga prodotto nell'origine degli assi, con quantità di moto $|\vec{p}_D| = p_D = 20 \text{ GeV}$ diretta lungo l'asse \hat{x} . Il D^0 viaggia per una certa distanza e , dopo un certo tempo, può decadere in due particelle cariche, un π^+ e un π^- . Fatta eccezione per la carica, il π^+ e il π^- sono due particelle identiche e hanno entrambe massa pari a $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$. Per semplicità, assumiamo che questo decadimento avvenga dopo che è trascorsa esattamente una vita media τ_D nel sistema di riferimento del D^0 . Nel sistema di riferimento del D^0 il decadimento è isotropo, ovvero il π^+ e il π^- possono essere prodotti con uguale probabilità in ogni direzione.

- Trovare quanta distanza L percorre il D^0 nel sistema del laboratorio, dal momento in cui è prodotto a quello in cui decade.
- Trovare quanto valgono l'energia E^* , il modulo della quantità di moto p^* e il boost β^* del π^+ e del π^- nel sistema di riferimento del D^0 .

Essendo neutro, il mesone D^0 non può essere rivelato dall'esperimento LHCb e la sua presenza viene stabilita vedendo le due particelle cariche in cui decade. Purtroppo, nella collisione fra i due protoni vengono prodotte decine di particelle cariche che hanno traiettorie molto simili a quelle del π^+ e del π^- del D^0 . Queste ultime due particelle possono però essere individuate perché, a differenza di tutte le altre particelle cariche, le loro traiettorie non puntano esattamente al punto in cui i due protoni si sono scontrati. Vediamo come calcolare questa differenza di traiettorie.

- Nel sistema di riferimento del laboratorio le direzioni di volo dei π sono diverse da quelle del sistema di riferimento del D^0 . Trovare l'angolo θ che un π forma con l'asse \hat{x} nel sistema del laboratorio in funzione dello stesso angolo θ^* nel sistema di riferimento del D^0 .
- Per quale condizione sul boost β del D^0 si ha che nel laboratorio un pione non può mai essere emesso lungo la direzione negativa dell'asse \hat{x} ?
- Assumendo valida la condizione del punto precedente, quanto vale l'angolo massimo θ_{max} che un pione può formare con l'asse \hat{x} nel sistema del laboratorio?
- Si consideri ora la traiettoria di un pione emesso con angolo $\theta^* = \pi/2$ nel sistema di riferimento del D^0 . Quanto vale la distanza minima b fra il prolungamento all'indietro della sua traiettoria e l'origine degli assi? Questa quantità è nota anche come parametro di impatto e viene utilizzata per individuare i π provenienti dal D^0 .

⁵Ovviamente l'energia del fotone può assumere solo un ristretto intervallo di valori. La domanda del testo è: se i valori che può assumere l'energia sono compresi fra E_{max} ed E_{min} , questi valori sono tutti uguali oppure c'è qualche valore particolare per cui si ha un massimo/minimo di probabilità?

⁶Notare che nel riferimento del centro di massa tutte le coppie di fotoni hanno angolo di apertura $\alpha = \pi$. Nel riferimento del laboratorio la cosa cambia e non di poco.

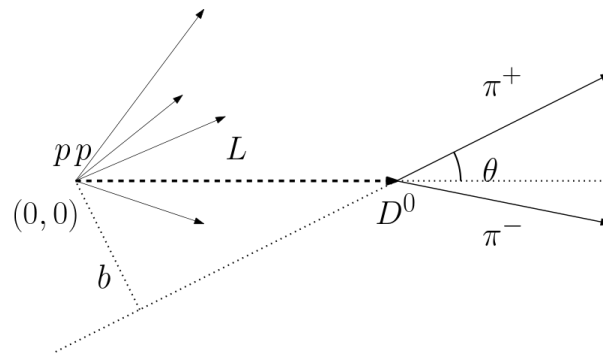


Figura 8: Schema del decadimento del D^0 .

Problema E.6 (Razzo relativistico). Si consideri un razzo di massa iniziale M . Poniamo il razzo nel vuoto per semplicità. Sia S un sistema di riferimento inerziale e si posizioni il razzo al centro del riferimento all'istante iniziale. Il razzo perde massa per unità di tempo ad un tasso costante Γ^7 , sparandola indietro ad una velocità relativa costante $u = \beta_0 c^8$. Si calcoli la velocità del razzo quando esso ha una massa m .

Problema E.7 (Vela solare). Consideriamo un satellite con un grosso specchio piano in grado di riflettere la luce solare, orientabile a piacimento. Lo specchio ha area A . Il satellite, specchio incluso, ha massa $m \ll M_\odot$ dove M_\odot è la massa del Sole. Inizialmente il satellite si trova a una distanza r_0 dal Sole, su un'orbita circolare. Trascurare la presenza degli altri pianeti. Ad un certo punto il satellite apre la vela solare, facendo in modo da tenere sempre lo specchio rivolto esattamente verso il Sole.

Il Sole ha un'intensità I_0 , misurata alla distanza r_0 , definita come potenza per unità di area.

- Trovare il valore minimo di A che permette al satellite di abbandonare il sistema solare.

Mettendo dei dati numerici, ci si può accorgere che si raggiungono rapidamente relativistiche una volta abbandonato il sistema solare. Per questo motivo non è più possibile che la forza esercitata dalla pressione di radiazione dipenda solo dalla posizione del satellite e non dalla sua velocità.

Consideriamo quindi una sorgente monocromatica di luce che emette fotoni di frequenza fissa ν nel suo riferimento. La sorgente emette una quantità n di fotoni per unità di tempo nel suo riferimento. Consideriamo uno specchio di massa m , tale che $h\nu \ll mc^2$ ⁹ rivolto verso la sorgente che si allontana dalla stessa ad una velocità v .

- Trovare l'accelerazione dello specchio nel riferimento della sorgente in funzione di β, n, ν, m (assumere il sole come sorgente monocromatica);
- Usare il risultato appena trovato per esprimere la forza di spinta dovuta ai fotoni agente sul satellite in funzione della sua distanza dal Sole r e della sua velocità v (e degli altri parametri rilevanti).

⁷Attenzione: questo problema è volutamente poco guidato. Questa affermazione è *ambigua*, in quanto non ho detto tempo misurato da *chi*. Sta al lettore capire con il suo senso fisico qual è il tempo sensato rispetto a cui si deriva. Prima di immergersi in conti, consiglio di controllare se l'istinto ha funzionato bene o meno leggendo la prima riga della soluzione.

⁸Notare bene la parola relativa. Il lettore si renda conto dei problemi che derivano da questa frase.

⁹Si diano tutti i risultati al primo ordine in $\frac{h\nu}{mc^2}$.