

Meccanica Avanzata

Guglielmo Di Grazia,* Mario Meo†

3 Febbraio 2025

Sommario

Definizione e cinematica del corpo rigido, angoli di Eulero. Gradi di libertà, scelta di sistema di riferimento e dinamica del corpo rigido nello spazio. Ripasso teoremi di König, tensore d'inerzia, assi principali, equazioni di Eulero. Equazioni del moto con gli angoli di Eulero. Trottola simmetrica libera e trottola simmetrica pesante. Invarianti adiabatici, moti quasiperiodici, evoluzione di quantità medie. Svolgimento di problemi tratti da gare internazionali.

*guglielmo.digrazia@sns.it

†mario.meo@sns.it

— INDICE —

1	Meccanica del Corpo Rigido	3
1.1	Definizione e numero di gradi di libertà	3
1.2	Cinematica del corpo rigido	4
1.2.1	Atto di moto di un solido libero	4
1.2.2	Formula di Poisson	5
1.2.3	Considerazioni sull'atto di moto rigido	9
1.2.4	Angoli di Eulero	10
1.3	Dinamica del Corpo Rigido	11
1.3.1	Ripasso Teoremi di König, tensore d'inerzia e Teorema di Huygens-Steiner	11
1.3.2	Problema del moto	14
1.3.3	Assi principali ed Equazioni di Eulero	15
1.4	Trottole	16
1.4.1	Trottola simmetrica libera	16
1.4.2	Trottola simmetrica pesante	18
2	Alcuni esempi svolti	24
2.1	Palla su giradischi	24
2.2	Variazioni sul tema - APhO 2023/2C	25
2.3	Sbarretta e campo magnetico - IdPhO 2020/1	27
3	Invarianti Adiabatici	30
3.1	Primi esempi	30
3.1.1	Esempio 1: pallina tra due muri	30
3.1.2	Esempio 2: pendolo di lunghezza decrescente	31
3.2	Integrale di Poincaré	33
	Esercizi	35

SEZ. 1 — MECCANICA DEL CORPO RIGIDO —

1.1 Definizione e numero di gradi di libertà

In questa sezione introduciamo le caratteristiche di un nuovo modello di descrizione degli enti fisici: il corpo rigido. Il primo modello col quale si studia la dinamica degli enti fisici (primo in ordine di complessità di caratterizzazione della relativa dinamica) è il punto materiale, cioè un oggetto di dimensione trascurabile rispetto alle scale di lunghezza caratteristiche del problema, e la cui struttura interna non è rilevante per la descrizione dei fenomeni considerati. In questa casistica è sufficiente, ai fini della trattazione, approssimare tali oggetti a dei punti e studiare delle equazioni per una sola legge oraria $\vec{r}(t)$ che descriva la posizione di ciascuno.

Tuttavia, non sempre è possibile fare questa approssimazione, e anzi in molti casi la fisica di un processo dipende dall'estensione finita degli oggetti coinvolti. Per affrontare questo problema e pervenire ad una più accurata descrizione della realtà fisica, possiamo aumentare il grado di complessità del nostro modello e considerare un corpo esteso come un insieme di tanti punti materiali (infiniti nel limite in cui ciascuno diviene puntiforme), e studiare come evolve nel tempo la posizione di ciascuno. In questa sezione ci occuperemo di un tipo particolare di tali sistemi:

def Si definisce *corpo rigido* un sistema di punti materiali la cui mutua distanza è invariabile (costante nel tempo). In dettaglio, scelta una coppia qualsiasi (P, P') di punti materiali che compongono il corpo vale, ad un qualsiasi istante di tempo t

$$\frac{d}{dt} |\vec{r}_P(t) - \vec{r}_{P'}(t)| = 0$$

essendo $\vec{r}_P(t)$ ed $\vec{r}_{P'}(t)$ i vettori posizione di ciascuno dei due punti.

Un corpo di questo tipo è assolutamente indeformabile e la posizione del suo centro di massa permane inalterata rispetto ai punti materiali del sistema.

Per studiare il moto di un corpo rigido non è più sufficiente esibire una singola $\vec{r}(t)$ (o, meglio, tre leggi orarie $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$), perchè essa non dà informazioni sul moto di ciascun punto componente l'oggetto. Ci poniamo allora il problema di quante leggi orarie sia necessario fornire per descrivere completamente il moto di un corpo rigido, cioè di quanti siano i gradi di libertà ad esso associati. Se stessimo trattando un sistema di N particelle libere, avremmo $3N$ gradi di libertà, in quanto per ciascuna particella dovremmo specificare le tre coordinate cartesiane (o altre tre coordinate, a seconda del sistema scelto) in funzione del tempo. La condizione sulla distanza tra ogni coppia di punti dell'oggetto riduce il numero di gradi di libertà, in particolare vale il seguente risultato:

A un corpo rigido in tre dimensioni sono associati 6 gradi di libertà.

Dimostrazione. La dimostrazione si può ottenere in maniera costruttiva, vedendo il corpo rigido come fatto da $N \geq 3$ punti materiali. Preso il primo punto, ad esso sono associati tre gradi di libertà. Aggiungendone un secondo, i gradi di libertà diventano cinque, perchè ai tre nuovi ne va sottratto uno per via della condizione sulla distanza tra i due. Aggiungendo il terzo, otteniamo un ulteriore grado di libertà (tre meno i due persi per la rigidità del triangolo). Da ora in poi, aggiungendo punti, non guadagniamo più gradi di libertà, perchè ogni nuovo punto dovrà trovarsi sull'intersezione di (almeno) tre sfere, e tale punto, se esiste, è unico (in realtà i punti possono anche essere due, ma, non potendo il punto materiale muoversi in maniera continua dall'uno all'altro, contano come un solo punto). \square

Nel seguito ci occuperemo di caratterizzare la scelta delle variabili cinematiche rappresentanti questi gradi di libertà in favore della semplificazione del relativo problema del moto.

1.2 Cinematica del corpo rigido

Consideriamo un primo sistema di riferimento S *fisso* ("immobile") chiamato *sistema del laboratorio*, di origine O e base di versori $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, esistono due modi particolarmente convenienti per descrivere il moto del solido tramite grandezze cinematiche riferite a questo sistema:

§ 1.2.1. **Atto di moto di un solido libero.** — Un primo modo, ossia una prima interpretazione dei sei gradi di libertà è la seguente: la posizione nello spazio di un corpo rigido è completamente determinata dalla posizione di un suo punto P (tre gradi di libertà), dalla scelta di un asse r passante attraverso P (due gradi di libertà, pensiamo ad esempio alle coordinate sferiche) e dall'angolo di cui il corpo è ruotato attorno a tale asse (un grado). Tale descrizione è equivalente allo studio del moto relativo al sistema S di un secondo sistema di riferimento S' *solidale* con il corpo rigido (vincolato al solido e partecipe di tutti i movimenti di quest'ultimo). Per far fronte alle successive discussioni nominiamo O' l'origine di questo riferimento e $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ la rispettiva base di versori. Nell'ambito di questa interpretazione vale il seguente risultato:

Teorema di Chasles

Consideriamo un corpo rigido che si muove di un moto arbitrariamente complicato. Sia P un punto del corpo. Ad ogni istante temporale il moto del corpo può essere scritto come somma di un moto di traslazione di P rispetto all'origine del sistema di riferimento, e una rotazione intorno ad un qualche asse (che in generale può cambiare nel tempo) passante per P .

Questo teorema permette di definire, associato al moto di un corpo rigido, il vettore *velocità angolare* $\vec{\omega}$ tale che, se P e Q sono due punti del corpo rigido, \vec{v}_P e \vec{v}_Q le loro velocità istantanee, e \vec{r}_P , \vec{r}_Q i vettori posizione rispettivamente di P e Q , abbiamo

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P)$$

Questa relazione è nota come **atto di moto** e descrive il campo di velocità del solido ad ogni istante di tempo.

Un modo elegante per arrivare a questa relazione è il seguente:

Dimostrazione. Siano dati nuovamente due sistemi S ed S' , indichiamo con \vec{R} il vettore posizione dell'origine O' di S' rispetto all'origine di S . Nel sistema S , la posizione di un generico punto P può essere espressa dal vettore

$$\vec{r} \equiv (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{R}$$

In S' denotiamo con \vec{r}' il vettore che individua la posizione di P rispetto all'origine. Potrebbe sembrare ovvio identificare questo vettore con il vettore $\vec{r} - \vec{R}$. In effetti tale identificazione è vera nei limiti di validità delle seguenti due ipotesi generali della meccanica classica:

- i) lo spazio è *assoluto*, cioè è indipendente dal sistema di riferimento, cosicché gli osservatori di S e S' , usando gli stessi campioni di lunghezza, trovino i medesimi risultati misurando le distanze richieste per caratterizzare i suddetti vettori;
- ii) il tempo è *assoluto*, quindi osservatori collocati in sistemi di riferimento diversi, che usino gli stessi campioni di tempo, misurano lo stesso valore per gli intervalli temporali Δt e $\Delta t'$, relativi alla durata di un fenomeno da entrambi osservato.

Valutiamo in queste ipotesi la variazione di un generico vettore $\vec{w}(t)$ dipendente dal tempo osservata nei due sistemi di riferimento nello stesso intervallo di tempo ($\Delta t = \Delta t'$).

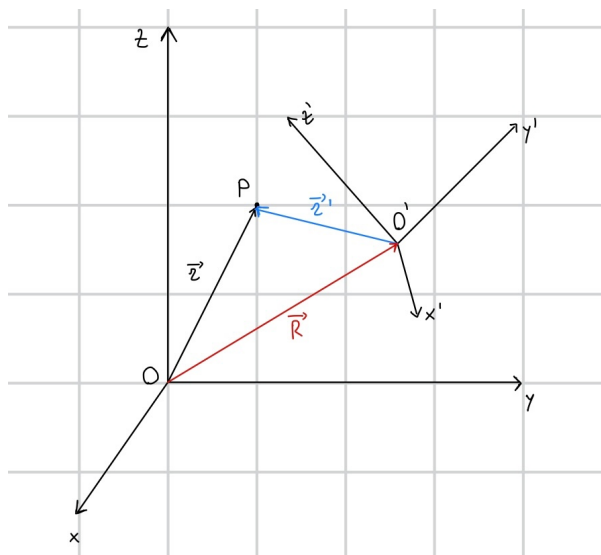


Figura 1: Vettori posizione di uno stesso punto P, in due sistemi di riferimento in moto relativo

Consideriamo le rappresentazioni cartesiane esplicite del vettore nei due sistemi di riferimento:

$$\vec{w} = w_x \hat{i} + w_y \hat{j} + w_z \hat{k} = w'_x \hat{i}' + w'_y \hat{j}' + w'_z \hat{k}'$$

Valutiamo la derivata di \vec{w} rispetto al tempo in S a partire dalla sua scomposizione nella base di S'

$$\left(\frac{d\vec{w}}{dt} \right)_S = \left(\frac{dw'_x}{dt} \right)_S \hat{i}' + w'_x \left(\frac{d\hat{i}'}{dt} \right)_S + \left(\frac{dw'_y}{dt} \right)_S \hat{j}' + w'_y \left(\frac{d\hat{j}'}{dt} \right)_S + \left(\frac{dw'_z}{dt} \right)_S \hat{k}' + w'_z \left(\frac{d\hat{k}'}{dt} \right)_S$$

Questo perchè rispetto al sistema di riferimento S i versori del riferimento S' , in generale, cambiano direzione nel tempo. Dall'ipotesi di tempo assoluto

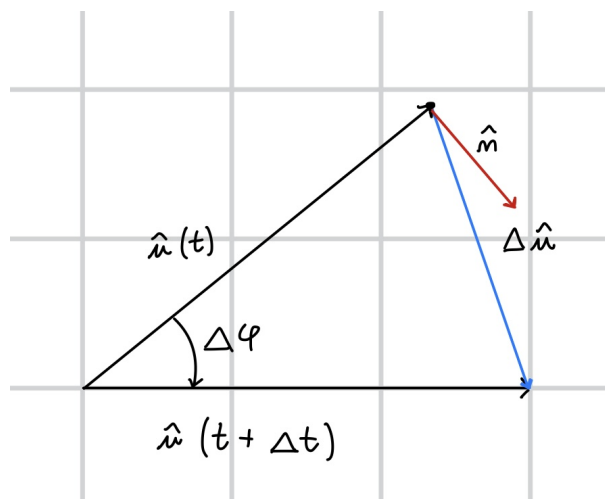
$$\left(\frac{dw'_x}{dt} \right)_S = \left(\frac{dw'_x}{dt} \right)_{S'}$$

e analogamente per ciascun termine di derivata delle componenti. Possiamo quindi individuare dalla somma dei corrispondenti termini, la derivata rispetto al tempo di \vec{w} calcolata in S' : $\left(\frac{d\vec{w}}{dt} \right)_{S'}$. Per trattare anche i termini restanti dobbiamo capire come fare le derivate dei versori

§ 1.2.2. Formula di Poisson. — Osserviamo anzitutto che la derivata di un versore è ortogonale al versore stesso:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) \cdot \hat{u}(t) &= |\hat{u}|^2 = 1 \\ \frac{d|\hat{u}|^2}{dt} &= \frac{d[\hat{u}(t) \cdot \hat{u}(t)]}{dt} = 2 \frac{d\hat{u}(t)}{dt} \cdot \hat{u}(t) = 0 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'espressione esplicita di tale derivata.



La figura mostra i versori $\hat{u}(t)$ e $\hat{u}(t + \Delta t)$ e la loro differenza $\Delta \hat{u} = \hat{u}(t + \Delta t) - \hat{u}(t)$; poichè il loro modulo è costante, essi saranno semplicemente ruotati l'uno rispetto all'altro. Sia $\Delta \varphi$ l'angolo di rotazione (corrispondente a un Δt positivo). Escludendo situazioni di discontinuità, per $\Delta t \rightarrow 0$ anche $\Delta \varphi \rightarrow 0$, e quindi $\Delta \hat{u}$ (e con esso $\frac{\Delta \hat{u}}{\Delta t}$) tende ad assumere la direzione perpendicolare a $\hat{u}(t)$ e il verso dalla parte in cui ruota \hat{u} (cioè la direzione ed il verso di \hat{n}). Per quanto riguarda il modulo, osserviamo in figura che $|\Delta \hat{u}| = 2|\hat{u}| \sin\left(\frac{\Delta \varphi}{2}\right)$, e quindi (essendo $|\hat{u}| = 1$):

$$\frac{|\Delta \hat{u}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta \hat{u}|}{\Delta \varphi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

Passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ e ricordando che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ si ha

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \hat{u}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Dunque

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{n}$$

ove \hat{n} è il versore che giace sul piano contenente $\hat{u}(t)$ e $\hat{u}(t + dt)$, perpendicolare a \hat{u} , dalla parte di $\hat{u}(t + dt)$, e $\frac{d\varphi}{dt}$ è una quantità positiva. Si può dare una espressione equivalente di questa derivata introducendo un opportuno vettore che caratterizza la rotazione del versore \hat{u} . Definiamo il vettore $\vec{\omega}$, avente modulo $\frac{d\varphi}{dt}$, direzione perpendicolare al piano contenente $\hat{u}(t)$ e $\hat{u}(t + dt)$ e verso tale da vedere la rotazione infinitesima di $\hat{u}(t)$ verso $\hat{u}(t + dt)$ come antioraria. Per la definizione data, il versore di $\vec{\omega}$ è uguale al prodotto vettoriale di \hat{u} e \hat{n} .

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{u}_\omega \quad \hat{u}_\omega = \hat{u} \times \hat{n}$$

I versori $(\hat{u}, \hat{n}, \hat{u}_\omega)$ costituiscono una terna ortogonale destra. Di conseguenza, $\hat{u}_\omega \times \hat{u} = \hat{n}$. Si ha quindi:

$$\vec{\omega} \times \hat{u} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \hat{u}_\omega \times \hat{u} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \hat{n} = \frac{d\hat{u}}{dt}$$

Concludiamo

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}$$

In base a questo risultato valgono le tre relazioni:

$$\left(\frac{d\hat{i}'(t)}{dt}\right)_S = \vec{\omega}_1(t) \times \hat{i}'(t)$$

$$\left(\frac{d\hat{j}'(t)}{dt}\right)_S = \bar{\omega}_2(t) \times \hat{j}'(t)$$

$$\left(\frac{d\hat{k}'(t)}{dt}\right)_S = \bar{\omega}_3(t) \times \hat{k}'(t)$$

Vogliamo adesso dimostrare che per queste vale $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3$ (chiameremo $\bar{\omega}$ questo vettore) ossia vale la **formula di Poisson**

$$\left(\frac{d\hat{u}_i(t)}{dt}\right)_S = \bar{\omega}(t) \times \hat{u}_i(t)$$

ove, per rendere più compatta la notazione, utilizziamo i simboli $\hat{u}_i = \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ per $i = 1, 2, 3$ rispettivamente. Per semplicità indichiamo, inoltre, con \bar{w}_i le corrispondenti derivate rispetto al tempo (in S). Essendo \bar{w}_i perpendicolare ad \hat{u}_i , sono in generale diverse da zero le sole componenti di \bar{w}_i lungo \hat{u}_l , con $l \neq i$:

Posto

$$w_{il} = \left(\frac{d\hat{u}_i}{dt}\right)_S \cdot \hat{u}_l$$

segue, per $i = 1$:

$$\left(\frac{d\hat{u}_1}{dt}\right)_S = w_{12}\hat{u}_2 + w_{13}\hat{u}_3$$

e simili per gli altri valori di i . Essendo, data l'ortogonalità della base, ad ogni istante, $\hat{u}_i \cdot \hat{u}_l = 0$ per $l \neq i$, derivando rispetto al tempo, si ha

$$\left(\frac{d\hat{u}_i}{dt}\right)_S \cdot \hat{u}_l + \left(\frac{d\hat{u}_l}{dt}\right)_S \cdot \hat{u}_i = 0$$

e quindi, per ognuna delle sei coppie di indici di tale tipo, sarà $w_{il} = -w_{li}$. Delle sei relazioni, quindi, solo tre sono indipendenti; esse definiscono una terna di scalari, caratteristici del moto della terna di assi S' nel sistema di riferimento S :

$$\omega_1 = w_{23} \quad \omega_2 = w_{31} \quad \omega_3 = w_{12}$$

Tali numeri possono essere considerati le componenti lungo \hat{u}_i di un vettore $\bar{\omega}$, univocamente determinato, che permette di esprimere la derivata rispetto al tempo di ciascun \hat{u}_i nella forma

$$\left(\frac{d\hat{u}_i(t)}{dt}\right)_S = \bar{\omega}(t) \times \hat{u}_i(t)$$

$$\bar{\omega} \times \hat{u}_1 = \omega_3\hat{u}_2 - \omega_2\hat{u}_3 = w_{12}\hat{u}_2 + w_{13}\hat{u}_3 = \left(\frac{d\hat{u}_1}{dt}\right)_S$$

$$\bar{\omega} \times \hat{u}_2 = -\omega_3\hat{u}_1 + \omega_1\hat{u}_3 = w_{21}\hat{u}_1 + w_{23}\hat{u}_3 = \left(\frac{d\hat{u}_2}{dt}\right)_S$$

$$\bar{\omega} \times \hat{u}_3 = \omega_2\hat{u}_1 - \omega_1\hat{u}_2 = w_{31}\hat{u}_1 + w_{32}\hat{u}_2 = \left(\frac{d\hat{u}_3}{dt}\right)_S$$

Dato questo risultato possiamo scrivere in riferimento all'espressione che stavamo calcolando originariamente:

$$w'_x \left(\frac{d\hat{i}'}{dt}\right)_S = \bar{\omega} \times w'_x \hat{i}'$$

e analoghe per gli altri termini dello stesso tipo; la somma è uguale a $\bar{\omega} \times \bar{w}$. Si ottiene quindi la relazione di derivazione del vettore generico

$$\left(\frac{d\bar{w}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\bar{w}}{dt}\right)_{S'} + \bar{\omega} \times \bar{w}$$

NB Applicando questa relazione ad $\vec{\omega}$ stesso, poichè $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$ si trova

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S'}$$

Applichiamo adesso questo risultato ai vettori posizione. Per il vettore velocità nel riferimento S

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S$$

Applicando la formula ricavata al caso $\vec{w} = \vec{r}'$, si ha

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

da cui

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Essendo $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$ si ha infine

$$\vec{v} = \vec{v}' + \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$$

che è la più generale forma possibile della legge di trasformazione delle velocità in meccanica classica non relativistica.

NB Derivando ulteriormente ed utilizzando il risultato generale dimostrato si può ottenere una relazione analoga per l'accelerazione.

Applichiamo adesso questo risultato nel caso di interesse in cui, come specificato nella descrizione iniziale, il sistema S' è il riferimento *solidale* con il corpo rigido. In questo caso le velocità dei punti materiali rispetto a S' risultano nulle, quindi

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$$

dove ho chiamato $\vec{V} \equiv \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S$. Esprimendo mediante questa formula le velocità di due punti arbitrari P e Q del sistema rigido e sottraendo membro a membro, si ottiene infine l'atto di moto rigido

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P)$$

□

L'atto di moto viene spesso utilizzato scegliendo il punto P coincidente con il centro di massa C . Per ogni punto del corpo rigido si ottiene

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_C)$$

Quest'ultima mostra che il moto di tutti i punti del sistema rigido è noto se, oltre alle loro posizioni all'interno del sistema, sono noti \vec{v}_C e $\vec{\omega}$: queste due grandezze descrivono quindi il moto del sistema rigido, istante per istante. Questa relazione fa capire che qualsiasi moto di un corpo rigido può essere ricondotto a un'opportuna combinazione di una traslazione e di una rotazione attorno ad un asse, che è essenzialmente il contenuto del teorema di Chasles.

§ 1.2.3. **Considerazioni sull'atto di moto rigido.** — Consideriamo due casi distinti: in un primo caso, senza ledere la generalità, scegliamo l'origine del riferimento *solidale* coincidente con il centro di massa C ; in un secondo caso si scelga un'altra origine qualsiasi O' distante \vec{a} da C . Indichiamo con \vec{V}' la velocità di spostamento dell'origine O' di questo sistema e con $\vec{\omega}'$ la sua velocità angolare di rotazione. Consideriamo di nuovo un punto qualunque P del corpo rigido e indichiamo con \vec{r}' il suo raggio vettore rispetto all'origine O' . Si ha allora $\vec{r} - \vec{R} = \vec{r}' + \vec{a}$, sostituendo nell'atto di moto rigido

$$\vec{v} = \vec{V} + (\vec{\omega} \times \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

D'altra parte, in virtù della definizione di \vec{V}' e di $\vec{\omega}'$, e dalla legge di trasformazione delle velocità, si deve avere $\vec{v} = \vec{V}' + (\vec{\omega}' \times \vec{r}')$. Dal confronto concludiamo

$$\vec{V}' = \vec{V} + (\vec{\omega} \times \vec{a}) \quad \vec{\omega}' = \vec{\omega}$$

Osserviamo che la velocità angolare con cui il sistema di coordinate solidale con il corpo ruota in un dato istante è assolutamente indipendente da questo sistema, pertanto è tipica del moto del corpo rigido. Tutti i sistemi solidali con il corpo rigido ruotano in un dato istante intorno ad assi mutuamente paralleli con la stessa velocità ω in valore assoluto. Questa osservazione consente definitivamente di chiamare il vettore $\vec{\omega}$ *velocità angolare* di rotazione del corpo rigido.

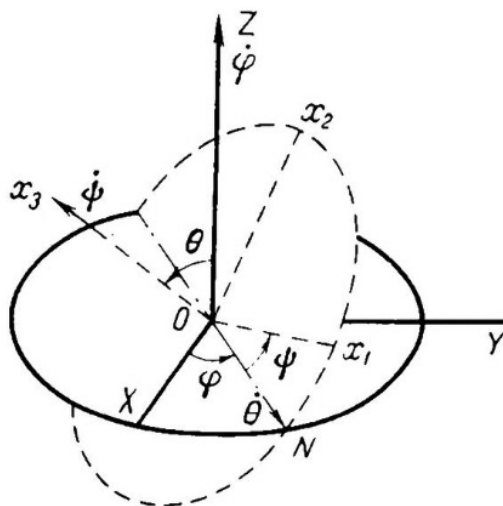
Le considerazioni proposte sono state condotte supponendo di aver fissato il sistema di riferimento S nel quale si svolgono le misure: il vettore sopra indicato con $\vec{\omega}'$ è il vettore velocità angolare del secondo riferimento solidale ma valutato nel sistema S esattamente come $\vec{\omega}$, se invece modifico il sistema nel quale valuto i vettori, le osservazioni relative cambiano. Se nel sistema S il corpo rigido ha velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$, mentre in un secondo sistema S'' , ruotante con velocità angolare $\vec{\Omega}$ rispetto a S , l'oggetto ha velocità angolare istantanea $\vec{\omega}''$ (dove qui si intende che il vettore velocità angolare è misurato nel sistema S''), vale

$$\vec{\omega}'' = \vec{\omega} - \vec{\Omega}$$

Potete convincervi che la formula è sensata pensando a cosa accade nel caso in cui $\vec{\Omega}$ e $\vec{\omega}$ hanno la stessa direzione. Se invece gli assi di S ed S'' non ruotano gli uni rispetto agli altri (come avviene, ad esempio, se sono due sistemi inerziali il cui moto relativo è rettilineo uniforme), allora misurano la stessa $\vec{\omega}$. Una conseguenza importante è che possiamo sempre scegliere un sistema di riferimento inerziale in cui ciascun punto del corpo rigido abbia velocità ortogonale a $\vec{\omega}$: infatti, dalla relazione precedentemente introdotta segue che tutti i punti del corpo hanno la stessa velocità lungo la direzione di $\vec{\omega}$, perciò ci basta metterci in un sistema di riferimento in cui questa componente è nulla. Quando questa condizione è soddisfatta, possiamo scrivere $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_0)$, dove \vec{r}_P è la posizione di P e \vec{r}_0 è un opportuno vettore che non dipende dalla scelta di P : ricordando che $\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$, abbiamo infatti

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_0) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) = \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_0).$$

Il luogo di punti dato dalla retta passante per il punto descritto da \vec{r}_0 e parallela alla direzione di $\vec{\omega}$ è detto *asse istantaneo di rotazione*. Va notato che questo asse può sia trovarsi esternamente al corpo sia passargli attraverso: nel secondo caso, tutti i punti del corpo sull'asse sono istantaneamente fermi. Questa osservazione può spesso aiutare a trovare l'asse istantaneo. Osserviamo che per questa seconda considerazione ci siamo svincolati dalla scelta del sistema *solidale* e abbiamo modificato solo il sistema di riferimento in cui si misura la velocità angolare.



§ 1.2.4. **Angoli di Eulero.** — Come abbiamo già visto, per descrivere il moto di un corpo rigido si possono utilizzare le tre coordinate del centro di massa del corpo e tre angoli che determinino l'orientamento degli assi (x_1, x_2, x_3) del sistema di coordinate mobile rispetto al sistema immobile (x, y, z) (nota il cambio di notazione sulla terna di assi *solidali* rispetto ai paragrafi precedenti). Spesso risulta più comodo usare come terna di angoli i cosiddetti **angoli di Eulero**. Poiché ci interessano per il momento soltanto gli angoli tra gli assi coordinati, scegliamo per origine di ambedue i sistemi uno stesso punto. Escluso, per il momento, il caso in cui i piani x_1x_2 ed xy coincidano, consideriamo l'intersezione di questi due piani, la quale, come comune a due piani rispettivamente perpendicolare agli assi x_3 e z , risulterà perpendicolare ad entrambi questi assi e quindi al loro piano. Questa retta passante per l'origine, il cui senso positivo viene scelto corrispondente al senso del prodotto vettoriale $(\hat{k} \times \hat{x}_3)$, viene detta *linea dei nodi* e si designa solitamente con N . Definiamo adesso i tre angoli di Eulero:

- l'angolo compreso tra l'asse z e l'asse x_3 si chiama *angolo di nutazione* e si indica con θ ($0 < \theta < \pi$).
- si dice poi *angolo di precessione* e si denota con ϕ l'angolo compreso tra l'asse x e N ($0 < \phi < 2\pi$).
- infine, si dice *angolo di rotazione propria* e si denota con ψ l'angolo compreso tra l'asse x_1 e N ($0 < \psi < 2\pi$).

NB alcuni testi universitari usano una notazione diversa, nello specifico spesso si scambiano ϕ e ψ .

Ci si convince facilmente che se si prefissano tre valori degli angoli di Eulero resta individuata la posizione della terna *solidale* rispetto alla terna *fissa*. Nel caso escluso in precedenza in cui i piani xy ed x_1x_2 coincidano, l'angolo θ va preso uguale a 0 o π , mentre la linea dei nodi resta indeterminata, così come ϕ e ψ . Tuttavia in questo semplice caso è sufficiente considerare l'angolo tra l'asse x e l'asse x_1 per individuare univocamente la posizione della terna *solidale* rispetto a quella *fissa*.

Esprimiamo ora le componenti del vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ lungo gli assi della terna *solidale* (x_1, x_2, x_3) mediante gli angoli di Eulero e le loro derivate. Bisogna proiettare su questi assi il vettore

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{N} + \dot{\phi} \hat{k} + \dot{\psi} \hat{x}_3$$

Dove si è indicato con \hat{N} il versore della linea dei nodi. La velocità angolare $\dot{\theta}$ è diretta lungo la linea dei nodi e le sue componenti sugli assi (x_1, x_2, x_3) sono

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi \quad \dot{\theta}_3 = 0$$

La velocità angolare $\dot{\phi}$ è diretta lungo l'asse z ; la sua proiezione sull'asse x_3 è uguale a $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$, e la proiezione sul piano x_1x_2 è uguale a $\dot{\phi} \sin \theta$. Prendendo le componenti di quest'ultima sugli assi x_1 e x_2 otteniamo:

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \quad \dot{\phi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$$

La velocità angolare $\dot{\psi}$ è diretta infine lungo l'asse x_3 . Riunendo tutte le componenti per ciascuno degli assi otteniamo

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

Analogamente si possono derivare le componenti della velocità angolare rispetto alla terna (x, y, z) , il risultato è

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}$$

1.3 Dinamica del Corpo Rigido

§ 1.3.1. Ripasso Teoremi di König, tensore d'inerzia e Teorema di Huygens-Steiner. —

Le proprietà dei corpi rigidi permettono di ricavare un'espressione molto pulita per la loro energia cinetica e il loro momento angolare. Ricordiamo i Teoremi di König:

- **Primo teorema di König:** Il momento angolare totale di un sistema di punti materiali calcolato rispetto ad un polo P qualsiasi è dato dalla somma del momento angolare totale *relativo* al centro di massa e il momento angolare del centro di massa calcolato rispetto al polo P

$$\vec{L}|_P = \vec{L}_{CM}|_P + \vec{L}'|_C$$

$$L_{CM}|_P = \vec{r}_C \times \vec{Q}$$

dove \vec{r}_C è il vettore congiungente il polo P e il centro di massa C e \vec{Q} è la quantità di moto totale del sistema di punti materiali. Con l'espressione "momento angolare del centro di massa" si intende il momento angolare che avrebbe un punto materiale avente quantità di moto \vec{Q} , collocato istante per istante nel centro di massa. Con l'espressione "momento angolare totale *relativo* al centro di massa" (secondo termine $\vec{L}'|_C$) si intende il momento angolare totale del sistema calcolato usando come polo il centro di massa e come sistema di riferimento il sistema del centro di massa. Quest'ultima osservazione è, tuttavia, supplementare in quanto il momento angolare del sistema calcolato usando come polo il centro di massa ha la stessa espressione che si ottiene nel riferimento del centro di massa, calcolandolo in un qualsiasi altro riferimento i cui assi mantengano orientazione fissata rispetto al riferimento precedente: nella notazione che si sta usando

$$\vec{L}'|_C = \vec{L}|_C$$

Dimostrazione. Indico con \vec{R}_C il vettore posizione del centro di massa in un riferimento qualsiasi con assi ad orientazione fissa rispetto al riferimento del centro di massa e con \vec{V}_C la relativa velocità. Data l'ipotesi fatta vale l'usuale legge di trasformazione delle velocità $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_C$. Calcoliamo il momento angolare

$$\vec{L}'|_C = \int \vec{r}' \times \vec{v}' dm = \int \vec{r}' \times (\vec{v} - \vec{V}_C) dm = \int (\vec{r} - \vec{R}_C) \times \vec{v} dm - \int \vec{r}' \times \vec{V}_C dm =$$

$$= \vec{L}|_C - \left(\int \vec{r}' dm \right) \times \vec{V}_C$$

ma poichè il riferimento in cui indichiamo le variabili primarie è quello del centro di massa, ossia il riferimento in cui il centro di massa è nell'origine, il termine tra parentesi fa zero. \square

- **Secondo teorema di König:** L'energia cinetica totale di un sistema di punti materiali è uguale alla somma dell'energia cinetica totale *relativa* al centro di massa e l'energia cinetica del centro di massa

$$K = K_{CM} + K'$$

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M V_C^2$$

dove il riferimento generico in cui si calcola l'energia cinetica al primo membro e la velocità del centro di massa \vec{V}_C ($V_C \equiv |\vec{V}_C|$) deve avere, come prima, assi con orientazione fissa rispetto a quelli del riferimento del centro di massa. Si è indicata con M la massa totale del sistema di punti materiali. Con l'espressione "energia cinetica del centro di massa" si intende l'energia cinetica che avrebbe un punto materiale di massa pari alla massa totale M , collocato istante per istante nel centro di massa. Con l'espressione "energia cinetica totale *relativa* al centro di massa" si intende l'energia cinetica totale calcolata nel riferimento del centro di massa.

Sapendo scrivere banalmente i primi termini di queste espressioni, ci concentreremo sui secondi, denotandoli semplicemente con K e \vec{L} (quindi rimuoveremo di seguito l'apice riportato nelle formule di sopra ed il polo per l'espressione del momento angolare).

Mettendoci dunque nel sistema di riferimento del centro di massa (di seguito si intende anche il polo di calcolo del momento angolare coincidente con il centro di massa, oltre che l'origine del riferimento *solidale*), scriviamo la velocità di un punto in posizione \vec{r} (rispetto al centro di massa) come $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Abbiamo quindi

$$K = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \quad \vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm.$$

Queste espressioni non ci dicono ancora nulla. Passando esplicitamente in coordinate cartesiane, riusciremo a esplicitare la dipendenza di queste quantità da $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{x}_1 + \omega_2 \hat{x}_2 + \omega_3 \hat{x}_3$, e introdurremo un nuovo oggetto utile per descrivere la dinamica dei corpi rigidi. Osserviamo che per semplicità abbiamo eliminato dalla notazione tutti gli indici primati (modifica già introdotta nel paragrafo precedente) rispetto a quanto fatto sopra, tuttavia tutte le grandezze che seguono sono espresse nel sistema *solidale* che, in questo caso si è scelto con origine nel centro di massa, quindi coerentemente con la notazione dei primi paragrafi, andrebbero inseriti indici primati ovunque. Riscrivendo anzitutto l'integrale per il momento angolare, otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int [(\omega_1 \hat{x}_1 + \omega_2 \hat{x}_2 + \omega_3 \hat{x}_3)(x^2 + y^2 + z^2) - (x \hat{x}_1 + y \hat{x}_2 + z \hat{x}_3)(x \omega_1 + y \omega_2 + z \omega_3)] dm \\ &= \left[\left(\int (y^2 + z^2) dm \right) \omega_1 + \left(- \int xy dm \right) \omega_2 + \left(- \int xz dm \right) \omega_3 \right] \hat{x}_1 \\ &\quad + \left[\left(- \int xy dm \right) \omega_1 + \left(\int (x^2 + z^2) dm \right) \omega_2 + \left(- \int yz dm \right) \omega_3 \right] \hat{x}_2 \\ &\quad + \left[\left(- \int xz dm \right) \omega_1 + \left(- \int yz dm \right) \omega_2 + \left(\int (x^2 + y^2) dm \right) \omega_3 \right] \hat{x}_3 \end{aligned}$$

Per ricavare velocemente la prima uguaglianza si può far uso di una nota relazione di calcolo vettoriale:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

da cui

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} |\vec{r}|^2 - \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{\omega})$$

Dalla relazione ricavata vediamo che il momento angolare dipende *linearmente* dalla velocità angolare, con dei coefficienti che sono funzione unicamente della geometria del corpo rigido, ossia delle sue dimensioni e della sua estensione di massa. Usando la notazione dell'algebra lineare, possiamo riscrivere questa relazione in maniera compatta:

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega},$$

dove \vec{L} e $\vec{\omega}$ vanno intesi come vettori colonna, mentre \mathbf{I} è la matrice simmetrica

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix},$$

detta *Tensore d'inerzia*. Le sue entrate diagonali si chiamano *momenti d'inerzia*, mentre le altre vengono talvolta dette *prodotti d'inerzia*. La lezione principale da trarre da questo lungo conto è che, in generale, \vec{L} e $\vec{\omega}$ possono avere direzioni diverse.

Eseguito il medesimo calcolo per l'energia cinetica, scopriamo che il tensore d'inerzia entra anche nella sua espressione. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int [(x\omega_2 - y\omega_1)^2 + (y\omega_3 - z\omega_2)^2 + (z\omega_1 - x\omega_3)^2] dm \\ &= \frac{1}{2} \left(\int (y^2 + z^2) dm \right) \omega_1^2 + \frac{1}{2} \left(-\int xy dm \right) \omega_2 \omega_1 + \frac{1}{2} \left(-\int xz dm \right) \omega_3 \omega_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\int xy dm \right) \omega_1 \omega_2 + \frac{1}{2} \left(\int (x^2 + z^2) dm \right) \omega_2^2 + \frac{1}{2} \left(-\int yz dm \right) \omega_3 \omega_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\int xz dm \right) \omega_1 \omega_3 + \frac{1}{2} \left(-\int yz dm \right) \omega_2 \omega_3 + \frac{1}{2} \left(\int (x^2 + y^2) dm \right) \omega_3^2, \end{aligned}$$

che, in notazione più compatta, diventa

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I} \vec{\omega},$$

ossia, tramite un'espressione in cui il tensore d'inerzia non compare esplicitamente,

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}.$$

Più in generale, il tensore d'inerzia di un corpo rigido può essere definito rispetto a qualunque punto dello spazio (rispetto ad un qualsiasi polo). Indicando con $\vec{r} = (x, y, z)$ le posizioni dei punti del solido rispetto a un dato polo, infatti, le formule sopra usate per il momento angolare e l'energia cinetica restano valide, se il momento angolare è preso rispetto a tale polo e l'oggetto sta ruotando con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno a un asse passante per il polo. Poiché non stiamo più usando il centro di massa come punto privilegiato, infatti, non possiamo più applicare il Teorema di König, perciò dobbiamo ricondurci a una situazione particolare, e le quantità K e \vec{L} così calcolate sono quelle totali, non solo i contributi relativi al centro di massa.

Il Teorema di Huygens-Steiner, o degli assi paralleli, che voi conoscerete per i momenti d'inerzia, si estende in questo modo ai tensori di inerzia: con un semplice calcolo (esercizio!) otteniamo infatti la relazione

$$\mathbf{I}|_P = \mathbf{I}|_C + \mathbf{I}_{CM},$$

dove \mathbf{I}_P è il tensore d'inerzia rispetto al generico polo P , \mathbf{I}_C è il tensore d'inerzia rispetto al centro di massa, e \mathbf{I}_{CM} è la matrice

$$\mathbf{I}_{CM} = M \begin{pmatrix} Y^2 + Z^2 & -XY & -XZ \\ -XY & X^2 + Z^2 & -YZ \\ -XZ & -YZ & X^2 + Y^2 \end{pmatrix},$$

in cui (X, Y, Z) indica la posizione del punto P rispetto al centro di massa.

§ 1.3.2. **Problema del moto.** — Come noto dalla *Dinamica dei sistemi*, il moto di un qualsiasi sistema di punti materiali (e quindi in particolare un corpo rigido) in meccanica classica è descritto dalle **Equazioni Cardinali**

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \vec{\tau}^{(e)}|_P = \frac{d\vec{L}|_P}{dt} + M\vec{v}_P \times \vec{V}_C \end{cases}$$

Dove si è indicata con $\vec{F}^{(e)}$ la risultante delle forze esterne e con $\vec{\tau}^{(e)}|_P$ la risultante dei momenti delle forze esterne calcolati rispetto al polo P . Le relazioni sono valide in un qualsiasi riferimento, se si sceglie un riferimento non inerziale vanno considerate anche le "forze apparenti" (o "pseudoforze"). La forma data della Seconda Equazione Cardinale non è la più famosa con la quale è nota, questo perchè ci sono delle sottigliezze legate alla scelta del polo P rispetto al quale si valutano i momenti. In particolare se il polo scelto è in movimento nel sistema di riferimento utilizzato, va incluso anche il secondo termine, in cui figura il vettore \vec{v}_P velocità del polo. Se il polo P è un punto fisso nel sistema di riferimento utilizzato, oppure se coincide con il centro di massa C , o ancora se la sua velocità è parallela a quella del centro di massa, l'equazione assume la ben più nota forma:

$$\vec{\tau}^{(e)}|_P = \frac{d\vec{L}|_P}{dt}$$

Nella maggior parte dei casi la scelta del polo viene fatta di modo che questa sia la forma utilizzata per la seconda equazione cardinale (sarà questa la forma che verrà usata successivamente in queste dispense), pertanto il sistema diviene

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \vec{\tau}^{(e)}|_P = \frac{d\vec{L}|_P}{dt} \end{cases}$$

La dinamica di un qualsiasi corpo rigido può quindi essere affrontata in generale nel seguente modo:

- Si scelga il sistema di riferimento nel quale ambientare il problema, la base di versori nella quale sviluppare i vettori ed il polo P rispetto al quale calcolare i momenti. Tale scelta va ponderata rispetto al problema specifico da affrontare, considerandone in particolar modo le simmetrie ed eventuali vincoli;
- Si individuino le sei grandezze cinematiche tramite le quali si caratterizzeranno i corrispondenti gradi di libertà del corpo rigido (es. angoli di Eulero);
- Si individuino tutte le forze esterne agenti sul corpo, considerando le "forze apparenti" nel caso in cui si sia scelto un sistema di riferimento non inerziale. Si esprimano queste forze nella base di versori scelta individuando le componenti come funzioni delle sei variabili cinematiche, delle loro derivate prime (dipendenza implicita dal tempo) ed eventualmente del tempo t ;
- Si calcolino tutti i momenti delle forze individuate rispetto al polo P e si individuino la risultante di tutte le forze e di tutti i momenti sviluppando le componenti nella base scelta.

- Si sviluppino le grandezze \vec{Q} e $\vec{L}|_P$ in termini delle sei variabili cinematiche sulla base di versori scelta. In questa fase risultano utili i teoremi di König e la scelta della base è cruciale per semplificare l'espressione finale. Nel seguito daremo ulteriori strumenti per affrontare questo punto;
- Assegnate dodici condizioni iniziali date dai valori di ogni variabile cinematica e delle relative derivate ad un istante t^* , si risolva il sistema di sei equazioni differenziali del secondo ordine in sei incognite dato dalle **equazioni cardinali** sviluppate nella base assegnata. Le equazioni sono nella sola variabile t e sono in generale accoppiate tra di loro. I *teoremi di esistenza ed unicità* sono garanti della corretta definizione di questo problema matematico.

Quella qui presentata è una ricetta generale, la stessa subisce notevoli semplificazioni rispetto ai casi specifici considerati in virtù del supporto fornito dai vincoli e dalle simmetrie.

§ 1.3.3. Assi principali ed Equazioni di Eulero. — Come si dimostra in Algebra Lineare, poiché il tensore d'inerzia è simmetrico, è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate cartesiane $O'x_1x_2x_3$ nel quale la matrice che rappresenta il tensore d'inerzia è diagonale, cioè ha la forma

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int (y'^2 + z'^2) dm & 0 & 0 \\ 0 & \int (x'^2 + z'^2) dm & 0 \\ 0 & 0 & \int (x'^2 + y'^2) dm \end{pmatrix}.$$

Questo sistema di riferimento è detto *sistema degli assi principali*. Si è soliti indicare la particolare terna di versori $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ relativa a tale sistema di riferimento con $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ (ed è questo il motivo per cui prima abbiamo cambiato la notazione rispetto ai paragrafi iniziali).

NB Nella letteratura scientifica trovate nomenclature diverse. Ad esempio una nomenclatura molto tecnica, ma diffusa, considera il riferimento con origine coincidente con il polo rispetto al quale si calcolano i momenti e distingue il caso in cui si scelga tale punto non coincidente con il centro di massa, usando la terminologia "base principale d'inerzia", dal caso in cui il punto sia il centro di massa, usando la terminologia "base centrale d'inerzia".

Nel linguaggio adottato sopra, si sta scegliendo uno specifico sistema di riferimento *solidale* e la relativa base $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ per sviluppare il momento angolare $\vec{L}'|_P$. Osserviamo che, per oggetti planari (ad esempio, ristretti al piano $z' = 0$), il momento d'inerzia relativo all'asse principale perpendicolare a tale piano (I_3 nell'esempio) è uguale alla somma degli altri due: questo fatto è talvolta detto *teorema degli assi perpendicolari* e può accorciare il calcolo dei tensori d'inerzia. Se i momenti d'inerzia relativi agli assi principali sono tutti distinti, il corpo rigido è detto *trottola asimmetrica*, mentre se sono tutti uguali si parla di *trottola sferica*. Nel caso intermedio (supponiamo $I_1 = I_2 = I \neq I_3$) abbiamo una *trottola simmetrica*.

Nel sistema di riferimento degli assi principali, quindi, valgono

$$K = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} + \frac{I_3\omega_3^2}{2} \quad \vec{L} = I_1\omega_1\hat{x}_1 + I_2\omega_2\hat{x}_2 + I_3\omega_3\hat{x}_3,$$

dove $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sono le componenti cartesiane del vettore $\vec{\omega}$ nella base $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$. Dunque gli assi principali semplificano le espressioni delle quantità dinamiche. Il prezzo pagato per ottenere ciò è che ora gli assi cartesiani usati non sono fissi, ma si muovono insieme al corpo: infatti, è chiaro che, essendo il tensore d'inerzia determinato dalla geometria dell'oggetto, sarà necessario mettersi in un sistema di coordinate *solidale* al corpo stesso per ottenere un tensore di inerzia con entrate costanti e tale da essere diagonale. Le simmetrie degli oggetti considerati aiutano spesso a capire a priori quali siano gli assi principali di un dato corpo rigido (si vedano, a tal proposito, i problemi a fine dispense).

Poiché il corpo rigido ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$, usando le formule di Poisson viste sopra, deduciamo che le direzioni degli assi principali variano secondo le equazioni

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}_1 \quad \frac{d\hat{x}_2}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}_2 \quad \frac{d\hat{x}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}_3.$$

Scrivendo la Seconda Equazione Cardinale prendendo come polo il centro di massa, e usando le espressioni suddette, otteniamo (intendendo con I_i le entrate del tensore d'inerzia rispetto al centro di massa)

$$\begin{aligned} \vec{\tau}^{(e)}|_C &= \frac{d\vec{L}|_C}{dt} = \frac{d}{dt} (I_1\omega_1\hat{x}_1 + I_2\omega_2\hat{x}_2 + I_3\omega_3\hat{x}_3) \\ &= (I_1\dot{\omega}_1\hat{x}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{x}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{x}_3) + I_1\omega_1(\vec{\omega} \times \hat{x}_1) + I_2\omega_2(\vec{\omega} \times \hat{x}_2) + I_3\omega_3(\vec{\omega} \times \hat{x}_3), \end{aligned}$$

ossia, svolgendo i prodotti vettoriali e scrivendo per componenti:

$$\tau_1^{(e)} = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3,$$

$$\tau_2^{(e)} = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1,$$

$$\tau_3^{(e)} = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2.$$

Queste equazioni sono dette *Equazioni di Eulero per il corpo rigido*. Si noti che si ottengono l'una dall'altra ciclando gli indici. Si osservi che questo approccio è del tutto generale in quanto non si è fatta alcuna ipotesi sul problema di corpo rigido da studiare, ma si è scelto come riferimento e relativa base il sistema *solidale* degli assi principali e come polo e origine di questo sistema il centro di massa. Definendo gli angoli di Eulero dalla posizione relativa di questo sistema di riferimento rispetto ad un sistema *fisso* esterno, si possono usare le espressioni della velocità angolare in termini di queste grandezze cinematiche per riscrivere le equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1^{(e)} = I_1(\ddot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + \dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi + \ddot{\theta} \cos \psi - \dot{\theta}\dot{\psi} \sin \psi) + \\ \quad + (I_3 - I_2)(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \\ \tau_2^{(e)} = I_2(\ddot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - \dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta \sin \psi - \ddot{\theta} \sin \psi - \dot{\theta}\dot{\psi} \cos \psi) + \\ \quad + (I_1 - I_3)(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \\ \tau_3^{(e)} = I_3(\ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\psi}) + \\ \quad + (I_2 - I_1)(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \end{array} \right.$$

Ciascun angolo di Eulero è una funzione del tempo. Le componenti della risultante dei momenti delle forze presenti al primo membro sono funzioni delle coordinate del centro di massa e delle loro derivate, degli angoli di Eulero e delle loro derivate ed eventualmente anche del tempo:

$$\tau_i^{(e)}(x_C(t), \dot{x}_C(t), y_C(t), \dot{y}_C(t), z_C(t), \dot{z}_C(t), \theta(t), \phi(t), \psi(t), \dot{\theta}(t), \dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t), t).$$

1.4 Trottole

§ 1.4.1. **Trottola simmetrica libera.** — Possiamo ora studiare un sistema particolarmente esemplificativo di quanto visto finora: una trottola simmetrica libera (cioè non soggetta ad alcuna forza o momento torcente esterno). Approcceremo dapprima il problema lavorando nel sistema di riferimento inerziale del laboratorio (quello che prima abbiamo chiamato riferimento *fisso*), e in seguito ci metteremo nel sistema solidale alla trottola. Per affrontare il problema è importante sottolineare che in entrambi i casi scegliamo come base quella degli assi principali ($\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$) e come polo il centro di massa C (anche se nel caso del riferimento *fisso* usufruiremo anche della

base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ per alcune considerazioni). Quello che cambia è il sistema di riferimento, ossia l'osservatore. Questo discrimina l'applicabilità o meno delle equazioni di Eulero: queste infatti sono state ricavate ponendosi nel sistema di riferimento *solidale* e non in quello *fisso*. Tutte le altre espressioni sono utilizzabili in entrambi i casi: la velocità angolare è decomposta sempre nella base $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$; il momento angolare è scritto sempre nella stessa forma poichè il centro di massa si considera non traslante, quindi il primo termine del teorema di König è nullo, e l'espressione del secondo termine con il tensore di inerzia vista sopra dipende solo dalla base di decomposizione, che come detto è quella degli "assi principali" in entrambi i casi. Ciò che cambia è "come faccio la derivata rispetto al tempo" poichè in base al riferimento il comportamento del momento angolare e le relative variazioni sono differenti. Ciò è equivalente a considerare o meno le forze apparenti nell'analisi del moto. Ovviamente, nonostante le componenti dei vettori che troveremo siano diverse, il comportamento complessivo dei vettori deve essere lo stesso poichè il fenomeno fisico non può dipendere dal riferimento scelto.

Sistema del laboratorio Supponiamo $I_1 = I_2 = I \neq I_3$. A meno di un moto rettilineo uniforme, possiamo supporre di essere nel sistema di riferimento con origine nel centro di massa. Poichè non agiscono momenti torcenti esterni sul sistema, e sappiamo che i momenti torcenti interni in un corpo rigido si annullano a vicenda, il momento angolare \vec{L} (che prendiamo usando come polo il centro di massa) è conservato. Senza perdita di generalità, scegliamo gli assi cartesiani in maniera tale che sia $\vec{L} \propto \hat{k}$, ossia diretto lungo l'asse z del riferimento *fisso*. Essendo il sistema anche isolato, poichè abbiamo visto che $K = \frac{1}{2}\vec{L} \cdot \vec{\omega}$, si conserva anche la componente ω_z di ω lungo \hat{k} .

Consideriamo ora queste grandezze nella base $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$. Abbiamo

$$\vec{L} = I(\omega_1\hat{x}_1 + \omega_2\hat{x}_2) + I_3\omega_3\hat{x}_3 \quad \vec{\omega} = \omega_1\hat{x}_1 + \omega_2\hat{x}_2 + \omega_3\hat{x}_3.$$

Eliminando $\omega_1\hat{x}_1 + \omega_2\hat{x}_2$ dalle due espressioni otteniamo

$$\vec{L} = I(\vec{\omega} - \omega_3\hat{x}_3) + I_3\omega_3\hat{x}_3 = I\vec{\omega} + (I_3 - I)\omega_3\hat{x}_3.$$

Da questa relazione deduciamo che i tre vettori \vec{L} , $\vec{\omega}$ e \hat{x}_3 giacciono nello stesso piano. Poichè \vec{L} è costante, ci aspettiamo che gli altri due ruotino attorno ad esso, conservando la propria proiezione su \vec{L} . Abbiamo già visto che ciò vale per ω_z tramite la conservazione dell'energia, se prendiamo il prodotto scalare con \hat{k} troviamo

$$L = I\omega_z + (I_3 - I)\omega_3\hat{k} \cdot \hat{x}_3,$$

dunque pure $\hat{k} \cdot \hat{x}_3$ è costante, come voluto (nel fare questa deduzione finale si usa il fatto che ω_3 è costante, risultato che ricaviamo con le equazioni di Eulero nella pagina successiva). Prendiamo invece il prodotto vettoriale della relazione precedente con \hat{x}_3 :

$$\vec{L} \times \hat{x}_3 = I\vec{\omega} \times \hat{x}_3 = I \frac{d\hat{x}_3}{dt}.$$

Questa relazione, come atteso, ci dice che il versore \hat{x}_3 ruota attorno alla direzione di \vec{L} , con velocità angolare di modulo

$$\Omega = \frac{L}{I},$$

Per via della relazione lineare tra \vec{L} , $\vec{\omega}$ e \hat{x}_3 , anche $\vec{\omega}$ ruota con la stessa velocità angolare. Nel sistema di riferimento inerziale, quindi, il moto rotatorio del corpo rigido è la composizione di una rotazione attorno al proprio asse principale di versore \hat{x}_3 con velocità angolare costante $\omega_3 = \frac{L_3}{I_3}$ e di una rotazione di tale asse attorno a \vec{L} con velocità angolare $\Omega\hat{k}$.

Sistema del corpo rigido Usiamo le Equazioni di Eulero. Essendo $\vec{\tau} = \vec{0}$, abbiamo

$$0 = I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_2\omega_3,$$

$$0 = I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_3\omega_1,$$

$$0 = I_3\dot{\omega}_3.$$

L'ultima equazione ci dice che ω_3 è costante. Derivando la prima rispetto al tempo e sostituendone $\dot{\omega}_2$ nella seconda, otteniamo

$$0 = \frac{I^2\ddot{\omega}_1}{(I - I_3)\omega_3} + (I - I_3)\omega_3\omega_1 \Rightarrow \ddot{\omega}_1 = -\left(\frac{I - I_3}{I}\omega_3\right)^2 \omega_1,$$

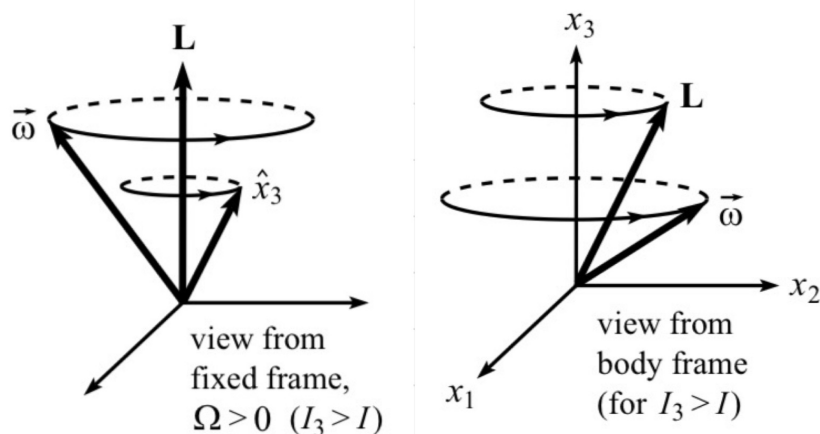
da cui, a meno di una traslazione temporale, si trova

$$\omega_1(t) = A \sin\left(\frac{I - I_3}{I}\omega_3 t\right),$$

e, di conseguenza, dalla prima equazione di Eulero,

$$\omega_2(t) = A \cos\left(\frac{I - I_3}{I}\omega_3 t\right).$$

Perciò, in questo sistema di riferimento, otteniamo che il vettore $\vec{\omega}$ ruota attorno all'asse principale di momento di inerzia I_3 con pulsazione $|\frac{I - I_3}{I}\omega_3|$. Il lettore può convincersi che le due descrizioni del moto così ottenute sono consistenti osservando questi utili diagrammi:



§ 1.4.2. Trottola simmetrica pesante. — Consideriamo adesso una trottola simmetrica pesante, ossia aggiungiamo la gravità all'esempio precedente. Assumiamo che la punta della trottola sia fissata in un punto da un vincolo. Studiamo il problema del moto nel sistema di riferimento *fisso* la cui origine viene posta in corrispondenza del punto fissato dal vincolo. Dato il vincolo, tre gradi di libertà del sistema (quelli relativi alle coordinate di un punto di riferimento) sono fissati e la descrizione completa della dinamica necessita solo di tre gradi di libertà: dobbiamo stabilire l'orientamento del riferimento *solidale*, che scegliamo con origine coincidente con quella data e con assi coincidenti con gli assi principali, rispetto al riferimento *fisso*. Questo significa anche che il problema del moto è definito unicamente dalla Seconda Equazione Cardinale. Studiamo il problema con gli angoli di Eulero (scelta naturale nel problema specifico in analisi), usando come base per lo sviluppo delle quantità vettoriali i versori $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ degli assi principali. Il polo per sviluppare i momenti è scelto coincidente con l'origine. Sono chiaramente valide tutte le considerazioni di simmetria sull'oggetto descritte nel paragrafo precedente. Osservando che la scelta delle direzioni degli assi principali d'inerzia \hat{x}_1, \hat{x}_2 è arbitraria, si può sempre prendere

l'asse \hat{x}_1 coincidente con la linea dei nodi, cioè $\psi = 0$. Segue che le componenti della velocità angolare assumono le espressioni:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\theta} \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}\end{aligned}$$

Definiamo per semplicità la variabile ausiliaria: $\beta \equiv \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$, di modo che

$$\bar{\omega} = \beta \hat{x}_3 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{x}_2 + \dot{\theta} \hat{x}_1$$

Il momento angolare è:

$$\bar{L} = I_3 \beta \hat{x}_3 + I \dot{\phi} \sin \theta \hat{x}_2 + I \dot{\theta} \hat{x}_1$$

Calcoliamo adesso la derivata usando la chain rule e la formula di Poisson:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{L}}{dt} &= I_3 \frac{d\beta}{dt} \hat{x}_3 + I \frac{d(\dot{\phi} \sin \theta)}{dt} \hat{x}_2 + I \frac{d\dot{\theta}}{dt} \hat{x}_1 + I_3 \dot{\beta} \frac{d\hat{x}_3}{dt} + I \dot{\phi} \sin \theta \frac{d\hat{x}_2}{dt} + I \dot{\theta} \frac{d\hat{x}_1}{dt} \\ \frac{d\hat{x}_3}{dt} &= \bar{\omega} \times \hat{x}_3 = -\dot{\theta} \hat{x}_2 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{x}_1 \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= \bar{\omega} \times \hat{x}_2 = \dot{\theta} \hat{x}_3 - \dot{\phi} \cos \theta \hat{x}_1 \\ \frac{d\hat{x}_1}{dt} &= \bar{\omega} \times \hat{x}_1 = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{x}_3 + \dot{\phi} \cos \theta \hat{x}_2\end{aligned}$$

Per svolgere questi calcoli si è fatto uso delle note relazioni $\hat{x}_1 \times \hat{x}_2 = \hat{x}_3$ e delle relative relazioni ottenute ciclando i tre versori, e della seguente osservazione: dall'arbitrarietà dei due assi principali x_1, x_2 la variazione dei corrispondenti versori non ha contribuito da parte della modifica di ψ pertanto si può porre nel calcolo di queste derivate $\dot{\psi} = 0$. Si badi bene, ciò non significa che il solido ha in generale questa componente della velocità angolare nulla. Sostituendo e svolgendo l'algebra

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = I_3 \dot{\beta} \hat{x}_3 + (I \ddot{\phi} \sin \theta + 2I \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta - I_3 \dot{\beta} \dot{\theta}) \hat{x}_2 + (I \ddot{\theta} - I \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_3 \dot{\beta} \dot{\phi} \sin \theta) \hat{x}_1$$

Calcoliamo adesso i momenti delle forze rispetto al polo assegnato. Dato il polo coincidente con il punto di applicazione del vincolo, il momento della relativa forza vincolante è nullo, pertanto l'unico momento necessario è quello della forza peso $\vec{P} = -Mg\hat{k}$, dove M è la massa della trottola e g la costante di accelerazione gravitazionale. Usando la regola della mano destra (in questo caso è più semplice del calcolo vettoriale esplicito), si vede che questo vettore è diretto lungo \hat{x}_1 e ha modulo $Mgl \sin \theta$ dove l è la distanza del centro di massa dal punto fisso. Concludiamo

$$\vec{\tau}^{(e)} = Mgl \sin \theta \hat{x}_1$$

Sviluppando adesso la Seconda Equazione Cardinale in componenti otteniamo

$$\begin{cases} \dot{\beta} = 0 \\ I \ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\theta} (2I \dot{\phi} \cos \theta - I_3 \dot{\beta}) = 0 \\ (Mgl + I \dot{\phi}^2 \cos \theta - I_3 \dot{\beta} \dot{\phi}) \sin \theta = I \ddot{\theta} \end{cases}$$

La prima ci dice che $\dot{\beta}$ è costante e sfruttando le condizioni iniziali, possiamo porre $\dot{\beta} = \omega_3$ considerandolo parametro noto. Il sistema da discutere diviene

$$\begin{cases} I \ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\theta} (2I \dot{\phi} \cos \theta - I_3 \omega_3) = 0 \\ (Mgl + I \dot{\phi}^2 \cos \theta - I_3 \omega_3 \dot{\phi}) \sin \theta = I \ddot{\theta} \end{cases}$$

Analizziamo alcune classi di soluzioni

Soluzioni di precessione regolare

Una particolare classe di soluzione del problema si ottiene quando $\dot{\theta} = 0$ ($\theta = \theta_0$ condizione iniziale che supponiamo essere non nulla. Il caso $\theta = 0$ è una trivializzazione della discussione che segue) da cui, dalla prima equazione si ottiene che $\dot{\phi}$ è costante e quindi anche $\dot{\psi}$ è costante, ossia $\psi(t) = At + \psi_0$ (nelle notazioni che seguono $A = \omega_3 - \Omega \cos \theta_0$), dove le costanti di integrazione sono fissate dalle condizioni iniziali. In questa casistica la trottola ruota in modo uniforme attorno al suo asse di simmetria con velocità angolare ω_3 e il centro di massa della trottola compie un moto circolare uniforme attorno all'asse z . Questo tipo di fenomeno si chiama *precessione regolare*. Definendo $\Omega \equiv \dot{\phi}$ la seconda equazione diviene

$$I\Omega^2 \cos \theta - I_3\omega_3\Omega + Mgl = 0$$

Questa equazione dà due possibili frequenze di precessione Ω (data una condizione di minimo sulla frequenza ω_3 derivante dal discriminante di questa equazione):

$$\Omega_{\pm} = \frac{I_3\omega_3}{2I \cos \theta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mgl \cos \theta_0}{I_3^2\omega_3^2}} \right)$$

Due soluzioni se vale $1 - \frac{4Mgl \cos \theta_0}{I_3^2\omega_3^2} > 0$. Queste due soluzioni sono note come *precessione veloce* e *precessione lenta*. Se $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ esiste una sola soluzione $\Omega = \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$; se ω_3 è grande:

$$\Omega_- \approx \frac{I_3\omega_3}{2I \cos \theta_0} \left(1 - \left(1 - \frac{2Mgl \cos \theta_0}{I_3^2\omega_3^2} \right) \right) = \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$$

Nutazione

Consideriamo adesso una classe di soluzioni più generale in cui θ può variare poco, ossia consideriamo piccole perturbazioni della precedente classe di soluzioni. Assumiamo che ω_3 sia grande e consideriamo come soluzione imperturbata la *precessione lenta*, di modo che $\dot{\phi}$ sia piccola. Poiché in queste assunzioni $\dot{\phi}$ è piccola rispetto ad ω_3 , possiamo riscrivere il sistema di equazioni del moto nella forma:

$$\begin{cases} I\ddot{\phi} \sin \theta - \dot{\theta}I_3\omega_3 = 0 \\ (Mgl - I_3\omega_3\dot{\phi}) \sin \theta = I\ddot{\theta} \end{cases}$$

Derivando la prima equazione e trascurando il termine misto che, nelle ipotesi fatte, è piccolo rispetto agli altri:

$$I \frac{d^2\dot{\phi}}{dt^2} \sin \theta + I\ddot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta - \ddot{\theta}I_3\omega_3 \approx I \frac{d^2\dot{\phi}}{dt^2} \sin \theta - \ddot{\theta}I_3\omega_3 = 0$$

$$\ddot{\theta} \approx \frac{I}{I_3\omega_3} \frac{d^2\dot{\phi}}{dt^2} \sin \theta$$

Sostituendo questa espressione nella seconda equazione

$$\frac{d^2\dot{\phi}}{dt^2} + \omega_n^2(\dot{\phi} - \Omega_s) = 0 \quad \omega_n \equiv \frac{I_3\omega_3}{I} \quad \Omega_s \equiv \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$$

La prima frequenza è detta *frequenza di nutazione* e caratterizza l'omonimo fenomeno che ci apprestiamo a descrivere. La seconda frequenza è quella di *precessione lenta*. Questa è un'equazione armonica con un termine disomogeneo costante, la cui soluzione (integrale generale) sappiamo essere:

$$\dot{\phi}(t) = \Omega_s + A \cos(\omega_n t + \gamma)$$

Le costanti di integrazione A, γ sono fissate dalle condizioni iniziali. Integrando ulteriormente:

$$\phi(t) = \Omega_s t + \frac{A}{\omega_n} \sin(\omega_n t + \gamma) + \alpha$$

La costante di integrazione α è fissata dalle condizioni iniziali.

Risolviamo adesso per $\theta(t)$. Sostituendo la soluzione trovata nella prima equazione del sistema:

$$\dot{\theta}(t) = -\left(\frac{I \sin \theta}{I_3 \omega_3}\right) A \omega_n \sin(\omega_n t + \gamma) = -A \sin \theta \sin(\omega_n t + \gamma)$$

avendo usato la definizione di ω_n . Poichè per ipotesi la variazione di θ è piccola, possiamo porre $\sin \theta \approx \sin \theta_0$ dove θ_0 è la condizione iniziale su θ . L'errore che si commette con questa approssimazione è del secondo ordine in termini delle perturbazioni considerate. Integrando

$$\theta(t) = B + \left(\frac{A}{\omega_n} \sin \theta_0\right) \cos(\omega_n t + \gamma)$$

dove B è un'altra costante di integrazione fissata dalle condizioni iniziali. Allo stesso modo, dall'equazione $\dot{\beta} = \omega_3$ si ha

$$\begin{aligned} \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta &\approx \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta_0 = \omega_3 \\ \dot{\psi} &= \omega_3 - \cos \theta_0 (\Omega_s + A \cos(\omega_n t + \gamma)) \\ \psi(t) &= \omega_3 t - \cos \theta_0 \left(\Omega_s t + \frac{A}{\omega_n} \sin(\omega_n t + \gamma) \right) + C \end{aligned}$$

L'ultima costante di integrazione C è fissata dall'ultima condizione iniziale. Le equazioni ricavate mostrano che sia ϕ che θ oscillano con una frequenza ω_n , questo significa che l'asse di rotazione dell'oggetto oscilla in combinazione con una precessione. Questo fenomeno è noto come *nutazione*.

Cenni sulla discussione alla Weierstrass

Si può ottenere una discussione più raffinata delle soluzioni del problema ricorrendo alle leggi di conservazione. Abbiamo già trovato una di queste leggi $\dot{\beta} = \omega_3$ che esprime la conservazione di $L_{z'}$. Prendendo la prima equazione del sistema originale (senza nessuna approssimazione/ipotesi applicata) e moltiplicando tutto per $\sin \theta$ otteniamo:

$$\begin{aligned} -I_3 \omega_3 \dot{\theta} \sin \theta + I \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2I \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta &= 0 \\ \frac{d}{dt} (I_3 \omega_3 \cos \theta + I \dot{\phi} \sin^2 \theta) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi anche la grandezza $I_3 \omega_3 \cos \theta + I \dot{\phi} \sin^2 \theta$ è conservata. Questa altro non è che la componente del momento angolare lungo l'asse fisso z : L_z . La sua conservazione è evidente dal momento in cui si nota che la componente lungo quest'asse del momento della forza peso è nulla. Per comodità riscaldiamo la notazione sulle grandezze conservate nel seguente modo

$$\begin{aligned} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta + I \dot{\phi} \sin^2 \theta &= I b \\ I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) &= I a \end{aligned}$$

Infine chiaramente anche l'energia meccanica si conserva:

$$\begin{aligned} E = K + V &= \frac{1}{2} [I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2] + Mgl \cos \theta \\ E = K + V &= \frac{1}{2} [I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I^2 a^2}{I_3}] + Mgl \cos \theta \end{aligned}$$

$$E' \equiv E - \frac{I^2 a^2}{2I_3} = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + Mgl \cos \theta$$

dalle leggi di conservazione precedenti:

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I}{I_3} a - \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \theta$$

quindi

$$E' = \frac{1}{2}I \left(\dot{\theta}^2 + \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right) + Mgl \cos \theta$$

da cui

$$\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = (\alpha - \beta \cos \theta) \sin^2 \theta - (b - a \cos \theta)^2 \quad \alpha \equiv \frac{2E'}{I} \quad \beta \equiv \frac{2Mgl}{I}$$

Ponendo infine $u \equiv \cos \theta$ (da cui $\dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta$) otteniamo l'equazione differenziale che risolve il problema del moto

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (b - au)^2$$

Questa equazione si risolve per separazione di variabili:

$$f(u) \equiv (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (b - au)^2 \quad \rightarrow \quad t = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

Anzichè provare a risolvere questo complicato integrale (per i curiosi si possono ottenere delle soluzioni generali per il problema della trottola usando gli integrali ellittici) possiamo valutare una soluzione qualitativa dell'equazione studiando il comportamento della funzione $f(u)$. Questo approccio prende il nome di *discussione alla Weierstrass*.

La funzione $f(u)$ ha significato fisico solo nel dominio $-1 \leq u \leq 1$ perchè u è il coseno di un angolo. Poichè $\beta > 0$ La funzione $f(u)$ va a $\pm\infty$ per $u \rightarrow \pm\infty$ ma la regione che ha significato fisico è solo quella per la quale $f(u) \geq 0$ dovendo valere l'equazione $\dot{u}^2 = f(u)$. Poichè $f(1) = -(b - a)^2 \leq 0$ allora esiste sempre una radice di $f(u)$ che chiamiamo u_3 tale che $u_3 \geq 1$. Poichè $f(u)$ deve ammettere tre radici, distinguiamo i seguenti tre casi principali:

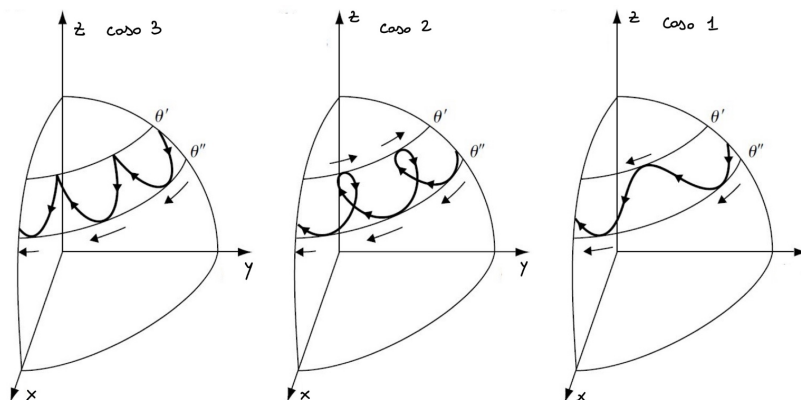
- $f(u)$ ammette due radici complesse coniugate u_1, u_2 ed una radice reale u_3 : questo caso non è fisicamente rilevante poichè l'unica radice reale è fuori dal dominio di interesse ($u_3 = 1$ è uno dei casi triviali);
- $f(u)$ ammette tre radici reali di cui due coincidenti $u_1 \equiv u_2 < 1 \leq u_3$: in questo caso il diagramma di $f(u)$ ha un punto di contatto con l'asse u in corrispondenza delle radici reali coincidenti, pertanto essendo di interesse solo la parte del diagramma con $f(u) \geq 0$ nel dominio indicato, la soluzione può essere solo $u = u_1 \equiv u_2$ ad ogni istante temporale. Ciò significa che $\dot{\theta} = 0$ e ritroviamo le soluzioni di *precessione regolare*;
- $f(u)$ ammette tre radici reali e distinte $u_1 < u_2 < 1 \leq u_3$: questo è il caso corrispondente a tutte le possibili nutazioni. La fascia di valori degli angoli all'interno della quale oscilla l'asse di rotazione è rappresentata dai valori di θ corrispondenti alle due radici reali u_1 ed u_2 . All'interno di questa casistica possiamo nuovamente distinguere dei sottocasi la cui differenza può essere qualitativamente apprezzata osservando la traiettoria descritta dal centro di massa (intersezione dell'asse della trottola con la sfera di centro nel punto fisso e raggio pari ad l). Consideriamo il segno assunto nel fenomeno di nutazione dalla grandezza

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

questo dipende dal valore di u rispetto a $u' \equiv \frac{b}{a}$. Distinguiamo tre sottocasi:

- $u' > u_2$: in questo caso l'asse della trottola precede monotonamente intorno alla verticale, effettuando contemporaneamente oscillazioni alto-basso;
- $-1 < u_1 < u' < u_2 < 1$: in questo caso la direzione della precessione è opposta sui due cerchi limite, in modo che l'asse della trottola si sposta attorno alla verticale descrivendo dei nodi;
- $u' = u_1$ o $u' = u_2$: sul cerchio limite corrispondente $\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$ si annullano contemporaneamente e l'asse della trottola descrive una traiettoria con delle cuspidi.

L'immagine di seguito riassume queste ultime casistiche.



Quest'ultimo argomento è stato trattato omettendo molti dettagli tecnici, inoltre l'analisi alla Weierstrass va completata con la discussione sulla stabilità delle soluzioni. Per completare ed approfondire si rimanda ai testi indicati nella Bibliografia.

SEZ. 2 — ALCUNI ESEMPI SVOLTI

Vediamo adesso come applicare le tecniche viste fino a questo momento nello svolgimento di problemi tratti da competizioni internazionali, concentrandoci principalmente su formalismo vettoriale, assi principali ed angoli di Eulero.

2.1 Palla su giradischi

Una sfera uniforme di massa m e raggio R è poggiata su un giradischi orizzontale, che ruota a velocità angolare fissata Ω . La sfera rotola senza strisciare sul giradischi. Descrivere la traiettoria percorsa dal centro di massa della sfera.

Come in ogni altro problema di meccanica, il primo passo di ogni soluzione è scegliere il giusto sistema di riferimento. Potremmo essere tentati di porci in un sistema rotante solidale con il giradischi ma, come si vedrà in seguito, i calcoli saranno più agevoli in un sistema inerziale, solidale con il laboratorio. Utilizziamo un sistema di assi cartesiani con origine O nel centro del giradischi e asse \hat{z} verticale. Sia P il punto di contatto tra la sfera e il giradischi, e \vec{r} il suo vettore posizione. Se \vec{r}_{cm} indica la posizione del centro di massa, avremo $\vec{r}_{\text{cm}} = \vec{r} + R\hat{z}$, da cui $\dot{\vec{r}}_{\text{cm}} = \dot{\vec{r}}$.

Le forze agenti sulla sfera saranno la forza peso $-mg\hat{z}$, applicata nel suo centro; la forza normale $\vec{N} = mg\hat{z}$ e la forza d'attrito statico \vec{f} (ortogonale a z), applicate nel punto P . La seconda legge della dinamica applicata al centro di massa diventa quindi:

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{r}}.$$

Dal momento che abbiamo a che fare con un corpo rigido, quest'unica equazione non sarà sufficiente a descrivere la dinamica del sistema. Passiamo quindi a trattare il moto di rotolamento della sfera. Sia $\vec{\omega}$ la sua velocità angolare istantanea e $I = \beta mR^2$ il suo momento d'inerzia rispetto al centro di massa (nel caso del testo $\beta = \frac{2}{5}$, ma possiamo generalizzare il calcolo a qualsiasi oggetto con distribuzione di massa a simmetria sferica e β differente). Potremmo calcolare momento angolare e momento torcente rispetto a un punto qualsiasi ma, come spesso accade in problemi di corpo rigido, il punto meglio adatto a tale scopo è il centro di massa: rispetto ad esso, la seconda equazione cardinale diventa semplicemente:

$$\dot{\vec{L}} = \beta mR^2\dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau} = (-R)\hat{z} \times \vec{f},$$

dal momento che forza peso e forza normale non fanno momento.

L'ultima condizione del testo che dobbiamo imporre è quella di puro rotolamento. Fortunatamente, anch'essa è esprimibile in modo semplice in termini vettoriali. La velocità a cui si muove la superficie del giradischi in P sarà $\vec{\Omega} \times \vec{r}$, mentre la velocità del punto di contatto tra la sfera e il giradischi è $\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times (-R)\hat{z}$. Imponendo l'uguaglianza tra le due, si arriva ad un sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} \vec{f} = m\ddot{\vec{r}} \\ \beta mR^2\dot{\vec{\omega}} = -R\hat{z} \times \vec{f} \\ \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times R\hat{z} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{cases}$$

Sarebbe sicuramente possibile scomporre in componenti ognuno dei vettori che appaiono nel sistema e risolvere separatamente le equazioni risultanti, ma possiamo anche sfruttare fino in fondo la natura vettoriale delle quantità in gioco ed evitare di scendere in componenti. Derivando la terza equazione rispetto al tempo e ricordando che $\vec{\Omega}$ è costante, si ottiene:

$$\ddot{\vec{r}} - \dot{\vec{\omega}} \times R\hat{z} = \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}.$$

Ricordando che per tre vettori qualsiasi \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} vale:

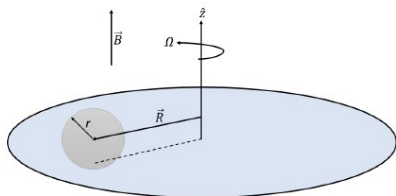
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

prendendo il prodotto vettore della seconda equazione con \hat{z} e ricordando che \vec{f} , \hat{z} sono ortogonali si giunge infine a:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\omega}} \times R\hat{z} &= -\frac{1}{\beta m} \vec{f} = -\frac{1}{\beta} \ddot{\vec{r}}, \\ \Rightarrow \ddot{\vec{r}} &= \frac{\beta}{1+\beta} \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}. \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione è esattamente analoga all'equazione del moto di una particella carica in un campo magnetico uniforme, dunque ci consente di concludere che la velocità del punto di contatto (e quindi anche del centro di massa della sfera) ruota sul piano ortogonale a z ad una velocità angolare costante $\Omega' = \frac{\beta}{1+\beta} \Omega$, che nel caso del testo diventa $\Omega' = \frac{2}{7} \Omega$. Integrando si ottiene infine che il centro di massa percorre una traiettoria circolare alla stessa velocità angolare (con centro e raggio dipendenti dalle condizioni iniziali).

2.2 Variazioni sul tema - APhO 2023/2C



Una sfera di massa m , carica Q (entrambe distribuite uniformemente) e raggio R è poggiata su un giradischi orizzontale, che ruota a velocità angolare fissata $\Omega\hat{z}$, in presenza di un campo magnetico $\vec{B} = B\hat{z}$ uniforme e costante. La sfera rotola senza strisciare sul giradischi. Descrivere la traiettoria percorsa dal centro di massa della sfera.

Questo problema è concettualmente molto simile al precedente, l'unica differenza risiede nella presenza di un campo magnetico, che produrrà sia una forza netta non nulla sulla sfera (forza di Lorentz) sia un momento torcente rispetto al centro di massa. Partiamo dal calcolare la prima.

Utilizzando la stessa notazione del problema precedente ed indicando con $\rho_e = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ la densità di carica, la forza infinitesima su un elemento di carica $dQ = \rho_e dV$ potrà essere scritta come:

$$d\vec{F} = dQ(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}') \times \vec{B},$$

dove \vec{r}' è la posizione rispetto al centro di massa dell'elemento infinitesimo in considerazione. Analogamente, la forza sull'elementino diametralmente opposto ad esso sarà:

$$d\vec{F}' = dQ(\dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times \vec{r}') \times \vec{B},$$

dunque i termini proporzionali ad $\vec{\omega}$ si annullano a coppie. Integrando su tutta la sfera si ottiene dunque un'espressione per la forza di Lorentz netta:

$$\vec{F}_L = Q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}.$$

La stessa relazione vale anche quando la densità di carica non è uniforme, ma ha comunque simmetria sferica.

Passiamo adesso al momento torcente. Sappiamo che per un dipolo con momento magnetico $\vec{\mu}$ immerso in un campo magnetico esterno uniforme vale la seguente relazione:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

Si può dimostrare che per un corpo rigido in cui il rapporto tra la densità di massa e di carica è uniforme, momento magnetico e momento angolare sono esprimibili come:

$$\vec{\mu} = \frac{Q\vec{L}}{2m},$$

dove \vec{L} è il momento angolare dell'oggetto rispetto al centro di massa. Dunque possiamo subito trovare il momento torcente dovuto al campo magnetico, dal momento che sappiamo calcolare \vec{L} per una sfera rotante:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{2}\beta QR^2\vec{\omega} \times \vec{B}.$$

Ripetendo il ragionamento del problema precedente, con le sole aggiunte dei termini appena calcolati nelle due equazioni cardinali, otteniamo ad un sistema di equazioni analogo, ma leggermente più complicato:

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = \vec{f} + Q\dot{\vec{r}} \times \vec{B} \\ \beta m R^2 \dot{\vec{\omega}} = -R\hat{z} \times \vec{f} + \frac{1}{2}\beta QR^2\vec{\omega} \times \vec{B} \\ \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times R\hat{z} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{cases}$$

Proviamo a procedere come prima: deriviamo la terza equazione rispetto al tempo, ottenendo

$$\ddot{\vec{r}} - \dot{\vec{\omega}} \times R\hat{z} = \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}.$$

Prendiamo il prodotto vettore della seconda con \hat{z} :

$$\beta m \dot{\vec{\omega}} \times R\hat{z} = -\vec{f} + \frac{1}{2}\beta QR(\vec{\omega} \times \vec{B}) \times \hat{z}.$$

Ma \vec{B} è sempre parallelo a \hat{z} , dunque si ha:

$$(\vec{\omega} \times \vec{B}) \times R\hat{z} = (\vec{\omega} \times R\hat{z}) \times \vec{B}.$$

Usando la terza equazione per esprimere $\vec{\omega} \times R\hat{z}$ in funzione di \vec{r} , $\dot{\vec{r}}$ e inserendo tutto ciò nella prima si arriva infine all'equazione del moto per \vec{r} :

$$m\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{\beta}{1+\beta} m\Omega - QB \frac{1+\frac{\beta}{2}}{1+\beta} \right) \hat{z} \times \dot{\vec{r}} - \frac{1}{2}\beta QB\Omega\vec{r}.$$

Tutte le informazioni sulla traiettoria della sfera sono contenute dentro quest'espressione, ma a prima vista non è chiaro come possano essere estratte: l'unico modo fattibile di risolvere l'equazione del moto sembrerebbe scomporla in componenti x , y o in polari ρ , θ e sperare che il sistema di equazioni accoppiate risultante abbia una soluzione ricavabile rapidamente, ma si prospetta essere un compito difficile e molto dispendioso, soprattutto nel bel mezzo di una gara. Tuttavia, con qualche accortezza, possiamo ricondurci a qualcosa di ben più noto e facile: l'equazione del moto per un oscillatore armonico bidimensionale. Per vedere come ciò si realizza, partiamo da quest'ultima: un corpo di massa m vincolato a muoversi nel piano xy sotto l'azione di una molla con un'estremità fissata nell'origine si muove secondo

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}.$$

Passiamo ad un sistema di riferimento rotante con una velocità angolare $\Omega_0\hat{z}$: la nuova equazione del moto avrà due termini aggiuntivi, dovuti alla forza centrifuga e alla forza di Coriolis:

$$m\ddot{\vec{r}} = (m\Omega_0^2 - k)\vec{r} - 2m\Omega_0\hat{z} \times \dot{\vec{r}}.$$

A meno di rinominare i parametri, quest'ultima equazione è identica a quella ottenuta poco fa per il moto della sfera! Possiamo dunque fare la seguente identificazione:

$$\Omega_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \Omega - \frac{QB}{m} \frac{1+\frac{\beta}{2}}{1+\beta} \right),$$

$$k = \frac{m}{4} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \Omega - \frac{QB}{m} \frac{1+\frac{\beta}{2}}{1+\beta} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta QB \Omega.$$

Sappiamo che la traiettoria di una particella in un potenziale armonico è un'ellisse con centro coincidente con il centro del potenziale: possiamo dunque concludere che la palla percorre un'ellisse con centro in O con pulsazione:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \Omega - \frac{QB}{m} \frac{1+\frac{\beta}{2}}{1+\beta} \right)^2 + \frac{\beta QB \Omega}{2m}},$$

il cui asse maggiore ruota ad una velocità angolare costante $-\Omega_0 \hat{z}$.

2.3 Sbarretta e campo magnetico - IdPhO 2020/1

L'obiettivo dell'analisi di questo problema è mostrare come il formalismo degli angoli di Eulero possa essere usato per risolvere sistematicamente un problema di corpo rigido.

In una regione dello spazio è presente un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = B \hat{z}$. Agli estremi di una sbarretta lunga $2R$ e priva di massa sono fissate due cariche puntiformi di uguale valore q e uguale massa m . Inizialmente, la sbarretta è posta a riposo nel campo magnetico, perpendicolare ad esso. Vengono quindi impresse istantaneamente alle due cariche due velocità lungo l'asse delle z , uguali in modulo (che vale v) e opposte in verso. Nel moto conseguente, qual è il minimo angolo fra sbarretta e campo magnetico che si raggiunge?

Per prima cosa mostriamo che il centro di massa rimarrà fermo. Prendendolo come centro di rotazione, in ogni istante potremo scrivere che le velocità delle due cariche sono date da

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_1,$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_2,$$

dove \vec{r}_1, \vec{r}_2 sono i vettori posizione rispetto al centro di massa, dunque $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = 0$. La forza totale sulla sbarretta sarà data dalla somma delle due forze di Lorentz, dunque

$$\vec{F}_{\text{tot}} = 2q\vec{v}_{\text{cm}} \times \vec{B} = 2m\dot{\vec{v}}_{\text{cm}},$$

ovvero il centro di massa si muove sulla traiettoria che verrebbe percorsa da una particella con carica $2q$ e massa $2m$, posta nello stesso campo. Ma inizialmente $\vec{v}_{\text{cm}}(t=0) = 0$, dunque esso rimane sempre fermo durante tutto il moto successivo. Possiamo quindi prenderlo come origine di un sistema di assi ortogonali, con asse z parallelo al campo magnetico esterno.

Abbiamo dunque ridotto i gradi di libertà del sistema a solamente 2: una scelta saggia di parametrizzazione è data dagli angoli di Eulero (θ, ϕ) , avendo indicato con θ l'angolo tra la sbarretta e l'asse z , con ϕ l'angolo tra la proiezione della sbarretta sul piano xy e la direzione della sbarretta a $t=0$ (che, per semplicità, possiamo far coincidere con l'asse x). Il terzo angolo ψ non sarà rilevante, dal momento che, essendo le masse puntiformi, una rotazione parallela alla sbarretta non darà luogo ad alcun momento angolare totale. Senza perdita di generalità possiamo fissare $\psi = 0$.

Visto che abbiamo deciso di utilizzare gli angoli di Eulero, può essere comodo passare ad utilizzare gli assi principali del corpo in esame. Sia $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ la base ortonormale di versori tali che:

- $\vec{r}_1 = R\hat{x}_3$;
- \hat{x}_2 sia sempre ortogonale alla sbarretta e giaccia nel piano xy ;
- $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 \times \hat{x}_3$.

In coordinate cartesiane i tre versori sono individuati da

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = -\hat{x} \cos \theta \cos \phi - \hat{y} \cos \theta \sin \phi + \hat{z} \sin \theta \\ \hat{x}_2 = \hat{x} \sin \phi - \hat{y} \cos \phi \\ \hat{x}_3 = \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta \end{cases}$$

ma non utilizzeremo in seguito queste espressioni. Si verifica facilmente che i tre assi che individuano sono assi principali: mettendo in rotazione la sbarretta attorno a ciascuno di essi, la velocità angolare ed il momento angolare sono in ciascun caso paralleli. Possiamo calcolare i momenti principali senza ricorrere ad alcun integrale, dal momento che la distribuzione di massa è discreta: si avrà:

$$I_1 = I_2 = 2mR^2, \quad I_3 = 0.$$

In funzione degli angoli scelti, la velocità angolare è data da

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z} - \dot{\theta}\hat{x}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \hat{x}_1 - \dot{\theta}\hat{x}_2 + \dot{\phi} \cos \theta \hat{x}_3,$$

dunque possiamo calcolare il momento angolare totale rispetto al centro di massa:

$$\vec{L} = I_1\omega_1\hat{x}_1 + I_2\omega_2\hat{x}_2 + I_3\omega_3\hat{x}_3 = 2mR^2 (\dot{\phi} \sin \theta \hat{x}_1 - \dot{\theta}\hat{x}_2).$$

Per calcolare $\dot{\vec{L}}$ dovremo prima trovare delle espressioni per $\dot{\hat{x}}_i$. Possiamo sfruttare il fatto che essi, in questo caso, ruotano rigidamente insieme alla sbarretta, dunque:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \vec{\omega} \times \hat{x}_1 = \dot{\theta}\hat{x}_3 + \dot{\phi} \cos \theta \hat{x}_2,$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \vec{\omega} \times \hat{x}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \hat{x}_3 - \dot{\phi} \cos \theta \hat{x}_1.$$

Derivando \vec{L} rispetto al tempo si ottiene quindi:

$$\dot{\vec{L}} = 2mR^2 [(\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta)\hat{x}_1 + (\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - \ddot{\theta})\hat{x}_2].$$

Passiamo a calcolare il momento torcente dovuto alla forza magnetica. Avremo:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= 2R\hat{x}_3 \times [q(\vec{\omega} \times R\hat{x}_3) \times B\hat{z}] \\ &= 2qBR^2\hat{x}_3 \times [\hat{x}_3(\vec{\omega} \cdot \hat{z}) - \vec{\omega}(\hat{x}_3 \cdot \hat{z})] \\ &= 2qR^2B \cos \theta (\vec{\omega} \times \hat{x}_3) \\ &= -2qBR^2(\dot{\theta} \cos \theta \hat{x}_1 + 2\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \hat{x}_2). \end{aligned}$$

Prima di proseguire, fermiamoci un attimo a confrontare quest'espressione con quella di \vec{L} : noteremo che $\vec{\tau} \cdot \vec{L} = 0$! Questa non è affatto una sorpresa, dal momento che equivale a dire che $|\vec{L}|$ è costante durante il moto, o equivalentemente le cariche hanno velocità in modulo costante. Ma ciò è esattamente quello che ci aspettiamo quando delle cariche si muovono in un campo magnetico, dal momento che esso non compie lavoro. Abbiamo semplicemente derivato la conservazione dell'energia dalle equazioni cardinali, senza doverla invocare a priori. Dunque avremo:

$$\begin{aligned} L^2 &= 4m^2R^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) = 4m^2R^2v^2, \\ \Rightarrow \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta &= \frac{v^2}{R^2}. \end{aligned}$$

Esaminiamo più nel dettaglio la componente lungo \hat{x}_1 della seconda equazione cardinale:

$$m(\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) = -qB\dot{\theta} \cos \theta.$$

Moltiplicando entrambi i lati per $\sin \theta$, entrambi diventano delle derivate totali:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) &= \frac{d}{dt} (m\dot{\phi} \sin^2 \theta) \\ &= -qB\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{qB}{2} \sin^2 \theta \right). \end{aligned}$$

Dunque abbiamo trovato un altro integrale del moto:

$$\begin{aligned} (2m\dot{\phi} + qB) \sin^2 \theta &= qB, \\ \Rightarrow \dot{\phi} \tan^2 \theta &= \frac{qB}{2m}. \end{aligned}$$

visto che per $t = 0$ si ha $\dot{\phi} = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Infine, quando l'angolo con la verticale sarà minimo avremo $\dot{\theta} = 0$: imponendo questa condizione nei due integrali del moto si arriva a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2mv}{qBR} \right)^2 &= \left(\frac{1}{\sin \theta_{\min}} - \sin \theta_{\min} \right)^2 \\ \Rightarrow \sin \theta_{\min} &= \sqrt{1 + \left(\frac{mv}{qBR} \right)^2} - \left| \frac{mv}{qBR} \right|, \end{aligned}$$

ovvero la soluzione richiesta.

SEZ. 3 — INVARIANTI ADIABATICI

3.1 Primi esempi

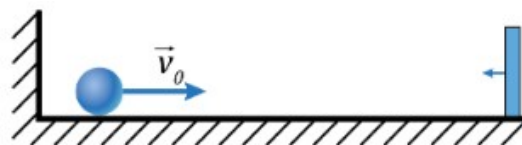
Esiste un'ampia classe di problemi che coinvolge sistemi animati da un moto "quasiperiodico". Tipicamente, si ha un sistema meccanico caratterizzato da uno o più parametri tali che, quando essi restano costanti nel tempo, il moto del sistema è periodico con periodo T , ma che, nella situazione con cui si ha a che fare, variano lentamente (o *adiabaticamente*), ossia in maniera tale che, se λ è uno di questi parametri, si abbia:

$$T \left| \frac{d\lambda}{dt} \right| \ll |\lambda|$$

In queste situazioni, è spesso possibile studiare la variazione nel tempo, mediata su un quasiperiodo del sistema, delle sue grandezze caratteristiche cinematiche e dinamiche: in questo modo si determina il comportamento del sistema su tempi lunghi rispetto a T . Per rendere il discorso meno astratto, vediamo subito alcuni esempi.

§ 3.1.1. Esempio 1: pallina tra due muri. —

Abbiamo una particella di massa m che si muove in una dimensione su una superficie piana e priva di attrito, rimbalzando elasticamente tra due muri verticali. Il muro a sinistra è immobile, mentre quello a destra si muove con una velocità



w costante verso il primo. Al tempo $t = 0$, la velocità della pallina è $v_0 \gg w$ verso sinistra, essa si trova appena a sinistra del muro mobile, e la distanza tra i due muri è x_0 . Determinare il modulo della velocità della pallina quando la distanza tra i due muri è x .

Per prima cosa, dobbiamo interpretare cosa ci sta chiedendo il problema. Infatti, è chiaro che, a essere rigorosi, l'andamento della velocità v della particella rispetto a x è costante a tratti: ogni volta che la pallina urta col muro mobile, la sua velocità cambia sia in modulo che in verso per via dell'impulso impressole da quest'ultimo, mentre negli urti col muro immobile il modulo si conserva. Tra due urti successivi, inoltre, la velocità è parimenti conservata perché sulla pallina non agiscono forze nette. Tuttavia, grazie alla condizione $w \ll v_0$, possiamo pensare di approssimare questa curva costante a tratti a una curva regolare, in quanto, in ogni urto, la velocità della pallina aumenta di poco rispetto al suo valore istantaneo, e il muro mobile si è spostato di poco, dalla sua posizione all'urto precedente, rispetto alla distanza percorsa avanti e indietro dalla particella.

Proviamo dapprima a impostare il problema in maniera esatta: chiamando v_n la velocità della pallina dopo l' n -esimo urto con il muro mobile da $t = 0$, t_n l'istante di tempo in cui tale urto avviene, e x_n la corrispondente posizione del muro (si noti che queste scelte sono consistenti con la notazione del problema), troviamo, con della semplice cinematica, le relazioni

$$w(t_{n+1} - t_n) = x_n - x_{n+1} \quad v_n(t_{n+1} - t_n) = x_n + x_{n+1},$$

mentre, studiando l'urto col muro mobile nel sistema di riferimento di quest'ultimo, troviamo

$$v_{n+1} - v_n = 2w.$$

Dall'ultima relazione segue subito $v_n = v_0 + 2wn$. Sostituendola nelle prime due, ed eliminandone il tempo, otteniamo la seguente relazione ricorsiva per x_n :

$$x_{n+1} = \frac{v_0 - w + 2wn}{v_0 + w + 2wn} x_n.$$

La corrispondente soluzione x_n potrebbe, in linea di principio, essere invertita per dare $n(x)$ e dunque, tramite l'espressione per v_n , una relazione tra v_n e x_n . Tenendo conto della variazione di x tra due urti, si otterrebbe la curva costante a tratti desiderata.

Cerchiamo ora una soluzione approssimata ma più efficace, sfruttando la condizione $w \ll v_0$. Dato che, evidentemente, la velocità della pallina è (debolmente) crescente nel tempo, varrà pure sempre $w \ll v$. Ciò ci autorizza a trattare formalmente n come un parametro continuo, e a riscrivere le relazioni ricorsive come relazioni tra variazioni infinitesime:

$$w \frac{dt}{dn} = -\frac{dx}{dn} \quad v \frac{dt}{dn} = 2x.$$

Come prima eliminiamo il tempo, ottenendo però stavolta un'equazione differenziale che possiamo risolvere sfruttando la chain rule. Infatti, poiché, come visto, è $v_n = v_0 + 2wn$, possiamo scrivere

$$\frac{dv}{dn} = 2w \Rightarrow \frac{dx}{dn} = \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dn} = 2w \frac{dx}{dv},$$

da cui, prendendo il rapporto delle prime due equazioni differenziali,

$$-\frac{dx}{dn} = \frac{2wx}{v}, \quad \frac{dx}{dn} = 2w \frac{dx}{dv} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dv} = -\frac{x}{v}$$

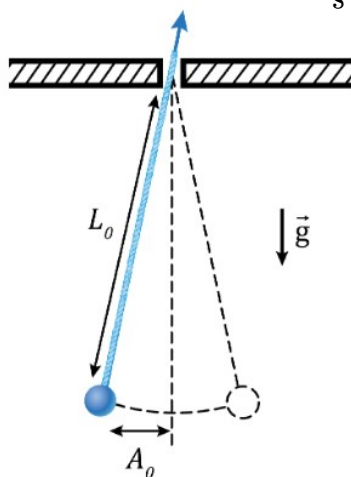
$$\Rightarrow xv = \text{cost} = x_0 v_0.$$

In questo modo troviamo la relazione cercata. In questo problema, evidentemente, il ruolo di "parametro del sistema" è ricoperto dalla posizione x del muro mobile, e la condizione di adiabaticità è data da $w \ll v$. Si potrebbe, eventualmente, sostituire a x la sua legge oraria $x(t) = x_0 - wt$, ottenendo

$$v(t) = \frac{v_0}{1 - \frac{wt}{x_0}}.$$

Come discusso in generale, questa espressione filtra il moto quasiperiodico del sistema (i rimbalzi della particella tra i due muri), e fornisce direttamente un'informazione sul suo moto "globale", su tempi lunghi.

§ 3.1.2. Esempio 2: pendolo di lunghezza decrescente. —



Consideriamo un pendolo ideale consistente in una massa puntiforme m appesa all'estremo di un filo (di massa trascurabile) che pende da un piccolo buco nel soffitto.

Il pendolo viene lentamente tirato su, a velocità costante v , in modo che la sua lunghezza efficace ℓ diminuisca col tempo. Se A è l'ampiezza angolare (istantanea) delle oscillazioni del pendolo, che supponiamo avvenire sempre nello stesso piano verticale (non ci interessa considerare eventuali effetti di precessione), valgono inizialmente $v \ll A_0 \sqrt{g\ell_0}$ e $A_0 \ll 1$. Trovare, in funzione del tempo, l'ampiezza angolare $A(\ell)$.

Anche stavolta, come sempre, potremmo impostare il problema esatto tramite le equazioni del moto: passando a coordinate polari, con la condizione $r(t) = \ell_0 - vt$, la Seconda Legge di Newton si scriverebbe in componenti come

$$-m\dot{\theta}^2(r_0 - vt) = -T + mg \cos \theta \quad m(-2v\dot{\theta} + (\ell_0 - vt)\ddot{\theta}) = -mg \sin \theta,$$

dove T è la tensione del filo, dovuta in ultima analisi al meccanismo che tira su il pendolo. Poiché non siamo in grado di risolvere le due equazioni in maniera esatta (la seconda per trovare

$\theta(t)$ e dunque risolvere il moto, la prima per calcolare anche la tensione $T(t)$ in funzione del tempo), dobbiamo trovare un'altra strategia. Osserviamo che, se fosse $v = 0$, ci troveremmo di fronte alle consuete oscillazioni isocrone del pendolo, cioè a un comportamento periodico. Per v piccola (come espresso quantitativamente nel testo del problema), possiamo studiare l'evoluzione del sistema come una transizione continua e adiabatica tra oscillazioni successive, mediando le equazioni sui singoli periodi. Otteniamo così delle equazioni differenziali che legano tra loro le variazioni dei valori medi (nel senso specificato) dell'ampiezza delle oscillazioni, della lunghezza del pendolo e della tensione T .

Consideriamo un intervallino di tempo in cui il filo viene sollevato di $|d\ell| = -d\ell \ll \ell$. Il lavoro infinitesimo fatto sul sistema da chi sta sollevando il pendolo è $-\langle T \rangle d\ell$. Questo lavoro va eguagliato alla variazione dell'energia media del sistema. Poiché, in approssimazione di moto periodico con ampiezza angolare piccola, abbiamo delle oscillazioni armoniche, il valor medio dell'energia cinetica è dato da

$$\langle K \rangle \approx \frac{mg\ell A^2}{4},$$

essendo $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$ il quadrato della pulsazione delle oscillazioni e $A\ell$ la loro ampiezza. Per l'energia potenziale, che va presa rispetto al livello del soffitto, abbiamo

$$U = -mg\ell \cos \theta \approx mg\ell \left(\frac{\theta^2}{2} - 1 \right) \Rightarrow \langle U \rangle \approx -mg\ell + \frac{mg\ell A^2}{4},$$

dunque

$$-\langle T \rangle d\ell = d \left(\frac{mg\ell A^2}{2} - mg\ell \right) = mg\ell A dA - mg d\ell + \frac{mg A^2 d\ell}{2}.$$

Per trovare $\langle T \rangle$, cioè il valor medio della tensione in un'oscillazione, prendiamo la componente radiale dell'equazione del moto, ed espandiamo per piccole oscillazioni:

$$T \approx mg \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + m\ell \dot{\theta}^2,$$

di conseguenza

$$\langle T \rangle \approx mg \left(1 + \frac{A^2}{4} \right).$$

Sostituendo e riarrangiando, troviamo infine

$$\frac{3}{4} \frac{d\ell}{\ell} + \frac{dA}{A} = 0,$$

e, quindi,

$$\ell^3 A^4 = \ell_0^3 A_0^4.$$

Notiamo che questa relazione vale con approssimazione tanto peggiore quanto più decresce ℓ . Infatti, la condizione $A \ll 1$ perde di validità per $\ell \rightarrow 0$. Lo stesso discorso si sarebbe potuto fare nell'esempio precedente per $x \rightarrow 0$, in quanto viene a mancare l'ipotesi $T \left| \frac{d\lambda}{dt} \right| \ll |\lambda|$ (con $\lambda = x$). Più in generale, vale che, se delle disuguaglianze o approssimazioni valgono a un certo istante di tempo, è lecito assumere che lo saranno ancora negli istanti successivi, su tempi corti rispetto a quelli caratteristici di evoluzione del sistema, per continuità, e che le soluzioni trovate su tali basi abbiano validità locale. Tuttavia, in generale, non si può dire nulla sull'andamento dell'errore compiuto per tempi grandi, e nei problemi appena discussi abbiamo visto degli esempi in cui l'approssimazione diventa peggiore al crescere di t .

3.2 Integrale di Poincaré

Le strategie "euristiche" con cui abbiamo risolto i problemi finora incontrati trovano un'elaborazione sistematica e rigorosa nella Meccanica Hamiltoniana. Poiché la trattazione e le tecniche Hamiltoniane vanno molto al di là degli scopi di questa lezione (nonché, a ragion veduta, del livello richiesto e, spesso, accettato, nelle competizioni di Fisica pre-universitarie), ci limiteremo a esporre il risultato principale e a mostrare come la sua applicazione permetta di ritrovare alquanto velocemente le soluzioni faticosamente ottenute negli esempi proposti.

Dato un sistema unidimensionale descritto da una coordinata q e da un momento coniugato p , che dipende da un parametro λ restando costante il quale il moto del sistema è periodico (cioè, si ha $q(t) = q(t + T)$ e $p(t) = p(t + T)$ per qualche periodo T e per ogni tempo t), allora, se λ varia lentamente, cioè $\lambda(t)$ soddisfa $T \left| \frac{d\lambda}{dt} \right| \ll |\lambda|$, la quantità

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq,$$

dove l'integrale è calcolato su un periodo del sistema "imperturbato" (cioè a λ costante) si conserva al primo ordine in $\left| \frac{T}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right|$.

La quantità I è detta *invariante adiabatico*, o, talvolta, *integrale di Poincaré*. In generale, il *momento coniugato* a una coordinata q si definisce in Meccanica Lagrangiana e Hamiltoniana. Per quel che servirà sapere ora, se l'energia cinetica del sistema si scrive come $K(q, \dot{q}) = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2}$ e l'energia potenziale non dipende da \dot{q} , allora si ha:

$$p = m(q)\dot{q}.$$

Esempi familiari sono le coordinate cartesiane, in cui si ha $m(q) = m$ (indipendente dalla coordinata $q = x$) e quindi $p = m\dot{x}$, coincidente con l'espressione della quantità di moto, e le coordinate polari quando ci si restringe agli spostamenti angolari:

$$q = \theta, K = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} \Rightarrow m(\theta) = mr^2, p = mr^2\dot{\theta},$$

cioè, in questo caso p coincide con la componente z del momento angolare.

Alla luce di questo risultato, torniamo agli esempi precedenti. Nel primo, fissata la distanza x tra i due muri, abbiamo, scegliendo l'origine di q nel muro di sinistra,

$$0 \leq q \leq x, p = m\dot{q} \Rightarrow I = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^x m\dot{q}dq = \frac{mvx}{\pi},$$

da cui ritroviamo subito $xv = \text{cost}$.

Nel secondo, usando le coordinate polari e scrivendo, in regime di piccole oscillazioni, $\theta(t) = A \sin(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t)$, abbiamo

$$I = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A m\ell^2\dot{\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} m\ell^2 A^2 \left(\frac{g}{\ell}\right) \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) dt = \frac{mA^2\sqrt{g\ell^3}}{2}.$$

Da questa espressione deduciamo la conservazione di $\sqrt{\ell^3}A^2$, come atteso.

Come ultimo esempio, calcoliamo l'invariante adiabatico per un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω , la cui legge oraria è

$$x(t) = a \sin(\omega t) \Rightarrow \dot{x}(t) = a\omega \cos(\omega t),$$

quindi

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} ma^2\omega^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{ma^2\omega}{2} = \frac{E}{\omega},$$

dove E è l'energia dell'oscillatore. Supponiamo di avere una molla con costante elastica k lentamente variabile nel tempo (ad esempio, perché la molla è soggetta a riscaldamento). Allora troviamo una relazione tra l'ampiezza a e k data da

$$I = \frac{\sqrt{kma^2}}{2} \Rightarrow a^4 k = \text{cost.}$$

La relazione $I = \frac{E}{\omega}$ compare, in forma leggermente diversa, in meccanica quantistica, dove la quantizzazione degli osservabili rende gli invarianti adiabatici uno strumento molto potente per studiare sistemi in lenta evoluzione.

In generale, quando si incontrano problemi simili a quelli discussi in questa sezione, è bene cercare di studiarli con i metodi euristici che abbiamo cercato di illustrare, senza invocare subito l'invariante adiabatico.

— ESERCIZI —

Meccanica del corpo rigido

★☆☆☆☆ Esercizio 1 Momenti d'inerzia

Calcolare il tensore di inerzia dei seguenti oggetti, tutti di massa M , rispetto a un sistema di assi principali:

- sfera di raggio R , sia cava che piena;
- cilindro di altezza h e raggio R ;
- asta di lunghezza L ;
- prisma a base triangolare con lati a , b e c e altezza h ;
- cubo di lato L ;
- sfera di raggio R con cavità sferica di raggio r a distanza d dal centro.

★☆☆☆☆ Esercizio 2 Urto tra sfere

Una sfera A di massa m_A e raggio R è a riposo sul piano. Una seconda sfera (B) di massa m_B e raggio R colpisce la sfera A con velocità prima dell'urto v_0 e parametro d'impatto $b < 2R$. In questo caso il parametro di impatto b è definito come la distanza perpendicolare tra la traiettoria della sfera A e il centro della sfera B. Trovare le velocità finali di entrambe le sfere. Trascurare l'attrito.

★☆☆☆☆ Esercizio 3 Urto tra asta e pallina

Un'asta omogenea lunga l e di massa m , inizialmente a riposo in assenza di gravità, viene colpita da una massa puntiforme di massa m' a una distanza a dell'estremo superiore dell'asta ($0 < a < l/2$) con velocità prima dell'urto v_0 perpendicolare all'asta. Trovare la relazione fra le m , m' , a , l e v_0 per cui c'è un unico urto fra l'asta e la massa. Trascurare l'attrito.

★★☆☆☆ Esercizio 4 Asta che cade

Sia data un'asta omogenea lunga l appoggiata ad una parete, che forma un certo angolo $\theta_0 < \pi/2$ rispetto al pavimento. Improvvisamente sparisce l'attrito sul pavimento e sulla parete che teneva l'asta in posizione. Determinare a quale angolo avviene il distacco tra l'asta e la parete verticale.¹

★★☆☆☆ Esercizio 5 Matita che cade

Una matita, modellizzabile come asta rigida omogenea di massa m e lunghezza l , è tenuta in equilibrio sulla punta. Viene ora una piccola spinta iniziale. Nel caso in cui il tavolo in cui poggia sia privo d'attrito, si dimostri che la punta resta sempre in contatto con il tavolo e trovi la velocità angolare con cui la matita impatta il tavolo. Cosa cambia se invece il tavolo ha attrito infinito?

★★★☆☆ Esercizio 6 Tidal lock

¹Può essere utile fare il problema prendendo come polo il centro di massa, l'intersezione fra la parete e il pavimento, il punto (mobile) in cui la scala tocca il muro o il pavimento, o ancora un polo più furbo (quello per cui i momenti delle forze di contatto sono nulli).

È risaputo che la Luna mostra sempre, più o meno, la stessa faccia alla Terra. Questa curiosità non è una coincidenza, ma una semplice conseguenza delle forze di marea che agiscono tra la Terra e la Luna. Nel corso del tempo, le forze di marea hanno continuamente rallentato la rotazione della Luna asse fino a quando il periodo di quella rotazione è diventato uguale al periodo orbitale della Luna intorno alla Terra. È per la stessa ragione per cui la rotazione della Terra attorno al suo asse rallenta continuamente e la velocità orbitale della Luna sta ancora decrescendo.

1. Stimare il rapporto tra la diminuzione di energia cinetica della Terra e della Luna per unità di tempo.
2. Durante il programma Apollo (voli 11, 14 e 15), dei catadiottri (serie di specchi laser ad angolo cubo) sono stati posizionati sulla Luna. Secondo le misurazioni laser estremamente accurate rese possibili dalla presenza dei catadiottri, la distanza lineare della Luna dalla Terra è attualmente in aumento a una velocità di 3,8 cm per anno. Utilizzando questo dato, stimare la variazione della lunghezza di un giorno terrestre durante un anno.
3. Se il sistema Terra-Luna continuasse il suo moto indisturbato, come a risultato dell'effetto frenante delle forze di marea, dopo un tempo sufficientemente lungo, la Terra mostrerebbe sempre la stessa faccia alla Luna, cioè le rotazioni e i movimenti orbitali di questi due corpi sarebbero sincronizzati². Quante volte più lungo di oggi sarebbe un giorno della Terra e quanto più grande di oggi sarebbe la distanza Terra-Luna?

Si supponga che l'orbita della Luna rimanga circolare e si trascuri l'effetto di marea del Sole.

★★☆☆☆ **Esercizio 7 Disco da hockey**

Un disco piatto omogeneo (come un disco da hockey su ghiaccio) scivola e rotola su una superficie ghiacciata. A causa dell'attrito, entrambi i tipi di movimento decelerano e infine fermarsi. Quale dei due movimenti si ferma prima, la rotazione o lo scivolamento? Supponiamo che il disco preme uniformemente sul ghiaccio, che la forza di attrito tra due superfici non dipenda dalla loro velocità relativa e che resistenza dell'aria sia trascurabile.

★★★☆☆ **Esercizio 8 Matita che rotola**

Si modellizzi una matita lunga l come un prisma che ha per base un esagono regolare di lato $a \ll l$, e ha una massa M distribuita omogeneamente. Si pone ora la matita su un piano inclinato di un angolo θ con attrito infinito, con il lato lungo sempre alla stessa altezza. Viene quindi data una spinta alla matita che comincia a rotolare. Si assuma che le facce del prisma siano leggermente concave in modo che solo gli spigoli siano in contatto con il piano, ma che la concavità non abbia effetto sul momento d'inerzia.

1. Si dimostri che il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse centrale del prisma vale $I = \frac{5}{12}Ma^2$.
2. Si trovi la relazione fra la velocità angolare della matita appena prima che uno spigolo colpisca il tavolo e la velocità angolare immediatamente dopo l'urto. Domanda analoga per l'energia cinetica. Trovare ora l'energia cinetica minima appena dopo un impatto affinché possa avvenire l'impatto successivo. Trovare la velocità limite della matita. Si assuma che la matita tocchi il piano in ogni istante.
3. Qual è il minimo valore di θ per cui esiste una velocità limite non nulla? Qual è il valore massimo di θ per cui la matita rimane sempre in contatto con il piano?

²In realtà, prima che questo possa accadere, il Sole esploderà in una gigante rossa.

★★☆☆☆ **Esercizio 9 Teorema della Racchetta**

Dimostrare che, in una trottola asimmetrica (con $I_1 < I_2 < I_3$), le rotazioni attorno a uno degli assi principali estremali (cioè quelli con $I = I_1$ o $I = I_3$) sono stabili, mentre quelle attorno all'asse intermedio sono instabili. Trovare, per i primi due, la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio.

★☆☆☆☆ **Esercizio 10 Quanti assi principali?**

Dimostrare che, in una trottola simmetrica, fissato un polo per il tensore d'inerzia, qualunque coppia di assi mutuamente ortogonali passanti per tale polo e appartenenti al piano definito dai due assi principali con lo stesso momento d'inerzia può essere scelta come assi principali al posto dei due dati. Cosa si può dire nel caso di una trottola sferica?

★★☆☆☆ **Esercizio 11 More Puzzling Physics Problems 53**

Una palla da biliardo, inizialmente a riposo su un tavolo da biliardo, viene colpita in un suo punto T . Siano O il centro della palla e P il suo punto di contatto col tavolo: allora l'impulso impresso alla pallina giace nel piano cui appartengono T , O e P . Trovare l'angolo che deve formare tale impulso con l'orizzontale affinché:

1. I moti traslatorio e rotatorio della pallina risultanti terminino contemporaneamente;
2. La pallina rotoli senza scivolare, qualunque sia il coefficiente di attrito tra essa e il tavolo.

Assumere che, durante il colpo, non ci sia slittamento tra l'asta e la pallina da biliardo.

★★☆☆☆ **Esercizio 12 Angolo di rotazione**

Una disco piatto omogeneo di massa m e raggio r può ruotare sul piano senza attrito. Un bambino di massa m' sale sul disco dove c'è un segno S e fa un giro completo lungo il bordo del disco tornando in S . Dove si trova il bambino rispetto al punto dove è salito? Di quale angolo ha ruotato il disco rispetto al suo centro?

★★★☆☆ **Esercizio 13 Dipolo in campo magnetico**

Possiamo schematizzare un dipolo elettrico come una sbarretta rigida di lunghezza \vec{l} ai cui capi sono attaccate due cariche, una $+q$ e l'altra $-q$. Il verso di \vec{l} è fatto in modo che il vettore vada dalla carica negativa a quella positiva. Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$.

1. Leggi di conservazione.
 - Calcolare la forza totale agente sul dipolo, e il momento torcente rispetto al centro di massa. Scrivere le equazioni del moto per il centro di massa del dipolo e per la rotazione attorno al centro di massa.
 - Dalle equazioni del moto trovare la quantità di moto modificata che si conserva. Denotarla con \vec{P} . Scrivere la conservazione dell'energia meccanica totale E .
 - Mostrare che la quantità definita come

$$J = (\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \vec{B}$$

è una costante del moto (I è il momento di inerzia rispetto al centro di massa).

2. Moto nel piano perpendicolare a \vec{B} .

- Supponiamo che all'istante iniziale il centro di massa del dipolo sia fermo nell'origine, \vec{l} punti nella direzione x e la velocità angolare iniziale sia $\omega_0 \hat{z}$. Se ω_0 è minore di un certo valore critico ω_c , il dipolo non compie un giro completo rispetto al centro di massa. Trovare ω_c .
- Per un generico $\omega_0 > 0$ qual è la massima distanza d_{\max} nella direzione x , che il centro di massa può raggiungere?
- Qual è la tensione sulla sbarretta in funzione di ω ?

★★☆☆☆ Esercizio 14 Altalena ideale

Studiamo le piccole oscillazioni di un'altalena. Consideriamo una sbarretta unidimensionale di lunghezza d e massa m uniformemente distribuita, ai cui estremi sono attaccati due fili leggerissimi di lunghezza L . I loro altri due capi sono attaccati a due punti del soffitto la cui distanza relativa è d . La gravità è \vec{g} . Ruotiamo l'altalena di un angolo ϕ piccolo (quantificare tale condizione) attorno a un asse verticale passante per il suo centro nella posizione di equilibrio, e poi la rilasciamo. Trovare la pulsazione delle piccole oscillazioni risultanti.

★★★★☆☆ Esercizio 15 Monociclo

Un monociclista viaggia su un monociclo il cui punto più basso percorre una traiettoria circolare piana di raggio R . Monociclista e monociclo assieme possono essere modellizzati come un'asta rigida e uniforme di lunghezza L , inclinata di un angolo θ verso il centro della circonferenza rispetto alla verticale. Supponendo che il coefficiente d'attrito fra monociclo e terreno sia abbastanza alto, qual è la velocità angolare alla quale viene percorsa la traiettoria? La gravità è \vec{g} .

★★★★☆☆ Esercizio 16 Puzzling Physics Problems 69

Tre fili di lunghezze h_1 , h_2 e h_3 sono attaccate per un estremo ai tre vertici di un triangolo omogeneo di massa m , mentre l'altro estremo di ciascuna è attaccato a uno stesso punto del soffitto. Ognuno dei tre fili è teso. Trovare i rapporti tra le tensioni dei tre fili.

★★★★☆☆ Esercizio 17 Palla magnetica - EuPhO 2019/2

Una sfera omogenea di massa m e raggio R possiede una densità di carica uniforme, tale che la carica totale sia Q . Essa viene posta su un piano orizzontale e la si mette in moto in maniera tale che sia in regime di puro rotolamento, con velocità del centro di massa v_0 . Il piano è sufficientemente scabro da non farla slittare, ed è presente un campo magnetico costante e uniforme di modulo B e diretto verso l'alto. Descrivere il moto risultante della palla.

★★★★★ Esercizio 18 Giradischi massivo - APhO 2023/2B

Una sfera omogenea di massa m e raggio R è poggiata su un giradischi orizzontale, il quale ha momento d'inerzia I_d rispetto ad un asse passante per il suo centro e ortogonale alla sua superficie, che al tempo $t = 0$ ruota a velocità angolare Ω_0 . La sfera rotola senza strisciare sul giradischi. Quali sono le possibili traiettorie per il centro di massa della sfera?

★★★★★ Esercizio 19 Pallina in un tubo - MPPP 57

Una pallina omogenea di massa m , raggio r viene lanciata dentro un tubo cilindrico rigido verticale di raggio R . Si assuma che l'attrito tra la pallina e il tubo sia sempre sufficientemente alto da permettere puro rotolamento. Se la velocità iniziale v_0 è orizzontale e sufficientemente alta, la traiettoria della pallina comincia ad oscillare, pur rimanendo sempre in contatto con la parete. Quanto vale il periodo delle oscillazioni e la quota più bassa raggiunta nel moto successivo?

★★★★☆ Esercizio 20 Giradischi pendente - MPPP 56

Un giradischi ruvido è poggiato sopra ad un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale e ruota ad una velocità angolare costante Ω . Una sfera omogenea di massa m e raggio R è poggiata su di esso ed è libera di muoversi senza strisciare. Il sistema è immerso nel campo gravitazionale terrestre. Si nota che, per un certo valore della velocità iniziale, la palla percorre una traiettoria rettilinea: qual è questo valore?

Invarianti adiabatici

★★★★☆ Esercizio 21 USAPhO 2015/A3

Un parallelepipedo molto lungo di massa m_1 è posto su una superficie orizzontale priva di attrito. Un blocco di massa m_2 si trova sopra il parallelepipedo, collegato con una molla di costante elastica k tenuta orizzontale a un muro verticale. Il coefficiente di attrito (sia statico che dinamico) tra i due oggetti è μ . Si tratti il moto dei due corpi come unidimensionale. Si assuma che il blocco non cada mai dal parallelepipedo. Inizialmente, entrambi gli oggetti sono fermi, e il blocco è spostato di una lunghezza A dalla posizione di equilibrio e successivamente rilasciato.

- Si trovi il valore limite A_c di A tale che, nel moto seguente, non ci sia dissipazione di energia in attrito.
- Assumendo ora $A \gg A_c$, si determini la variazione ΔA dell'ampiezza delle oscillazioni del blocco rispetto alla sua posizione di equilibrio ad ogni oscillazione completa.

★★★★☆ Esercizio 22 Tetherball

Una piccola massa m è appesa a un estremo di un filo di lunghezza L_0 e massa trascurabile, la cui altra estremità è attaccata a un palo verticale sottile (ossia, di raggio $r \ll L_0$). Inizialmente, il filo è del tutto srotolato e tenuto dritto in modo da formare un angolo α_0 con la verticale, dopodiché alla massa viene impressa una velocità orizzontale tale che il suo moto sia inizialmente approssimabile a un moto circolare attorno al palo. Assumendo che il filo non scivoli lungo il palo, trovare l'angolo α tra il filo e la verticale quando la lunghezza della parte non arrotolata del filo è divenuta L .

★★☆☆☆ Esercizio 23 Muro tra due palle

Consideriamo una versione modificata dell'Esempio 1. Si hanno due muri verticali immobili, posti a distanza $2L$ l'uno dall'altro, separati da una superficie piana e priva di attrito. A eguale distanza tra i due è posto un terzo muro verticale, mobile e di massa M . In ciascuna delle due regioni risultanti è presente una pallina di massa $m \ll M$ che rimbalza tra il muro mobile e il corrispondente muro immobile. Le due palle hanno inizialmente velocità approssimativamente uguale a v_0 . Se il muro mobile viene spostato di $s \ll L$ dalla posizione di equidistanza dai muri fissi, determinare il periodo delle sue oscillazioni risultanti attorno alla posizione di equilibrio.

★★★★☆ Esercizio 24 Due pulegge

Su due pulegge ideali poste alla stessa altezza da terra scorre uno stesso filo di massa trascurabile, posto in maniera tale che, inizialmente, esso penda per un'uguale lunghezza ℓ da entrambe. A ciascuno dei due estremi è attaccata una piccola massa m , ed è presente la gravità terrestre \vec{g} . La massa di destra viene spostata di un piccolo angolo $\theta_0 \ll 1$, dopodiché il sistema viene lasciato evolvere. Qual è la velocità della massa di sinistra quando la lunghezza del filo sporgente da sinistra è diventata $\frac{\ell}{2}$?

★★★★☆ Esercizio 25 Physics Cup 2017/3

Consideriamo un gas di elettroni a bassa densità immerso in un campo magnetico uniforme di modulo B a temperatura T . Il modulo del campo magnetico viene dapprima portato lentamente da B a $2B$, cioè con $\frac{dB}{dt} \ll \frac{B^2 e}{m}$, dove e è la carica elementare e m è la massa dell'elettrone. Attendiamo che il gas raggiunga l'equilibrio termico, dopodiché riportiamo altrettanto lentamente il campo magnetico da $2B$ a B e lo lasciamo di nuovo termalizzare. Qual è la temperatura finale del gas?

★★☆☆☆ **Esercizio 26 Pendolo su piano inclinato**

Sia dato un piano liscio inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, a un punto del cui spigolo superiore è appeso un pendolo ideale di massa m e lunghezza ℓ . La distanza tra la base del piano e il suo spigolo superiore è d . La gravità è \vec{g} . Il pendolo, che poggia sul piano, è in regime di piccole oscillazioni, e l'angolo α viene variato lentamente. Trovare l'ampiezza angolare A delle piccole oscillazioni in funzione di α , conoscendo il valore A_0 che assume quando $\alpha = \alpha_0$.

★★☆☆☆ **Esercizio 27 Polvere di stelle**

Un pianeta di massa m inizialmente orbita attorno ad una stella di massa $M \gg m$, seguendo un'orbita ellittica di periodo T . Il sistema è immerso in una nube statica di polvere interstellare a bassa densità, la quale si accumula lentamente sulla superficie del pianeta man mano che questo si sposta. Quanto vale il periodo dell'orbita quando la massa del pianeta è raddoppiata?

Può essere utile il seguente integrale, valido per $|\alpha| < 1$:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin x}{1 + \alpha \cos x} \right)^2 dx = \frac{2\pi}{\alpha^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} - 1 \right)$$

— BIBLIOGRAFIA —

La maggior parte del materiale presentato sulla parte di corpo rigido è stato preso dai seguenti testi che consigliamo di consultare per approfondirne e raffinarne la comprensione:

- S. Focardi, I. Massa, A. Uguzzoni, M. Villa. *Fisica Generale, Meccanica e termodinamica*, seconda edizione;
- A. Romano. *Introduzione alla meccanica classica*;
- L. D. Landau, E. M. Lifšits. *Fisica Teorica I: Meccanica*;
- T. Levi Civita, U. Amaldi. *Lezioni di Meccanica Razionale*, volumi primo e secondo;
- D. Morin. *Introduction to Classical Mechanics*.