

# Fenomeni Ondulatori: Ottica Fisica e Meccanica Quantistica

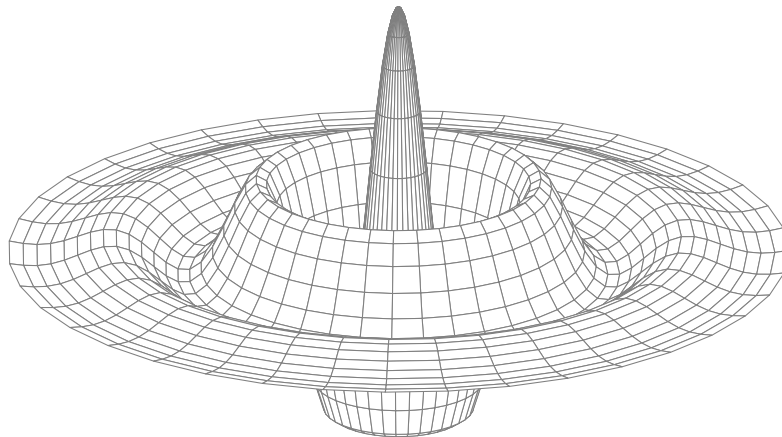
Matteo Caraci\*  
Martino Barbieri†



24 febbraio 2024

## Sommario

In questa lezione ricaveremo le leggi dell'ottica fisica a partire da modelli di sistemi meccanici, per analogia; successivamente analizzeremo la propagazione di onde nel campo elettromagnetico. Studieremo tipici fenomeni ondulatori come la diffrazione e l'interferenza. Infine ricaveremo le leggi principali della meccanica quantistica con un approccio semiclassico, approfondendo la relazione tra l'ottica ondulatoria e la fisica quantistica.



---

\*matteo.caraci@sns.it

†martino.barbieri@sns.it

# — INDICE —

---

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Onde meccaniche</b>	<b>3</b>
2.1	★★★★★ Oscillatori accoppiati . . . . .	3
2.2	★★★★☆ Passaggio al continuo: corda vibrante . . . . .	5
2.3	★★☆☆☆ Equazione d’Onda di D’Alembert . . . . .	6
2.4	★★★★★ Interfacce e condizioni al bordo . . . . .	7
2.5	★★★★☆ Bilanci energetici . . . . .	8
2.6	★★☆☆☆ Introduzione alla notazione complessa, analisi armonica . . . . .	10
2.7	★★☆☆☆ Metodo delle funzioni di Green . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Onde elettromagnetiche</b>	<b>12</b>
3.1	★★☆☆☆ Dalle equazioni di Maxwell all’equazione delle onde . . . . .	12
3.2	★★★★☆ I potenziali . . . . .	12
3.3	★★☆☆☆ Invarianza di gauge . . . . .	13
3.4	★★☆☆☆ Cenni di formulazione covariante . . . . .	14
3.5	★★★★☆ Polarizzazioni . . . . .	15
3.6	★★★★☆ Bilancio di energia e quantità di moto . . . . .	16
3.7	★★★★★ Legge di Malus . . . . .	18
3.8	★★★★★ Interferenza . . . . .	18
3.9	★★★★★ Onde elettromagnetiche nella materia . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Meccanica quantistica</b>	<b>21</b>
4.1	★★★★☆ Radiazione di corpo nero . . . . .	21
4.2	★★★★★ Effetto fotoelettrico . . . . .	22
4.3	★★★★☆ Dualità onda-particella, relazione di DeBroglie . . . . .	22
4.4	★★☆☆☆ Principio di corrispondenza, matter fields e osservabili . . . . .	23
4.5	★★★★☆ Equazione di Schrödinger . . . . .	26
4.6	★★☆☆☆ Teorema di Ehrenfest . . . . .	26
4.7	★★☆☆☆ Importanza delle boundary conditions . . . . .	27
4.8	☆☆☆☆☆ Meccanica quantistica relativistica . . . . .	28
4.9	★★★★☆ Approssimazione semiclassica: WKB(J) . . . . .	28
4.10	☆☆☆☆☆ Trasformazioni infinitesime . . . . .	29
4.11	★★★★☆ Relazione di indeterminazione di Heisenberg . . . . .	31
4.12	☆☆☆☆☆ Path Integral, ossia la funzione di Green della QM . . . . .	31
4.13	★★★★☆ Statistica: fermioni e bosoni . . . . .	32
<b>A</b>	<b>Complementi di Analisi</b>	<b>34</b>
A.1	Analisi complessa e Teorema dei residui . . . . .	34
A.2	Metodo del Punto di Sella . . . . .	35
A.3	Qualche identità vettoriale . . . . .	36
<b>E</b>	<b>Esercizi</b>	<b>37</b>

## SEZ. 1 — INTRODUZIONE

---

Un'onda è una perturbazione che si propaga nello spazio e nel tempo. È un concetto molto generale, e in effetti molte leggi fisiche trovano spiegazione in fenomeni di natura ondulatoria.

In modo astratto, per descrivere un'onda, useremo il seguente setup:

- lo spazio  $\mathcal{M}$ , che nel nostro caso sarà  $\mathbb{R}^D$ ;
- un campo  $X$ , ovvero la grandezza che viene perturbata. Può essere un campo scalare, vettoriale o anche tensoriale, non ha importanza. Ogni punto di  $\mathcal{M}$  ha un corrispondente valore del campo  $X$ ; quindi, matematicamente, un campo è una funzione  $X : \mathcal{M} \rightarrow V$ , dove<sup>1</sup>  $V \simeq \mathbb{R}^n$  oppure  $\mathbb{C}^n$ ;
- le equazioni differenziali che descrivono il campo.

Alcune onde sono per esempio:

- le onde sonore, per le quali  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$  è lo spazio nel mezzo in cui le onde si propagano,  $V = \mathbb{R}$  e  $p(\mathbf{x}) \in V$  è il campo che nel punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  ci dà la pressione del materiale;
- le onde meccaniche, per esempio le oscillazioni di una corda, per cui  $\mathcal{M} = \mathbb{R}$  è la coordinata di un punto sulla corda quando la corda è all'equilibrio,  $V = \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{y}(x) \in V$  è lo spostamento del segmento di corda  $x$  dalla posizione di equilibrio; siccome lo spostamento è una grandezza vettoriale, possiamo scomporre la perturbazione in una parte parallela alla direzione di propagazione (che chiameremo **onda longitudinale**) e in una parte ortogonale a essa (**onda trasversale**).
- le onde su uno specchio d'acqua, per cui  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$  è la superficie dell'acqua,  $V = \mathbb{R}$  e il campo  $h(\mathbf{x}) \in V$  è l'altezza del liquido nel punto  $\mathbf{x}$ .
- le onde elettromagnetiche, per cui  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$  è lo spazio in cui viviamo e i campi sono  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , i campi elettrico e magnetico, e ciascun campo assume valori in  $V = \mathbb{R}^3$ ;
- le onde gravitazionali, dove a subire la perturbazione è il tensore metrico<sup>2</sup>  $g_{\mu\nu}$ , che è una matrice simmetrica  $D \times D$ ;
- persino le particelle nella Teoria Quantistica dei campi sono onde!

Analizzeremo l'equazione d'onda e ci divertiremo a vederla emergere in molti ambiti.

In queste dispense, accanto a ciascun titolo è indicato quanto tale sezione sia utile ai fini delle olimpiadi di fisica, con un punteggio da 0 ★ (molto poco utile) a 5 ★ (è assolutamente fondamentale). Molti argomenti, seppur totalmente inutili ai fini olimpionici, sono appassionanti e pieni di fisica, quindi vi consiglio di darci un occhio, ma di non perderci troppo tempo!

Vi auguro buona lettura.

## SEZ. 2 — ONDE MECCANICHE

---

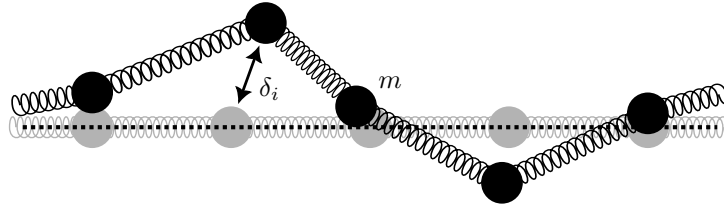
L'onda meccanica più semplice è la vibrazione di una corda tesa. Cerchiamo di modellarla rivedendo brevemente in un'altra *ottica* gli oscillatori meccanici accoppiati.

### 2.1 ★★★★★ Oscillatori accoppiati

Vogliamo modellizzare una corda vibrante. Modellizziamola come un sistema di  $N$  corpi di massa  $m$ , in cui l' $i$ -esimo corpo è legato all' $(i+1)$ -esimo da una molla ideale senza massa di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla, come mostrato in fig. 1. Leghiamo la prima e l'ultima molla a due chiodi distanti  $D$ . Se non sono presenti altre forze, la posizione di equilibrio delle masse è quella in cui sono allineate ed equidistanti dalla precedente e dalla successiva. Ci interessiamo delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio.

<sup>1</sup>Formalmente la struttura matematica che ci serve è quella di **spazio vettoriale**. L'uguaglianza è intesa nel senso di isomorfismo una volta scelta una base. Se siete curiosi, date un occhio alle dispense di Algebra Lineare dell'anno scorso!

<sup>2</sup>Non preoccupatevi se non sapete che cos'è, nemmeno io so cosa sia ma questo non mi ha impedito di scrivere queste dispense.

Figura 1:  $N$  masse legate, modello di corda vibrante.

Scriviamo le equazioni della dinamica. Indicando con  $\mathbf{x}_0 = O$  l'origine degli assi, che collochiamo sul primo chiodo, e con  $\mathbf{x}_{N+1} = (D, 0, 0)$  la posizione del secondo chiodo, la seconda legge di Newton si scrive

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = k\mathbf{x}_0 + k\mathbf{x}_2 - 2k\mathbf{x}_1 \\ \dots \\ m\ddot{\mathbf{x}}_i = k\mathbf{x}_{i-1} + k\mathbf{x}_{i+1} - 2k\mathbf{x}_i \\ \dots \\ m\ddot{\mathbf{x}}_N = k\mathbf{x}_{N-1} + k\mathbf{x}_{N+1} - 2k\mathbf{x}_N. \end{cases} \quad (2.1)$$

La situazione di equilibrio  $\mathbf{x}_i^{(0)} = \frac{i}{N+1}(D, 0, 0)$  non è molto interessante, quindi ce ne liberiamo con la sostituzione  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^{(0)} + \delta_i$ .

Cominciamo col capire la fisica che sta nascosta nel sistema. Quando tutte le masse sono all'equilibrio, dando un *kick* alla  $i$ -esima massa, essa si muoverà un poco; muovendosi, tirerà le masse vicine, le quali cercano di riportarla alla condizione di equilibrio. Tuttavia, quando quelle vicine si saranno spostate, a loro volta trascineranno le successive, e così via. Abbiamo dunque una perturbazione che si propaga, ovvero un'onda. Nel linguaggio della sezione precedente:  $\mathcal{M} = \{1, \dots, N\}$  e il campo è formato dagli spostamenti  $\delta_i$ .

Per semplicità, supponiamo che le masse siano vincolate a muoversi lungo  $\hat{y}$ . Il caso generale si ottiene sommando le perturbazioni lungo le differenti direzioni.

Notiamo due fatti importanti:

- stiamo perturbando un sistema in **equilibrio stabile**, che tende a tornare alla situazione imperturbata. Se non fosse così, non si potrebbero avere onde "stabili";
- le interazioni tra le masse sono **locali**, l'onda propaga da una massa alla successiva tramite le molle, senza azioni a distanza.

Ritroveremo questo pattern in più situazioni.

Veniamo al dunque. Bisogna risolvere un sistema di equazioni differenziali accoppiate. In generale, questo è un problema matematico difficile, che potenzialmente richiede molti calcoli per essere risolto "brute-force". Notiamo però i seguenti fatti:

- notiamo che il sistema è **lineare**, dunque la somma di soluzioni è soluzione. Se troviamo abbastanza soluzioni linearmente indipendenti, possiamo sperare<sup>3</sup> di trovare la generica soluzione come **combinazione lineare** di quelle che abbiamo trovato. Se questo succede, si dice che il set di funzioni trovate è una **base completa**.
- per cercare queste soluzioni, supponiamo che le **funzioni di base** siano esprimibili come prodotto di una funzione  $T(t)$  che dipende solo dal tempo per una  $\tilde{\delta}(j)$  che dipende solo dall'indice della coordinata:

$$\delta_j(t) = T(t) \cdot \tilde{\delta}(j).$$

Sostituiamo questa espressione nell' $i$ -esima equazione del sistema ed effettuiamo la sostituzione  $k = m\omega^2$ :

$$\tilde{\delta}(i)\ddot{T}(t) = -\omega^2[2\tilde{\delta}(i) - \tilde{\delta}(i-1) - \tilde{\delta}(i+1)]T(t),$$

ovvero, dividendo per  $T(t)\tilde{\delta}(i)$ :

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2 \frac{2\tilde{\delta}(i) - \tilde{\delta}(i-1) - \tilde{\delta}(i+1)}{\tilde{\delta}(i)}, \quad (2.2)$$

<sup>3</sup>Questa cosa succede praticamente sempre; preoccuparsi di questo dettaglio va ben oltre i nostri scopi.

- Il LHS è funzione solo di  $t$ , mentre il RHS è funzione solo di  $i$ . Segue dunque che entrambe le espressioni sono uguali a una costante, indipendente da  $t$  e da  $i$ . Chiamiamo  $-\Omega^2$  questa costante<sup>4</sup>. Otteniamo  $T(t) = T_0 e^{\pm i\Omega t}$ . Si tratta ora di risolvere il sistema

$$\begin{cases} -\frac{\Omega^2}{\omega^2} \tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_2 - 2\tilde{\delta}_1 \\ \dots \\ -\frac{\Omega^2}{\omega^2} \tilde{\delta}_i = \tilde{\delta}_{i-1} + \tilde{\delta}_{i+1} - 2\tilde{\delta}_i \\ \dots \\ -\frac{\Omega^2}{\omega^2} \tilde{\delta}_N = \tilde{\delta}_{N-1} + \tilde{\delta}_{N+1} - 2\tilde{\delta}_N. \end{cases}$$

- Questo è un sistema lineare omogeneo, quindi  $\tilde{\delta}(i) = 0, \forall i$  è soluzione. Se vogliamo avere soluzioni non banali, dobbiamo imporre che il sistema non determini univocamente  $\tilde{\delta}(i)$ , ovvero che sia indeterminato. Questo può essere fatto in vari modi, per esempio con il metodo di Cramer, dobbiamo imporre che il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \end{pmatrix}$$

sia nullo.

- Il determinante è un polinomio di  $N$ -esimo grado in  $\Omega^2$ , quindi il sistema ammette  $N$  frequenze proprie di oscillazione, dette **autofrequenze**, o **eigenfrequencies** per gli anglofoni, mentre le soluzioni  $\tilde{\delta}(i)$  sono dette **autofunzioni** (o **eigenfunctions**) del sistema.

In questo caso di elevata simmetria, le soluzioni per  $\tilde{\delta}(i)$  si possono claimare facilmente:

$$\tilde{\delta}(i) = A \sin(K \cdot i + \phi_0),$$

e imponendo la condizione di raccordo  $\delta_0 = \delta_{N+1} = 0$  si trova con qualche conto che la  $n$ -esima soluzione è data da

$$\begin{cases} \phi_0 = 0 \\ K = \frac{n}{N+1} \pi, \quad n \in \mathbb{N} \\ \Omega^2 = 2\omega^2(1 - \cos K) \end{cases} \quad (2.3)$$

La dimostrazione di queste formule è lasciata come esercizio al lettore (es. 4).

## 2.2 ★★★★★☆ Passaggio al continuo: corda vibrante

Cerchiamo ora di ottenere un modello per una corda continua, ovvero nel limite di  $N \rightarrow \infty$ . Notiamo che non possiamo svolgere in maniera banale questo limite, perché se mandiamo  $N$  a infinito tenendo costante  $\omega$  otteniamo risultati sconcertanti:  $\Omega = 0, \delta(t, x) = 0$ .

Questo sarebbe pure fisicamente scorretto: la massa totale della corda,  $Nm$  deve tendere a un valore finito  $M$ ! La prima correzione che ci può venire in mente è di fare la sostituzione

$$m \mapsto \frac{M}{N}.$$

Tuttavia questo non è ancora sufficiente. In effetti bisogna pure fare il limite tenendo fissata la tensione sulla corda. Questo vuol dire che  $k$  deve scalare<sup>5</sup> linearmente con  $N$ . All'equilibrio, tramite la Legge di Hooke si ottiene facilmente che  $k = \frac{NT}{D}$ , dove  $T$  è la tensione della corda.

<sup>4</sup>Dove  $\Omega$  può in generale essere complessa.

<sup>5</sup>Per maggiori dettagli, si veda l'es. 5.

Ora finalmente possiamo effettuare il limite con tranquillità. Chiamando  $\Delta x = \frac{D}{N+1}$  lo spazio tra una massettina e la successiva, troviamo che il sistema 2.1 diventa un'equazione differenziale e prende la forma

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}(t, x) &= \frac{TD}{M} \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\delta(t, x + \Delta x) - \delta(t, x)}{\Delta x} - \frac{\delta(t, x) - \delta(t, x - \Delta x)}{\Delta x} \right) \\ &\simeq \frac{TD}{M} \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{d\delta}{dx}(t, x + \Delta x/2) - \frac{d\delta}{dx}(t, x - \Delta x/2) \right) \simeq \frac{TD}{M} \frac{d^2\delta}{dx^2}(t, x). \end{aligned}$$

Notate che  $M/D$  e  $T$  sono grandezze intensive, quindi la corda può essere allungata a piacere! Come prima, possiamo trovare le soluzioni stazionarie tramite separazione di variabili.

$$\delta_n(t, x) = A \sin\left(n\pi\sqrt{\frac{T}{MD}} t + \varphi_0\right) \sin\left(\frac{n\pi}{D} x\right).$$

### 2.3 ★★☆☆☆ Equazione d'Onda di D'Alembert

La precedente equazione, a meno della sostituzione<sup>6</sup>  $v = \sqrt{\frac{TD}{M}}$ , può essere scritta nella forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

e, introducendo il **laplaciano**<sup>7</sup>

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

arriviamo alla sua naturale generalizzazione  $d$ -dimensionale

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Questa si chiama **equazione di D'Alembert** o **equazione delle onde**. Come esercizio (es. 2) potete verificare che questa descrive un'onda elastica in una membrana  $d$ -dimensionale.

Studiamo per semplicità il caso 1-dimensionale, in più dimensioni valgono considerazioni del tutto analoghe. Per la regola della catena e per il Teorema di Schwarz<sup>8</sup>, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi \\ &= \left( \frac{\partial(x+vt)}{\partial x} \Big|_{vt} \frac{\partial}{\partial(x+vt)} \Big|_{x-vt} + \frac{\partial(x-vt)}{\partial x} \Big|_{vt} \frac{\partial}{\partial(x-vt)} \Big|_{x+vt} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial(x+vt)}{\partial vt} \Big|_x \frac{\partial}{\partial(x+vt)} \Big|_{x-vt} - \frac{\partial(x-vt)}{\partial vt} \Big|_x \frac{\partial}{\partial(x-vt)} \Big|_{x+vt} \right) \times \\ &\quad \times \left( \frac{\partial(x+vt)}{\partial x} \Big|_{vt} \frac{\partial}{\partial(x+vt)} \Big|_{x-vt} + \frac{\partial(x-vt)}{\partial x} \Big|_{vt} \frac{\partial}{\partial(x-vt)} \Big|_{x+vt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial(x+vt)}{\partial vt} \Big|_x \frac{\partial}{\partial(x+vt)} \Big|_{x-vt} + \frac{\partial(x-vt)}{\partial vt} \Big|_x \frac{\partial}{\partial(x-vt)} \Big|_{x+vt} \right) \psi \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial(x-vt)} \Big|_{x+vt} \frac{\partial}{\partial(x+vt)} \Big|_{x-vt} \psi, \end{aligned}$$

ossia, in termini di  $\xi = x + vt$ ,  $\eta = x - vt$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi = 0.$$

<sup>6</sup>Vi ricorda qualcosa questa formula? *Spoiler*: pensate alla corda tesa.

<sup>7</sup>I matematici indicano il laplaciano col simbolo  $\Delta$ . *We don't do that here*.

<sup>8</sup>Sotto opportune condizioni di regolarità, le derivate parziali commutano, ossia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

La generica soluzione è la somma tra una funzione solo di  $\xi$  e una solo di  $\eta$ . Chiamiamo  $\psi_L(\xi)$  e  $\psi_R(\eta)$  due funzioni qualunque. Abbiamo allora che

$$\psi(x, t) = \psi_L(x + vt) + \psi_R(x - vt)$$

è una soluzione.  $\psi_L$  e  $\psi_R$  sono fisicamente onde che si muovono verso sinistra e destra, rispettivamente. Per convincercene, per esempio, consideriamo solo  $\psi_R$  e prendiamo una funzione piccata, come una gaussiana

$$\psi_R = e^{-\frac{1}{2}(x-vt)^2}.$$

Il picco è caratterizzato dall'equazione  $\eta = 0$ . Questa è una relazione che lega  $x$  e  $t$ . Per calcolare la velocità a cui si muove il picco è sufficiente calcolarsi esplicitamente  $x(t)$  e poi fare la derivata.

$$\eta = 0 \tag{2.4}$$

$$x - vt = 0 \tag{2.5}$$

$$x = vt, \tag{2.6}$$

da cui si ottiene che la velocità di propagazione dell'onda è proprio  $+v\hat{x}$ ! Analogamente si dimostra che l'onda  $\psi_L$  propaga con velocità  $-v\hat{x}$ .

In  $d$  dimensioni, per ogni direzione<sup>9</sup>  $\hat{k}$  c'è una soluzione  $\psi_{\hat{k}}$  che propaga con velocità  $v\hat{k}$ , che è quindi solo funzione di  $\hat{k} \cdot \mathbf{x} - vt$ . La generica soluzione è una combinazione lineare delle soluzioni:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int_{S^{d-1}} d^{d-1}\hat{k} \psi_{\hat{k}}(\hat{k} \cdot \mathbf{x} - vt).$$

L'equazione d'onda può essere risolta tramite separazione di variabili, in modo analogo a quanto fatto nella sezione precedente. Arriviamo allora a scrivere i modi normali nella forma

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}.$$

L'equazione d'onda è una **relazione di dispersione**, che significa che ci dà una relazione tra  $\mathbf{k}$  e  $\omega$  per i modi normali.

## 2.4 ★★★★★ Interfacce e condizioni al bordo

Torniamo all'esempio della corda vibrante. Nelle sezioni precedenti, siccome la corda elastica aveva gli estremi vincolati dai chiodi, abbiamo imposto  $\delta(t, 0) = \delta(t, D) = 0$ .

In generale, quando abbiamo un'equazione differenziale in una regione di spazio, dobbiamo sempre specificare come si comportano le soluzioni ai bordi di questa regione oppure quale sia il loro andamento asintotico. Questa scelta chiaramente influenza le soluzioni di base che vengono adottate; è quindi importante assicurarsi di fare un'analisi corretta!

Esempi di condizioni al bordo usate frequentemente sono:

- campo asintoticamente noto (spesso nullo) per  $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ ;
- campo noto (spesso nullo) sul bordo di una regione di spazio (*condizioni di Dirichlet*);
- campo con derivata direzionale normale al bordo nota, spesso nulla (*condizioni di Von Neumann*);
- campo con valore e derivata direzionale normale note sul bordo (*condizioni di Cauchy*);
- campo con egual valore e derivate sui punti opposti del bordo (*condizioni periodiche*).

Queste equazioni sono dettate solo dalla fisica del problema, e vanno costruite *ad hoc* per ogni specifica situazione fisica.

Vediamo un esempio: supponiamo di avere come prima una corda elastica lunga  $D$  con gli estremi vincolati in  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_{N+1}$  e i cui punti sono vincolati a muoversi lungo l'asse  $\hat{y}$ . Supponiamo però che stavolta la densità lineare di massa della corda, a riposo, sia  $\sigma_L$  per  $0 < x < D/2$  e  $\sigma_R$  per  $D/2 < x < D$ . Le equazioni che regolano la dinamica, diventano quindi

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{D}{2} & \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} - \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{D}{2} < x < D & \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} - \frac{1}{v_R^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = 0 \end{cases}.$$

<sup>9</sup>Ossia per ogni vettore nella sfera unitaria  $S^{d-1}$  centrata nell'origine.

Sappiamo che in  $x = 0, D$  la condizione al bordo deve essere  $\delta = 0$ . Ma come raccordare la parte destra e quella sinistra? Qui entra in gioco la fisica: sicuramente  $\delta(x)$  deve essere una funzione continua, altrimenti la corda sarebbe strappata. Prendiamo un pezzo infinitesimo di corda all'interfaccia. La sua massa è infinitesima. Dunque, la forza che subisce deve essere infinitesima, altrimenti il pezzo di corda avrebbe accelerazione infinita. Calcoliamo la forza che agisce su questa massettina. La forza subita dall'interfaccia

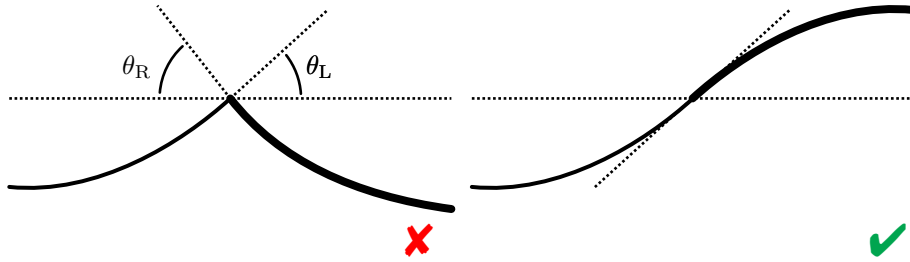


Figura 2: La condizione all'interfaccia tra due pezzi di corda con differente densità lineare.

può essere infinitesima solo se gli angoli in fig. 2 rispettano la relazione  $\theta_L + \theta_R = 0$ , ossia pure la derivata  $\frac{d\delta}{dx}$  è una funzione continua.

Vedremo in seguito che questo fatterello combinato con un poco di analisi armonica ci darà interessanti informazioni sul comportamento dei segnali alle interfacce.

### 2.5 ★★★★★☆ Bilanci energetici

Cerchiamo di scrivere l'energia del sistema. Torniamo al caso discreto e consideriamo un pezzo di corda lungo  $\Delta x$  che contiene la  $i$ -esima massa, come in figura 3. Esso conterrà un'energia cinetica  $\frac{1}{2}m\dot{\delta}^2$ .

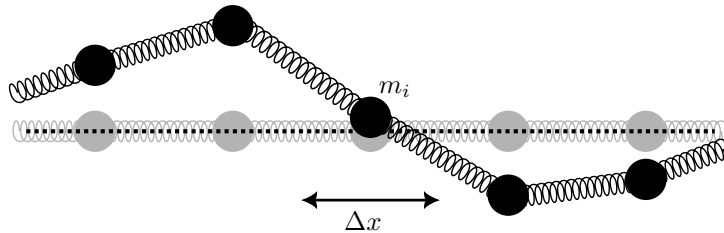


Figura 3: Calcolo della densità di energia della corda elastica.

C'è poi l'energia potenziale delle molle. Per semplicità, supponiamo ancora che le masse si possano muovere lungo la direzione  $\hat{y}$ . L'energia contenuta<sup>10</sup> nelle due metà di molle nel segmento  $\Delta x$  è, per la Legge di Hooke,  $\frac{k}{4}((\delta_i - \delta_{i-1})^2 - (\delta_{i+1} - \delta_i)^2) \simeq \frac{k\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x}\right)^2$ .

Definendo  $\sigma = m/\Delta x$  la densità lineare di massa e  $\tau = k\Delta x$  la tensione a riposo della fune, vediamo che la densità di energia  $u = E_{\Delta x}/\Delta x$  assume una forma piuttosto semplice:

$$u = \frac{1}{2}\sigma \left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\tau \left(\frac{\partial \delta}{\partial x}\right)^2.$$

La meccanica classica ci dice che l'energia totale  $E = \int_0^D u dx$  è conservata. Ma in questo caso possiamo dire molto di più! L'energia non si può "teletrasportare" da una parte all'altra della corda, ma può muoversi gradualmente tramite una **corrente di energia**. Fisicamente, in tre dimensioni, possiamo interpretare così una corrente di energia: prendiamo un quadratino  $dy \times dz$  centrato in  $(x, y)$ ; la componente  $x$  della corrente in  $(x, y)$  moltiplicata per  $dt dy dz$  è la quantità di energia che passa nel quadratino  $dy \times dz$  in un tempo  $dt$ , con segno, ossia è positiva se la direzione dell'energia è concorde con  $\hat{x}$ , negativa altrimenti.

Prendiamo per esempio un quadratino  $\Delta x \times \Delta y$  in due dimensioni, come in figura 4. In un tempo  $dt$  entra nel cubetto una quantità di energia

$$J_x(x - dx/2, y) dy dt - J_x(x + dx/2, y) dy dt + J_y(x, y - dy/2) dx dt - J_y(x, y + dy/2) dx dt \simeq -\nabla \cdot J dx dy dt$$

<sup>10</sup>Il lettore particolarmente attento si sarà accorto che manca un termine costante dovuto all'energia nella posizione di equilibrio. In questo caso è completamente inutile, quindi lo omettiamo, ma talvolta l'energia del vuoto dà contributi fisicamente significativi. Provate per esempio a cercare *Effetto Casimir*.

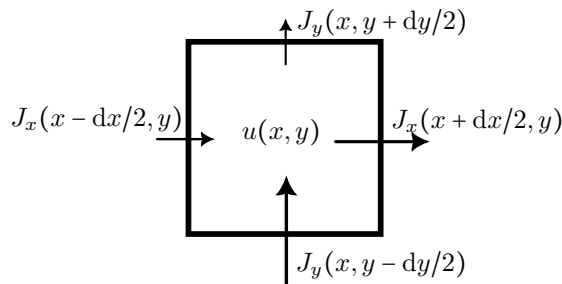


Figura 4: Correnti e leggi di conservazione.

e l'energia nel cubetto aumenta di  $\frac{\partial u}{\partial t} dx dy dt$ . La conservazione dell'energia, in forma locale, viene scritta

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Questa equazione vale in ambiti molto generali! Ogni volta che c'è una quantità che si conserva localmente, c'è una corrispondente corrente e un'equazione di continuità che prende quella forma.

Nel caso della corda massiva, la corrente di energia si scrive

$$J = -\tau \frac{\partial \delta}{\partial t} \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

o, nel caso di una membrana  $d$ -dimensionale,

$$\mathbf{J} = -\tau \frac{\partial \delta}{\partial t} \nabla \delta.$$

Potete verificare come esercizio (es. 8) che la sola equazione d'onda implica la conservazione della corrente<sup>11</sup>. Per ricavare espressioni analoghe per altre quantità conservate ci sono due vie possibili:

- partire da un'espressione per  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e cercare di scriverla come divergenza di un campo, che sarà quindi  $-\mathbf{J}$ ;
- il secondo modo, che vedrete in corsi avanzati all'università, sfrutta il Teorema di Noether, che a ogni simmetria del sistema associa una quantità conservata, e fornisce un algoritmo per calcolarne l'espressione. La simmetria legata alla conservazione dell'energia è la simmetria per traslazioni temporali.

Quanto fatto con l'energia, si può fare con altre grandezze. Scoprirete che le grandezze collegate con le simmetrie di traslazione e rotazione sono, rispettivamente, la quantità di moto e il momento angolare.

È importante notare che **l'energia è quadratica nei campi**, mentre **l'equazione d'onda è lineare!** La sovrapposizione di due onde  $\psi_1, \psi_2$  non produce, in generale, la somma dell'energia e della corrente, ma una cosa più complicata, dove compaiono alcuni termini extra; per l'energia per esempio:

$$u(\psi_1 + \psi_2) = u(\psi_1) + u(\psi_2) + \underbrace{\sigma \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \tau \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x}}_{\text{termini di interferenza}}.$$

Quando questo avviene si dice che avviene il fenomeno dell'**interferenza**. Ci sono due casi estremi in qui questo avviene:

- **interferenza costruttiva**, se  $\psi_1 = \psi_2$ . In questo caso  $u(\psi_1 + \psi_1) = 4u(\psi_1)$ ;
- **interferenza distruttiva**, se  $\psi_1 = -\psi_2$ . In questo caso  $u(\psi_1 - \psi_1) = 0$  e non si osserva nulla.

I fenomeni di interferenza sono molto importanti perché in laboratorio spesso ci capita di osservare solo l'energia.

<sup>11</sup>ossia l'equazione di continuità.

## 2.6 ★★☆☆☆ Introduzione alla notazione complessa, analisi armonica

Questa sezione non si propone come introduzione formale né completa all'analisi armonica, ma vuole solo essere un'esposizione di alcuni fatti molto potenti che seguono da teoremi che vedrete all'università. Li presento qui perché in seguito faremo uso di alcuni di questi fatti.

Il fatto fondamentale è che ogni funzione  $f(x)$ , sotto opportune condizioni di regolarità e convergenza, è scrivibile come somma (eventualmente infinita) di seni e coseni di opportuna frequenza.

Sappiamo anche che

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x &= \operatorname{Re}\{e^{ix}\} & \sin x &= \operatorname{Im}\{e^{ix}\},\end{aligned}$$

quindi possiamo equivalentemente scrivere  $f(x)$  come somma di esponenziali complessi:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx},$$

dove i coefficienti d'espansione  $\tilde{f}(k)$  possono essere calcolati tramite uno strumento matematico chiamato **trasformata di Fourier**.

Nel caso  $f$  fosse una funzione in più variabili (diciamo due, il caso con più variabili è analogo) possiamo effettuare la stessa scomposizione, pensandola in questo modo: fissato  $y$ ,  $f(x, y)$  è un'onestà funzione a una variabile  $x$ , e quindi possiamo scomporla in onde monocromatiche (i coefficienti d'espansione dipendono da  $y$ ):

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_x}{2\pi} \tilde{f}(k, y) e^{ik_x x};$$

Si noti che, in  $k_x$ , il pedice indica rispetto a quale variabile abbiamo  $\mathcal{F}$ -trasformato, quindi  $k_x$  **non** è una funzione di  $x$ ! Ora, fissato  $k_x$ ,  $\tilde{f}(k_x, y)$  è un'onestà funzione in  $y$  e possiamo scomporla in onde monocromatiche e, introducendo la notazione vettoriale  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ , otteniamo:

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Si dimostra che scomporre prima in  $x$  e poi in  $y$  o fare il contrario dà lo stesso risultato, quindi la scomposizione in onde monocromatiche in più dimensioni è ben definita.

Un campo fisico classico come il campo elettrico, non può essere complesso; tuttavia, moltiplicare esponenziali è molto più gradevole di eseguire la stessa operazione con seni e coseni<sup>12</sup>. Quindi spesso capita di esprimere le onde di un campo in termini di esponenziali complessi intendendo che il campo fisico è la parte reale di quel campo complesso.

Un corollario del teorema sopra enunciato è il seguente: se tutte le soluzioni monocromatiche<sup>13</sup> soddisfano una certa proprietà e questa viene preservata dalle combinazioni lineari, allora ogni funzione soddisfa questa proprietà! Vedrete nel seguito e negli esercizi parecchie applicazioni di questo fatto.

## 2.7 ★★☆☆☆ Metodo delle funzioni di Green

Un problema tipico che potremmo voler risolvere è il seguente:

1. abbiamo un sistema fisico che risponde a un certo stimolo in maniera **lineare**;
2. conosciamo lo stimolo;
3. vogliamo studiare la risposta del sistema.

Uno strumento matematico utilissimo per risolvere questo genere di problemi sono le **funzioni di Green**. Sono strumenti che già conoscete e usate, anche se non sapete di saperlo.

Facciamo, come esempio concreto, quello dell'elettrostatica: vogliamo studiare il campo elettrico (output) in presenza di cariche (input) in regime stazionario. Le leggi di Maxwell sono lineari, quindi possiamo usare il meccanismo delle funzioni di Green. Il meccanismo è il seguente:

1. studiamo l'output in casi semplici, tipicamente per input puntiformi e molto localizzati;

<sup>12</sup>Che schifo le formule di Werner.

<sup>13</sup>Per soluzioni monocromatiche si intendono esponenziali complessi.

2. scomponiamo l'input in input puntiformi;
3. usiamo il principio di sovrapposizione per calcolare l'output globale.

Nel caso elettrostatico, studiamo il potenziale  $V$  generato da una carica puntiforme. L'output generato da un input puntiforme viene chiamato **funzione di Green**  $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)$  e prende due argomenti: il punto dov'è valutato il potenziale e il punto dov'è posizionata la carica puntiforme. Vogliamo calcolare il potenziale in presenza di un input arbitrario, come una distribuzione  $\rho(\mathbf{x})$  di carica; non ci resta che applicare il principio di sovrapposizione:

$$V_\rho(\mathbf{x}) = \int_V d^3\mathbf{y} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}),$$

dove  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  è il potenziale nel punto  $\mathbf{x}$  di una carica unitaria posta in un cubettino infinitesimo  $d^3\mathbf{y}$  punto  $\mathbf{y}$ .

Vediamo applicata questa tecnica in un setup discreto, un po' più semplice. Mettiamoci nella situazione del paragrafo 2.1, con due molle soltanto, come nel paragrafo 5. L'input in questo caso è composto dalle

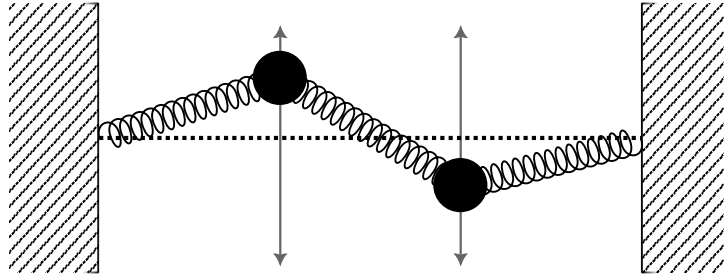


Figura 5: 2 masse legate, modello di corda vibrante con estremi fissati.

posizioni e dalle velocità delle masse al tempo  $t_0 = 0$  e l'output è la posizione del sistema al tempo  $t$ . Cominciamo a risolvere il problema scrivendo le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \frac{m}{k} \ddot{y}_1 = -2y_1 + y_2 \\ \frac{m}{k} \ddot{y}_2 = +y_1 - 2y_2. \end{cases}$$

Gli "input elementari" che possiamo avere sono

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix}_{t_0=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo caso per caso gli "output" corrispondenti. Per fare questo, è comodo passare dai modi normali:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right).$$

Matchando le condizioni iniziali<sup>14</sup> e usando il principio di sovrapposizione, si ottiene che le quattro funzioni di Green sono

$$\begin{aligned} \vec{G}_{(1,0,0,0)}(t) &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right), \\ \vec{G}_{(0,1,0,0)}(t) &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right), \\ \vec{G}_{(0,0,1,0)}(t) &= \sqrt{\frac{m}{k}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{m}{3k}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right), \\ \vec{G}_{(0,0,0,1)}(t) &= \sqrt{\frac{m}{k}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \sqrt{\frac{m}{3k}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right); \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Potete convincervene calcolando posizioni e velocità iniziali delle due soluzioni precedenti con  $\phi_i = 0, \frac{\pi}{2}$  e poi risolvendo il sistema per le condizioni iniziali.

dunque, la posizione del sistema al tempo  $t$ , date le condizioni iniziali  $(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$ , è

$$\vec{y}(t) = \vec{G}_{(1,0,0,0)}(t)y_1 + \vec{G}_{(0,1,0,0)}(t)y_2 + \vec{G}_{(0,0,1,0)}(t)\dot{y}_1 + \vec{G}_{(0,0,0,1)}(t)\dot{y}_2.$$

Ovviamente questo procedimento può essere applicato ogni volta che il sistema in esame ha un comportamento lineare. Questo rende le funzioni di Green uno dei tools più usati dai fisici!

## SEZ. 3 — ONDE ELETTROMAGNETICHE

I fenomeni elettromagnetici sono descritti dalle Equazioni di Maxwell:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Il sistema che vogliamo studiare ora è il campo elettromagnetico, quindi trascuriamo altri corpi con cui il campo può interagire. Questo si traduce nel porre le sorgenti (cariche e correnti) a zero. Nel caso generale, ci basterà aggiungere un offset generato dalle sorgenti (le equazioni di Maxwell sono lineari!).

### 3.1 ★★☆☆☆☆ Dalle equazioni di Maxwell all'equazione delle onde

Partiamo da

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ed estraiamo il rotore membro a membro. Per calcolare il rotore di rotore, useremo l'identità dimostrata nell'appendice A.3:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}.$$

La derivata temporale e il rotore, per il teorema di Schwarz, commutano. Otteniamo quindi

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \mathbf{B};$$

in assenza di sorgenti, sostituiamo la prima e la quarta equazione di Maxwell, ottenendo

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0,$$

dove abbiamo scritto  $c^2 = 1/\mu_0 \varepsilon_0$ . Con un conto analogo, troviamo

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} = 0,$$

Quindi nel campo elettromagnetico si propagano onde. Ebbene, facciamo un esperimento e troviamo  $\varepsilon_0$ , ne facciamo un altro e troviamo  $\mu_0$ . Misuriamo la velocità della luce  $v_c$  e otteniamo una piacevole sorpresa:  $v_c = c$ ! Viene spontaneo quindi chiedersi se la luce sia l'onda che si propaga nel campo elettromagnetico e la risposta è sì, come dimostrarono molti fisici alla fine dell'800, tra cui Hertz.

### 3.2 ★★★★★☆☆ I potenziali

Abbiamo ottenuto 6 equazioni delle onde (3 per le componenti del campo elettrico e altre 3 per quello magnetico). Quante sono indipendenti? In altri termini, quanti sono i veri gradi di libertà del sistema? Per rispondere a questa domanda, introduciamo un tool matematico: i **potenziali elettrodinamici**.

Faremo uso di due corollari di un teorema matematico: se lo spazio è semplicemente connesso<sup>15</sup> allora

- ogni campo a divergenza nulla è il rotore di un campo vettoriale;

<sup>15</sup>Questo è un dettaglio tecnico ed è sempre vero se lo spazio è  $\mathbb{R}^n$ .

- ogni campo a rotore nullo è il gradiente di un campo scalare.

Partiamo dalla seconda equazione di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \implies \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}.$$

Passiamo ora alla terza equazione:

$$\nabla \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0 \quad \implies \quad \mathbf{A} = -\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}.$$

$\phi$  viene chiamato **potenziale scalare** e  $\mathbf{A}$  invece **potenziale vettore**. A questo livello, i potenziali sono un semplice artificio matematico che ci toglie i gradi di libertà extra. In realtà in Meccanica Quantistica si scopre che i “veri” campi sono solo i potenziali, nel senso che i campi  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  non sono sufficienti a descrivere alcuni fenomeni osservati sperimentalmente<sup>16</sup>. In termini dei potenziali, le equazioni di Maxwell diventano

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} & (3.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} & (3.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (3.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, & (3.8) \end{cases}$$

e sono un po’ bruttine.

### 3.3 ★☆☆☆☆ Invarianza di gauge

C’è una sottigliezza che è tempo di sviscerare. Fissati i campi  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ , i potenziali  $\phi, \mathbf{A}$  che danno quei campi non sono unici. Infatti, dati  $\phi, \mathbf{A}$ , si vede bene che la trasformazione congiunta

$$\begin{cases} \phi \mapsto \phi - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda \\ \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \end{cases}$$

con  $\Lambda$  un generico campo scalare, non cambia i campi  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ .  $\Lambda$  è quindi un parametro che regola una trasformazione che non cambia la Fisica; questo fatto è detto **invarianza di gauge**. Questa simmetria<sup>17</sup> ha importanti risvolti in fisica teorica, uno dei quali è il seguente: per il teorema di Noether, ogni simmetria continua è legata alla conservazione di una quantità, detta carica di Noether di quella simmetria. Ebbene, le parole non sono scelte a caso, la carica di Noether associata alla simmetria di gauge del campo elettromagnetico è la carica elettrica<sup>18</sup>.

Per eliminare questa ridondanza nella descrizione del campo, dobbiamo introdurre un vincolo addizionale che ci fissa il parametro  $\Lambda(\mathbf{x})$ ; alcune scelte di gauge comunemente usate sono:

- la gauge di Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ; in questo caso  $\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$  e dunque sappiamo a schianto quanto vale  $\phi(\mathbf{x})$  in funzione della densità di carica:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3y \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|};$$

<sup>16</sup>Se siete curiosi, provate a googlare *Effetto Aharonov-Bohm*.

<sup>17</sup>In realtà non tutte le trasformazioni sono simmetrie propriamente dette. Ignoreremo questo fatto.

<sup>18</sup>Col rischio di essere un po’ supercazzoloso, vi racconto qualcosa. La legge di conservazione della carica,

$$\partial_\mu J^\mu = 0,$$

trova un’elegante giustificazione nella simmetria  $A^\mu \mapsto A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ . Analogamente, le inomogenee di Maxwell (tra cui la Legge di Gauss)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

trovano giustificazione nell’esistenza di una simmetria più astratta, collegata a oggetti 1-dimensionali.

- la gauge di Lorenz<sup>19</sup>  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$ ; facendo uso di questa, le equazioni di Maxwell assumono una forma molto più elegante:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} & (3.9) \\ \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} & (3.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (3.11) \\ -\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. & (3.12) \end{cases}$$

Si noti che se  $\rho = 0$ , allora le due condizioni coincidono.

### 3.4 ★☆☆☆☆ Cenni di formulazione covariante

Nella lezione di relatività avete visto che Einstein formulò la sua teoria per spiegare un paradosso aperto dall'elettrodinamica. Non deve quindi sorprendere che questa teoria conosca in modo naturale la relatività e quindi ammetta una formulazione covariante.

Partiamo dalle sorgenti: densità di carica e densità di corrente formano un 4-vettore chiamato 4-corrente:

$$J^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}.$$

Potrete convincervi che è un 4-vettore notando che la legge di continuità della corrente assume una forma molto semplice:

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

Dalle equazioni di Maxwell in gauge di Lorenz, vediamo che anche il 4-potenziale in gauge di Lorenz è un 4-vettore:

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

la condizione di Lorenz ha una buona scrittura covariante:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

e che le equazioni di Maxwell inomogenee (quelle che coinvolgono le sorgenti), in gauge di Lorenz, assumono forma

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 J^\nu.$$

Una trasformazione di gauge si scrive

$$A^\mu \mapsto A^\mu + \partial^\mu \Lambda,$$

da cui è evidente che  $A^\mu$  è un 4-vettore anche in gauges diverse da quella di Lorenz. C'è una sottigliezza: in generale la scelta della gauge **non** è Lorentz-invariante! In altri termini, se  $A^\mu$  soddisfa una condizione di gauge in un sistema di riferimento, non è detto che  $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$  (con  $\Lambda$  trasformazione di Lorentz dal primo al secondo sistema di riferimento) soddisfi la stessa condizione di gauge; spesso succede che in gauge diversa da quella di Lorenz la scelta si rompa passando al nuovo sistema di riferimento.

Le inomogenee di Maxwell, in gauge qualsiasi, prendono la forma

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 J^\nu,$$

oppure introducendo il rotore generalizzato (derivata esterna) del 4-potenziale,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu,$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu.$$

Le omogenee sono automaticamente soddisfatte dall'aver scelto  $F^{\mu\nu}$  come derivata esterna di  $A^\mu$ . Esse possono essere scritte introducendo il tensore duale del tensore dei campi:

$$\star F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma},$$

<sup>19</sup>Senza la "t". È un altro fisico.

dove  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  è il tensore completamente antisimmetrico<sup>20</sup> e prendono la seguente forma:

$$\partial_\mu \star F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.13)$$

Come promesso, essa è automaticamente soddisfatta. Per dimostrarlo basta notare che per il teorema di Schwarz,

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\nu = 0$$

perché prodotto di un tensore antisimmetrico per uno simmetrico. L'identità 3.13 è chiamata **identità di Bianchi**.

### 3.5 ★★★☆☆ Polarizzazioni

È arrivato il momento di rispondere alla domanda che avevamo lasciato in sospeso qualche paragrafo fa: quanti sono i gradi di libertà del campo elettromagnetico? Mettiamoci in assenza di sorgenti e in gauge di Coulomb. Dunque  $\phi = 0$ . Risolviamo le equazioni di Maxwell con il metodo di separazione delle variabili; partendo da

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = 0,$$

otteniamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_0 e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad (3.14)$$

dove

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \text{ con } k^\mu k_\mu = 0$$

e

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Fissato  $\mathbf{k}$ , sembrerebbero esserci tre gradi di libertà disponibili (uno per ogni componente di  $\mathbf{A}_0$ ). In realtà uno viene ucciso dalla gauge:  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  fissato  $\mathbf{k}$  corrisponde a  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 = 0$ , quindi  $\mathbf{A}_0$  può giacere solo nel piano ortogonale a  $\mathbf{k}$ .

I gradi di libertà fissato  $\mathbf{k}$  vengono chiamati **polarizzazioni**; parafrasando quando detto fin ora, **le onde elettromagnetiche nel vuoto possono avere solo due polarizzazioni**, entrambe ortogonali alla direzione di propagazione.

La polarizzazione di un'onda elettromagnetica monocromatica viene di solito indicata con la direzione del campo elettrico (che coincide con quella di  $\mathbf{A}$ ).

**§ 3.5.1. Onda polarizzata linearmente.** — Per semplificare la notazione, supponiamo che  $\mathbf{k}$  sia diretto lungo  $\hat{z}$ . La polarizzazione lineare, diciamo lungo  $\hat{x}$ , è

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In notazione reale, il campo è

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(ckt - kz).$$

**§ 3.5.2. Onda polarizzata circolarmente.** — In questo caso

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In notazione reale,

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = A_0 \begin{pmatrix} \cos(ckt - kz) \\ \pm \sin(ckt - kz) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Viene chiamata polarizzazione circolare perché, fissato  $\mathbf{x}$ , il potenziale vettore gira circolarmente nel tempo.

<sup>20</sup> $\varepsilon^{0123} = 1$ , esso per scambio di due indici cambia segno e vale zero se almeno due indici sono uguali.

### 3.6 ★★★★★☆ Bilancio di energia e quantità di moto

La luce trasporta energia, lo dice anche l'esperienza di tutti i giorni! La luce del Sole trasporta molto calore; il microonde scalda i cibi con onde elettromagnetiche, e ugualmente fanno i fornelli a induzione. Come calcolare l'energia trasportata dalla radiazione? Lo vediamo subito. In questa sezione, userò alcune identità vettoriali dimostrate nell'appendice A.3.

L'unico collegamento che, per ora, abbiamo tra l'energia e il campo elettromagnetico è la potenza compiuta dal campo elettrico<sup>21</sup> per unità di volume:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}.$$

Per il principio di conservazione dell'energia, deve valere la seguente equazione di continuità:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial V} + \nabla \cdot \mathbf{J}_u = 0, \quad (3.15)$$

dove

- $u$  è la densità di energia del campo elettromagnetico;
- $\mathbf{J}_u$  è la densità di corrente di energia elettromagnetica.

Vediamo ora di riscrivere il termine  $\frac{\partial P}{\partial V}$ : ricavando  $\mathbf{J}$  dalla quarta di Maxwell, scriviamo

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \mathbf{E} \cdot \left[ \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \quad (3.16)$$

Ora, usando

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \nabla \wedge \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \wedge \mathbf{w}$$

si ha

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{B} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E},$$

che, combinata con la terza di Maxwell e sostituita nell'eq. 3.16 dà

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right],$$

che suggerisce combinata con l'eq. 3.15

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2,$$

$$\mathbf{J}_u := \mathbf{S} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}.$$

$\mathbf{S}$  è chiamato **vettore di Poynting**. La conservazione dell'energia si scrive quindi

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Notiamo che, per un'onda monocromatica con  $\mathbf{A}$  nella forma in eq. 3.14, **il contributo energetico del campo elettrico è pari a quello del campo magnetico!** Inoltre, spesso le frequenze in gioco della radiazione sono molto alte. Quando facciamo una misura (per esempio quando vediamo qualcosa con i nostri occhi!) facciamo una media dell'intensità luminosa su una certa frequenza. Questa media avviene su una scala di tempo molto più grande di quella del periodo dell'onda, quindi quando si media l'intensità dell'onda ci si prende un fattore  $\frac{1}{2}$ :

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}_{\max} \cos^2(\omega t) \implies \langle \mathbf{S}(t) \rangle = \mathbf{S}_{\max} \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{S}_{\max}.$$

Si noti che per il calcolo dell'intensità siamo passati in notazione reale! La notazione complessa infatti funziona bene solo finché sommiamo grandezze, quando si tratta di moltiplicare cose bisogna prestare attenzione!

<sup>21</sup>Il campo magnetico non fa lavoro! – D. Griffiths

Per ricavare la densità di quantità di moto del campo elettromagnetico, procediamo in modo del tutto analogo. La densità di forza esercitata dal campo è

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial V} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}. \quad (3.17)$$

La legge di conservazione della quantità di moto impone la seguente equazione di continuità:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial V} + \nabla \cdot (-\sigma) = 0,$$

dove

- $\mathbf{g}$  è la densità di quantità di moto;
- $-\sigma$  (mannaggia a chi ha deciso di metterci quel “-”) è un tensore che sulla componente  $(i, j)$ -esima ha il flusso di componente  $j$ -esima di quantità di moto che scorre nell’ $i$ -esima direzione.  $\sigma$  è chiamato **tensore degli sforzi di Maxwell**.

Sostituendo  $\rho, \mathbf{J}$  dalla prima e dalla quarta equazione di Maxwell nell’eq. 3.17 si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial V} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) + \varepsilon_0 \mathbf{B} \wedge \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}.$$

Usiamo ora

$$\mathbf{B} \wedge \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} + \mathbf{E} \wedge \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S} - \mathbf{E} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}).$$

Non ci resta che applicare due volte l’identità vettoriale (anch’essa dimostrata in appendice A.3)

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{w}) + \mathbf{w} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v});$$

$$\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \nabla v^2 - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Mettendo tutto insieme e aggiungendo un pezzo proporzionale a  $\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial V} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \nabla B^2 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S} - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \nabla E^2 + \varepsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{S}}{c^2} - \nabla u + \varepsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} + \varepsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Scritto così può apparire un po’ enigmatico. Scriviamolo in componenti, con notazione di Einstein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial V} &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{S_i}{c^2} - \partial_i u + \varepsilon_0 E_i \partial_j E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i \partial_j B_j + \varepsilon_0 (E_j \partial_j) E_i + \frac{1}{\mu_0} (B_j \partial_j) B_i \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{S_i}{c^2} - \partial_j \left( -u \delta_{ij} + \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j \right), \end{aligned}$$

dove  $\delta_{ij}$  è la **delta di Kronecker**, che vale 1 se  $i = j$ , 0 altrimenti. È chiaro a questo punto che

- la densità di quantità di moto del campo elettromagnetico è  $\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$ ;
- il tensore di Maxwell vale

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - u \delta_{ij},$$

ossia

$$\sigma = \varepsilon_0 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - u \mathbf{1},$$

ed è simmetrico;

- la conservazione della quantità di moto si scrive

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} = \nabla \cdot \sigma.$$

Da considerazioni sul bilancio della quantità di moto potete calcolare la **pressione di radiazione**. Un esempio lo trovate nell’es. 18.

### 3.7 ★★★★★ Legge di Malus

Da quanto detto sopra possiamo dedurre immediatamente la legge di Malus: supponiamo di avere un filtro polarizzatore piano, ovvero un materiale in grado di assorbire completamente una polarizzazione. Inviamo, perpendicolarmente al filtro, un fascio di luce monocromatica polarizzata linearmente. Sia  $\mathbf{A}_0$  la polarizzazione della luce incidente,  $\mathbf{n}$  il versore della polarizzazione che il filtro può assorbire e  $\mathbf{m}$  un versore ortogonale a  $\mathbf{n}$  che giace sul piano del filtro, come in fig. 6.

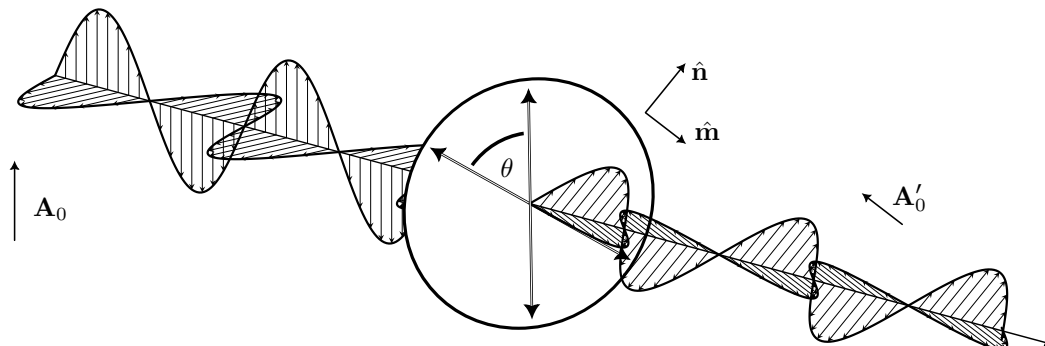


Figura 6: Setup fisico per la Legge di Malus.

Il filtro assorbirà la componente  $(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  della polarizzazione, lasciando solo la componente perpendicolare. Il modulo  $E'$  del campo elettrico che può superare il filtro, se il modulo di  $\mathbf{E}$  della luce entrante è  $E$ , è

$$E' = E \cos \theta,$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\mathbf{A}_0$  e  $\mathbf{m}$ . L'energia è quadratica nei campi, dunque

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cos^2(\theta)$$

e l'intensità luminosa viene ridotta dal filtro di un fattore  $\cos^2(\theta)$ . Questo è il contenuto della legge di Malus.

### 3.8 ★★★★★ Interferenza

Le equazioni di Maxwell sono lineari e l'energia è quadratica nei campi. Questo vuol dire che può avvenire interferenza. Concettualmente non c'è molto da fare, prima si sommano i campi e poi si eleva al quadrato. Vediamo qui un caso concreto!

**§ 3.8.1. Interferenza da doppia fenditura.** — Mettiamoci nel setup in figura 7. Dal semipiano  $x < 0$  arriva un'onda monocromatica di vettore d'onda  $\mathbf{k}$ ; c'è una parete che filtra la luce, ma la parete ha due fenditure molto sottili distanti  $a$ . Oltre la parete, a distanza  $L \gg a$ , c'è una lastra fotografica che registra la luce incidente. Siamo interessati a calcolare l'intensità della radiazione che incide sulle lastre fotografiche.

Per risolvere questo problema, possiamo usare il seguente setup mentale:

- innanzitutto trascuriamo il fatto che il campo elettromagnetico non sia un campo scalare. Potete convincervi che funzioni osservando che, in un punto  $P$  abbastanza lontano dalle fenditure, le direzioni dei raggi vettori  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  che partono da ciascuna fenditura e arrivano in  $P$  sono pressoché parallele, e la direzione del campo prodotto dalla fenditura 1 deve dipendere solo dalla direzione di  $\mathbf{r}_1$  e ugualmente dev'essere per la seconda fenditura, quindi i campi prodotti dalla prima fenditura sono paralleli a quelli prodotti dalla seconda.
- ora notiamo che le equazioni del sistema sono lineari; possiamo interpretare il campo elettrico nella  $i$ -esima fenditura come un "input" e il campo nel semispazio  $x > 0$  come un "output".

Appare quindi chiaro che possiamo accendere il meccanismo delle funzioni di Green. Dunque possiamo immaginare che al posto di ogni fenditura ci sia una sorgente luminosa che emette radiazione con la stessa fase della luce che arriva sul muro da sinistra. In effetti, se il nostro sistema fisico è il campo

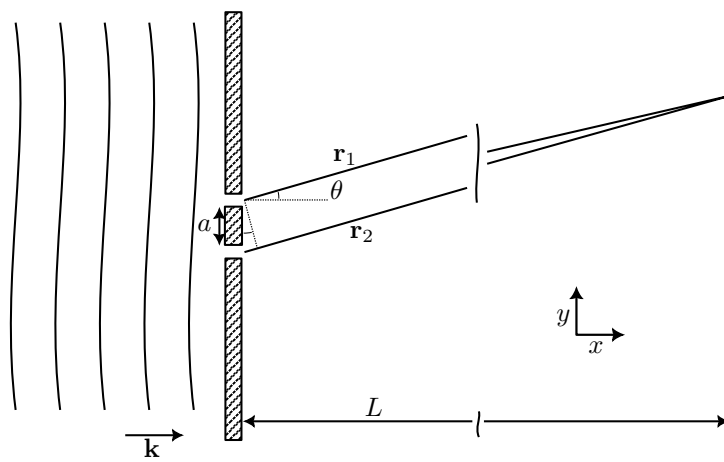


Figura 7: Immagine dell'interferenza da doppia fenditura.

elettromagnetico nel semispazio  $x > 0$ , indipendentemente da quale sia la sorgente del campo all'interfaccia  $x = 0$ , se conosciamo il campo all'interfaccia conosciamo l'evoluzione del sistema; la fisica non può cambiare dal tipo di sorgente che ci mettiamo! In letteratura questo è noto come **principio di Huygens** e Feynman ne diede una chiara interpretazione fisica: se al posto delle fenditure ci fosse muro, ovviamente non vedremmo nulla, ovvero il campo nel semipiano  $x > 0$  sarebbe nullo. Ma questo campo sarebbe la sovrapposizione tra il campo in presenza di fenditure e il campo prodotto dagli elettroni della porzione di muro in corrispondenza delle fenditure. Quindi, facendo una sottrazione, il campo in presenza delle fenditure è il campo nullo meno il campo prodotto dagli (ipotetici) elettroni su tale porzioni di muro.

Arriva dunque il problema di calcolare la funzione di Green  $G(R)$ , ovvero il campo  $A$  prodotto da una sorgente puntiforme che oscilla a frequenza  $\omega$ . Per farlo notiamo che se prendiamo una sfera di raggio  $R$  attorno alla sorgente, l'energia che esce dalla sfera è  $\sim 4\pi R^2 |\mathbf{S}(R)|$  e, per la conservazione dell'energia, questa espressione non può dipendere da  $R$ . Ma  $\mathbf{S}$  è biquadratico in  $A$ . Quindi, in modulo,

$$G(R) \sim \frac{e^{ikR - i\omega t}}{R},$$

dove il fattore di fase è quello che, molto lontano, si riduce a quello di un'onda piana uscente dalla sorgente.

Se abbiamo più di una singola sorgente puntiforme (ne abbiamo due con una doppia fenditura!) non ci resta che sommare sulle sorgenti.

Così possiamo agilmente calcolare l'intensità del campo sullo schermo. Le "sorgenti"-fenditure producono campi in fase perché l'onda incidente ha vettore d'onda ortogonale alla parete. Lontano dalle fenditure possiamo scrivere

$$E \sim \frac{1}{r_1} (e^{ikr_1} + e^{ikr_2}),$$

con  $r_i = |\mathbf{r}_i|$ . Prima di calcolare l'intensità (mediata nel tempo), notiamo una sottigliezza: abbiamo usato la notazione complessa, ma i veri campi sono reali! Quindi al posto di  $e^{-i\omega t}$  avremo  $\cos(\omega t)$ . Quando calcoliamo il modulo quadro, avremo  $\cos^2(\omega t)$  e, facendo la media temporale, ci prendiamo un fattore  $\frac{1}{2}$ :

$$I \sim |E^2| \sim \frac{2}{r_1^2} \cos^2(k(r_1 - r_2)) \sim \frac{2}{r_1^2} \cos^2(ka \sin \theta).$$

Riportiamo un esempio di grafico di questa funzione in fig. 8, con parametri  $2/r_1^2 = 1$  e  $ka = 10$ . Possiamo notare che si alternano massimi locali e minimi nell'intensità e che a  $\theta = 0$  c'è un **picco principale**. Ci sono finiti massimi, dovuti al fatto che  $\sin \theta < 1$ .

Il **picco di ordine**  $m$  ha posizione angolare  $\frac{m\pi}{ka}$ .

**§ 3.8.2. Criterio di Rayleigh.** — Nell'es. 19 potrete verificare che, al primo ordine, se inclinate la sorgente di luce monocromatica di un angolo  $\theta$ , pure i massimi e i minimi si spostano dello stesso angolo.

Supponiamo di avere due sorgenti a frequenze leggermente diverse, in modo da uccidere i termini di interferenza (le intensità sulla lastra sono quindi la somma delle intensità prodotte da ciascuna sorgente).

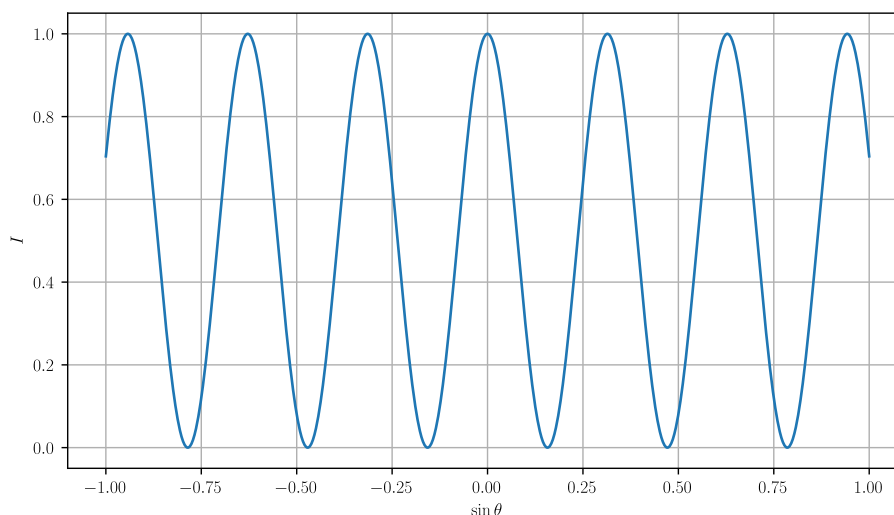


Figura 8: Grafico dell'intensità in funzione dell'angolo di scattering.

Ci chiediamo: qual è il minimo angolo tra le sorgenti che dobbiamo creare affinché riusciamo a distinguere che a generare radiazione non c'è una sorgente sola?

La risposta è data da una convenzione: il Criterio di Rayleigh, che stabilisce che **due sorgenti sono risolubili** quando **i picchi principali distano tra loro più di un picco e un minimo di una stessa sorgente**.

**§ 3.8.3. Principio di Babinet.** — Ora facciamo il seguente esperimento: sul piano  $x = 0$ , al posto del muro lasciamo lo spazio vuoto e al posto delle fenditure costruiamo un muro e dopo rimandiamo un'onda monocromatica. Cosa succede? Con un'argomentazione analoga a quella di Feynman per giustificare il Principio di Huygens, scopriamo che la figura che vedremmo sullo schermo è la stessa che avremmo con due fenditure più un'onda piana monocromatica che va dritta, nulla di più entusiasmante. Questo è dovuto al fatto che, se ci fosse il muro, ci sarebbero elettroni del muro schermerebbero l'onda, ovvero queste cariche, sotto l'azione dei campi oscillati, si metterebbero in moto in controfase all'onda forzante producendo un campo eguale in modulo e opposto a quello della luce incidente. Usando il principio di sovrapposizione, siccome i campi che avremmo dietro il muro sono la somma tra quelli della luce incidente e quelli prodotti dal muro e siccome se il muro fosse completo non avremmo luce (quindi i campi sarebbero nulli), si ottiene che togliere una porzione di muro dà lo stesso effetto di togliere la parte complementare e l'onda che procede imperturbata. Questo fatto viene chiamato **Principio di Complementarità di Babinet**.

Per fare un esempio concreto, la figura di diffrazione da foro o la figura di interferenza della luce su un disco sono indistinguibili, così come la figura di interferenza da doppia fenditura o quella prodotta dalla luce che passa in una regione dove ci sono due fili.

### 3.9 ★★★★★ Onde elettromagnetiche nella materia

Nei mezzi materiali, sotto ipotesi di comportamento lineare, per tener conto della risposta della materia alle eccitazioni del campo elettromagnetico, si introducono alcune modificazioni alle equazioni di Maxwell:

1. si introduce il **campo di induzione elettrica**

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

dove  $\varepsilon_r$  è la **costante dielettrica relativa** e nel vuoto vale 1.

2. si introduce un campo ausiliario anche nel caso magnetico. Non esiste una nomenclatura univoca; noi lo chiameremo semplicemente **campo H**:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \mathbf{B},$$

dove  $\mu_r$  è la **permeabilità magnetica relativa** del mezzo e nel vuoto vale 1. Gli sperimentali chiamano **H** campo magnetico e **B** campo di induzione magnetica, ma noi non useremo quella notazione: per noi **B** sarà il campo magnetico e **H** il campo **H**.

3. le equazioni di Maxwell in presenza di mezzi materiali si scrivono

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{cases}$$

dove il pedice “f” nei termini di sorgente indica che bisogna considerare solo le **cariche libere**, cioè bisogna trascurare le cariche del materiale che interagisce coi campi perché i contributi di quelle cariche sono già contenuti nei campi **D**, **H**.

4. a priori,  $\varepsilon_r, \mu_r$  potrebbero dipendere dalla frequenza: quindi per studiare un’onda che propaga nel materiale dovremmo scomporre l’onda in componenti monocromatiche, studiare separatamente ciascun modo normale e dopo rimettere tutto insieme sfruttando la linearità.

Trovate applicazioni di questi strumenti nell’es. 14.

## SEZ. 4 — MECCANICA QUANTISTICA

Nelle sezioni precedenti, abbiamo studiato i fenomeni ottici con un formalismo ondulatorio. I risultati che abbiamo ottenuto prima, fino alla fine dell’Ottocento, si dimostrarono in incredibile accordo con i dati sperimentali; in particolare i fenomeni di interferenza e diffrazione venivano descritti in maniera naturale dalla natura ondulatoria della luce.

Ma proprio mentre la teoria di Maxwell riceveva conferme da tutti i laboratori del mondo, i fisici si resero conto che questa non era sufficiente a descrivere correttamente la natura.

### 4.1 ★★★★★☆ Radiazione di corpo nero

Un problema della teoria elettromagnetica arrivava dalla termodinamica. Se consideriamo il campo elettromagnetico come un sistema termodinamico e lo prendiamo all’equilibrio termico a temperatura  $T$ , per il Teorema di Equipartizione ogni grado di libertà del campo porta un’energia  $\frac{1}{2}k_B T$ .

Scomponiamo il campo in componenti monocromatiche. Come abbiamo visto prima, per ogni  $\mathbf{k}$  abbiamo due polarizzazioni. Quindi l’energia del campo è  $N \times k_B T$ , dove  $N$  è il numero di  $\mathbf{k}$  possibili. Chiaramente,  $N = \infty$ , quindi il campo avrebbe energia infinita. Ma questo non è tragico: se prendiamo un universo infinito con densità di energia costante, otteniamo un’energia infinita. La cosa grave è che se ripetiamo il ragionamento precedente con un box di volume  $V$ , i vettori d’onda permessi sono  $\mathbf{k} = \frac{\pi}{\sqrt{V}}(n_x, n_y, n_z)$ , che sono ancora infiniti! Anche con un volume finito, l’energia sarebbe infinita, ovvero la teoria di Maxwell prevede che la densità energetica di un campo elettromagnetico all’equilibrio termico sia infinita.

Si nota però che questa è una **divergenza ultravioletta (UV)**, ovvero se mettiamo un cut-off superiore alle frequenze ammissibili, otterremmo un risultato finito! Spesso, questa divergenza è chiamata “catastrofe ultravioletta”.

Un modo, che a priori può sembrare artificioso, di mettere questo cut-off consiste nell’ammettere solo **eccitazioni discrete** dei modi normali, ovvero fissato  $\mathbf{k}$  e fissata una delle due polarizzazioni, l’energia contenuta in quel modo può essere solo un multiplo di  $\hbar\omega$ , dove  $\hbar$  è una costante da determinare. Potete vederlo esplicitamente nell’es. 3.

Questa ipotesi venne presa in considerazione da Planck, e le previsioni ottenute furono in ottimo accordo con lo spettro di alcuni corpi celesti o altri materiali incandescenti.

## 4.2 ★★★★★ Effetto fotoelettrico

Un altro effetto che non trovava riscontro nella teoria era l'effetto fotoelettrico: si era visto che quando una superficie metallica viene irradiata con un'onda elettromagnetica monocromatica, vengono rilasciati degli elettroni. Inoltre:

- la corrente prodotta (e quindi il numero di elettroni rilasciati) è proporzionale all'intensità luminosa;
- l'energia degli elettroni rilasciati è una funzione lineare della frequenza dell'onda incidente;
- sotto una certa soglia di frequenza  $\omega_{\text{thr}}$ , non vengono prodotti elettroni.

C'è un caso nel quale la teoria maxwelliana è completamente insoddisfacente: se bombardiamo la lastra con una grande intensità (e quindi una grande energia) ma a frequenza  $\omega < \omega_{\text{thr}}$ , non viene emesso alcun elettrone.

Einstein notò che questo comportamento poteva essere ben spiegato ammettendo che il campo elettromagnetico, su ogni modo, potesse avere solo eccitazioni discrete di energia  $\hbar'\omega$ , dove  $\hbar'$  è un'altra costante da determinare. Infatti, considerando solo il modo dell'onda incidente, ci aspettiamo che il rate del fenomeno di assorbimento di energia dal campo elettromagnetico all'elettrone sia proporzionale al numero di eccitazioni del modo, almeno per piccole intensità; l'elettrone che assorbe l'eccitazione, per uscire dal metallo, deve avere un'energia cinetica maggiore dell'energia che lo tiene legato al metallo, quindi se  $\omega < \omega_{\text{thr}}$ , non vedremo alcun elettrone emesso. La conservazione dell'energia giustifica pure l'osservazione che l'energia degli elettroni è lineare in  $\omega$ .

Facendo gli esperimenti, notiamo pure un'altra piacevolissima sorpresa:  $\hbar = \hbar'$ . Queste considerazioni segnarono la nascita della Meccanica dei Quanti.

## 4.3 ★★★★★☆ Dualità onda-particella, relazione di DeBroglie

Chiamiamo **fotone** una singola eccitazione del modo del campo elettromagnetico. Il fatto che solo *interi fotoni* possano essere assorbiti o emessi (ossia che le eccitazioni sono discrete) si traduce in maniera pittorica dicendo che *il fotone è una particella*.

Se nell'universo c'è un solo fotone con vettore d'onda  $\mathbf{k}$ , il campo sarà della forma<sup>22</sup>

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \sim \mathbf{e}_i e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})},$$

dove  $\mathbf{e}_i$  è il versore che indica la polarizzazione. Per semplicità, non calcoliamo la normalizzazione. Potete approfondire questo tema nell'es. 23.

La densità di moto elettromagnetica è proporzionale al vettore di Poynting, che è parallelo a  $\mathbf{k}$ . Chiamiamo  $\mathbf{p}$  la quantità di moto totale del fotone ed  $E$  la sua energia. Sappiamo che

- $E = |\mathbf{p}|c$ ;
- $E = \hbar\omega$ ;
- $\omega = |\mathbf{k}|c$  dalla relazione di dispersione;
- $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{p}$  sono paralleli;

mettendo a sistema, si trova la **relazione di De Broglie**:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \frac{h}{\lambda} \hat{\mathbf{k}}.$$

Il fisico francese De Broglie, propose di generalizzare quanto trovato nel caso elettromagnetico, anche alle particelle di materia; l'ipotesi teorica venne presto verificata sperimentalmente: come la luce forma figure d'interferenza quando passa in un cristallo, così fanno gli elettroni. Per di più, la lunghezza d'onda delle onde di elettroni coincideva proprio con quella prevista da De Broglie.

Riassumendo,

- le particelle presentano pure natura ondulatoria;

<sup>22</sup>In gauge di Coulomb, ossia con  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , che in assenza di sorgenti si traduce in  $\phi = 0$  e quindi anche in  $\partial_\mu A^\mu = 0$  (ossia è verificata anche la gauge di Lorenz).

- la quantità di moto di una particella è legata al vettore d'onda dell'onda corrispondente dalla relazione di De Broglie:

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}.$$

Questo è il framework nel quale lavoreremo, e viene chiamato **approccio di prima quantizzazione**.

La teoria si può ulteriormente sviluppare, includendo il fatto che *le onde presentano pure natura particellare*, ovvero *tutte* le eccitazioni possono essere scambiate in pacchetti discreti. Questo passo viene realizzato nell'**approccio di seconda quantizzazione**, che non tratteremo siccome richiede strumenti matematici troppo avanzati.

#### 4.4 ★★☆☆☆ Principio di corrispondenza, matter fields e osservabili

Siccome solo pacchetti discreti possono essere scambiati, l'unica interpretazione che possiamo dare quantisticamente al continuo di valori classicamente ammessi, è nel senso di "media", ovvero se lasciamo evolvere il sistema quantistico per molto tempo, il valor medio di pacchetti scambiati nell'unità di tempo deve tendere a quello previsto classicamente, così come deve succedere per ogni valore della teorica: se la meccanica quantistica ci desse previsioni diverse dalla meccanica classica sulla velocità di caduta di una mela da un albero, dovremmo scartarla, siccome sappiamo che questo fenomeno è descritto molto bene da Newton! La prescrizione che la nuova teoria si riduca, in opportuni limiti, a quella vecchia, è chiamata **principio di corrispondenza**, ed è un'ottima benchtable per ogni teoria!

Nella teoria elettromagnetica, la densità di energia del campo è proporzionale a<sup>23</sup>  $\omega |\mathbf{A}|^2$ , quindi il valor medio del numero di fotoni in un cubetto  $d^3\mathbf{x}$  è  $|\mathbf{A}|^2$ .

Un fatto analogo vale anche per ogni altra particella, che sia un elettrone, un protone o un neutrino: ognuna di queste vive in un **campo di materia**<sup>24</sup>  $\psi$  e la densità di probabilità è data da  $|\psi|^2$ . C'è una sostanziale differenza col caso elettromagnetico: i campi di materia sono intrinsecamente complessi<sup>25</sup>!

Arriviamo al punto sostanziale: la dinamica di questi campi! Prendiamo per semplicità una particella libera che vive in un volume cubico  $V = L^3$ . Come abbiamo visto prima, possiamo scomporre il suo campo in onde piane, che interpretiamo fisicamente come onde a diverso impulso:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{p}'}(t) e^{i\frac{\mathbf{p}'\mathbf{x}}{\hbar} + i\phi_{\mathbf{p}'}(t)}, \quad (4.1)$$

dove  $\phi_{\mathbf{p}}(t)$  sono fasi di cui non sappiamo nulla a priori. Supponiamo per un momento di conoscere esattamente l'impulso  $\mathbf{p}$  della particella. La normalizzazione<sup>26</sup> ci fissa<sup>27</sup>  $c_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{V}}$ . La funzione d'onda è quindi

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\frac{\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar} + i\phi_{\mathbf{p}}(t)}.$$

In questo semplice caso, l'impulso medio trovato in un cubetto  $d^3\mathbf{x}$  è la probabilità di trovare la particella nel cubetto moltiplicata per l'impulso della particella. La densità di impulso è quindi  $|\psi_{\mathbf{p}}|^2 \mathbf{p} = \bar{\psi}_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}} \times \mathbf{p}$ . Nel caso generico della eq. 4.1, in cui non conosciamo  $\mathbf{p}$ , la probabilità di trovare la particella con impulso  $\mathbf{p}'$  nel cubetto  $d^3\mathbf{x}$  è data dalla giusta componente di  $\psi$ , ed è quindi  $|c_{\mathbf{p}'}|^2 d^3x$ . La densità media di impulso nel caso generico è quindi

$$\langle \rho_{\mathbf{p}} \rangle = \sum_{\mathbf{p}'} |c_{\mathbf{p}'}(t)|^2 \mathbf{p}',$$

da cui otteniamo l'impulso totale:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int_V \langle \rho_{\mathbf{p}} \rangle d^3x = \int_V \sum_{\mathbf{p}'} |c_{\mathbf{p}'}(t)|^2 \mathbf{p}' d^3x. \quad (4.2)$$

Questa espressione dipende dalle  $c_{\mathbf{p}'}$ , che non sono grandezze fisiche; non ha quindi significato fisico, è solo una riscrittura matematica! Per convincerci che questa non è una buona candidata, immaginiamo, per

<sup>23</sup>Un fattore  $\omega$  è mangiato dalla normalizzazione. Per ulteriori dettagli vedere l'es. 23.

<sup>24</sup>In generale i campi di materia sono oggetti molto complicati, e una loro trattazione esaustiva è ben al di fuori di queste dispense, ed è lasciata a corsi universitari avanzati. Qui trascureremo tutti i fatti tecnici e faremo finta che questi campi siano campi classici, lavorando con **stati di singola particella**, dove non è necessaria la seconda quantizzazione.

<sup>25</sup>Questo è intimamente legato alle Disuguaglianze di Bell.

<sup>26</sup>La probabilità complessiva di trovare una particella in  $V$  deve essere 1!

<sup>27</sup>A meno di una fase che possiamo riassorbire in  $\phi_{\mathbf{p}}$ .

magia, di cambiare in un istante la forma della scatola. Per esempio di immergere la scatola in un'altra, più grossa, e poi togliere improvvisamente la scatola piccola, lasciando libera la particella di espandersi nella scatola esterna. Istantaneamente, i  $\mathbf{p}'$  ammessi e i relativi coefficienti, cambiano, ma il momento della particella, istantaneamente, non può cambiare! Deve esserci quindi una scrittura della quantità di moto solo in termini del campo  $\psi$ .

Notiamo che, siccome il volume è finito, dobbiamo<sup>28</sup> prendere solo i  $\mathbf{p}'$  della forma  $\frac{\pi\hbar}{L}(n_x, n_y, n_z)$ , con  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Questo si traduce nella seguente identità:

$$\int_V \overline{\psi_{\mathbf{p}'}} \psi_{\mathbf{p}'} d^3\mathbf{x} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'},$$

dove  $\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$  è la **delta di Kronecker**, che vale 1 se  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ ; 0 altrimenti.

Possiamo finalmente riscrivere l'eq. 4.2 con un'espressione che è più rievocativa:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int_V \sum_{\mathbf{p}'} \overline{c_{\mathbf{p}'}} \overline{\psi_{\mathbf{p}'}} c_{\mathbf{p}'} \psi_{\mathbf{p}'} d^3\mathbf{x} = \int_V \sum_{\mathbf{p}'} \sum_{\mathbf{p}''} \overline{c_{\mathbf{p}''}} \overline{\psi_{\mathbf{p}''}} c_{\mathbf{p}'} \psi_{\mathbf{p}'} d^3\mathbf{x} = \int_V \overline{\psi} \left( \sum_{\mathbf{p}'} \mathbf{p}' c_{\mathbf{p}'} \psi_{\mathbf{p}'} \right) d^3\mathbf{x}. \quad (4.3)$$

Non siamo ancora soddisfatti, ma manca davvero poco: se riuscissimo a scrivere  $\sum_{\mathbf{p}'} \mathbf{p}' c_{\mathbf{p}'} \psi_{\mathbf{p}'}$  in una forma che dipende solo localmente da  $\psi$ , avremmo vinto. Incredibilmente, questa forma esiste, ed è pure incredibilmente semplice! Notiamo infatti che

$$\nabla \psi(\mathbf{x}, t) = \nabla \sum_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{p}'} \psi_{\mathbf{p}'}(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{p}'} \mathbf{p}' c_{\mathbf{p}'} \psi_{\mathbf{p}'}(\mathbf{x}, t),$$

ovvero, la scrittura che stiamo cercando è

$$\sum_{\mathbf{p}'} \mathbf{p}' c_{\mathbf{p}'} \psi_{\mathbf{p}'} = -i\hbar \nabla \psi.$$

Soffermiamoci un secondo su quello che abbiamo trovato:

- abbiamo trovato un oggetto che, data un'onda con un impulso  $\mathbf{p}$  definito, “moltiplica” l'onda per la sua quantità di moto;
- ogni onda è scomponibile come somma di onde a impulso definito;
- l'oggetto trovato prima è lineare, quindi si combina bene con la somma.

A questo punto è naturale pensare che l'oggetto trovato sia la giusta espressione della quantità di moto, per una generica onda! È arrivato il momento di chiarire la natura di questo oggetto. Una definizione: un **operatore**  $\hat{O}$  è una funzione che mappa funzioni in funzioni; in termini pratici, è un oggetto che prende un campo  $\psi(\mathbf{x}, t)$  e ci sputa un altro campo  $\hat{O}\psi(\mathbf{x}, t)$  e lo fa in modo lineare, ovvero

$$\hat{O}(\psi + \varphi) = \hat{O}\psi + \hat{O}\varphi.$$

Prendiamo per esempio uno spazio unidimensionale. I numeri sono operatori: infatti, date due funzioni  $f(x), g(x)$ , vale che  $7f(x), 7g(x)$  sono ancora due funzioni e vale che  $7 \times (f + g) = 7f + 7g$ . Un altro operatore è la moltiplicazione per  $x$  (o per qualsiasi sua funzione): infatti  $x \times (f(x) + g(x))$  è ancora una funzione di  $x$  ed è uguale a  $xf(x) + xg(x)$ . Possiamo associare all'operazione di derivazione un operatore, che chiamiamo  $\hat{\partial}_x$ , e che associa alla funzione  $f(x)$  la sua derivata  $\frac{df}{dx}$ . Un **operatore vettoriale**  $\hat{\mathbf{O}}$  è una terna di operatori  $(\hat{O}_x, \hat{O}_y, \hat{O}_z)$  che, sotto rotazioni, ruota come il vettore posizione. Nel caso tridimensionale, l'operatore di derivazione fornisce pure un esempio di operatore vettoriale: infatti  $\hat{\nabla} = (\hat{\partial}_x, \hat{\partial}_y, \hat{\partial}_z)$  ruota come un vettore.

È a questo punto naturale introdurre l'operatore quantità di moto

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \hat{\nabla}. \quad (4.4)$$

In questo formalismo, la quantità di moto media della particella si scrive

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int_V \overline{\psi} \hat{\mathbf{p}} \psi d^3\mathbf{x}.$$

<sup>28</sup>Questo set ci basta e i vari elementi sono indipendenti; onde di  $\mathbf{p}'$  diverso possono essere scritte come sovrapposizione di quelle considerate.

È importante sottolineare, che l'identificazione in eq. 4.4 è solo un'identificazione formale!  $\hat{\mathbf{p}}$  non rappresenta semplicemente una terna di numeri, ma una "ricetta" per calcolare la media della grandezza fisica, una volta data la funzione d'onda  $\psi$ . L'uguaglianza tra due operatori  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$  significa che, per ogni funzione d'onda  $\varphi$ , vale  $\hat{O}_1\varphi = \hat{O}_2\varphi$ .

Se invece vogliamo calcolare la posizione media, basta ricordare che  $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3\mathbf{x}$  ci dà la probabilità di trovare la particella nel cubetto  $d^3\mathbf{x}$ ; il vettore posizione è quindi dato da

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \int_V \bar{\psi} \psi \mathbf{x} d^3\mathbf{x},$$

che, introducendo l'**operatore posizione**  $\hat{\mathbf{x}}$ , che data la funzione  $\varphi(\mathbf{x})$  restituisce, punto per punto, la funzione  $\hat{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})$ , può essere riscritto come

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \int_V \bar{\psi} \hat{\mathbf{x}} \psi d^3\mathbf{x},$$

che ricorda molto la formulazione della quantità di moto media. Questa è una proprietà del tutto generale in meccanica quantistica! Ogni grandezza misurabile  $O$ , in gergo chiamata **osservabile**, è associata a un operatore  $\hat{O}$  e il valor medio dell'osservabile è dato da

$$\langle O \rangle = \int_V \bar{\psi} \hat{O} \psi d^3\mathbf{x}. \quad (4.5)$$

È importante sottolineare che, come per la quantità di moto, **tutte** le informazioni dello stato sono contenute in  $\psi$ ,  $\hat{O}$  è solo una prescrizione che abbiamo per calcolare il valor medio dell'osservabile, l'operatore **non** contiene il valore della grandezza fisica.

Per semplificarci la vita, introduciamo la notazione bra-ket: quando scriveremo

$$\langle \psi | \phi \rangle$$

intenderemo

$$\int_V \bar{\psi} \phi d^3x;$$

in questa notazione, il valor atteso di un'osservabile sullo stato  $\psi$  si indica  $\langle O \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{O} \psi \rangle$ . Notiamo che  $\langle \alpha\psi | \beta\phi \rangle = \bar{\alpha}\beta \langle \psi | \phi \rangle$ .

C'è un vincolo che le osservabili devono rispettare: esse sono quantità misurabili, e quindi devono essere numeri reali. Dimosteremo ora che questo implica che gli operatori associati alle osservabili sono **autoaggiunti**, ossia per ogni coppia di funzioni d'onda deve valere

$$\langle \hat{O} \psi | \phi \rangle = \int_V \overline{\hat{O} \psi} \phi d^3x = \int_V \bar{\psi} \hat{O} \phi d^3x = \langle \psi | \hat{O} \phi \rangle.$$

Cominciamo a dimostrarlo per  $\psi = \phi$ : la **reality condition** si scrive

$$\langle \psi | \hat{O} \psi \rangle = \langle O \rangle = \overline{\langle O \rangle} = \overline{\langle \hat{O} \psi | \psi \rangle}, \quad (4.6)$$

e questo è esattamente la condizione che cercavamo. Per estenderlo a due generiche funzioni  $\psi, \phi$ , calcoliamo il valore atteso di  $\hat{O}$  sullo stato<sup>29</sup>  $\psi + \eta\phi$ , dove  $\eta$  è una fase pura ( $|\eta| = 1$ ), e usiamo la reality condition in eq. 4.6:

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}(\psi + \eta\phi) | \psi + \eta\phi \rangle &= \langle \hat{O}\psi | \psi \rangle + \eta \langle \hat{O}\psi | \phi \rangle + \bar{\eta} \langle \hat{O}\phi | \psi \rangle + \langle \hat{O}\phi | \phi \rangle \\ &= \langle \psi + \eta\phi | \hat{O}(\psi + \eta\phi) \rangle = \langle \psi | \hat{O}\psi \rangle + \eta \langle \psi | \hat{O}\phi \rangle + \bar{\eta} \langle \phi | \hat{O}\psi \rangle + \langle \phi | \hat{O}\phi \rangle, \end{aligned}$$

che, essendo vera per ogni fase  $\eta$ , implica  $\langle \hat{O}\psi | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{O}\phi \rangle$ . Questo fatto per gli operatori autoaggiunti, rende utile l'introduzione di questa piccola modifica alla notazione:

$$\langle \psi | \hat{O} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{O} \phi \rangle,$$

secondo cui il valore atteso di un'osservabile si scrive dunque

$$\langle O \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle.$$

Potete divertirvi a dimostrare che gli operatori  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\hat{\mathbf{p}}$  sono autoaggiunti<sup>30</sup>.

<sup>29</sup>Piccolo appunto tecnico assolutamente irrilevante: questo a rigore non è uno stato normalizzato. La dimostrazione formale è analoga, basta rinormalizzare lo stato dividendolo per una costante appropriata di normalizzazione.

<sup>30</sup>Hint: per  $\hat{\mathbf{p}}$  dovete integrare per parti e usare opportune boundary conditions

## 4.5 ★★☆☆☆ Equazione di Schrödinger

Non abbiamo ancora detto nulla su come il campo  $\psi$  evolve nel tempo, ed è arrivato il momento di rimediare! Dalla relatività ristretta, sappiamo che  $-\nabla$  è la componente spaziale<sup>31</sup> dell'operatore  $\partial^\mu$ . Classicamente, la quantità di moto  $\mathbf{p}$ , è la componente spaziale del 4-impulso  $p^\mu$ . Inoltre, l'uguaglianza formale  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$  dev'essere vera in ogni sistema di riferimento<sup>32</sup>, quindi<sup>33</sup> per la consistenza della teoria dobbiamo imporre

$$i\hbar\hat{\partial}^\mu = \hat{p}^\mu,$$

che nella quarta componente  $\mu = 0$ , che è l'unica non già vista, prende forma

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\hat{\partial}}{\partial t}, \quad (4.7)$$

dove  $\hat{E}$  è l'operatore energia<sup>34</sup>; questa equazione è nota come **equazione di Schrödinger** e sostituisce il ruolo della seconda legge di Newton nella meccanica quantistica. Ora procederemo a scriverla nell'approssimazione non relativistica.

Prima di procedere è però necessaria una considerazione: abbiamo ricavato l'equazione di Schrödinger usando uno strumento della relatività ristretta, ovvero le trasformazioni dei 4-vettori. Potremmo pensare che la teoria appena sviluppata funzioni naturalmente con particelle relativistiche, ma non è così: tutto il procedimento seguito fin ora è stato fatto in approssimazione di singola particella, ma quando l'energia cinetica di una particella diventa confrontabile con la sua massa a riposo, possono succedere fenomeni strani come la creazione di coppie particella-antiparticella. Nel nostro framework stiamo trascurando questa possibilità e questo rende soddisfacente la nostra teoria solo a energie molto minori dell'energia a riposo, ovvero in regimi non relativistici.

Possiamo dunque scrivere per una particella libera, come facciamo usualmente,  $\hat{E} = \frac{1}{2}m\hat{\mathbf{v}}^2 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$  e la nostra equazione di campo diventa

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi.$$

L'ultima formula assomiglia all'equazione d'onda, ma nella componente temporale ha solo una derivata prima. Nel caso la particella non fosse libera ma soggetta a un'interazione, ci basta aggiungere un termine di energia potenziale:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi.$$

Questa equazione tipicamente si risolve per separazione di variabili scrivendo

$$\hat{E}\psi_E = E\psi_E,$$

e i valori  $E$  che può assumere l'energia costituiscono lo spettro energetico del sistema. Le funzioni  $\psi_E$  vengono chiamati **autostati** o **autofunzioni** di  $\hat{E}$ . Quest'ultima equazione è nota come **Equazione di Schrödinger indipendente dal tempo**.

## 4.6 ★☆☆☆☆ Teorema di Ehrenfest

Sarebbe ora carino avere un limite sotto cui la teoria quantistica ci restituisce la teoria classica. Questo risultato emerge dal Teorema di Ehrenfest. Per dimostrarlo, occorre notare che la Seconda Legge di Newton può essere riformulata equivalentemente dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{m}\mathbf{p} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla E \end{cases};$$

In un sistema quantistico, posizione e impulso non sono più esattamente determinati; dobbiamo quindi prendere al loro posto il valore di aspettazione delle due osservabili. Per calcolare la derivata temporale

<sup>31</sup>Ricordiamo che  $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, \nabla)$ , quindi appare un “-” sulla componente spaziale quando si alza l'indice:  $\partial^\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, -\nabla)$ .

<sup>32</sup>Nel procedimento usato prima non abbiamo mai fissato un preciso sistema di riferimento!

<sup>33</sup>Ricordiamo che se due 4-vettori, in ogni sistema di riferimento, hanno tre componenti uguali, allora dev'essere uguale pure la quarta.

<sup>34</sup>Eamiltoniana per i puristi (quando studierete dal Goldstein capirete la battuta), Hamiltoniana  $\hat{H}$  per gli amici.

del valor atteso di un'osservabile indipendente dal tempo<sup>35</sup>, usiamo la regola per il calcolo del valore atteso e la regola di Leibnitz ottenendo

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \langle \dot{\psi} | \hat{O} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{O} | \dot{\psi} \rangle$$

e, usando l'equazione di Schrödinger e il fatto che  $\hat{E}$  è autoaggiunto si trova

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left( \langle \hat{E} \psi | \hat{O} | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{O} | \hat{E} \psi \rangle \right) = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | \hat{E} \hat{O} - \hat{O} \hat{E} | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [\hat{E}, \hat{O}] | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{E}, \hat{O}] \rangle, \quad (4.8)$$

dove abbiamo introdotto il **commutatore**  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ .

Ora siamo pronti per calcolare le derivate temporali dei valori di aspettazione di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{p}$  per un sistema quantistico! Partiamo dalla posizione:

$$\frac{d\langle \mathbf{x} \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[ \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \hat{V}, \hat{\mathbf{x}} \right] \right\rangle.$$

Per procedere occorre calcolare  $[\hat{x}^i, \hat{p}_j]$ , dove  $i, j$  sono gli indici degli operatori vettoriali. Per fare questo, usiamo la regola di Leibnitz: dobbiamo ricordarci che un operatore è qualcosa che agisce su una funzione d'onda, che non dobbiamo dimenticarci quando facciamo la derivata:

$$\hat{p}_i x^j \psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} (x^j \psi) = -i\hbar \delta_i^j \psi - i\hbar x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \psi = -i\hbar \delta_i^j + x^j \hat{p}_i \psi;$$

da questa si ricava facilmente la **legge di commutazione canonica**:

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_j^i. \quad (4.9)$$

Da questa e usando l'identità  $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$  è immediato trovare

$$\frac{d\langle \mathbf{x} \rangle}{dt} = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m},$$

legge analoga a quella della meccanica classica. Il problema viene dall'altra equazione: procedendo analogamente ed espandendo  $\hat{V}$  in Taylor attorno al punto  $\langle \mathbf{x} \rangle$ , troviamo

$$\frac{d\langle p_i \rangle}{dt} = -\partial_i V(\langle \mathbf{x} \rangle) - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \partial_k V(\langle \mathbf{x} \rangle) \left( (x_j - \langle x_j \rangle)(x_k - \langle x_k \rangle) \right) + \dots \quad (4.10)$$

che si riconduce all'analogo legge in meccanica classica se la particella è sufficientemente localizzata.

## 4.7 ★★☆☆☆ Importanza delle boundary conditions

Le boundary condition mettono dei vincoli alle possibili funzioni d'onda che possiamo considerare. Spesso questi vincoli sono dettati dalla fisica del sistema. Alcune situazioni comuni sono:

- sistemi non limitati, quindi  $\psi$  deve essere a decrescenza rapida perché la probabilità complessiva di trovare la particella  $\int_V |\psi|^2 d^3\mathbf{x}$  deve essere 1;
- particelle che vivono in domini periodici, per esempio una particella in un cristallo o un elettrone in orbita attorno al nucleo, devono avere  $\psi$  periodiche<sup>36</sup>;
- se una particella è contenuta in una buca infinita di potenziale, siccome  $\psi$  deve essere continua, deve annullarsi ai bordi della buca.

<sup>35</sup>Nota che il fatto che l'osservabile sia time-independent **non** implica che pure il suo valore di aspettazione sia costante! Infatti nel calcolo del valore di aspettazione, c'è  $\psi$  che varia nel tempo.

<sup>36</sup>Potreste pensare che siccome  $\psi$  non è misurabile, la quantità fisica è solo  $|\psi|^2$ , quindi è sufficiente che dopo un giro  $\psi$  prenda una fase. In realtà questo non è del tutto vero: prendendo come stato iniziale uno stato coerente di due particelle e facendone girare solo una attorno al dominio periodico, posso misurare la fase relativa.

## 4.8 ☆☆☆☆☆ Meccanica quantistica relativistica

Uno dei primi tentativi fatti per generalizzare l'equazione di Schrödinger a particelle relativistiche è l'equazione di Klein-Gordon. Per ricavarla, notiamo che in relatività ristretta l'equazione di dispersione si scrive

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Usando  $\hat{p}^\mu = i\hbar\partial^\mu$  ed elevando al quadrato questa espressione, troviamo l'equazione di Klein-Gordon:

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{c^2 m^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0.$$

Questa equazione non era però soddisfacente, per varie ragioni. Queste possono essenzialmente essere attribuite fatto che questa è un'equazione del secondo ordine nel tempo.

Così come le equazioni di Maxwell implicano l'equazione d'onda, le leggi delle particelle libere devono implicare l'equazione di K-G<sup>37</sup>. Purtroppo però ci sono ulteriori vincoli che dipendono dalla natura delle particelle, che in questa equazione non appaiono. Per esempio, i fermioni, come gli elettroni, i neutrini ma anche i protoni, soddisfano l'equazione di Dirac<sup>38</sup>

$$i\hat{\not{D}}\Psi - \frac{mc}{\hbar}\Psi = 0.$$

Tuttavia la fisica delle teorie quantistiche relativistiche di campo (QFTs) è molto complicata e presenta svariate sottigliezze. Una delle cose che si scopre che val la pena citare in queste dispense è il motivo per cui l'approssimazione a singola particella fallisce miseramente ad alte energie: quando l'energia cinetica diventa confrontabile con l'energia a riposo delle particelle, si creano coppie virtuali particella-antiparticella che formano una nube attorno alle particelle di interesse. La teoria sviluppata nelle pagine precedenti rimane predittiva solo fintanto che questo fenomeno rimane irrilevante.

## 4.9 ★★☆☆☆ Approssimazione semiclassica: WKB(J)

Come spesso accade, abbiamo una teoria. La teoria ci dà delle equazioni, e compito nostro è risolverle. Non sempre questo è un lavoro facile e spesso queste equazioni non si integrano analiticamente. Per questo vengono introdotte delle approssimazioni.

L'approssimazione che vogliamo introdurre in questo capitolo viene detta **approssimazione semiclassica**, perché si basa su un forte intuito classico e dà risultati accettabili solo fintanto che le energie in gioco sono abbastanza alte da rendere piccole le differenze tra le predizioni della meccanica quantistica da quelle della meccanica classica.

Vediamo di cosa si tratta: vogliamo trovare lo spettro e gli autovettori di  $\hat{E}$ . Abbiamo una particella che si muove in un potenziale  $V(x)$ . Supponiamo di avere un autovettore di energia  $E$ . In un intorno molto piccolo di un punto  $x_0$ , approssimiamo il potenziale a una costante  $V(x_0)$ . L'equazione di Schrödinger ci dà come soluzione  $\psi \sim e^{\pm ikx} \sim e^{i\phi(x)}$ , dove

$$k = \pm \left| \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|$$

è il vettore d'onda che, tramite la relazione di De Broglie, sappiamo valere  $p/\hbar$ . Possiamo ricavare  $p$  dalla conservazione dell'energia:  $p = \sqrt{2m(E - V(x_0))}$ . Unendo queste relazioni si ottiene

$$\psi(x) \sim e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int^x \sqrt{2m(E - V(y))} dy}.$$

Se volessimo un'approssimazione migliore, potremmo fare la seguente osservazione: se la particella è contenuta in una buca di potenziale, il suo moto è periodico di semiperiodo diciamo  $T$ . Non sapendo nulla sullo stato della particella se non l'energia, la probabilità di trovarla in un segmento  $dx$  della traiettoria è pari al rapporto tra tempo  $dt$  che in ogni semigiorno la particella impiega a percorrere quel segmento e il semiperiodo  $T$ .  $dt = dx/v$ , dove  $v = p/m$  è la velocità della particella nel segmento  $dx$ . Quindi la densità di probabilità di trovare la particella in un punto  $x_0$  è inversamente proporzionale a  $p(x_0)$ ; ma la densità di probabilità è il modulo quadro della funzione d'onda. Da questo si conclude che

$$\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int^x \sqrt{2m(E - V(y))} dy}.$$

<sup>37</sup>Si noti che l'equazione d'onda è K-G con  $m = 0$ .

<sup>38</sup>Che è sicuramente una bellissima equazione, molto estetica, ma non c'entra niente né con l'amore né con l'entanglement!

Negli esercizi potrete trovare svariate applicazioni di questo metodo di approssimazione. In particolare si suggerisce di svolgere l'esercizio 29. Si noti che questa è una tecnica di approssimazione valida non solo in meccanica quantistica, ma ogni volta che bisogna risolvere equazioni differenziali alle derivate parziali in cui si ha qualcosa che assomiglia abbastanza all'equazione d'onda. Per esempio, usando il prim'ordine di questa approssimazione, si possono ottenere le leggi dell'**ottica geometrica** partendo dall'elettrodinamica.

#### 4.10 ☆☆☆☆☆ Trasformazioni infinitesime

Veniamo ora a uno dei risultati più importanti della Fisica: la relazione tra **simmetrie** e **quantità conservate**.

Avrai forse sentito parlare del Teorema di Noether in meccanica classica: a ogni simmetria continua del sistema è associata una quantità conservata. Facciamo un esempio: prendiamo una pallina che può muoversi nello spazio sotto l'azione di una forza conservativa, che quindi ammette potenziale  $\phi$ . Supponiamo che il potenziale non dipenda da una coordinata, diciamo  $x$ . Allora la componente  $x$  del gradiente di  $\phi$  è nulla e quindi pure la componente  $x$  della forza agente sulla pallina è nulla. Per la seconda legge della dinamica, la componente  $x$  della quantità di moto si conserva. Per questo motivo, la quantità di moto di un corpo viene detta anche momento lineare: perché è il momento associato a una coordinata, e se c'è simmetria di traslazione  $x \mapsto x + \delta x$  lungo quella coordinata, il momento coniugato si conserva.

Consideriamo un'altra situazione: un corpo si muove sotto l'azione di una forza centrale conservativa in un piano. Prendiamo un set di coordinate polari  $(r, \theta)$ . C'è simmetria di rotazione  $\theta \mapsto \theta + \delta\theta$  (che in questo set di coordinate è solo una traslazione generalizzata), quindi il momento coniugato a  $\theta$  si conserva. Questa grandezza conservata viene di solito chiamata momento angolare.

Un ultimo esempio<sup>39</sup>. Se in un sistema il potenziale non dipende dal tempo, l'energia meccanica si conserva. In effetti la simmetria di traslazione temporale implica la conservazione dell'energia, che è quindi la variabile coniugata al tempo.

Queste relazioni, che in meccanica newtoniana possono sembrare un po' oscure, appaiono in modo del tutto naturale in meccanica quantistica.

**§ 4.10.1. Operatore energia.** — Partiamo dall'energia. Supponiamo di avere una particella che all'istante  $t_0$  sta nello stato  $\psi$ . Ci chiediamo, in quale stato sarà al tempo  $t_0 + \delta t$ , con  $\delta t$  molto piccolo? La risposta arriva dall'equazione di Schrödinger: nello stato  $\psi + \frac{\delta t}{i\hbar} \hat{E}\psi$ . Appare dunque chiaro perché diciamo che **l'energia è il generatore delle traslazioni temporali**. Calcoliamo ora come varia il valore di aspettazione dell'energia. Se c'è simmetria di traslazione temporale, ovvero se  $\hat{E}$  non dipende esplicitamente dal tempo, allora dall'eq. 4.8 si ha che il valore di aspettazione dell'energia si conserva: ritroviamo quindi il risultato della meccanica classica.

Se volessimo fare una traslazione temporale finita, non solo infinitesima, potremmo scrivere, supponendo  $\psi(t, \mathbf{x})$  analitica in  $t$ :

$$\begin{aligned} \psi(t_0 + \Delta t) &= \psi(t_0) + \dot{\psi}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\psi}(t_0)\Delta t^2 + \dots \\ &= \psi(t_0) + \frac{1}{i\hbar}\hat{E}\Delta t\psi - \frac{1}{2}\frac{1}{\hbar^2}\hat{E}^2\Delta t^2\psi + \dots \end{aligned}$$

intendendo l'esponenziale definito tramite serie di Taylor, possiamo dunque fare una traslazione temporale finita tramite

$$\exp\left[-\frac{i\Delta t}{\hbar}\hat{E}\right]\psi.$$

Possiamo dare un'altra definizione equivalente: facciamo  $N$  volte una traslazione di  $\Delta t/N$ , dove  $N$  tende a  $+\infty$ . Questo dà un errore che tende a zero, come si dimostra facendo un semplice calcolo:

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{iN\hbar}\hat{E} + O(\Delta t/N)^2\right)^N = \exp\left[-\frac{i\Delta t}{\hbar}\hat{E}\right] + O(\Delta t/N).$$

Questo si estende in modo ovvio a tutte le trasformazioni seguenti.

<sup>39</sup>Per dirla tutta, quest'ultimo caso è un po' speciale. Approfondirete l'argomento all'Università.

§ 4.10.2. **Operatore impulso.** — Passiamo ora all'operatore impulso, per semplicità in 1D. Quale trasformazione genera l'impulso? Lo vediamo subito:

$$\psi(x) + \frac{\delta x}{i\hbar} \hat{p}\psi(x) = \psi(x) - \delta x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \simeq \psi(x - \delta x).$$

**La quantità di moto è il generatore delle traslazioni.** In effetti, se c'è simmetria di traslazione allora tutte le derivate di  $V(x)$  si annullano e l'eq. 4.10 ci dà la conservazione dell'impulso.

§ 4.10.3. **Operatore posizione.** — **L'operatore posizione è il generatore dei boost.** Questo si ottiene per calcolo diretto:

$$\psi' \simeq \psi + \frac{\delta p}{i\hbar} \hat{x}\psi = \left(1 + \frac{\delta p}{i\hbar} \hat{x}\right)\psi,$$

e applicandoci  $\hat{p}$ :

$$\hat{p}\psi' \simeq \left(1 + \frac{\delta p}{i\hbar} \hat{x}\right)\hat{p}\psi - \delta p\psi.$$

Se prendiamo  $\psi$  autovettore di  $\hat{p}$  con impulso  $p_0$ , allora  $\psi'$  è autovettore di  $\hat{p}$  con impulso  $p_0 - \delta p$ . Questo è vero per ogni  $p_0$ , quindi per sovrapposizione abbiamo la tesi.

§ 4.10.4. **Operatore momento angolare orbitale.** — Qui si apre un capitolo delicato. Per ora supporremo che la funzione d'onda  $\psi$  sia scalare, ovvero che ruoti come una funzione scalare, come ad esempio la temperatura o la pressione. Questa frase sembra tautologica (e probabilmente lo è) ma sottointende un concetto importantissimo: quello che vuole dire è che se nel sistema di riferimento  $O$  la funzione d'onda è  $\psi(\mathbf{x})$ , nel sistema di riferimento  $O'$ , ruotato tramite un cambio di coordinate  $R$ , la funzione d'onda è  $\psi(R^{-1}\mathbf{x})$ <sup>40</sup>, ovvero cambia solo il punto in cui la funzione è valutata. Questo enunciato non è affatto banale, come vedremo in seguito.

Sotto quest'ipotesi, come in meccanica classica, **il generatore delle rotazioni è il momento angolare orbitale  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{p}}$ .** Questo significa che ruotare la funzione d'onda di un piccolo angolo  $\delta\theta$  attorno a un asse  $\mathbf{n}$  ci farà avere la funzione d'onda  $\left(1 + \frac{i\delta\theta}{\hbar} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{L}}\right)\psi$ . Come in meccanica classica, sotto simmetrie di rotazione, il momento angolare è conservato.

Facendo una rotazione completa attorno a un asse, la funzione d'onda deve tornare in sé stessa. Guardando la forma delle rotazioni finite,

$$\exp\left[\frac{i\theta}{\hbar} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{L}}\right],$$

si ottiene che  $\mathbf{L}$  può assumere come valori solo multipli di  $\hbar$ . Questo risultato è noto come **quantizzazione del momento angolare**.

§ 4.10.5. **Operatore di spin e momento angolare totale.** — In generale,  $\psi$  può non essere un campo scalare. Per esempio, per protoni, neutroni e per la maggior parte delle particelle elementari,  $\psi$  è un oggetto a due componenti, le quali si mischiano sotto rotazioni. Questi oggetti si chiamano **spinori**. Come nel caso precedente, **il generatore delle rotazioni è il momento angolare totale  $\hat{\mathbf{J}}$ :**

$$\psi' \simeq \left(1 + \frac{i\delta\theta}{\hbar} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}\right)\psi.$$

La differenza tra  $\hat{\mathbf{J}}$  e  $\hat{\mathbf{L}}$  è chiamata **momento angolare intrinseco** o **spin  $\hat{\mathbf{S}}$** .  $\hat{S}^2$  è un'osservabile e il suo valore dipende solo dalla particella.

C'è una sottigliezza: a causa della struttura topologica del gruppo delle rotazioni<sup>41</sup> lo spin può assumere valore intero o semi-intero. Per elettroni, protoni e neutroni infatti lo spin vale  $\frac{1}{2}\hbar$ .

Spesso i momenti angolari si misurano in unità di  $\hbar$ , quindi quando si parla di spin  $\frac{1}{2}$ , si intende  $\frac{\hbar}{2}$ .

<sup>40</sup>Se ti urta che ci sia la trasformazione inversa, pensa che è la stessa cosa che succede quando vuoi traslare in avanti di  $\Delta$  una funzione:  $f(x)$  diventa  $f(x - \Delta)$ .

<sup>41</sup> $SO(3)$  non è semplicemente connesso, ma ha un doppio rivestimento,  $Spin(3) = SU(2)$ .

#### 4.11 ★★☆☆☆ Relazione di indeterminazione di Heisenberg

Consideriamo un sistema unidimensionale. La relazione di commutazione canonica ci dice che i due operatori  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  non commutano, ovvero l'ordine in cui li applichiamo è importante. La relazione<sup>42</sup> di indeterminazione di Heisenberg ci dice che le incertezze sulle possibili misure di  $x$  e di  $p$  sono legate dalla relazione

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Questi due fatti non sono indipendenti! In particolare, per la **disuguaglianza di Robertson**, ogni volta che gli operatori  $\hat{A}, \hat{B}$  associati alle osservabili  $A, B$  hanno come commutatore un  $c$ -numero  $iC$ , il prodotto dell'indeterminazione di  $A$  per quella su  $B$  è sempre maggiore di  $\frac{1}{2}C$ .

Dimostriamolo: l'incertezza  $\Delta O$  su un'osservabile  $O$  è definita da

$$\Delta O^2 = \langle (O - \langle O \rangle)^2 \rangle = \langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2.$$

Possiamo supporre senza perdita di generalità che  $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$ . Consideriamo

$$\langle (A + i\alpha B)(A - i\alpha B) \rangle = \langle A^2 \rangle + \alpha^2 \langle B^2 \rangle + i\alpha \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle = \langle A^2 \rangle + \alpha^2 \langle B^2 \rangle - \alpha C, \quad (4.11)$$

con  $\alpha$  numero reale. Questa espressione è non negativa, infatti

$$\langle (\hat{A} + i\alpha \hat{B})(\hat{A} - i\alpha \hat{B}) \rangle = \langle \psi | (\hat{A} + i\alpha \hat{B})(\hat{A} - i\alpha \hat{B}) | \psi \rangle = \langle (\hat{A} - i\alpha \hat{B})\psi | (\hat{A} - i\alpha \hat{B})\psi \rangle \quad (4.12)$$

$$= \int_V |(\hat{A} - i\alpha \hat{B})\psi|^2 dx \geq 0. \quad (4.13)$$

Troviamo l' $\alpha$  che minimizza l'espressione in eq. 4.11:

$$\frac{d}{d\alpha} (\langle A^2 \rangle + \alpha^2 \langle B^2 \rangle - \alpha C) = 2\alpha \langle B^2 \rangle - C \stackrel{!}{=} 0,$$

e sostituendovi  $\alpha$  trovato nella relazione in eq. 4.12 troviamo infine

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle &\geq \frac{C^2}{4} \\ \therefore \Delta A \Delta B &\geq \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Vediamo che da questa equazione, con  $\hat{A} = \hat{x}$  e  $\hat{B} = \hat{p}$ , segue la relazione di Heisenberg.

#### 4.12 ☆☆☆☆☆ Path Integral, ossia la funzione di Green della QM

Il classico problema di fisica può essere riassunto nel seguente format:

1. conosciamo lo stato del sistema al tempo  $t_0$ ;
2. conosciamo le leggi di evoluzione temporale;
3. vogliamo trovare lo stato del sistema al tempo  $t_1$ .

Le leggi della meccanica quantistica sono lineari, quindi possiamo accendere il formalismo delle funzioni di Green! La funzione di Green della meccanica quantistica si chiama **propagatore**. La notazione utilizzata è questa:

$$K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0; t_1, t_0) = \hat{U}(t_1, t_0)\psi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_1),$$

dove  $\psi_{\mathbf{x}_0}$  è la funzione d'onda di una particella completamente localizzata nel punto  $\mathbf{x}_0$ . In altre parole  $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0; t_1, t_0)$  è l'evoluta temporale all'istante  $t_1$  valutata nel punto  $\mathbf{x}_1$  della funzione d'onda che al tempo  $t_0$  era completamente localizzata nel punto  $\mathbf{x}_0$ .

Dal principio di sovrapposizione, se al tempo  $t_0$  la funzione d'onda è  $\psi_0(\mathbf{x})$ , la funzione d'onda al tempo  $t_1$  è

$$\psi_1(\mathbf{x}) = \int_V K(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t_1, t_0)\psi_0(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

<sup>42</sup>In alcuni testi, viene presentato come "Principio". Io preferisco usare la parola "relazione", perché è una conseguenza diretta del fatto che le particelle presentano natura ondulatoria, non è un postulato della teoria.

Il problema della meccanica quantistica è quindi ridotto al calcolo del propagatore. Feynman dimostrò un risultato molto importante:

$$K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0; t_1, t_0) = \int [\mathcal{D}\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}(\tau)]}$$

$$= \int [\mathcal{D}\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1} - E)} = \int [\mathcal{D}\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt L}.$$

Diamo un po' di nomi a cose per capire questa formula abbastanza complicata:

- $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}(\tau)$  è una traiettoria di una particella classica che al tempo  $t_0$  sta in  $\mathbf{x}_0$  e al tempo  $t_1$  è arrivata in  $\mathbf{x}_1$ ;
- $L = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - E$  è la **lagrangiana** della particella, è una funzione strettamente collegata all'energia che detta le equazioni del moto; per particelle classiche non relativistiche è pari alla differenza tra energia cinetica ed energia potenziale;
- $\mathcal{S}[\mathbf{x}(\tau)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$  è l'**azione** della traiettoria  $\mathbf{x}(\tau)$ .

$K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0; t_1, t_0)$  è la media pesata su tutti i percorsi che partono da  $\mathbf{x}_0$  e arrivano a  $\mathbf{x}_1$  in un tempo  $t_1 - t_0$ . Per questo motivo, il propagatore è anche chiamato **path integral** o **integrale funzionale**. Chiaramente questo conto non è elementare e spesso non si riesce a fare davvero. Però ci dice perché la meccanica classica funziona!

Non so se avete mai sentito parlare del **principio di minima azione**<sup>43</sup>: in meccanica classica i corpi seguono la traiettoria  $\mathbf{x}(\tau)$  che rende stazionaria l'azione. Questo significa che se si introduce una perturbazione  $\delta\mathbf{x}(\tau)$  abbastanza piccola, al primo ordine l'azione di  $\mathbf{x}(\tau) + \delta\mathbf{x}(\tau)$  è uguale all'azione del percorso originale  $\mathbf{x}(\tau)$ . Il principio di Fermat è nient'altro che un caso particolare di questo principio.

Il principio di minima azione trova spiegazione nel Path Integral! Se l'azione è stazionaria attorno alla traiettoria  $\mathbf{x}(\tau)$ , allora i percorsi vicini nell'integrale funzionale danno interferenza costruttiva, quindi la funzione d'onda attorno alla traiettoria classica assume valori grandi in modulo, e dunque è molto probabile che noi osserviamo una particella su tale traiettoria. Detto in altri termini, la meccanica classica si trova come approssimazione saddle-point della meccanica quantistica.

#### 4.13 ★★★★★☆ Statistica: fermioni e bosoni

Finora abbiamo considerato solo sistemi a singola particella. In alcuni problemi tuttavia può essere necessario tenere conto della presenza di più particelle. L'unico caso nel quale sappiamo farlo è quello in cui queste non sono interagenti (oppure sono solo debolmente interagenti, e ci riduciamo al caso precedente con metodi perturbativi). Se queste particelle sono diverse, nessun problema: la funzione d'onda complessiva è il prodotto delle funzioni d'onda<sup>44</sup>:

$$\psi_{1,2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2).$$

Nel caso le particelle siano identiche (per esempio nel caso di due elettroni) la situazione è più complicata. Ci viene incontro il **Teorema di Spin-Statistica**: in dimensione  $D \geq 3$  possono succedere due cose:

- lo spin della particella è semi-intero: allora la particella ha **comportamento fermionico**;
- lo spin è intero: la particella in questo caso assume **comportamento bosonico**.

In dimensione  $D = 1, 2$  possono succedere cose più complicate<sup>45</sup>: particelle che non sono né fermioni né bosoni vengono dette **anyons** o **qualunquoni**<sup>46</sup>.

<sup>43</sup>O, più precisamente, principio dell'azione stazionaria.

<sup>44</sup>Oppure eventualmente sovrapposizione di prodotti di funzioni d'onda.

<sup>45</sup>Poteste chiedervi, visto che viviamo in 3+1 dimensioni, se questa cosa ha solo interesse accademico o serve davvero a qualcosa: incredibilmente ha un risvolto pratico! In strati molto sottili di materia, per esempio in strati di grafene, la fisica è essenzialmente bidimensionale, quindi non c'è da sorprendersi se vengono osservati anyoni.

<sup>46</sup>Siccome la parola qualunque fa schifo, qualche volta si usa la parola anyoni, da non confondere con gli anioni dei chimici e che non c'entrano nulla.

§ 4.13.1. **Fermioni: principio di esclusione di Pauli.** — Prendiamo una funzione d'onda a due particelle  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Ci potremmo chiedere cosa succede se scambiamo i due argomenti. Il Teorema di Spin-Statistica afferma che  $\Psi$  deve cambiare segno:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1).$$

Quindi  $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ ! Da questo segue il **Principio di Esclusione di Pauli**: due particelle fermioniche non possono stare nello stesso stato. Quindi a basse temperature,  $N$  fermioni occupano gli  $N$  stati distinti disponibili a energia minore. Un sistema in questo stato si chiama **gas degeneri di (Dirac)-Fermi**.

Praticamente tutte le particelle di materia, come elettroni, quark, neutrini sono fermioni.

§ 4.13.2. **Bosoni.** — Diversamente, quando scambiamo due bosoni, la funzione d'onda tiene lo stesso segno:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1).$$

È quindi possibile per due bosoni stare nello stesso stato. In particolare, a basse temperature, ci aspettiamo che molte particelle vadano nello stato a energia più bassa (**stato fondamentale**). Quando un numero macroscopico di particelle occupano il fondamentale, si parla di **condensazione di Bose-Einstein**.

Ci sono particelle bosoniche elementari, come i fotoni o gli ipotetici gravitoni, ma anche particelle bosoniche composte, come atomi formati da un numero pari di fermioni sono bosoni<sup>47</sup>.

L'emissione stimolata, alla base del funzionamento dei laser, è possibile proprio grazie al comportamento bosonico di alcune particelle (i fotoni in questo caso).

§ 4.13.3. **Anyoni.** — Questo caso è più complicato. Qualitativamente, diciamo che  $\bar{\Psi}$  ha tante componenti e lo scambio di due particelle agisce come una matrice  $A$ .

$$\bar{\Psi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = A\bar{\Psi}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1).$$

Queste particelle sono molto studiate per cercare di spiegare l'effetto Hall frazionario.

<sup>47</sup>Sono stati osservati sperimentalmente condensati bosonici di atomi!

# SEZ. A — COMPLEMENTI DI ANALISI

Qui potrete trovare qualche approfondimento su alcuni strumenti matematici che potrebbero prima o poi tornarvi utile.

## A.1 Analisi complessa e Teorema dei residui

La **derivata in senso complesso** di una funzione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  è il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{df}{dz} = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z + dz) - f(z)}{dz}.$$

Una funzione si dice **differenziabile in senso complesso** o **analitica** se ammette derivata in senso complesso in ogni punto del suo dominio.

Questa condizione è molto più stringente della derivabilità sui reali! Infatti nei reali possiamo avvicinarci a  $z$  solo da destra o da sinistra. Nel piano complesso possiamo farlo dal basso, dall'alto, con una curva a spirale, ecc. . . Questa scelta non deve influenzare il valore del limite. Tipicamente tutte le funzioni che usiamo di solito<sup>48</sup> sono derivabili.

Per dar l'idea di quanto sia più potente la derivabilità complessa di quella reale, si pensi che c'è un teorema matematico che assicura che se una funzione è derivabile (in senso complesso) in un aperto una volta, allora è  $C^\infty$  (in senso complesso)!

Ora vedremo una dimostrazione "da fisici" del Teorema dei residui. Preliminarmente, spezziamo  $z = x + iy$  in parte reale e immaginaria e ugualmente facciamo con  $f = f_1 + if_2$ . La derivabilità implica

$$\frac{df}{dz} = \frac{df_1}{dx} + i \frac{df_2}{dx} = i \frac{df_1}{dy} - \frac{df_2}{dy}.$$

Siccome  $x, y, f_1, f_2$  sono reali, si devono avere le **condizioni di Cauchy-Riemann**:

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dx} = -\frac{df_2}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} = \frac{df_1}{dy} \end{cases}$$

La seconda equazione può essere scritta in forma più evocativa:

$$\frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dy} = 0,$$

ossia vedendo  $f$  come una funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , essa ha rotore nullo!

Supponiamo che vogliamo calcolare un integrale su una linea chiusa  $\gamma$  di una funzione analitica complessa. Allora, finché non attraversiamo punti singolari, possiamo deformare in modo continuo la linea di integrazione in una nuova curva  $\gamma'$ , come in figura 9. Infatti, per il Teorema del Rotore, la differenza tra gli integrali di linea è l'integrale del rotore nell'area compresa tra le due curve, ma essendo il rotore identicamente nullo, allora i due integrali assumono lo stesso valore.

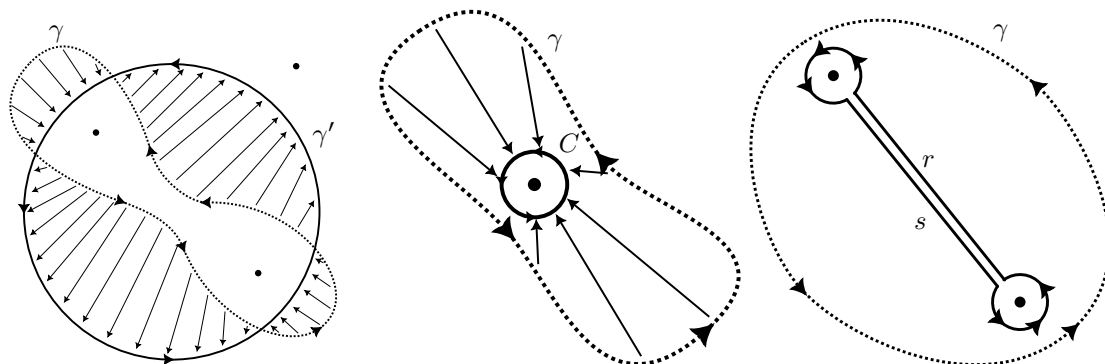


Figura 9: Possibili deformazioni di percorsi nel piano complesso. I punti rappresentano i punti singolari.

<sup>48</sup>Tranne le funzioni che hanno a che fare con  $\bar{z}$ . Si noti in particolare che  $\bar{z}$  non è derivabile in senso complesso, nonostante sia una funzione regolarissima!

Un risultato immediato è che se nella curva  $\gamma$  non ci sono punti singolari, allora l'integrale è automaticamente nullo. Supponiamo ci sia un solo punto singolare  $z_0$  nell'area racchiusa da  $\gamma$ : possiamo deformare  $\gamma$  fino a farlo diventare un cerchio  $C$  centrato attorno al punto singolare. Se il punto singolare è isolato, ovvero esiste almeno un cerchietto intorno al punto nel piano complesso dentro il quale la funzione è ben definita, allora possiamo espandere, vicino al punto singolare, la funzione con la **Serie di Taylor-Laurent**:

$$f(z) \simeq \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k.$$

Prendere anche i  $k$  negativi ci permette di catturare la divergenza. Se ci bastano i  $k \geq k_0$  per qualche  $k_0$ , allora diremo che il punto singolare è un **polo**.

Ora possiamo finalmente svolgere l'integrale. Supponiamo without loss of generality che  $z_0 = 0$ :

$$\int_C dz f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_C dz z^k.$$

Per  $k \neq -1$ , l'integrale dà contributo nullo: infatti

$$\int_C dz z^k = \frac{1}{k+1} z^{k+1},$$

che quando valutato all'inizio e alla fine di un giro su  $C$  dà contributo nullo. Invece il termine con  $k = -1$  è più subdolo:

$$\int \frac{1}{z} dz = \ln z.$$

Bisogna capire com'è fatto il logaritmo sul piano complesso. Il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale. L'esponenziale di  $z$  ha modulo  $e^{\operatorname{Re}\{z\}}$  e argomento (angolo)  $\operatorname{Im} z$ , come si può ricavare facilmente:

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z} = e^{\operatorname{Re} z} \times (\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z).$$

Dunque,  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ . C'è un problema:  $e^z$  non è iniettiva! Infatti

$$e^z = e^{z+2\pi i}!$$

Quindi il logaritmo è definito a meno di multipli interi di  $2\pi i$ . Si dice che il logaritmo è una **funzione polidroma** o a **più fogli**. Il logaritmo ha infiniti fogli; altre funzioni polidrome sono le radici. Radici a esponente intero o razionale hanno finiti fogli; radici a esponente irrazionale ne hanno infiniti. Quando si lavora con funzioni polidrome, bisogna stare attenti, perché la serie di Taylor-Laurent funziona solo attorno a punti su un singolo "foglio". Per esempio si può espandere  $\ln z$  attorno a  $z_0 = 1$  ma non attorno a  $z_0 = 0$ .

Il risultato di questa sottigliezza è che, quando facciamo l'integrale, facendo un giro ci becchiamo un  $2\pi i$ . Possiamo quindi concludere che

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Nel caso ci siano più punti singolari isolati, diciamo due (il caso a più punti singolari si generalizza in modo ovvio), possiamo deformare il percorso come in fig. 9: in questo caso il contributo sui segmenti  $r, s$  si elide e al posto di fare esplicitamente l'integrale possiamo espandere attorno a ciascun punto singolare  $f$  nella serie di Taylor-Laurent, calcolare i  $c_{-1}^{(j)}$  e otterremo  $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_j c_{-1}^{(j)}$ . Abbiamo visto che i coefficienti  $c_{-1}^{(j)}$  sono molto importanti, quindi gli diamo un nome speciale: li chiamiamo **residui**.

Scriveremo quindi

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}[f](z_j),$$

dove gli indici scorrono sui punti singolari di  $f(z)$  all'interno della curva  $\gamma$ .

## A.2 Metodo del Punto di Sella

Dalla lezione di Analisi avete visto l'integrale gaussiano.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Proviamo a usarlo per fare qualche approssimazione.

Supponiamo di voler calcolare un integrale della forma

$$\int_a^b e^{g(x)} dx,$$

dove  $g(x)$  ha solo un solo massimo in  $x_0$ , abbastanza lontano da  $a, b$ . Allora non commettiamo un grande errore a mandare  $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty$  e a espandere al secondo ordine  $g(x)$  attorno al suo massimo:

$$\int_a^b e^{g(x)} dx \simeq \int_{\mathbb{R}} e^{g(x_0)} e^{\frac{1}{2}g''(x_0)(x-x_0)^2} dx \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(x_0)}} e^{g(x_0)}.$$

Questa procedura funziona anche se  $g''(x_0)$  è complesso a patto che l'integrale converga. Per esempio, nel caso  $g''(x_0)$  sia immaginario puro l'approssimazione funziona bene perché vicino a  $x_0$  la funzione  $g(x)$  è stazionaria e l'esponenziale dà "interferenza costruttiva"; lontano dal punto stazionario invece l'esponenziale oscilla velocemente, media a zero e dà quindi contributo trascurabile.

### A.3 Qualche identità vettoriale

Nel testo abbiamo dato per buone alcune identità vettoriali. Vediamo come si dimostrano. Ci sarà utile per quest'appendice usare:

- il **tensore di Ricci-Levi Civita** o **tensore completamente antisimmetrico**  $\varepsilon_{ijk}$ . Esso vale +1 sulle permutazioni pari di 123, -1 sulle permutazioni dispari di 123, 0 se almeno due indici sono uguali:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1 & \text{se } (ijk) = (132), (213), (321) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questo simbolo è utile per scrivere i prodotti vettore in notazione di Einstein:

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})_i = \varepsilon_{ijk} v_j w_k.$$

- la notazione di Einstein, che vuole la somma sugli indici ripetuti;
- l'identità (di cui potete facilmente convincervi per casi)

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{jl} \delta_{im}.$$

Cominciamo.

§ A.3.1.  $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ . — In notazione di Einstein, il conto è straight-forward:

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l v_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l v_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l v_m = \partial_i (\partial_j v_j) - \partial_j \partial_j v_i.$$

§ A.3.2.  $\nabla \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \nabla \wedge \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \wedge \mathbf{w}$ . — In questo caso dobbiamo usare la regola di Leibnitz e la (anti-)simmetria del tensore di Ricci:

$$\partial_i \varepsilon_{ijk} (v_j w_k) = v_j \varepsilon_{ijk} \partial_i w_k + w_k \varepsilon_{ijk} \partial_i v_j = -v_i \varepsilon_{ijk} \partial_j w_k + w_i \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k.$$

§ A.3.3.  $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{w}) + \mathbf{w} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})$ . — Ormai avrete già capito qual è il trick:

$$\begin{aligned} \partial_i (v_j w_j) &= \delta_{il} \delta_{jm} \partial_l (v_j w_m) = (\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} + \delta_{im} \delta_{jl}) (v_j \partial_l w_m + w_j \partial_l v_m) \\ &= v_j \partial_j v_i + w_j \partial_j v_i + \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{klm} \partial_l w_m + \varepsilon_{ijk} w_j \varepsilon_{klm} \partial_l v_m. \end{aligned}$$

## SEZ. E — ESERCIZI

Accanto a ciascun titolo è indicata la difficoltà da un meme e l'utilità ai fini delle olimpiadi con delle stelline.

★☆☆☆☆ **Esercizio 1 Un po' di formalismo: linearità**

**Definizione E.1.** Una funzione  $f: A \rightarrow B$  è detta **lineare** se  $\forall x, y \in A, \forall a, b \in \mathbb{C}$ , vale

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y).$$



**Definizione E.2.** Un **operatore** è una funzione lineare da uno spazio in sé.

- Si dimostri che, dati due operatori  $S, T$  e un numero  $\lambda \in \mathbb{C}$ , le funzioni

$$- S + T: x \mapsto S(x) + T(x)$$

$$- \lambda S: x \mapsto \lambda S(x)$$

sono operatori.

- Sia  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  infinitamente derivabili. Si dimostri che la derivata  $D$ , ovvero quella funzione che a ogni  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  associa la sua derivata, è un operatore.

Dalle due affermazioni precedenti, segue che espressioni del tipo

$$a_n D^n f + a_{n-1} D^{n-1} f + \dots + a_0 f$$

possono essere viste come operatori. Le equazioni differenziali lineari sono dunque equazioni scrivibili nella forma

$$T(f) = 0,$$

dove  $T$  è un operatore.

- Sia  $T(f) = 0$  un'equazione differenziale lineare. Dimostrare che se  $f, g$  sono soluzioni e  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $af + bg$  è soluzione.

★★★★☆ **Esercizio 2 Membrane elastiche  $d$ -dimensionali**

Abbiamo un ipercubo  $d$ -dimensionale di lato  $L$ . In questo cubo, per ogni  $d$ -upla di interi  $(n_1, n_2, \dots, n_d)$  con  $n_i = 0, \dots, N$ , è presente una pallina di massa  $m$  in posizione  $(n_1, \dots, n_d)L/N$ , legata tramite  $2d$  molle alle palline adiacenti (non sulla diagonale). Le molle hanno tutte costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla. Le palline sul bordo del cubo sono incollate e non possono muoversi. Le altre sono soggette alle sole forze delle molle.



Un esempio di configurazione per  $d = 2$  è rappresentato in figura 10.

1. Si scrivano le leggi di Newton per questo sistema.
2. Si trovino i modi normali. Quanti sono i modi normali indipendenti?
3. Si faccia il passaggio al continuo per  $N \rightarrow \infty$ .
4. Si trovino i modi normali del sistema continuo. Quanti sono i modi normali indipendenti?

★★★★☆ **Esercizio 3 APhO 2002/1: vibrazioni di un reticolo cristallino lineare**

Un numero molto grande  $N$  di particelle puntiformi identiche mobili ( $N \gg 1$ ), ciascuna con massa  $m$ , è disposto in una catena rettilinea con  $N + 1$  molle identiche senza massa, ciascuna con rigidità (costante della molla)  $S$ , collegandole tra di loro e alle estremità attaccate a due particelle immobili aggiuntive (come in figura 11). Questa catena servirà come modello dei modi di vibrazione di un cristallo unidimensionale. Quando la catena è messa in moto, le vibrazioni longitudinali della catena possono essere considerate come una sovrapposizione di oscillazioni semplici (chiamate modi), ognuna con la propria frequenza modale caratteristica.



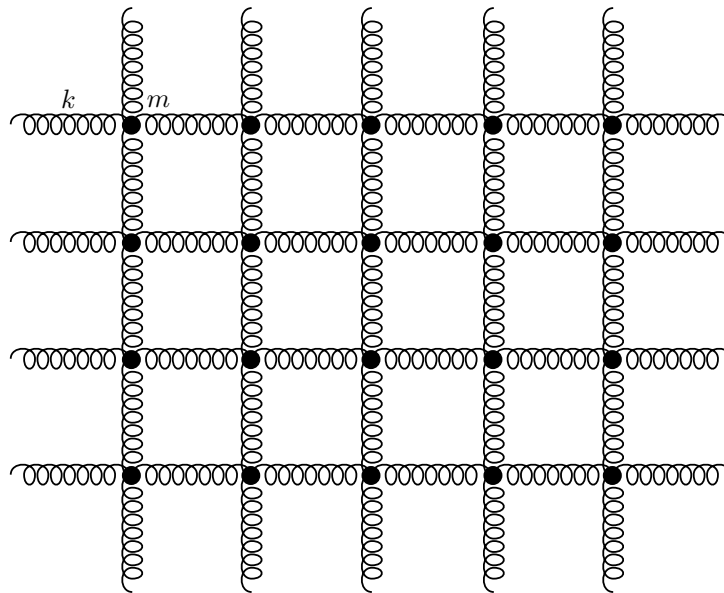


Figura 10: Modello di membrana 2d.

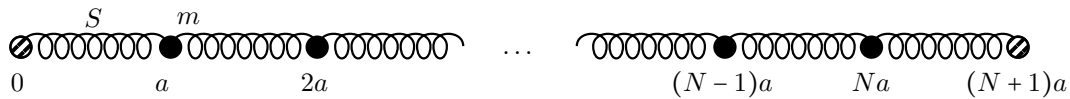


Figura 11: Modello di cristallo 1d.

1. Scrivere l'equazione del moto della  $n$ -esima particella.
2. Per tentare di risolvere l'equazione del moto della parte 1, utilizzare la soluzione di test

$$X_n(\theta) = A \sin nka \cos(\omega t + \phi),$$

dove  $X_n(\theta)$  è lo spostamento della  $n$ -esima particella dall'equilibrio,  $\omega$  la frequenza angolare della modalità di vibrazione e  $A$ ,  $k$  e  $\phi$  sono costanti;  $k$  e  $\omega$  sono i numeri d'onda e le frequenze delle modalità rispettivamente. Per ogni  $k$ , ci sarà una frequenza corrispondente  $\omega$ . Trovare la dipendenza di  $\omega$  da  $k$ , i valori ammessi di  $k$  e il valore massimo di  $\omega$ . Le vibrazioni della catena sono quindi una sovrapposizione di tutte queste modalità di vibrazione.

Secondo Planck, l'energia di un fotone con una frequenza è  $\hbar\omega$ , dove  $\hbar$  è la costante di Planck  $h$  divisa per  $2\pi$ . Einstein, partendo da questo, ha assunto che anche una singola eccitazione di un dato modo di vibrazione del cristallo con frequenza  $\omega$  abbia la medesima energia. Notare che un modo di vibrazione non è una particella, ma una configurazione di oscillazione semplice dell'intera catena. L'eccitazione di questo modo di vibrazione ha molte analogie con il fotone e viene per questo chiamata fonone<sup>49</sup>. Seguiremo le conseguenze di questa idea nel resto del problema. Supponiamo che un cristallo sia composto da un numero molto grande ( $\simeq 10^{23}$ ) di particelle in una catena rettilinea.

3. Per un dato  $k$  ammesso, potrebbero non esserci fononi; oppure potrebbe essercene uno; o due; o qualsiasi numero, purché intero, di fononi. Pertanto ha senso cercare di calcolare l'energia media  $E(\omega)$  di un particolare modo con una frequenza  $\omega$ . Sia  $P_p(\omega)$  la probabilità che ci siano  $p$  fononi con questa frequenza. Allora il valore medio richiesto è

$$E(\omega) = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} P_p(\omega) p \hbar \omega}{\sum_{p=0}^{\infty} P_p(\omega)}.$$

Anche se i fononi sono discreti, il fatto che ce ne siano così tanti (e che  $P_p$  diventi piccolo per  $p$  grande) ci permette di estendere la somma fino a  $p = \infty$ , con un errore trascurabile. Ora la probabilità  $P_p$  è data dalla formula di Boltzmann  $P_p(\omega) \propto \exp\left(-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}\right)$ , dove  $k_B$  è la costante

<sup>49</sup>I fononi non sono vere particelle; vengono per questo chiamati *quasiparticelle*.

di Boltzmann e  $T$  è la temperatura assoluta del cristallo, considerata costante. La costante di proporzionalità non dipende da  $p$ . Calcolare l'energia media per i fononi di frequenza  $\omega$ .  
*Hint:* quanto fa la derivata di  $e^f(x)$ ? Provate a chiamare  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  e derivare in  $\beta$ .

4. Vorremmo ora calcolare l'energia totale  $E_T$  del cristallo. Nella parte 3 abbiamo trovato l'energia media  $E(\omega)$  per la modalità di vibrazione  $\omega$ . Per trovare  $E_T$  dobbiamo moltiplicare  $E(\omega)$  per il numero di modi del cristallo per unità di frequenza e poi sommare tutte queste per l'intero intervallo da  $\omega = 0$  a  $\omega = \omega_{\max}$ . Prendere un intervallo  $\Delta k$  nell'intervallo dei numeri d'onda. Per  $N$  molto grande e per  $\Delta k$  molto maggiore dello spaziamento tra i successivi valori di  $k$  (ammessi), quanti modi possono essere trovati nell'intervallo  $\Delta k$ ?
5. Fare il passaggio al continuo. Approssimare  $dk$  con  $\frac{dk}{d\omega} d\omega$  e sostituire qualsiasi somma con un integrale su  $\omega$ . (È più conveniente usare la variabile  $\omega$  al posto di  $k$  in questo punto.) Indicare il numero totale di modi del cristallo in questa approssimazione. Derivare anche un'espressione  $E_T$  ma non valutarla.
6. La capacità termica molare  $C_V$  di un cristallo a volume costante è accessibile sperimentalmente:  $C_V = \frac{dE_T}{dT}$ . Per il cristallo in discussione determinare la dipendenza di  $C_V$  da  $T$  per temperature molto grandi e molto piccole (ossia, è costante, lineare o dipendente dalla potenza per un intervallo di temperatura?). Tracciare un grafico qualitativo di  $C_V(T)$ , indicando le tendenze previste per temperature molto basse e molto alte. Cosa vuol dire alte e basse temperature?

★★☆☆☆ **Esercizio 4 Boundary condition per la corda discreta**

Si dimostrino le relazioni 2.3:

$$\begin{cases} \phi_0 = 0 \\ K = \frac{n}{N+1}\pi, \quad n \in \mathbb{N} \\ \Omega^2 = 2\omega^2(1 - \cos K) \end{cases}$$



★★★★★ **Esercizio 5 Molle in serie e in parallelo**

Attacciamo due molle, di costanti elastiche  $k_1, k_2$ , in serie, come in figura 12. Quanto vale la nuova costante elastica della molla complessiva?

Ora le attacchiamo in parallelo, come in figura 12. In questo nuovo caso quanto vale la costante elastica equivalente della molla?

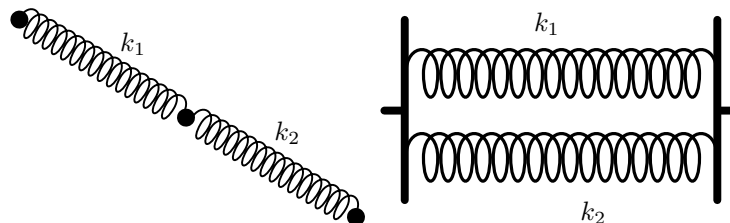


Figura 12: Molle in serie e in parallelo.

★★★★★ **Esercizio 6 Un'onda riflessa e trasmessa**

Abbiamo una pallina di massa  $M$ . Abbiamo a disposizione due corde, una di densità lineare  $\lambda$  e l'altra  $\rho$ , entrambe lunghe  $L$ . Decidiamo di attaccare un'estremità di ciascuna corda alla pallina. Le due estremità libere le leghiamo a due pareti distanti  $2L$  e fissiamo il sistema in modo che, all'equilibrio, la tensione delle corde sia  $T$ .



1. Si trovino le equazioni d'onda delle due corde e la condizione di raccordo nel caso  $M = 0$ .
2. Si trovino le equazioni d'onda delle due corde e la condizione di raccordo nel caso  $M \neq 0$ .
3. Ora sfruculiamo la corda in modo che parta un impulso da sinistra, come in figura 13. L'impulso è piccolo, in modo che la perturbazione possa essere considerata al primo ordine e trasversale. L'impulso raggiunge l'interfaccia tra le due corde, parte dell'impulso viene trasmesso e parte riflesso. Si calcolino i rapporti  $T, R$  tra rispettivamente gli impulsi trasmessi e riflessi fratto l'impulso incidente nel caso  $M = 0$ . Si trovino i modi normali del sistema.

4. Si facciano gli stessi conti del punto precedente per  $M \neq 0$ .
5. Si facciano gli stessi conti per  $M \rightarrow \infty$ . Quest'ultimo caso corrisponde essenzialmente a legare entrambe le estremità di ciascuna corda a un muro immobile.

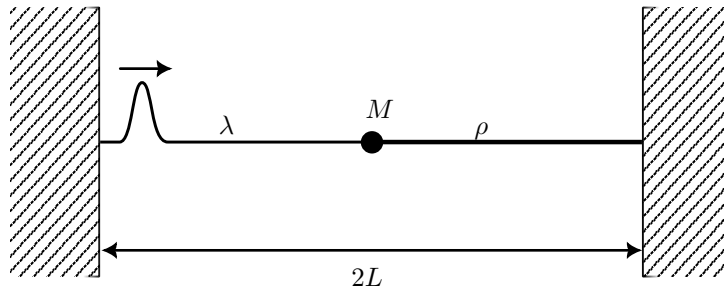


Figura 13: Setup fisico per l'esercizio 6.

Si faccia caso alla relazione tra le velocità dell'onda nei due mezzi e il segno di  $R$ .

### ★★★★☆☆ Esercizio 7 Una corda rilassata

Modellizziamo una corda come fatto al paragrafo 2.1, ma stavolta le molle hanno una lunghezza a riposo pari alla distanza tra le masse. Si scrivano le equazioni del moto nel caso discreto. Siamo interessati solo a perturbazioni trasversali.

Si faccia opportunamente il passaggio al continuo.



### ★★☆☆☆☆ Esercizio 8 Una cara vecchia legge di conservazione

Si dimostri che per il modello sviluppato nel paragrafo 2.5 le leggi del moto implicano la continuità dell'energia.



### ★★★★☆☆ Esercizio 9 Tre oscillatori accoppiati

Si consideri il sistema in figura 14. Si trovino i modi normali e le funzioni di Green. Tutte le molle hanno costante elastica  $k$  e ogni pallina ha massa  $M$ .

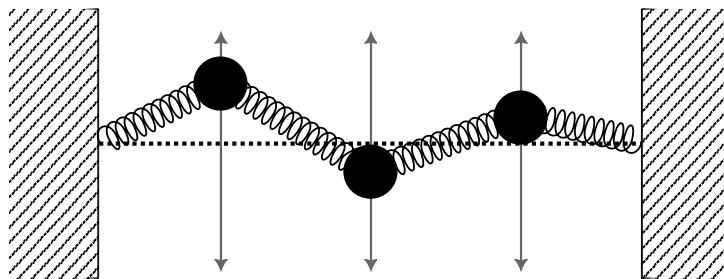
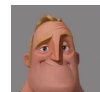


Figura 14: Setup fisico per l'esercizio 9.

### ★★★★★★ Esercizio 10 Un toy model per le interazioni

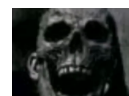
Si consideri il sistema in figura 15. Consiste in due pendoli legati da una molla, con  $k$  molto piccolo. Si trovino i modi normali e le funzioni di Green.

Potete notare che introdurre la molla, ovvero un'interazione tra due modi degeneri (alla stessa frequenza) introduce uno splitting dei livelli di frequenza. "Accesa" l'interazione troviamo due nuovi modi: uno simmetrico, meno energetico, e uno antisimmetrico, a frequenza maggiore. In questo fatto vi ritroverete studiando Meccanica Quantistica all'università.



### ★★★★☆☆ Esercizio 11 EuPhO 2017/1: Fune oscillante

Una corda pesante uniforme di lunghezza  $L$  è sospesa verticalmente dal soffitto. La corda può oscillare intorno alla sua posizione di equilibrio con diverse frequenze naturali, che saranno indicate da  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) in ordine ascendente. La figura 16 riporta la forma della corda nei primi tre modi naturali di vibrazione, ottenute da una simulazione al computer. Notare che le scale orizzontali e verticali nelle figure non sono identiche. Si può supporre che lo spostamento laterale effettivo della corda sia molto più piccolo della sua lunghezza (approssimazione di piccole ampiezze).



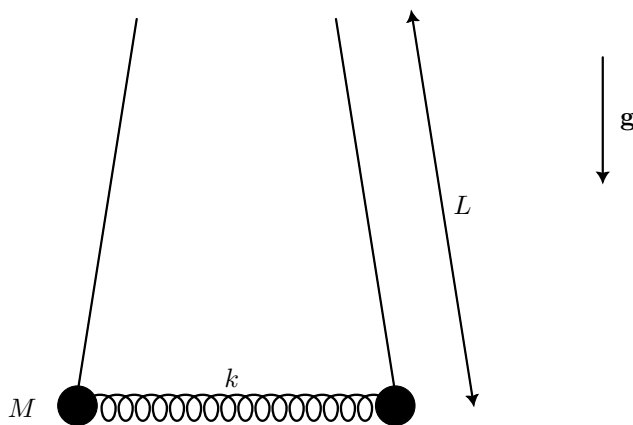


Figura 15: Setup fisico per l'esercizio 10.

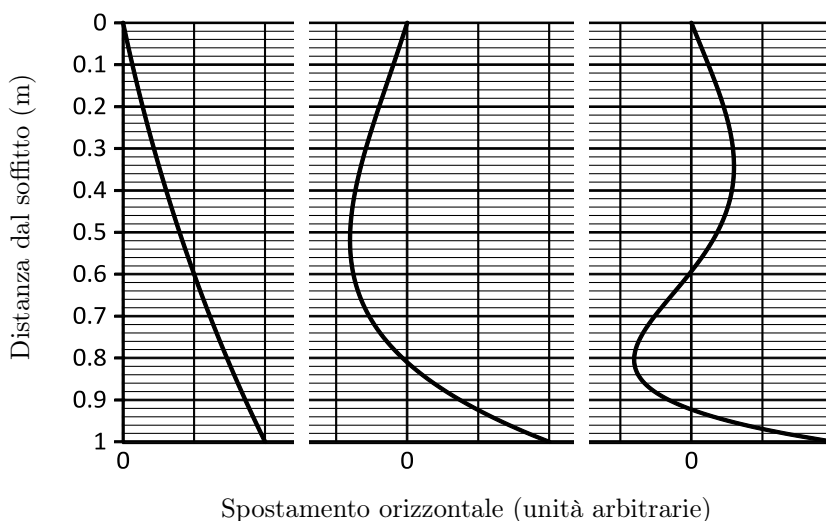
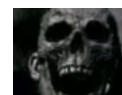


Figura 16: Profilo della fune oscillante per le prime tre frequenze naturali di vibrazione ( $i = 1, 2, 3$  da sinistra a destra).

1. Sviluppare un modello semplificato che ti permetta di stimare la frequenza  $f_1$  della prima vibrazione (frequenza fondamentale) della corda. Quindi calcolare approssimativamente  $f_1$  per una corda di lunghezza  $L = 1.0\text{ m}$ . Supponiamo che  $g = 9.8\text{ m s}^{-2}$ .
2. Prendi le necessarie letture dalla figura per stimare le frequenze  $f_1, f_2, f_3$ .
3. (Non fa parte del problema originale, consiglio di svolgerlo dopo il problema seguente) Si trovi un'espressione analitica approssimata di  $f_i$ . Consiglio di procedere nel seguente modo:
  - (a) Claimare che l' $i$ -esimo modo normale dà un profilo del tipo  $x(y) = A_i(y) \sin(2\pi f_i t)$ .
  - (b) Impostare le opportune condizioni al bordo (prendete spunto dal punto precedente).
  - (c) Dedurne la "quantizzazione" delle frequenze possibili.

★★☆☆☆ **Esercizio 12 Chitarra bizzarra**

Si vuole valutare l'influenza della gravità sui modi di oscillazione una corda tesa. In tutti i punti seguenti si consideri la corda: uniforme, di densità lineare  $\mu$  e lunghezza  $l$ , ideale, sottoposta a piccole oscillazioni, fissata agli estremi.



1. Si consideri una corda tesa uniformemente con una forza  $F$  in assenza di gravità. Quando la corda oscilla secondo un modo normale, l'onda stazionaria all'istante  $t$  nel punto  $x$  può essere descritta da una legge del tipo

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin(kx) \sin(\omega t) = [\psi_0 \sin \omega t] \sin \phi(x),$$

dove  $\omega$  è la pulsazione e  $k$  è il vettore d'onda. Si ricavi  $k = \frac{d\phi}{dx}$  in funzione di  $\omega$ ,  $\mu$  e  $F$ .

2. Si consideri ora la stessa corda con gli estremi fissati su una stessa retta verticale in presenza di un campo gravitazionale  $\vec{g}$  e fissata superiormente con tensione  $F$ . Si trovi la pulsazione dei modi normali.
3. Si consideri un'altra corda, identica alle precedenti, con gli estremi fissati su una retta orizzontale in presenza di un campo gravitazionale  $\vec{g}$  e fissata agli estremi con tensione  $F$ . Si immagini di far suonare la corda fissata in verticale e quella in orizzontale con la prima armonica. Si stimi il periodo dei battimenti. Si lavori al primo ordine non banale in  $\frac{T_{y0}}{T_{x0}}$ , dove  $T_{y0}$ ,  $T_{x0}$  sono rispettivamente le tensioni della corda verticale e orizzontale agli estremi.

### ★★★★★ Esercizio 13 Qui si mette Malus

Abbiamo una sorgente di luce polarizzata che manda un fascio monocromatico con  $\mathbf{k} = k\hat{x}$ . La luce ha intensità  $I_0$ .



1. Posizioniamo un filtro polarizzatore perpendicolarmente al fascio. Sia  $\theta$  l'angolo tra le direzioni di polarizzazione del filtro e del fascio. Qual è l'intensità osservata dopo il filtro?
2. Posizioniamo un secondo filtro polarizzatore dopo il primo, con un angolo  $\theta'$  tra le direzioni di polarizzazione del primo e del secondo filtro. Qual è l'intensità osservata dopo il secondo filtro?
3. Nel caso precedente, se  $\theta = 0, \theta' = \frac{\pi}{2}$  non si osserva luce in uscita. Tuttavia, se si inserisce un terzo filtro tra i due precedenti, con direzione di polarizzazione inclinata di  $\frac{\pi}{4}$  rispetto alla direzione di polarizzazione dei due filtri, si vede luce con una certa intensità  $I_{\text{out}}$  in uscita. Quanto vale  $I_{\text{out}}$ ? Si noti che la luce che passa non ha intensità monotona nel numero di filtri!
4. Ora posizioniamo sequenzialmente  $N$  filtri, ciascuno inclinato di  $\frac{\pi}{2(N-1)}$  rispetto al precedente. Quanto vale  $I_{\text{out}}$ ? Qual è la polarizzazione in uscita? Cosa succede per  $N \rightarrow \infty$ ?

### ★★★★☆ Esercizio 14 Ottica nei mezzi

1. Si trovi l'equazione delle onde per i campi  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  nei mezzi. Siano  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)$  e  $\mu = \mu_0 \mu_r(\omega)$ .
2. Sapendo che l'indice di rifrazione  $n$  è il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto diviso quella in un mezzo, si esprima  $n$  in funzione di  $\varepsilon_r$  e di  $\mu_r$ .
3. Si lavori con un pacchetto d'onda gaussiano



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2}{2\sigma}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d},$$

con  $\sigma$  sufficientemente piccolo da permetterci di espandere

$$\omega(\mathbf{k}) \simeq \omega(\mathbf{k}_0) + \frac{\partial\omega(\mathbf{k}_0)}{\partial\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0).$$

Qual è la velocità di propagazione del pacchetto? Nel caso  $\varepsilon, \mu$  non siano reali, cosa succede? Come possiamo interpretare questo fatto?

4. Lavorate ora per semplicità in  $d = 1$ . Si espanda  $\omega(k)$  al secondo ordine in  $\Delta k$ . Come varia nel tempo la larghezza del pacchetto?

### ★★★★★ Esercizio 15 Onde tra mezzi materiali

Ora lavoriamo sotto l'ipotesi che  $\varepsilon, \mu$  siano reali e positivi.

Nel semispazio  $x < 0$  è presente un mezzo omogeneo con costante dielettrica  $\varepsilon$  e permeabilità magnetica  $\mu$ . Nel semispazio  $x > 0$  invece costante dielettrica e permeabilità sono rispettivamente  $\varepsilon', \mu'$ .



1. Si trovino i modi normali separatamente nei due semispazi.
2. Si guardino forte le equazioni di Maxwell e si trovino le condizioni di raccordo.
3. Si raccordino i modi normali nei due semispazi, in modo che arrivi un'onda dal semispazio  $x < 0$  che all'interfaccia venga in parte riflessa e in parte trasmessa.
4. Si scriva la legge che lega  $\mathbf{k}$  con  $\mathbf{k}'$ , vettore d'onda nel semispazio  $x < 0$  con quello in  $x > 0$ . Si noti che questa relazione è la **Legge di Snell!**
5. Si calcoli la legge che lega  $\mathbf{A}_0$  con  $\mathbf{A}'_0$  nei due semispazi. Queste formule sono note come **Relazioni di Fresnel**. Potrebbe essere conveniente trattare separatamente il caso in cui  $\mathbf{A}_0$  è complanare con  $\mathbf{k}$  e con l'ortogonale  $\mathbf{n}$  all'interfaccia dal caso in cui  $\mathbf{A}_0$  è ortogonale al piano definito da  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{n}$ . Il primo caso si chiama TM (Transverse Magnetic) perché il campo magnetico è ortogonale al piano d'onda. Il secondo è il modo TE (Transverse Electric).
6. Potete notare che esiste un angolo  $\theta_B$  tra  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{n}$ , chiamato **angolo di Brewster**, a cui tutta la luce riflessa ha polarizzazione TE. Si calcoli quest'angolo. Che angolo c'è tra raggio incidente e riflesso in questo caso?

Nel penultimo punto potete notare un fatto importante: quando la luce passa da un mezzo a un altro, se la velocità della luce nel secondo mezzo è più piccola rispetto a quella nel primo, allora l'onda riflessa subisce uno sfasamento di  $\pi$ , come per le onde meccaniche!

Si noti inoltre che per alcune configurazioni,  $\mathbf{k}'$  è un immaginario puro! In questo caso non c'è trasmissione di energia e l'onda decade esponenzialmente, dando origine a un'onda **evanescente**. Tuttavia... zero spoiler, guardate l'esercizio 16!

### ☆☆☆☆☆ Esercizio 16 Effetto tunnel elettromagnetico

Supponiamo che nei semispazi  $x < -\frac{a}{2}, x > \frac{a}{2}$  sia presente un materiale con costante dielettrica e permeabilità rispettivamente  $\varepsilon, \mu$ , mentre le stesse grandezze per  $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$  valgono  $\varepsilon', \mu'$ .

Supponiamo che arrivi un'onda monocromatica da  $x < 0$  e che  $\mathbf{k}$  nell'area intermedia sia immaginario puro. Si trovi il campo in tutto lo spazio.

Potete notare che l'onda "tunnellizza" dall'altra parte della barriera di potenziale! Ma l'ampiezza di tunnelling cade esponenzialmente con  $a$ .



### ★★★★☆ Esercizio 17 Formalismo delle matrici di trasferimento

In questo esercizio la luce è da considerarsi non coerente, quindi si possono trascurare tutti i fenomeni di interferenza.

Abbiamo  $N$  filtri di luce, disposti in serie. Tutti i filtri sono identici e simmetrici. Se su un filtro incide un fascio luminoso di potenza  $P$ , il filtro riflette una potenza  $\rho P$ , assorbe  $\alpha P$  e lascia passare  $\tau P$ , con  $\alpha + \rho + \tau = 1$ .

Viene mandato verso il primo filtro un raggio luminoso di potenza  $P_0$ . Quanta di questa potenza esce dall'ultimo filtro?

*Hint:* questo esercizio si può risolvere in vari modi. Uno particolarmente potente è il seguente.

1. Al posto di seguire la traiettoria del raggio, cosa complicata, tra l' $i$  e l' $(i+1)$ -esimo filtro indico con  $P_{\pm}^i$  la potenza della luce che si muove verso destra o sinistra, rispettivamente.
2. Al posto di calcolare

$$\begin{cases} P_+^{i+1} = f(P_+^i, P_-^{i+1}) \\ P_-^i = f(P_-^{i+1}, P_+^i), \end{cases}$$



calcoliamo<sup>50</sup>, usando il formalismo matriciale,

$$\begin{pmatrix} P_+^i \\ P_-^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+^{i+1} \\ P_-^{i+1} \end{pmatrix}.$$

Perché partiamo dalla fine e non dall'inizio? Perché sappiamo che  $P_+^{\text{finale}}$  ha solo la componente +! Quindi, a meno di una costante di normalizzazione che può essere trovata alla fine,

$$\begin{pmatrix} P_+^N \\ P_-^N \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Vediamo ora che se ci fosse, ma se ci fosse una matrice  $O$  tale che<sup>51</sup>

$$O \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} O^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

avremmo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_+^0 \\ P_-^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} P_+^N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+^N \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= O^{-1} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} O \cdots O^{-1} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} O \cdots O^{-1} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} O \begin{pmatrix} P_+^N \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= O^{-1} \begin{pmatrix} d_1^N & 0 \\ 0 & d_2^N \end{pmatrix} O \begin{pmatrix} P_+^N \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A questo punto per chiudere basta fare qualche conticino e trovarsi  $O$ . Alternativamente, si possono trovare i due autovettori di  $(m_{i,j})$  e scomporre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nei due autovettori, per concludere essenzialmente con lo stesso trick.

### ★★★☆☆ Esercizio 18 TA SF 2023/5: E pur si muove (pressione di radiazione)

La quantità di moto  $p$  di un fotone dipende unicamente dalla sua frequenza  $\nu$ , dalla velocità della luce  $c$  e dalla costante di Planck  $h$ .



1. Si determini  $p = f(\nu, h, c)$  tramite l'analisi dimensionale, sapendo che il fattore adimensionale ha valore 1.

Quando un corpo viene esposto alla radiazione elettromagnetica, esso riceve un impulso dovuto alla variazione della quantità di moto dei fotoni incidenti. Tale fenomeno prende il nome di "pressione di radiazione". Si consideri, ad esempio, un fascio di luce di potenza  $P$  che illumina interamente un disco perfettamente riflettente.

2. Trattando l'urto tra la luce ed il disco in modo classico, si determini la forza  $F$  agente sul disco.

Viene realizzato un satellite di massa  $m$ , dotato di una vela solare perfettamente riflettente (di superficie  $A$ ) e vincolata a rimanere in posizione radiale rispetto al Sole, in modo che i raggi la colpiscano perpendicolarmente in ogni istante. Si indichi con  $P$  la potenza totale emessa isotropicamente dal Sole, la cui massa è  $M_S$ . Si assuma che le dimensioni del satellite e la massa della vela siano trascurabili rispetto a tutte le altre grandezze in gioco.

3. Il satellite viene messo su un'orbita circolare di raggio  $R_0$ . Si trovi il periodo  $T_0$  del moto.
4. Senza l'effetto della pressione di radiazione, quale dovrebbe essere la massa del Sole affinché l'orbita circolare abbia gli stessi valori  $R_0$  e  $T_0$  del punto precedente?

<sup>50</sup>Fate attenzione a cosa è calcolato in funzione di cosa.

<sup>51</sup>Matematicamente si dice che  $O$  diagonalizza la matrice.

Ad un certo punto, un asteroide colpisce il satellite, fornendogli un piccolo impulso in direzione radiale.

5. Supponendo che la vela continui ad essere colpita perpendicolarmente dalla luce del Sole, come viene modificata l'orbita del satellite? In particolare, si trovi il periodo  $T$  delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio  $R_0$ .
6. (Non presente nel testo originale) Cosa cambierebbe se al posto di essere riflettente, il corpo fosse assorbente?

★★★★☆ **Esercizio 19 Interferenza in salse varie**

Per questo esercizio, fate riferimento alla fig. 17. Risolvere ciascuno dei casi seguenti con luce incidente avente vettore d'onda  $\mathbf{k}$ . In un primo momento supponete pure che  $\mathbf{k}$  sia ortogonale alla parete di incidenza; trattare poi il caso generico.



1. Un fenomeno per certi versi simile all'interferenza è la **diffrazione**: si calcoli la figura prodotta su uno schermo lontano da un'onda monocromatica che incide su una parete con un singolo foro di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda.
2. Si calcoli l'intensità prodotta dalla diffrazione da foro circolare.
3. Si calcoli l'intensità prodotta da luce incidente su due fenditure distanti  $a$  e larghe  $b$ .
4. Si calcoli l'intensità prodotta da luce incidente su un reticolo  $1d$  di  $N$  fenditure puntiformi con passo reticolare  $a$ .
5. Si calcoli l'intensità prodotta da luce incidente su un reticolo  $2d$  di  $N \times N$  fenditure puntiformi disposte come in figura.

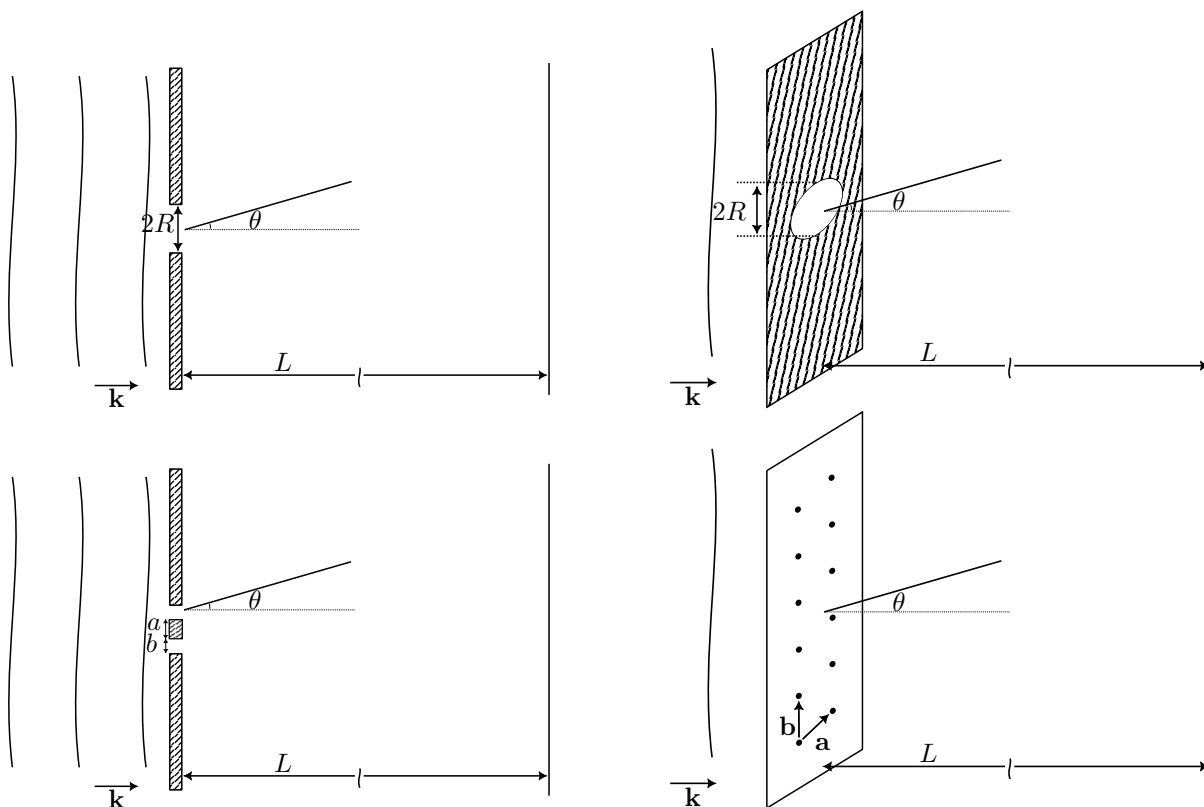


Figura 17: Setup fisico per l'esercizio 19.

### ★★★★☆☆ Esercizio 20 PrePLANCKS 2022/1: Interferenza Ottica

Un fascio di luce policromatica ( $300 \text{ nm} \leq \lambda \leq 700 \text{ nm}$ ) incide perpendicolarmente su un reticolo di diffrazione di lunghezza  $6 \text{ cm}$  e composto di  $N = 2 \times 10^4$  fenditure, ciascuna con larghezza  $a = 1.5 \mu\text{m}$ . Dopo la diffrazione, il fascio è collimato con una lente convergente di distanza focale  $f = 60 \text{ cm}$  su uno schermo  $S$  a distanza  $f$  dalla lente. Determina:



1. quanti e quali ordini di interferenza sono visibili su tutto lo spettro incidente;
2. la dispersione lineare al primo ordine di interferenza e la posizione sullo schermo dove puoi vedere l'intero spettro;
3. la minima differenza  $\Delta\lambda$  che può essere risolta agli estremi dello spettro;

Commenta qualitativamente quali svantaggi avresti dovuto affrontare se la larghezza delle fenditure fosse stata diversa da  $a$ .

### ★★★★☆☆ Esercizio 21 Secondo Livello 2020/P2: Reticolo

Un reticolo viene illuminato perpendicolarmente con la luce proveniente da una sorgente gassosa. Si osservano una riga rossa ( $\lambda_r = 660 \text{ nm}$ ) a un angolo  $\theta_r = 26.1^\circ$  rispetto all'asse del reticolo e una riga verde ( $\lambda_v = 536 \text{ nm}$ ) a un angolo  $\theta_v = 32.4^\circ$ .



1. Si calcoli il rapporto  $m_v/m_r$  tra gli ordini degli spettri a cui appartengono la riga rossa e quella verde.
2. Tenendo conto del fatto che fra i due angoli indicati non si osserva alcuna radiazione, si determinino i valori di  $m_r$  e  $m_v$ .
3. Qual è il passo del reticolo?
4. Qual è il massimo ordine a cui si può osservare una riga rossa con quel reticolo?

### ★★★★☆☆ Esercizio 22 Secondo Livello 2021/P3: Anelli di Newton

Una lente piano convessa di vetro di indice di rifrazione  $n = 1.50$  è fissata con l'asse verticale e la convessità verso il basso. Al di sotto di essa c'è un piano di vetro orizzontale che può essere spostato verticalmente mediante una vite micrometrica di passo  $0.100 \text{ mm}$  (come in fig. 18a). Il tutto è illuminato dall'alto, in direzione verticale, con una lampada spettrale al sodio (lunghezza d'onda di emissione:  $589 \text{ nm}$ ), e si formano anelli di Newton a causa dell'interferenza tra la luce riflessa dalla superficie curva della lente e quella riflessa dal piano di vetro.



Figura 18: Figure relative al problema 22.

Per questione di chiarezza, il raggio di curvatura della lente mostrata in figura è molto minore di quello reale per cui l'intercapedine tra lente e vetrino piano risulta molto esagerata. I raggi di luce da considerare sono quelli parassiali ossia prossimi e circa paralleli all'asse della lente.

Inizialmente la lente e il piano di vetro sono a contatto, e si osserva che la quinta frangia chiara ha il raggio  $r_5 = 5.00 \text{ mm}$ .

1. Dopo aver dimostrato che tra le grandezze indicate in figura 18b vale la relazione

$$r^2 = 2Rd,$$

si determini il raggio di curvatura  $R$  della lente.

2. Si determini la distanza focale della lente piano-convessa utilizzata, trattandola come una lente sottile.
3. Si calcoli il raggio della terza frangia chiara.

Successivamente, mediante la vite micrometrica, si allontana il piano di vetro dalla lente.

4. Si dica come cambia il sistema di anelli specificando se il raggio di una data frangia aumenta o diminuisce.
5. Scelto un punto a una distanza dal centro pari al raggio della terza frangia chiara, quante frange chiare lo attraversano mentre la vite fa un giro completo?

### ★☆☆☆☆ **Esercizio 23 Un fotone nella scatola**

Prendiamo una scatola cubica di lato  $L$  e volume  $V = L^3$ . In questa scatola c'è un solo fotone, nel modo  $\mathbf{k}$  con polarizzazione  $\mathbf{e}_i$ .



1. Si scriva in gauge di Coulomb il campo  $\mathbf{A}$  in notazione complessa, dando per nota l'ampiezza  $A$  del campo.
2. Si calcoli la densità elettromagnetica di energia in funzione di  $\mathbf{A}$  (mediata nel tempo).
3. Si fissi la normalizzazione  $A$ .

### ★★☆☆☆ **Esercizio 24 IPhO 2021/3: Particelle e onde**

Uno dei concetti centrali della meccanica quantistica afferma che ogni particella può essere descritta come un'onda e viceversa. In questo problema, faremo affidamento su questa nozione e solo su alcuni altri presupposti di base per esplorare una selezione di fenomeni quantistici che coprono i due distinti tipi di particelle del micromondo: fermioni e bosoni.



#### **Parte A. Particella quantistica in una scatola**

Consideriamo una particella di massa  $m$  che si muove in una buca di potenziale unidimensionale, dove la sua energia potenziale  $V(x)$  è data da

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty & x < 0 \text{ o } x > L. \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Mentre la particella classica può muoversi in un tale potenziale con una qualsiasi energia cinetica, per la particella quantistica sono consentiti solo alcuni specifici livelli discreti di energia positiva. In uno qualsiasi di tali stati consentiti, la particella può essere descritta come un'onda stazionaria di de Broglie con nodi alle pareti.

1. Determinare la minima energia possibile  $E_{\min}$  della particella quantistica nella buca. Esprimere la risposta in funzione di  $m, L$ , e la costante di Planck  $h$ .

Lo stato della particella con la minima energia possibile è chiamato stato fondamentale e tutti gli altri stati consentiti sono chiamati stati eccitati. Ordiniamo tutti i possibili valori energetici in ordine crescente e denotiamoli come  $E_n$ , a partire da  $E_1$  per lo stato fondamentale.

2. Trovare l'espressione generale per l'energia  $E_n$  (con  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).
3. La particella può subire una transizione istantanea da uno stato all'altro solo emettendo o assorbendo un fotone della corrispondente differenza di energia. Trovare la lunghezza d'onda  $\lambda_{21}$  del fotone emesso durante la transizione della particella dal primo stato eccitato ( $E_2$ ) allo stato fondamentale ( $E_1$ ).

### Parte B. Proprietà ottiche delle molecole

In questa parte, studieremo diverse proprietà ottiche della molecola di cianina Cy5, una molecola colorante ampiamente utilizzata, mostrata schematicamente in fig. 19a. Le sue proprietà ottiche sono determinate principalmente dalla struttura principale formata da carbonio, composta dall'alternanza di legami singoli e doppi tra atomi di carbonio, mostrati in fig. 19b, mentre l'influenza degli anelli alle estremità della molecola e dei radicali R è molto più piccola. Tre dei quattro elettroni di valenza di ogni atomo C (e degli atomi N) nella struttura principale formano i legami chimici, mentre i restanti elettroni di valenza sono "condivisi" e possono muoversi lungo tutta la struttura principale. L'energia potenziale netta di ciascuno di questi elettroni è mostrata con una linea sottile oscillante in fig. 19c, con minimi corrispondenti alle posizioni degli atomi C e N.

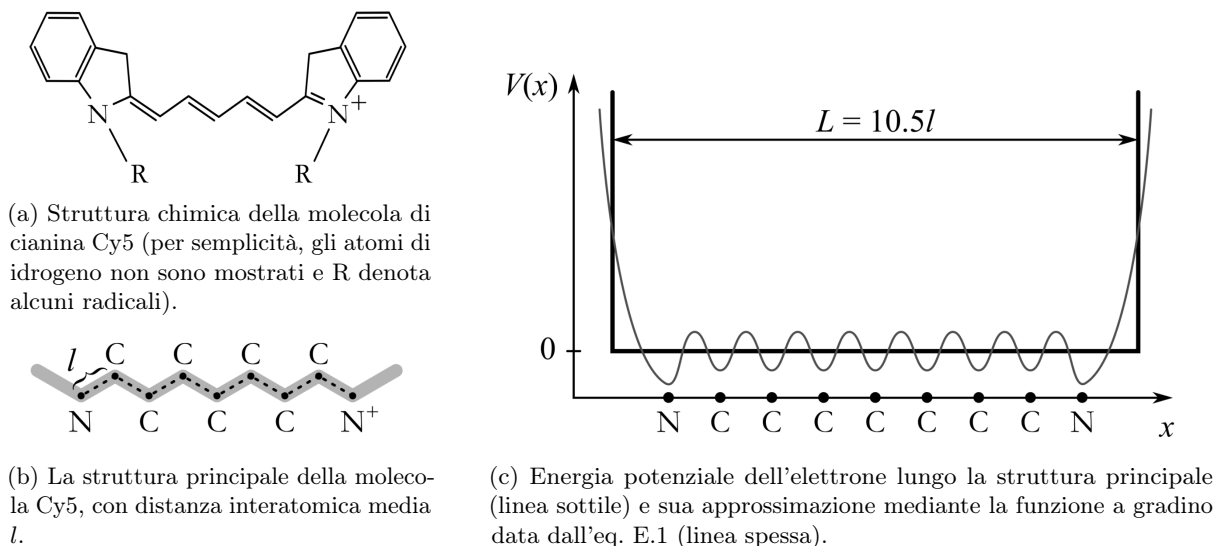


Figura 19: Figure relative al problema 24.

Per semplicità, si approssima questo profilo di energia potenziale con una semplice funzione data nella eq. E.1 con la larghezza  $L = 10.5l$  (vedi linea spessa in fig. 19c), dove  $l = 140$  pm è la distanza interatomica media (vedi anche fig.19b). Si ottiene così il "gas elettronico" composto da 10 elettroni (7 dagli atomi C, 2 dall'atomo N e 1 dallo ione  $N^+$ ) che si muove in una buca di potenziale unidimensionale discussa nella Parte A. Nella nostra valutazione, possiamo trascurare l'interazione reciproca di questi elettroni; tuttavia, dovremmo rendere conto del fatto che gli elettroni sono fermioni e quindi obbediscono al principio di esclusione di Pauli. Trascuriamo anche l'influenza di altri elettroni così come il movimento dei nuclei.

1. Valutare la massima lunghezza d'onda  $\lambda$  del fotone che può essere assorbito dalla molecola Cy5 assumendo che il sistema di elettroni sia inizialmente allo stato fondamentale. Esprimere la risposta in funzione di  $l$ , costanti fisiche e qualche fattore numerico, e quindi calcolare il valore numerico.
2. Un'altra molecola colorante Cy3 ha una struttura simile, ma la sua struttura principale è più corta di 2 atomi di carbonio. Il suo spettro di assorbimento è spostato verso la regione spettrale più blu o più rossa rispetto alla molecola Cy5? Valuta numericamente l'ampiezza  $\Delta\lambda$  di questo spostamento spettrale. Puoi presumere che la rimozione di due atomi di carbonio non cambi la forma della molecola e accorcia solo la lunghezza della struttura principale di due distanze interatomiche.

Essendo in uno stato eccitato la molecola può subire un decadimento spontaneo allo stato fondamentale mediante l'emissione di un fotone. Il tasso medio  $K$  di questi eventi (cioè la variazione relativa del numero di molecole presenti nello stato eccitato,  $dN/N$ , nell'intervallo tempo  $dt$ ,  $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ ) dipende dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  del fotone emesso, dal momento di dipolo elettrico della transizione  $d$  (che è dell'ordine di  $d \approx el$ , dove  $e$  è la carica elementare) come pure dalla costante dielettrica  $\epsilon_0$  e dalla costante di Planck  $h$ .

3. Utilizzando l'analisi dimensionale, determinare l'espressione per il tasso di emissione spontanea in termini di  $\epsilon_0, h, \lambda$  e  $d$ . Il fattore numerico dell'espressione vale  $k = \frac{16}{3}\pi^3$ .
4. Per la molecola Cy5,  $d \approx 2.4el$ . Valutare la durata media della fluorescenza dello stato eccitato più basso della molecola Cy5,  $\tau_{Cy5}$ , che è reciproco del tasso della sua transizione emissiva allo stato fondamentale.

### Parte C. Condensazione di Bose-Einstein

Questa parte non è direttamente correlata alle Parti A e B. Qui studieremo il comportamento collettivo delle particelle bosoniche. I bosoni non rispettano il principio di esclusione di Pauli e, a basse temperature o ad alta densità, sperimentano un fenomeno drammatico noto come condensazione di Bose-Einstein (BEC). Questa è una transizione di fase verso un intrigante stato quantistico collettivo: un gran numero di particelle identiche si “condensano” in un singolo stato quantico e iniziano a comportarsi come una singola onda. La transizione viene tipicamente raggiunta raffreddando un numero fisso di particelle al di sotto della temperatura critica. In linea di principio, può anche essere indotto mantenendo fissata la temperatura e portando la densità delle particelle oltre il suo valore critico.

Iniziamo esplorando la relazione tra la temperatura e la densità delle particelle alla transizione. Come risulta, le stime dei loro valori critici possono essere dedotte da una semplice osservazione: la condensazione di Bose-Einstein avviene quando la lunghezza d’onda di de Broglie corrispondente alla velocità quadratica media delle particelle è uguale alla distanza caratteristica tra le particelle in un gas.

1. Dato un gas non interagente di atomi di  $^{87}\text{Rb}$  in equilibrio termico, scrivere le espressioni per la loro quantità di moto tipica  $p$  e la tipica lunghezza d’onda di de Broglie  $\lambda_{\text{dB}}$  in funzione della massa dell’atomo  $m$ , la temperatura  $T$  e costanti fisiche.
2. Calcolare la distanza tipica tra le particelle in un gas,  $l$ , in funzione della densità delle particelle  $n$ . Poi dedurre la temperatura critica  $T_c$  in funzione della massa degli atomi, della loro densità e delle costanti fisiche.

Per realizzare la BEC in laboratorio, gli sperimentatori devono raffreddare i gas a temperature fino a  $T_c = 100 \text{ nK}$ .

3. Qual è la densità di particelle del gas Rb  $n_c$  se la transizione avviene a tale temperatura? Per fare un confronto, calcola anche la densità di particelle “ordinaria”  $n_0$  di un gas perfetto alla temperatura e pressione standard (STP), cioè  $T_0 = 300 \text{ K}$  e  $p_0 = 105 \text{ Pa}$ . Quante volte il gas “normale” è più denso? Puoi assumere che la massa degli atomi sia uguale a 87 unità di massa atomica ( $m_{\text{amu}}$ ).

[Ometto le parti successive del problema.]

### ★★★★☆ Esercizio 25 Atomo di idrogeno 0

In questa strike di esercizi cercheremo di modellizzare a livello semiclassico un atomo idrogenoide, cioè con un solo elettrone.



Abbiamo un nucleo con carica  $+Ze$  e massa infinita posto al centro del nostro set di coordinate.

Spegliamo per qualche attimo la meccanica quantistica, e vediamo l’elettrone come una pallina classica che orbita attorno al nucleo di moto circolare uniforme. Sappiamo che una carica  $q$  sottoposta a un’accelerazione  $a$  irradia energia secondo la legge di Larmor:

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Supponendo che in ogni istante il moto dell’elettrone rimanga approssimativamente circolare e che al tempo  $t_0 = 0$  l’elettrone disti dal nucleo  $r_0 = 1 \text{ \AA}$ , si calcoli per quanto tempo potremmo tenere spenta la meccanica quantistica senza che l’elettrone si spiaccichi sul nucleo.

### ★★★★★ Esercizio 26 Atomo di idrogeno 1

Ora che siamo sicuri che la meccanica classica non funziona, sviluppiamo il nostro modello semiclassico: diciamo che l’elettrone vive sull’orbita classica (quindi in un dominio unidimensionale) e per ora prendiamo solo l’orbita circolare. All’elettrone associamo un’onda  $\psi$ . Se l’elettrone non collassa è perché non perde energia. E se non perde energia è perché l’onda è stazionaria.



Si trovino i raggi possibili affinché la funzione d’onda dell’elettrone sia stazionaria, usando la Relazione di DeBroglie.

Si noti che il risultato trovato quantizza l’energia e il momento angolare in modo consistente con quanto sappiamo!

Prima di passare all’esercizio seguente, nota che introducendo la **costante di struttura fine**

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \simeq \frac{1}{137},$$

molti calcoli si semplificano parecchio. Inoltre, la velocità tipica di un elettrone attorno al nucleo è parecchio grossa:

$$v \sim \frac{c}{\alpha}.$$

### ☆☆☆☆☆ Esercizio 27 Atomo di idrogeno 2

Ora consideriamo pure le orbite ellittiche. Consiglio di dare un occhio al paragrafo 4.9.

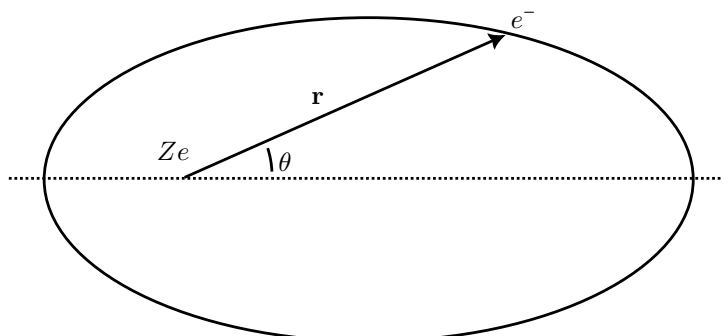


Figura 20: Parametrizzazione di un'ellisse avente un fuoco nell'origine.

1. Si scriva la condizione di quantizzazione di Borh-Sommerfeld, ovvero si imponga che l'onda in questo caso sia stazionaria, dando per note la traiettoria in coordinate polari di un'ellisse avente fuoco nell'origine:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos(\theta)},$$

(dove  $r_0$  è il semilato retto e  $\epsilon$  l'eccentricità dell'ellisse) e la funzione  $p(\theta)$  quantità di moto. Potete fare riferimento alla fig. 20.

2. Si ricavi  $\epsilon$  dal momento angolare  $L = l\hbar$  e dall'energia  $E$  dell'orbita.
3. Si ricavi  $r_0$  da  $L, E$ .
4. Si ricavi  $p(\theta)$ .
5. Si risolva l'integrale (*Hint: Integra per parti e poi vai di Teorema dei Residui*).
6. Si discuta quali livelli energetici sono ammessi, quanti stati e con quale momento angolare esistono per ciascun livello energetico.

Se finora l'approccio semiclassico funziona bene, quando si accendono le correzioni relativistiche (**struttura fine** e **iperfine**) questo modellino si rompe, per svariate ragioni, in primis lo spin dell'elettrone diventa rilevante.

### ☆☆☆☆☆ Esercizio 28 Un po' di contazzi

Scrivere  $\langle \psi | \phi \rangle$  come somma di termini della forma

$$\alpha \langle \xi | \xi \rangle.$$

### ☆☆☆☆☆ Esercizio 29 Deduzione formale dell'approssimazione WK-BJ

1. Si sostituisca  $\psi = e^{i\mathcal{S}/\hbar}$  nell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo in 1D.  $\mathcal{S}$  è chiamato **iconale**.
2. Si risolva l'equazione trovata all'ordine 0 in  $\hbar$  e si chiami  $\mathcal{S}_0$  la soluzione.
3. Si scriva  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \hbar\mathcal{S}_1 + \dots$  e si risolva all'ordine 1 l'equazione di prima.
4. Ora si buttino dentro  $\psi = e^{i\mathcal{S}/\hbar}$  i risultati trovati.

☆☆☆☆☆ **Esercizio 30 Corrente di probabilità**

Indichiamo con  $\rho(\mathbf{x}) = \overline{\psi(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x})$  la densità di probabilità di una particella. Si trovi un'espressione per la corrente di probabilità, ovvero per quella grandezza  $\mathbf{J}$  che soddisfa



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Si verifichi che per una particella con quantità di moto  $\mathbf{p}$  omogenea vale

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v},$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità classica della particella.

★☆☆☆☆ **Esercizio 31 Un po' di potenziali in  $d = 1$** 

Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per i seguenti potenziali:



- $V(x) = -V_0\delta(x)$ ;
- $V(x) = -V_0\chi_{[-L,+L]}(x)$ , dove  $\chi_I$  è la funzione caratteristica che vale 1 se  $x \in I$ , 0 altrimenti.

★☆☆☆☆ **Esercizio 32 Barriere in  $d = 1$** 

Supponiamo di avere un potenziale nullo all'infinito e con un andamento noto vicino a 0.

Definiamo i coefficienti di trasmissione  $T(E)$  e di riflessione  $R(E)$  come quei numeri tali che esiste una soluzione di energia  $E$  all'equazione di Schrödinger time-independent che, lontano da 0, si riduce a



$$\psi \sim \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ Te^{ikx}, & x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

ossia  $T, R$  misurano le ampiezze di trasmissione e riflessione.

Si calcolino  $T, R$  per i seguenti potenziali:

- $V(x) = V_0\delta(x)$ ;
- $V(x) = V_0\chi_{[-L,+L]}(x)$ , dove  $\chi_I$  è la funzione caratteristica che vale 1 se  $x \in I$ , 0 altrimenti.

Si noti che  $T$  è diversa da 0 anche se la trasmissione sarebbe classicamente vietata per una particella. Questo effetto si chiama **tunnelling quantistico**.

★★★☆☆ **Esercizio 33 Stato metastabile**

Prendiamo un sistema  $3D$  con simmetria sferica. Supponiamo che la nostra particella, soggetta a un potenziale  $V(r)$ , abbia  $\psi$  con simmetria sferica. L'eq. di Schrödinger diventa



$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V - E\right)\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + V - E\right)\psi = 0,$$

che, con la sostituzione  $u = r\psi$ , diventa

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V - E\right)u = 0,$$

che è l'usuale equazione di Schrödinger con qualche vincolo:

- è definita solo per  $r > 0$ ;
- affinché  $\psi$  in zero sia ben definita è necessario che  $u(0) = 0$ .

Supponiamo che il potenziale abbia forma

$$V(r) = V_0\delta(r - r_0),$$

con  $V_0$  molto grande. Questo è un toy-model per uno **stato metastabile**, per esempio il nucleo di un atomo radioattivo, che ha una certa probabilità di decadere (per effetto tunnel) nell'unità di tempo.

1. Siccome l'atomo può solo decadere, per  $r \rightarrow +\infty$  dev'esserci solo un'onda uscente. Si scrivano le condizioni al bordo necessarie affinché:

- $u(0) = 0$ ;
- per  $r < r_0$ ,  $u = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$ ;
- per  $r > r_0$ ,  $u = Ce^{ikr}$  (solo onda uscente).

Questo ci porta a un'equazione per  $k$  della forma

$$e^{i\alpha k} = 1 + \frac{\beta}{V_0} k.$$

Si trovino  $\alpha$  e  $\beta$ .

2. Siccome  $V_0$  è grande, l'ultimo termine nella precedente equazione è piccolo, quindi si scriva

$$1 + \frac{\beta}{V_0} k = e^{\ln(1 + \frac{\beta}{V_0} k)}$$

e si espanda il logaritmo al secondo ordine. Abbiamo un'eguaglianza tra due esponenziali; questa può essere vera solo se gli argomenti sono uguali a meno di multipli interi di  $2\pi i$ .

3. Si eguagliano gli argomenti degli esponenziali tenendo conto del termine  $2\pi ni$ . Si risolva perturbativamente l'equazione per  $k$ .
4. Si calcoli  $E$ . Facendo questo esercizio, noterete qualcosa di strano: l'energia è complessa, con una piccola parte immaginaria negativa! Questa componente negativa fa due cose:

- fa decrescere la probabilità di trovare la particella nella buca perché lo stato evolve con  $e^{-iEt/\hbar}$ ;
- fa in modo che per grossi  $r$  la soluzione esploda; ha senso in questo caso perché la funzione d'onda nel punto  $R$  è proporzionale all'ampiezza che la particella aveva nella buca all'istante  $t - R/v!$

5. Si calcoli il rate di decadimento del processo e il tempo di dimezzamento.

### ☆☆☆☆☆ Esercizio 34 Trottola quantistica

Abbiamo una particella di spin  $\frac{1}{2}$  che è tenuta spazialmente ferma, quindi ci interessano solo i suoi gradi di libertà spinoriali.

In questo esercizio familiarizzeremo con qualche **tecnica perturbativa** e con le **matrici di Pauli**



$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Per la particella in questione la funzione d'onda è un oggetto a due componenti e, come per le usuali funzioni d'onda, è  $|\psi|^2$  a dare le probabilità, secondo la **regola di Born**;

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix}.$$

La prima componente è riferita allo spin diretto in direzione  $+\hat{z}$ , mentre la seconda in direzione  $-\hat{z}$ .

1. Mostrare che le tre componenti del momento angolare orbitale  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\mathbf{p}}$ , con le regole di commutazione canoniche, soddisfano l'**algebra del momento angolare**

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k.$$

2. Mostrare che  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k$ , che implica

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \sigma_k.$$

3. Mostrare che le tre componenti dello spin  $\mathbf{S} = \hbar/2\vec{\sigma}$  soddisfano le stesse regole di commutazione:

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k.$$

Questo ci giustifica a dire che lo spin è un momento angolare intrinseco!

4. Dimostrare che

$$e^{i\vec{\sigma}\cdot\mathbf{n}\theta} = \mathbb{1} \cos(\theta) + i\vec{\sigma}\cdot\mathbf{n} \sin(\theta).$$

*Hint: Taylor.* Potete notare che usando lo spin come generatore delle rotazioni, che dopo una rotazione di  $2\pi$  la funzione d'onda cambia segno. Questo non è problematico perché tutte le osservabili coinvolgono  $|\Psi|^2$ !

5. L'energia per uno spin si scrive

$$\hat{E} = -\gamma\mathbf{S}\cdot\mathbf{B},$$

dove  $\gamma$  è una costante chiamata **rapporto giromagnetico** e  $\mathbf{B}$  è il campo magnetico. Abbiamo tre particelle, al tempo  $t_0 = 0$  tutte con

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

sottoponiamo la prima a un campo magnetico lungo  $\hat{x}$ , la seconda a uno lungo  $\hat{y}$  e la terza a uno lungo  $\hat{z}$ . Tutti i campi hanno intensità  $B$  e vengono tenuti accesi solo per un tempo  $\Delta t$ .

6. Ora prendiamo una quarta particella, preparata nello stesso iniziale delle precedenti, e la sottoponiamo al seguente campo magnetico:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B \cos(\omega t) \\ B \sin(\omega t) \\ B_0 \end{pmatrix},$$

con  $B_0 \gg B$ . Siamo interessati a una soluzione approssimata. Si calcoli  $\Psi(t)$  nel caso in cui  $B = 0$ . Ci aspettiamo qualcosa della forma

$$\Psi = \Psi_{\uparrow} e^{-i\omega_{\uparrow}t} + \Psi_{\downarrow} e^{-i\omega_{\downarrow}t}.$$

7. Claimiamo

$$\Psi = c_{\uparrow}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega_{\uparrow}t} + c_{\downarrow}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_{\downarrow}t},$$

con  $c_i$  lentamente variabili nel tempo. Per  $\Delta t$  sufficientemente piccoli, scriviamo

$$c_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} + \dots, \tag{E.2}$$

dove  $c_i^{(0)}$  sono quelli iniziali,  $c_i^{(1)}$  sono una correzione del primo ordine,  $c_i^{(2)}$  sono una correzione al secondo ordine e così via. Questo approccio viene chiamato **approccio perturbativo** e la serie in eq. E.2 viene chiamata **serie di Dyson**.