

Ottica

Isabella Corso*, Antonio Lombardi‡

9 Febbraio 2023

Sommario

In questa lezione ricaveremo i postulati dell'ottica geometrica a partire dal principio del tempo minimo. Spiegheremo le leggi della riflessione e la legge di Snell, quest'ultima anche a partire dal principio di Huygens. Useremo poi questa legge per capire il funzionamento dei diottri sferici e delle lenti, in particolare dimostreremo la formula del costruttore di lenti e la legge dei punti coniugati, per poi trattare il caso di sorgenti estese. Riassumeremo il funzionamento degli specchi sferici. Infine accenneremo ai limiti dell'ottica geometrica come teoria approssimata. Nella seconda parte della lezione affronteremo le basi dell'ottica fisica, affrontando i fenomeni dell'interferenza e della diffrazione tramite esempi istruttivi.

*isabella.corso@sns.it

‡antonio.lombardi@sns.it

Indice

1	Introduzione	4
1.1	L'indice di rifrazione	4
1.2	I postulati	4
2	Principio di Fermat	5
2.1	Traiettorie nei mezzi omogenei	6
2.2	Riflessione	7
2.3	Rifrazione	7
2.4	Riflessione totale	8
3	Principio di Huygens	9
4	Passaggio al continuo	11
4.1	Traiettoria circolare	11
5	Reversibilità dei cammini ottici	12
6	Sorgenti e immagini	14
7	Diottro sferico	15
7.1	Segni	17
8	Lenti	18
8.1	Formula dei punti coniugati	18
8.2	Segni	20
8.3	Lenti convergenti e divergenti	21
9	Sorgenti estese	21
9.1	Posizione dell'immagine	22
9.2	Ingrandimento	23
10	Specchi sferici	24
11	Cenni ai limiti dell'ottica geometrica	24
12	Introduzione all'ottica fisica	26
13	Onde elettromagnetiche	26

14 Fenomeni ondulatori: interferenza	28
14.1 Esperimento di Young	30
14.2 Young, ma con N fenditure	32
14.3 Diffrazione	36
14.4 Schermi opachi	36
Esercizi	40
I Immagini	40
II Specchio piano	40
III Gara di primo livello, olifis 2019 - modificato	40
IV Legge di Gladstone-Dale	40
V Senigallia 2000/1A	41
VI Senigallia 2015/1	41
VII Senigallia 1994/4	43
VIII IPhO 1984/1 - ridotto	44
IX IPhO 2021/1B	44
X IPhO 1995/2	46
XI Senigallia 2017/3	47
XII Doppietto di lenti	49
XIII Reticolo di diffrazione	49
XIV Tempo di coerenza	50
XV Lunghezza di coerenza	50
XVI Michelson interferometer	51
XVII Fabry-Perot interferometer	51
XVIII Spettrometro a echelle	51
XIX Effetto Doppler	52
XX Thermal Doppler broadening (Senigallia 2018) (complicato) . .	52

1 Introduzione

L'ottica geometrica è la teoria più semplice e antica in grado di descrivere la propagazione della luce nei mezzi trasparenti. È una teoria approssimata e si può ricavare interamente dalle equazioni di Maxwell: la luce infatti è un'onda elettromagnetica. Quando gli oggetti e le discontinuità che la radiazione incontra hanno dimensioni molto maggiori della lunghezza d'onda, possiamo però trascurarne la natura ondulatoria e studiare soltanto la propagazione dei raggi, cioè la traiettorie seguite dalla luce.

1.1 L'indice di rifrazione

La luce si propaga a una velocità finita che dipende dal mezzo in cui si trova. Dato un certo materiale si può quindi definire il suo indice di rifrazione $n = c/v$, dove v è la velocità di propagazione in quel materiale e c è la velocità della luce nel vuoto, che vale $c = 299792458 \text{ m/s}$ ¹.

Poiché nei materiali la luce rallenta (c è la velocità massima raggiungibile da ogni cosa), si avrà sempre $n \geq 1$. Per esempio, per l'aria $n \simeq 1$, per l'acqua $n = 1.33$ e per il vetro n varia tipicamente tra 1.5 e 1.9.

Un mezzo si dice omogeneo se n è costante, isotropo se n non dipende dalla direzione di propagazione. Assumeremo che tutti i mezzi con cui avremo a che fare siano isotropi.

1.2 I postulati

L'ottica geometrica si basa su postulati che definiscono univocamente il comportamento dei raggi all'interno di mezzi omogenei e nei pressi dell'interfaccia tra due mezzi distinti e che possono essere riassunti come segue.

1. In un mezzo omogeneo, i raggi di luce sono linee rette.
2. Quando un raggio (detto incidente) incontra la superficie di una interfaccia piana tra due mezzi omogenei, esso si divide in due raggi, detti riflesso e rifratto.
3. I raggi riflesso e rifratto giacciono sul piano individuato dal raggio incidente e dalla normale all'interfaccia nel punto di incidenza. Gli angoli tra la normale e i raggi sono detti angoli di incidenza, di riflessione e di rifrazione.

¹Questo valore è esatto e viene usato nel Sistema Internazionale per definire la lunghezza del metro.

4. L'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza (θ_1 in figura 1).
5. L'angolo di rifrazione (θ_2 in figura 1) è legato all'angolo di incidenza dalla legge di Snell:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

dove n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione dei due mezzi.

Per quanto riguarda il punto (2), entrambi questi due raggi sono quasi sempre presenti contemporaneamente, anche se spesso non notiamo il raggio rifratto (basti pensare a qualunque oggetto opaco che abbiamo intorno), ma ciò è dovuto all'assorbimento del materiale e non è spiegabile con l'ottica geometrica.

Questi postulati possono essere assunti a priori, ma è possibile darne una giustificazione a partire da principi più generali. In particolare noi vedremo il principio del tempo minimo di Fermat e il principio di Huygens.

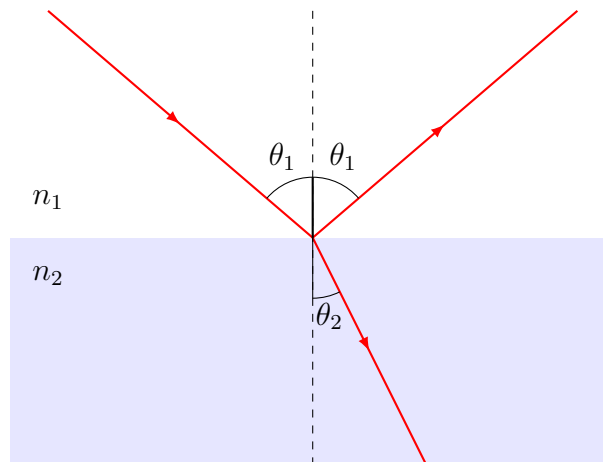


Figura 1: Comportamento di un raggio che incide con angolo θ_1 sulla superficie di separazione tra due materiali diversi

2 Principio di Fermat

Nel 1650 circa Pierre de Fermat enunciò il principio del tempo minimo, che nella forma originale afferma che, se un raggio di luce passa per un punto A e per un punto B, allora la traiettoria che ha seguito tra A e B è quella che minimizza il tempo di percorrenza. Questo principio però è stato modificato successivamente perché esistono casi in cui la traiettoria seguita è quella che,

al contrario, massimizza il tempo di percorrenza ². è quindi più corretto dire che un percorso tra due punti può essere la traiettoria di un raggio soltanto se rende stazionario il tempo di percorrenza.

Una definizione rigorosa di punto stazionario in questo contesto è complicata ³, ma per i nostri scopi sarà sufficiente considerare soltanto massimi e minimi. In particolare, nei casi che incontreremo o sarà chiaro qual è il percorso che minimizza il tempo, oppure saremo in grado di scrivere questo tempo in funzione di una sola variabile, rispetto alla quale potremo fare una derivata e porla uguale a zero (lo faremo nel caso della rifrazione).

2.1 Traiettorie nei mezzi omogenei

In un mezzo omogeneo la velocità della luce è costante e il tempo di percorrenza è direttamente proporzionale alla lunghezza del percorso. Presi due punti (A e B) per i quali sappiamo passare un raggio, questo si muoverà quindi lungo la retta che li collega.

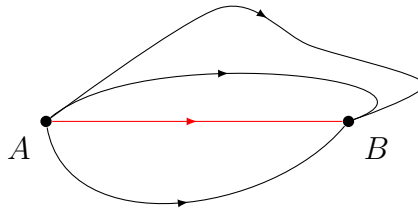


Figura 2: Alcune delle possibili traiettorie dei raggi tra A e B , se la velocità è uniforme per il principio di Fermat la traiettoria effettiva sarà quella rettilinea

²Succede, per esempio, nel caso di uno specchio concavo

³Consideriamo prima un caso più semplice, quello di una funzione in una variabile. I punti stazionari sono per definizione quelli con derivata nulla e comprendono massimi, minimi e punti di sella. In tutti questi casi si ha che la variazione della funzione corrispondente a un piccolo spostamento dal punto stazionario considerato dipende da tale spostamento *elevato al quadrato*, ed è quindi approssimativamente nulla (come si vede chiaramente espandendo in Taylor la funzione e fermandosi all'ordine lineare, che è nullo). Nel nostro caso il tempo di percorrenza è una funzione del percorso scelto: anche se non è chiaro come fare una derivata in questo contesto, i percorsi che cerchiamo sono tali che se modificati leggermente, il tempo di percorrenza è approssimativamente costante.

2.2 Riflessione

Abbiamo già detto che quando un raggio incontra una discontinuità, in generale ci saranno sia un raggio rifratto che un raggio riflesso. Consideriamo ora il raggio riflesso proveniente da una superficie *riflettente*, che per semplicità considereremo piana e chiameremo *specchio*.

Supponiamo quindi che tale specchio si trovi a $z = 0$ e che A e B siano due punti di coordinate (x_a, y_a, z_a) e (x_b, y_b, z_b) . Consideriamo ora il punto $B' = (x_b, y_b, -z_b)$, simmetrico a B rispetto allo specchio. Un percorso tra A e B avrà lo stesso tempo di percorrenza del percorso tra A e B' che si ottiene riflettendo la seconda parte del percorso originale (Figura 3) e immaginando che lo specchio non ci sia e che tutto lo spazio sia riempito dallo stesso mezzo. Il problema è quindi equivalente a trovare la traiettoria più veloce tra A e B' (che sappiamo già essere rettilinea). Trovata questa traiettoria, basta simmetrizzare la parte che si trova oltre lo specchio per ottenere il percorso cercato.

Tale risultato porta a tre immediate conseguenze:

1. Esiste un unico punto di contatto P del raggio sullo specchio
2. A , B e P giacciono sul piano individuato dal raggio incidente e dalla normale all'interfaccia nel punto di incidenza.
3. L'angolo tra la normale al piano e il raggio che arriva da A (*raggio incidente*) è uguale all'angolo tra la normale al piano e il raggio che va verso B (*raggio riflesso*)

Queste sono generalmente note come leggi della riflessione.

2.3 Rifrazione

Consideriamo ora il raggio rifratto. In questo caso A e B si trovano in due regioni distinte con due velocità caratteristiche diverse, rispettivamente $v_1 = \frac{c}{n_1}$ e $v_2 = \frac{c}{n_2}$. Le due regioni sono separate da un piano che chiameremo α .

Sappiamo già che il raggio incidente sarà rettilineo così come quello che dal punto di contatto P va a B (*raggio rifratto*). Chiamiamo π il piano passante per A e B e perpendicolare ad α . Supponiamo ora per assurdo che il punto di contatto non si trovi su π . Allora, muovendo P sulla perpendicolare a π , il tempo totale di percorrenza dei due raggi ha un unico minimo che si ha quando P si trova su π . I raggi e la normale ad α giacciono quindi sullo stesso piano.

Possiamo quindi analizzare il problema in due sole dimensioni. Poniamo

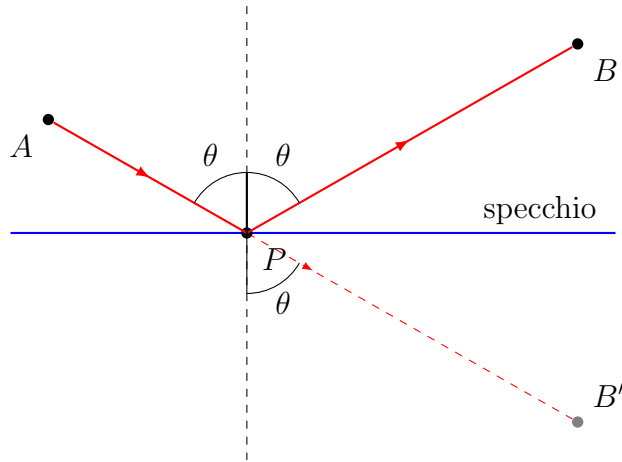


Figura 3: Costruzione equivalente per la risoluzione del problema della riflessione

un sistema di coordinate cartesiano tale che la superficie di separazione sia lungo l'asse x : A e B avranno coordinate rispettivamente (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , P avrà coordinate $(x, 0)$, dove x è da determinare. Supponiamo $y_1 > 0, y_2 < 0$ (Figura 4).

Il tempo di percorrenza sarà una funzione di x :

$$t(x) = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}}{v_2}$$

I punti stazionari di $t(x)$ si possono quindi trovare ponendo $t'(x) = 0$.

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}} = 0$$

da cui

$$v_2 \sin \theta_1 - v_1 \sin \theta_2 = 0$$

Sostituendo gli indici di rifrazione si ricava la *legge di Snell*:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

2.4 Riflessione totale

Anche se in generale un raggio che incide sulla superficie di separazione tra due materiali si divide in un raggio rifratto e uno riflesso, esiste un caso

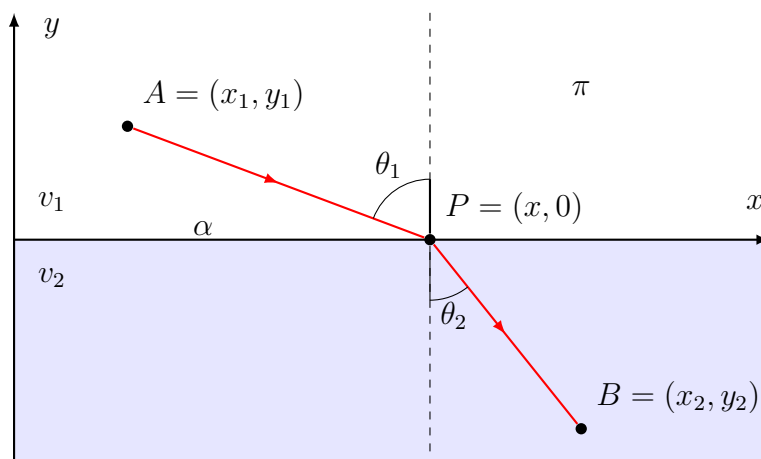


Figura 4: Partendo dal principio di Fermat vogliamo trovare la posizione del punto P che minimizza il tempo che impiega la luce per arrivare a B

particolare in cui il raggio rifratto non può formarsi. Infatti se $n_2 < n_1$ è possibile che $\sin \theta_1 > n_2/n_1$, ma per la legge di Snell si avrebbe $\sin \theta_2 > 1$ che è evidentemente privo di significato. In questo caso non esiste il raggio rifratto, e la luce resta nel mezzo con indice di rifrazione maggiore. Il fenomeno è noto come *riflessione totale* e l'angolo θ_L tale che $\sin \theta_L = n_2/n_1$ si chiama *angolo limite*.

3 Principio di Huygens

Dimostriamo ora la legge di Snell a partire da un altro principio, quello di Huygens. La luce viene interpretata come un'onda e i raggi sono le rette perpendicolari ai fronti d'onda⁴. Secondo questo principio ogni punto di un fronte d'onda che esiste in un certo istante si comporta come sorgente di onde sferiche secondarie che si propagano verso l'esterno con la stessa velocità dell'onda; il fronte d'onda nell'istante successivo è la superficie tangente a tutte le onde sferiche secondarie.

Questo principio è utile perché ci permette di generalizzare i postulati dell'ottica geometrica a tutti i tipi di onde, per esempio le onde sonore o le onde sismiche (è capitato più volte nei problemi delle olimpiadi).

Consideriamo quindi un'onda piana (cioè con fronti d'onda che sono rette o piani paralleli) che, provenendo da un mezzo in cui si muove con velocità

⁴Definite come superfici a fase costante

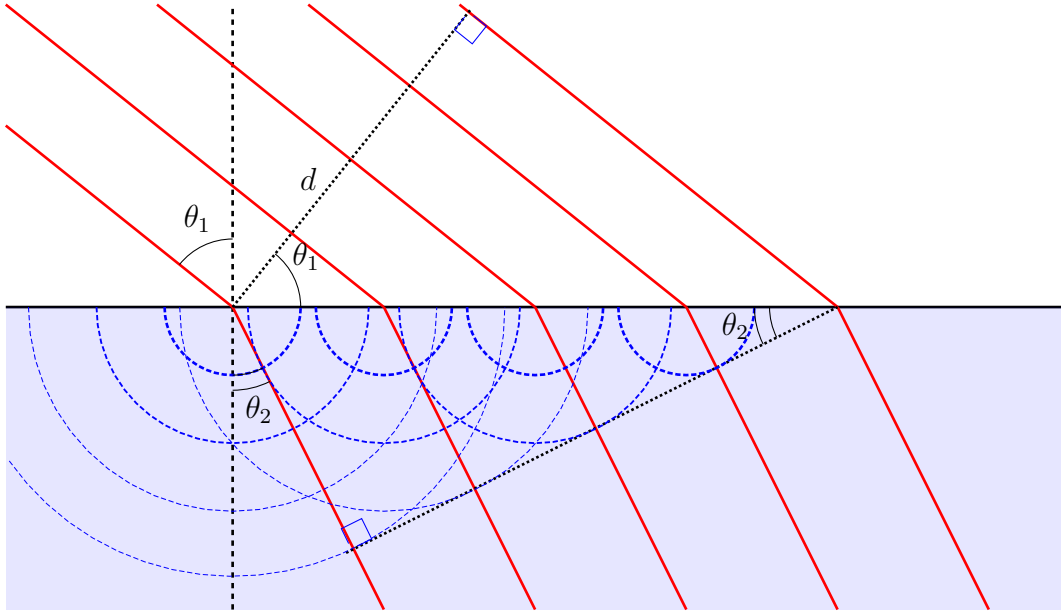


Figura 5: Costruzione geometrica per dimostrare la legge di Snell a partire dal principio di Huygens

$v_1 = \frac{c}{n_1}$, impatta l'interfaccia con un altro mezzo, in cui ha velocità $v_2 = \frac{c}{n_2}$, con un angolo di incidenza θ_1 . Vogliamo determinare la relazione tra θ_1 e l'angolo di rifrazione θ_2 .

In figura 5 sono rappresentati in rosso alcuni raggi che incidono sulla superficie di separazione. I punti dello stesso fronte d'onda (rappresentato con una linea perpendicolare ai raggi) raggiungono il secondo mezzo in momenti diversi. Consideriamo le onde secondarie prodotte nel punto di incidenza da ogni raggio: sono circonferenze centrate nel punto in cui il raggio interseca la superficie di separazione, con raggio $r = v_2 dt$ dove dt è il tempo passato da quando il raggio ha raggiunto il nuovo mezzo.

Sappiamo che il raggio più a destra incontra la superficie di separazione dopo $\Delta t = \frac{d \tan \theta_1}{v_1}$ rispetto al raggio più a sinistra del disegno, dove d è la distanza fra i due raggi. In questo tempo l'onda secondaria creata dal primo si è propagata di $v_2 \Delta t = v_2 \frac{d \tan \theta_1}{v_1}$. Con semplici considerazioni geometriche si trova quindi

$$v_2 \frac{d \tan \theta_1}{v_1 \sin \theta_2} = \frac{d}{\cos \theta_1}$$

da cui, con qualche passaggio algebrico, riotteniamo la legge di Snell.

4 Passaggio al continuo

Nelle sezioni precedenti abbiamo solamente trattato il caso in cui esiste una separazione netta tra due mezzi omogenei. Si vuole ora cercare di generalizzare quanto detto precedentemente per mezzi in cui l'indice di rifrazione varia con continuità. Consideriamo inizialmente tre materiali con indici di rifrazione rispettivamente n_1, n_2, n_3 disposti su tre strati paralleli in quest'ordine. Supponiamo che un raggio entri dal materiale con indice di rifrazione n_1 con un angolo θ_1 rispetto alla normale ai piani, possiamo semplicemente applicare la legge di Snell due volte sulle superfici di separazione e ottenere, con ovvio significato di θ_2 e θ_3

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3$$

È da notare che la validità di quanto detto è condizionata al fatto che i tre strati sono paralleli, ma se questa condizione è soddisfatta allora è sufficiente applicare la legge di Snell tra il primo e l'ultimo strato, non ha importanza quanti siano quelli in mezzo.

Supponiamo ora di avere un materiale in cui l'indice di rifrazione varia in modo continuo come una funzione $n(y)$, possiamo allora modellizzarlo come composto da strati orizzontali (quindi tutti paralleli) e omogenei di spessore infinitesimo. Detta $f(x)$ la funzione che descrive la traiettoria del raggio, e detto $\theta(x)$ l'angolo tra la verticale e la tangente alla traiettoria nel punto x , per la legge di Snell è chiaro che la quantità $n(f(x)) \sin \theta(x)$ è una costante fissata dai parametri iniziali del problema. Poiché si verifica che $\sin \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ si ottiene che la quantità rilevante conservata è: Una volta data un'opportuna condizione iniziale sulla traiettoria del raggio, che determini il valore della costante, si ottiene un'equazione differenziale per $h(x)$. Alternativamente, se in partenza è nota $h(x)$, la relazione può essere risolta per $n(h(x))$, da cui si ricava $n(y)$ invertendo la funzione $h(x)$.

$$\frac{n(f(x))}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \tag{1}$$

4.1 Traiettoria circolare

Con il fine di fissare le idee su questo argomento che è già stato più volte presente anche nelle prove delle Olimpiadi di Fisica proponiamo qui un veloce esercizio. Supponiamo di avere un materiale costruito come prima con l'indice di rifrazione dipendente solamente dal valore delle ordinate. Trovare la funzione $n(y)$ affinché la traiettoria di un raggio di luce entrante parallelo

all'asse delle ascisse nel materiale⁵ sia un arco di circonferenza. Supponiamo che $f(x) = \sqrt{(R^2 - x^2)}$ dove R è il raggio della circonferenza, allora sappiamo per la (1) che

$$n(y) \propto \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \sqrt{1 + \frac{R^2 - y^2}{y^2}}$$

Da cui, limitandoci al primo quadrante

$$n(y) \propto \frac{1}{y}$$

5 Reversibilità dei cammini ottici

Un principio importante di cui non abbiamo ancora parlato, che è alla base dell'ottica geometrica, è la reversibilità dei cammini ottici. Esso afferma che dato un raggio incidente su un sistema ottico e dato lo stesso raggio (o anche un fascio di raggi separati) in uscita dal sistema, se si rimandasse indietro il raggio (o il fascio) di uscita si otterrebbe quello di ingresso. Con "rimandare indietro" si intende invertire il verso di scorrimento del tempo: immaginiamo di registrare il raggio che interagisce con il sistema, riguardando il video sarebbero fisicamente sensati sia il video come è stato registrato che lo stesso mandato al contrario.

Si noti la simmetria della legge di Snell: non si specifica quale sia il mezzo attraversato per primo dal raggio e non avrebbe senso che sia in qualche modo privilegiato uno dei due per via di questo principio. Poiché i sistemi ottici che vedremo saranno basati principalmente sulla legge di Snell e sulla legge della riflessione (angolo di incidenza e di riflessione sono uguali) che sono simmetriche di per sé, è chiaro che questo principio è valido anche per quei sistemi che sono basati su questi fenomeni. La validità del principio prescinde da questa limitazione, ma per quello che ci servirà si può vedere come conseguenza di questa caratteristica delle leggi fondamentali.

Inoltre potrebbe portare a conclusioni errate lavorare nel solo ambito dell'ottica geometrica, in quanto essa non si occupa minimamente dell'interazione tra due raggi. Ad esempio un raggio incidente su una superficie trasparente viene sia riflesso che rifratto; applicando il principio di reversibilità e partendo

⁵Se il raggio fosse esattamente parallelo ovviamente non curverebbe mai, qua si sottointende che il raggio abbia una piccola deflessione iniziale

dalle leggi dell'ottica geometrica ci si potrebbe aspettare che guardando il fenomeno al contrario i due raggi prodotti non si uniscano in uno solo, ma formino anche un secondo raggio dovuto alla rifrazione del raggio riflesso. In sostanza nella Figura 1 ci si potrebbe aspettare la presenza di un raggio proveniente da in basso a sinistra. Il principio però deve essere valido, la spiegazione di questa inconsistenza è che limitandoci all'ottica geometrica trascuriamo l'interazione tra i raggi, che invece in questo caso è rilevante.

6 Sorgenti e immagini

Introduciamo brevemente i concetti di sorgente e immagine: si chiama sorgente un corpo che fornisce luce al sistema ottico, mentre l'immagine è il corpo che un osservatore vede attraverso il sistema ottico. È importante notare che secondo queste definizioni l'immagine di un sistema può essere la sorgente di un altro.

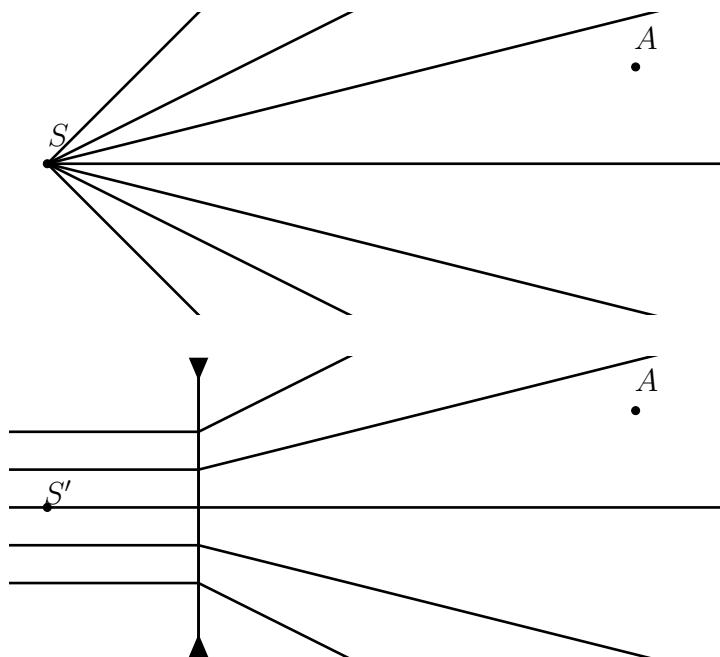


Figura 6: L'osservatore posto in A non è in grado di capire quale dei due casi è quello che osserva. L'oggetto presente nel secondo caso è una lente divergente

Le immagini possono essere di due tipi: reali o virtuali. Un'immagine reale si forma quando i raggi che partono da una sorgente e passano attraverso un sistema ottico convergono tutti in un punto: per un osservatore sarà come se in quel punto ci fosse la sorgente. Un'immagine virtuale si forma invece quando i raggi fisicamente non convergono, ma se immaginiamo di prolungarli, tutte le rette ottenute si incontreranno in un unico punto. A un osservatore sembrerà che i raggi provengano effettivamente da quel punto.

La situazione è quella che si vede in figura 6: dei raggi paralleli (che possiamo pensare come emessi da una sorgente posta all'infinito) vengono deviati in modo che i loro prolungamenti si incontrino in S' . Per un osservatore posto in

A (o un sistema ottico qualsiasi posto in A) sarà come se non ci fosse nessuna lente e la sorgente si trovasse in S' , ovvero il caso illustrato nella prima parte della figura.

Da notare che i raggi “virtuali” non stanno davvero passando attraverso la lente e quindi non subiscono una seconda riflessione: per capirlo, si può pensare di sostituire il sistema “sistema ottico + sorgente” con l’immagine virtuale, ma non si può sostituire soltanto la sorgente con l’immagine, lasciando al suo posto la lente.

Conseguenza della differenza tra queste due situazioni è che un’immagine reale può essere raccolta su uno schermo posto nel punto dove i raggi convergono, mentre questo non è possibile nel caso di immagini virtuali.

Infine, consideriamo il caso di *sorgenti virtuali*: per la reversibilità dei cammini ottici, possiamo immaginare di invertire il senso dei raggi in figura 6. Dei raggi che non sembrano provenire da un punto unico, ma che, se non ci fosse la lente, convergerebbero, possono essere trattati come provenienti da una sorgente virtuale posta dove convergerebbero. Queste osservazioni saranno utili per poter usare la stessa formula in più situazioni, modificando soltanto i segni di alcune variabili.

7 Diottro sferico

Il diottro è il sistema ottico più semplice ed è costituito da due mezzi con diverso indice di rifrazione a contatto. Il diottro sferico è quello che ha la superficie di separazione di forma sferica. Sebbene non sia molto comune avere a che fare con dei diottri nelle olimpiadi, essi sono alla base delle lenti che invece costituiscono dei sistemi ottici molto comuni.

Nella figura 7 il punto S rappresenta una sorgente puntiforme e I il punto in cui il raggio incidente sul diottro con angolo α incontra l’asse ottico. Indicando con n_1 l’indice di rifrazione del mezzo in cui si trova la sorgente e n_2 l’altro, si può applicare la legge di Snell per trovare la seguente relazione tra gli angoli in figura:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (2)$$

Questa equazione è esatta, ma a priori la posizione di I potrebbe dipendere da α : La sorgente emette raggi in tutte le direzioni e questi potrebbero non convergere in un punto per formare un’immagine. Vedremo però che questo con qualche approssimazione questo effettivamente succede.

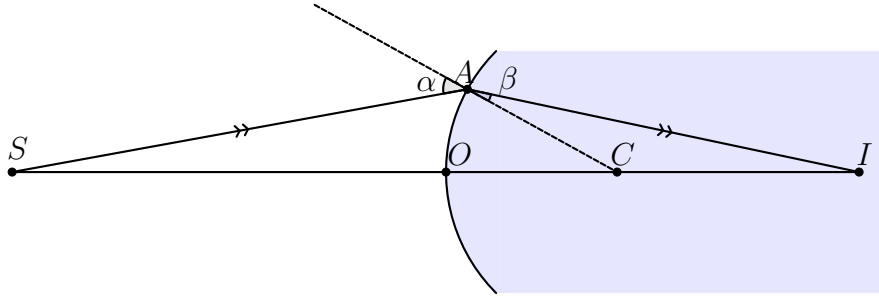


Figura 7: Schema ottico di un diottro sferico, S è una sorgente puntiforme e I il punto in cui il raggio incidente sul diottro con angolo α incontra l'asse ottico

Definiamo p come la distanza tra S e O (il punto della superficie di separazione che appartiene al segmento SI) e q la distanza tra I e O . Inoltre il diottro è ricavato da una sfera di centro C e raggio R . Useremo d'ora in poi un'approssimazione parassiale, ovvero considereremo $\alpha \ll 1$ per poter giustificare delle approssimazioni altrimenti non valide, in particolare si noti che sono piccoli tutti gli angoli che tendono a 0 quando α tende a 0.

Per prima cosa si ricordi che se $x \ll 1$ allora $\sin x \approx x$, da cui l'equazione (2) diventa:

$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (3)$$

Ciò permette di considerare approssimativamente il punto in cui il raggio incontra la superficie come appartenente alla perpendicolare a SI passante per O . Si può notare che per il teorema dell'angolo esterno⁶ (applicato al triangolo ACI e all'angolo esterno \widehat{ACS}) si ricava che:

$$\widehat{ACS} = \beta + \widehat{CIA} \quad (4)$$

Inoltre, notando che tutti gli angoli sono piccoli, si ottiene che:

$$\widehat{ACS} \approx \tan(\widehat{ACS}) = \frac{AO}{R} \quad \widehat{AIO} \approx \tan(\widehat{AIO}) = \frac{AO}{q} \quad (5)$$

Combinando le equazioni (4) e (5) si ottiene:

$$\frac{AO}{R} = \beta + \frac{AO}{q} \quad (6)$$

⁶In un triangolo, l'ampiezza di un angolo esterno corrispondente a un angolo interno è uguale alla somma degli altri due angoli interni.

Guardando ora al triangolo SAC e applicando di nuovo il teorema dell'angolo esterno si ottiene:

$$\alpha = \widehat{ASO} + \widehat{ACS} \quad (7)$$

Notando che anche \widehat{ASO} è piccolo si ha:

$$\widehat{ASO} \approx \tan(\widehat{ASO}) = \frac{AO}{p} \quad (8)$$

Combinando le equazioni (5), (7) e (8) si ottiene:

$$\alpha = \frac{AO}{p} + \frac{AO}{R} \quad (9)$$

Per finire unendo le equazioni (3), (6) e (9) si ottiene:

$$n_1 \left(\frac{AO}{p} + \frac{AO}{R} \right) = n_2 \left(\frac{AO}{R} - \frac{AO}{q} \right) \quad (10)$$

$$n_1 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right) = n_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right) \quad (11)$$

Da cui:

$$\frac{n_2}{q} + \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (12)$$

Quest'equazione è molto interessante in quanto non appare α , dunque la posizione di I non dipende da esso, purché sia valida l'approssimazione parassiale, e dunque si forma un'immagine nel punto I .

7.1 Segni

Nel caso in cui i parametri geometrici del sistema e il valore di p rendano negativo q , questo significa che non si forma un'immagine reale, ovvero i raggi non convergono in nessun punto (in particolare, non convergono in un punto a distanza $|q|$ a destra del diottro) ma *sembrano* provenire da un punto a sinistra del sistema: si è formata un'immagine virtuale.

Abbiamo ricavato la formula (12) ipotizzando $p > 0, R > 0$ ma la formula è valida più in generale. In particolare, se la sorgente è virtuale, ovvero i raggi provengono sempre dalla sinistra del sistema, ma non da una sorgente puntiforme e, se non ci fosse il diottro, convergerebbero in un punto a distanza $x > 0$ sulla destra. In questo caso la formula funziona ma dovremmo porre $p = -x$. Analogamente se il diottro ha concavità verso destra (ovvero C si

trova a sinistra di O), sarà sufficiente sostituire a R il valore del raggio ma cambiato di segno: $R < 0$.

Si può notare che l'equazione (12) è tale che se gli indici di rifrazione sono uguali l'immagine virtuale si forma nella sorgente, cioè non ha alcun effetto ottico dovuto al diottrio.

8 Lenti

8.1 Formula dei punti coniugati

Le lenti sono il sistema ottico più comune. Esse sono costituite da due segmenti sferici dello stesso materiale uniti sulla parte piatta. In ambito olimpico si avrà quasi sempre a che fare con lenti sottili (vedremo cosa significa) in approssimazione parassiale.

Per studiare a livello ottico le lenti si noti che esse possono essere viste come due diottri a contatto, in cui il primo forma un'immagine (reale o virtuale) che fa da sorgente per il secondo diottrio.

Supponiamo che la luce provenga da una sorgente puntiforme sull'asse ottico a distanza p dal centro della lente, costituita da due calotte sferiche di raggi $|R_1|$ e $|R_2|$ di materiale con indice di rifrazione n . Le calotte siano disposte come in figura 8 e circondate da aria (che ha indice di rifrazione 1). Il fatto che siano circondate dall'aria non è strettamente necessario, richiede solo una minima correzione della formula finale: nell'equazione (15) apparirebbe il rapporto tra gli indici di rifrazione dei due mezzi al posto della sola n del materiale della lente.

Per comodità si noterà in seguito che un'opportuna convenzione sui segni dei raggi può essere utile per memorizzare la formula finale anche nei casi in cui una o entrambi le calotte siano concave.

Lavoreremo nell'approssimazione di lente sottile, cioè lo spessore della lente è trascurabile rispetto a R_1 , R_2 e p .

Per quanto ricavato sui diottri vediamo che in approssimazione parassiale si ha che la prima calotta forma un'immagine a distanza q' , la quale rispetta:

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q'} = \frac{n-1}{R_1} \quad (13)$$

L'immagine della prima calotta si forma oltre la seconda e inoltre l'immagine è reale. Questa immagine si comporta quindi da sorgente *virtuale* per il

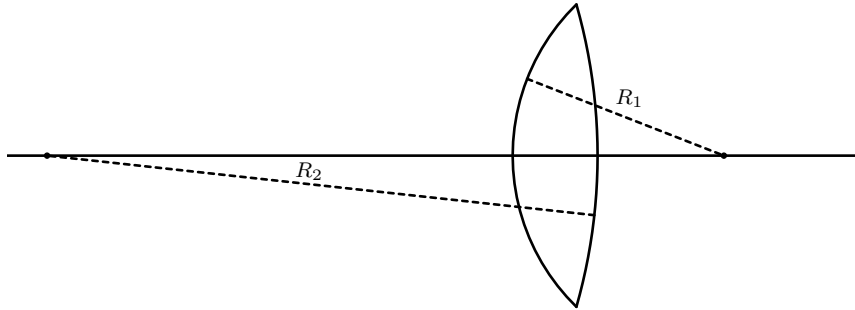


Figura 8: Rappresentazione indicativa di una lente convergente, i raggi sono stati accentuati per chiarezza

secondo diottro: applichiamo la formula usando come distanza della sorgente $-q'$ e come raggio R_2 (il diottro è “al contrario”, per cui R_2 è un numero negativo):

$$\frac{1}{q} - \frac{n}{q'} = \frac{-n + 1}{R_2} \quad (14)$$

Dove q è la distanza dell'immagine che si formerebbe. Formalmente, al posto di $-q'$ avremmo dovuto scrivere $-q' - d$, dove d è lo spessore della lente, e poi, una volta ottenuta la formula finale, prendere il limite per $d \rightarrow 0$ perché siamo in approssimazione di lente sottile (potete farlo per esercizio). Per comodità però poniamo subito $d = 0$ e la dimostrazione funziona ugualmente. Sommando le equazioni (13) e (14) si ottiene:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (15)$$

Solitamente si definisce la lunghezza focale f in modo che

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Questa è nota come equazione del costruttore di lenti Sostituendo nella (15) si ha:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (16)$$

nota come legge dei punti coniugati. Questa formula è sufficiente a risolvere quasi ogni esercizio olimpico di ottica che coinvolge le lenti; a volte può capitare di usare la formula del costruttore se si conosce la geometria della lente.

8.2 Segni

Abbiamo ricavato la formula sopra nel caso di lenti con un raggio positivo e uno negativo (le concavità dei due diottri rivolte come in figura 8), ma sono valide anche se una o entrambe le calotte hanno concavità diversa e sorgente o immagine sono virtuali, anche se non lo dimostriamo (potete farlo per esercizio: la dimostrazione è quasi uguale, basta fare attenzione a come applicare la (12)).

In ogni caso la formula non va modificata, ma le variabili p , q , R_1 e R_2 vanno sempre pensate come variabili con segno piuttosto che come distanze. In particolare:

- $p > 0$ se la sorgente è reale, cioè i raggi provengono da un punto che si trova a sinistra della lente a distanza $|p|$ da essa; $p < 0$ se la sorgente è virtuale, cioè i raggi provengono dalla sinistra della lente ma convergerebbero in un punto a distanza $|p|$ dalla lente, alla sua destra;
- $q > 0$ se l'immagine è reale, ovvero i raggi convergono in un punto a distanza $|q|$ dalla lente, alla sua destra; $q < 0$ se l'immagine è virtuale, ovvero i raggi non convergono ma i loro prolungamenti si incontrano in un punto posto a sinistra della lente, a distanza $|q|$ da essa e per un osservatore a destra della lente, sarà come se ci fosse un oggetto in quel punto;
- $R_1 > 0$ se la calotta di sinistra è un tratto di cerchio con centro a destra della lente; $R_1 < 0$ se la calotta di sinistra è un tratto di cerchio con centro a sinistra della lente;
- $R_2 > 0$ se la calotta di destra è un tratto di cerchio con centro a destra della lente; $R_2 < 0$ se la calotta di destra è un tratto di cerchio con centro a sinistra della lente (esattamente come per R_1).

Un modo sensato per ricordarsi come mettere i segni è che p e q sono positivi quando rispettivamente immagine e sorgente sono dal lato che ci aspettiamo.

Da notare che la formula rispetta l'invertibilità del cammino ottico, infatti è simmetrica per scambio di p e q (cioè: ponendo una sorgente nell'immagine, si ottiene un'immagine dove prima c'era la sorgente).

Inoltre, una lente si comporta allo stesso modo della sua simmetrica, cioè quella con i raggi R_1 e R_2 invertiti in valore assoluto: provate a sostituire nell'equazione del costruttore di lenti, si ottiene la stessa lunghezza focale (attenzione: anche il segno di f non cambia, perché scambiare i raggi di curvatura non significa semplicemente scambiare R_1 e R_2 nella formula, ma

anche fare dei cambi di segno).

8.3 Lenti convergenti e divergenti

Se la lunghezza focale è positiva, la lente si dice *convergente*, se è negativa si dice *divergente*. Questi nomi sono dovuti ai comportamenti che esse assumono se colpite da raggi paralleli all'asse ottico: la lente convergente forma un'immagine reale nel fuoco facendoli convergere, mentre quella divergente li allontana creando un'immagine virtuale nel fuoco dalla parte di provenienza. La lente convergente è solitamente indicata in maniera schematica come un segmento con delle frecce agli estremi che puntano verso l'esterno e quella divergente con le frecce che puntano verso l'interno, come in figura 9.

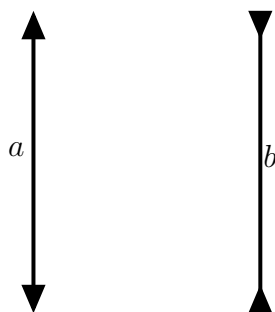


Figura 9: Rappresentazione schematica delle lenti: a è convergente e b è divergente

È importante ricordare che raggi parassiali e vicini all'asse ottico vengono sempre focalizzati nel fuoco, ovvero quel punto che si trova sull'asse ottico a distanza $|f|$ dalla lente (dopo la lente per le convergenti e prima delle lente per le divergenti) creando un'immagine che è virtuale per le lenti divergenti e reale per quelle convergenti. Questo si può dedurre dalla formula dei punti coniugati, perché possiamo pensare ai raggi paralleli all'asse ottico come provenienti da una sorgente a distanza infinita, quindi $\frac{1}{p} = 0$, da cui $q = f$ (notare che il segno giustifica quanto appena detto).

9 Sorgenti estese

Le lenti con cui abbiamo a che fare tutti i giorni non hanno solo una sorgente puntiforme, ma piuttosto oggetti estesi. La formula dei punti coniugati però ci dice solo dove si formerà l'immagine (puntiforme) di una

sorgente puntiforme posta sull'asse ottico. Nel caso di sorgenti estese ci sono quindi due problemi: la sorgente non è puntiforme e non tutti i punti della sorgente si trovano sull'asse ottico, caso che, per ora, non sappiamo trattare.

Per risolvere questo problema supponiamo per semplicità che la sorgente sia un segmento sufficientemente corto con un estremo sull'asse ottico e ortogonale ad esso. Questo caso copre gran parte dei casi interessanti per le olimpiadi, studiare l'immagine di una sorgente lontana dall'asse ottico è in generale complicato.

Sappiamo come trattare la base del segmento: la sua immagine sarà sempre sull'asse ottico in una posizione che si trova con la (16). Inoltre, sotto queste ipotesi, si può dimostrare (non lo faremo) che le immagini si formano ⁷ e sono sempre segmenti ortogonali all'asse ottico nello stesso piano della sorgente. Quindi se capiamo dove finisce il punto del segmento più lontano dall'asse, sappiamo tutto sull'immagine.

9.1 Posizione dell'immagine

Per quanto abbiamo detto, per trovare la posizione dell'immagine usiamo la (16) e sappiamo che tutti il segmento-immagine si trova sopra o sotto l'asse ottico, perpendicolare a esso e con proiezione in q . È spesso utile però fare un disegno schematico, dal quale oltre che ricavare q , senza fare conti, si trova la dimensione dell'immagine e se è diritta o capovolta (tutte cose utili negli esercizi olimpici).

Poiché sappiamo che l'immagine della punta si forma, basta disegnare due raggi provenienti dalla punta e vedere dove si intersecano, sapendo che anche gli altri passeranno per quel punto. In particolare, come in figura 10, sia per sorgenti reali che virtuali, useremo:

- un raggio parallelo all'asse ottico, che quando incontra la lente viene mandato nel fuoco, a destra o a sinistra della lente a seconda che sia convergente o divergente, scelto sempre nella direzione da cui realmente proviene la luce;
- uno passante per il centro della lente, che non viene deviato, perché incontra solo due superfici di separazione parallele e l'aria circostante ha sempre lo stesso indice di rifrazione.

⁷Non è ovvio: abbiamo dimostrato solo che i raggi provenienti da punti sull'asse ottico vengono focalizzati in un punto, qui stiamo dicendo che tutti i punti della sorgente hanno un'immagine puntiforme ben definita

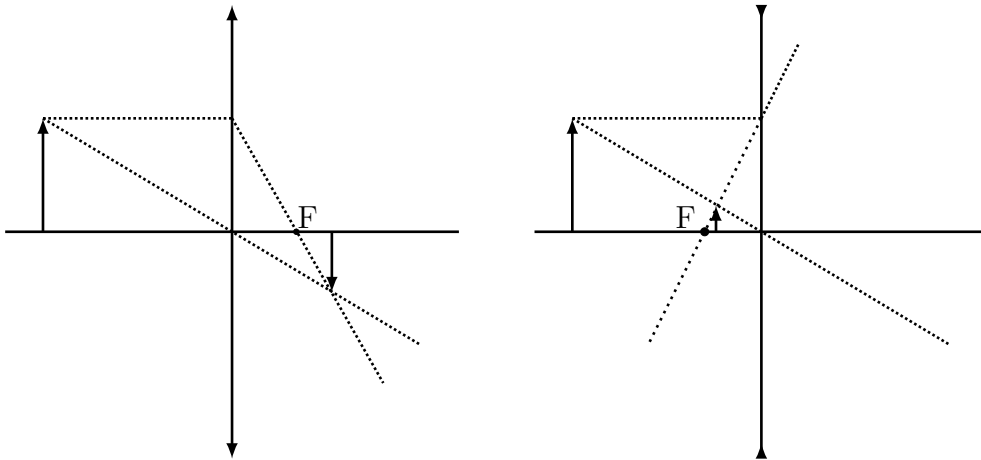


Figura 10: Immagini di una sorgente reale per una lente convergente (sinistra) e divergente (destra). Sono stati disegnati un raggio parallelo all'asse ottico e uno passante per il centro della lente.

9.2 Ingrandimento

Dalla figura 10, per similitudine tra triangoli, si vede che, in entrambi i casi $\frac{h'}{h} = \frac{|q|}{p}$, dove h e h' sono l'altezza rispettivamente della sorgente e dell'immagine. Questo vale in generale. Sostituendo q con la sua espressione in funzione di p e f , si ha $\left|\frac{q}{p}\right| = \left|\frac{f}{f-p}\right|$. Si può quindi definire l'ingrandimento come il rapporto

$$G = \frac{f}{p - f}$$

dove il segno è scelto in modo che G sia positivo se l'immagine è reale e capovolta, negativo se è virtuale e diritta⁸ (dal disegno dovrebbe essere chiaro che le immagini reali sono sempre capovolte e quelle virtuali sempre diritte, basta considerare il raggio passante per il centro della lente).

⁸Attenzione perché la convenzione non è fissa, alcuni definiscono G come $\frac{f}{p-f}$ e il segno di G ha significato opposto.

10 Specchi sferici

In questa dispensa si è preferito descrivere in dettaglio le lenti e lasciare gli specchi sferici come eventuale esercizio per il lettore, in quanto essi non richiedono di passare per un sistema ottico intermedio (come il diottro per le lenti). Ricordiamo però i punti fondamentali, che generalmente sono sufficienti a risolvere gli esercizi sugli specchi sferici.

Uno specchio sferico è una calotta sferica costituita di materiale riflettente. Lo specchio si chiama concavo se la luce proviene dalla parte della calotta interna alla sfera, convesso in caso contrario. Con dei calcoli analoghi a quelli fatti per il diottro sferico, si ottiene che gli specchi sferici sono buone approssimazioni di quelli parabolici (per i quali i raggi paralleli all'asse ottico convergono esattamente nel fuoco), purché il raggio della calotta sia piccolo rispetto a quello della sfera.

Anche in questo caso vale la legge dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

dove definiamo le variabili nel seguente modo:

- p è la posizione della sorgente, ed è positivo se è reale, negativo se è virtuale;
- q è la posizione dell'immagine, che è positiva per immagini reali (che si formano dalla stessa parte della sorgente), negativa per le immagini virtuali (dal lato opposto dello specchio);
- f è la distanza focale dello specchio e, detto R il raggio dello specchio, vale $\frac{R}{2}$ per gli specchi concavi, $-\frac{R}{2}$ per gli specchi convessi

L'ingrandimento è $G = -\frac{q}{p}$, modo che sia $G > 0$ per le immagini diritte, $G < 0$ per le immagini capovolte.

11 Cenni ai limiti dell'ottica geometrica

Come detto in precedenza, l'ottica geometrica è una teoria approssimata che non tiene conto della natura ondulatoria della luce. Finora abbiamo considerato fenomeni che possono essere spiegati da questa teoria, ma ce ne sono altri che, invece, non possono essere spiegati.

In particolare, questa teoria fallisce quando la lunghezza d'onda λ ha dimensioni paragonabili a quelle degli oggetti con cui la luce interagisce. Per

esempio se la luce incontra una fessura di dimensioni paragonabili a λ non si può trascurare la diffrazione; la generalizzazione della legge di Snell per indici di rifrazione che variano con continuità vale nel limite in cui n varia molto lentamente, ovvero la scala su cui si apprezza una variazione significativa di n è molto maggiore di λ . Altri fenomeni non spiegabili sono l'assorbimento e la dispersione della luce.

Un effetto interessante e meno noto della diffrazione è l'effetto tunnel elettromagnetico. Immaginiamo di porre tra due strati di un materiale con indice di rifrazione n_1 un sottile strato di un mezzo con indice di rifrazione $n_2 < n_1$, per esempio un sottile strato d'aria tra due lastre di vetro. Se un raggio incide sulla superficie di separazione tra uno degli strati di vetro e l'aria con angolo maggiore dell'angolo limite, ci si aspetta che la luce non passi dal vetro all'aria ma subisca riflessione totale. In realtà, se lo strato di aria ha spessore dell'ordine di λ , si osserva che la luce riesce ad attraversare lo strato d'aria a continua a propagarsi nel vetro.

Questo fenomeno è spiegabile solo risolvendo il problema con le equazioni di Maxwell: il problema sta nel fatto che i campi elettrici non sono esattamente nulli appena fuori dal primo strato di vetro, ma decadono esponenzialmente con lunghezza caratteristica che dipende da λ - mentre nei limiti dell'ottica geometrica, $\lambda = 0$, per cui il campo si annullerebbe immediatamente fuori dal materiale. Questo campo raggiunge la seconda interfaccia, si riflette e interferisce con il campo presente. Si trova che il risultato di questo processo è che viene trasportata energia oltre l'interfaccia, creando un raggio nel secondo strato vetro.

12 Introduzione all'ottica fisica

L'ottica geometrica è una teoria dai molti risvolti applicativi, ma presenta due aspetti che fanno riflettere. In primo luogo è una teoria empirica in un certo senso chiusa in sè stessa, che si è sviluppata nel corso dei secoli a puri fini ingegneristici e che dunque non possiede una modellizzazione che le permetta di svilupparsi ulteriormente; i fenomeni descrivibili con l'ottica geometrica, esclusi i classici casi standard descritti precedentemente, vengono spiegati semplicemente creando combinazioni di sistemi ottici sempre più complicati che producano tali effetti, senza approfondire ulteriormente che cosa sia effettivamente la luce e perchè si comporti in quel modo sulla base di una modellizzazione fisica più generale. In secondo luogo l'ottica geometrica ha un ambito di applicazione che si limita a quando gli oggetti che vanno ad interagire con la luce hanno dimensioni molto superiori alla lunghezza d'onda di quest'ultima. Ci interessa quindi sviluppare una teoria che allo stesso tempo spieghi il fenomeno della luce sulla base di principi più generali ed abbia come "legge limite", nell'approssimazione di lunghezza d'onda piccola nei confronti delle dimensioni tipiche del sistema ottico, l'ottica geometrica. Una teoria del genere è stata sviluppata a metà del diciannovesimo secolo da parte di J.C.Maxwell, il quale, dopo aver unificato con le sue equazioni le teorie dell'elettricità e del magnetismo, interpretò il fenomeno della luce come una perturbazione del campo elettromagnetico, in termini semplici come un'onda "di campo" che si propaga attraverso lo spazio. La teoria che si sviluppa a partire dalla modellizzazione della luce come onda elettromagnetica è detta, per contrapporla all'ottica geometrica, ottica fisica e risulta essere una descrizione accurata dei fenomeni anche quando il sistema ottico ha dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda della luce interagente (purchè questa non abbia energie eccessivamente elevate, il che renderebbe necessario l'intervento della meccanica quantistica). Questa lezione non si pone come obiettivo descrivere la natura del campo elettromagnetico e le leggi che lo regolano, ma fornire gli strumenti per comprendere i fenomeni ottici che possono venire presentati in ambito olimpico.

13 Onde elettromagnetiche

Le onde elettromagnetiche, per brevità d'ora in poi indicate con E.M., sono variazioni nel tempo del campo elettromagnetico che si propagano attraverso lo spazio vuoto ad una velocità data, la velocità della luce, indicata con c . Queste onde vengono generate in una determinata regione dello spazio, detta sorgente, che consideriamo puntiforme. Le onde più semplici da studiare,

nonchè le uniche che analizzeremo in questa sede, sono le così dette onde piane, la cui espressione lungo la direttrice con la sorgente è la seguente

$$\psi(x, t) = A \cos \left(\left(\frac{\omega}{c} \right) x - \omega t + \phi \right)$$

dove $\psi(x, t)$ indica l'entità della perturbazione del campo elettromagnetico nei punti a distanza x dalla sorgente al tempo t . L'argomento del coseno è detto fase dell'onda. A viene detta ampiezza dell'onda ed indica l'entità della massima deformazione che questa può causare; con ω si indica la pulsazione della luce prodotta, ovvero in una posizione fissata è il numero di radianti di cui varia la fase dell'onda in un secondo. Ogni onda piana è dunque definita in base alla sua pulsazione, alla sua ampiezza ed alla sua fase iniziale ϕ , che indica come è distribuita l'onda nello spazio all'istante di tempo zero. A partire da queste grandezze se ne possono definire altre di significato più intuitivo che descrivano allo stesso modo l'onda. La frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi}$ è il numero di picchi che passano per un punto in un secondo, mentre la lunghezza d'onda $\lambda = \frac{c}{f}$ è la distanza spaziale che intercorre tra due massimi dell'onda in un istante fissato. Sulla base di queste grandezze si può riscrivere l'onda come

$$\psi(x, t) = A \cos \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) x - (2\pi f t) + \phi \right)$$

In un'onda elettromagnetica a variare è il campo elettromagnetico ed ha una particolarità: i campi elettrico e magnetico possono variare solo nelle loro componenti sul piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda e tra di loro vale la relazione $\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \times \frac{\mathbf{E}}{c}$, dove \mathbf{e}_r è il versore che indica la direzione di propagazione dell'onda. Senza perdita di generalità possiamo quindi studiare il comportamento del solo campo elettrico, sapendo che il campo magnetico avrà esattamente lo stesso comportamento, a meno di un fattore di scala, con la condizione che sia sempre ortogonale sia al campo elettrico che alla direzione di propagazione. Supponendo quindi che si propaghi in direzione \mathbf{z} , un'onda elettromagnetica piana può essere espressa come variazione delle componenti trasversali di \mathbf{E}

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) z - (2\pi f t) + \phi_x \right)$$

$$E_y(z, t) = E_{y0} \cos \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) z - (2\pi f t) + \phi_y \right)$$

Per i prossimi paragrafi considereremo solo onde che si muovono su un piano in cui l'unica componente che varia del campo elettrico è quella perpendicolare al piano in questione.

14 Fenomeni ondulatori: interferenza

L'interferenza è un fenomeno non previsto dall'ottica geometrica che viene descritto molto bene dalla natura ondulatoria della luce. Un'onda può essere vista come un trasferimento di energia da un punto ad un altro nello spazio, quindi ha senso associarle un'energia o, più coerentemente, essendo l'onda non localizzata in un punto ma distribuita su tutto l'angolo solido, una densità di energia trasferita per unità di area detta intensità I dell'onda nel punto in questione. Ci interessa sapere che intensità si misura in un punto in presenza di più onde. Si potrebbe pensare che l'intensità sia la somma delle intensità delle varie onde prese singolarmente, come se, invece di esserci un certo numero di raggi a trasportare energia, ce ne fosse una certa quantità proveniente dalle varie sorgenti, ciascuna delle quali contribuisce in maniera indipendente dalla presenza delle altre; questo in realtà non succede, ed è la prima evidenza dell'incompletezza dell'ottica geometrica. Prendiamo come esempio due sorgenti sull'asse y , una nell'origine ed una in $(0; D)$. Un principio alla base dell'elettromagnetismo è il principio di sovrapposizione lineare, che nel nostro caso si traduce nel fatto che se ho più sorgenti di onde E-M allora il campo in un punto è la somma dei campi delle onde prese singolarmente; dunque nel caso in questione ottengo

$$\psi(x, y, t) = \psi_1(x, y, t) + \psi_2(x, y, t)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = & E_1 \cos\left(-\omega_1 t + \phi_1 + \frac{2\pi}{\lambda_1} \sqrt{x^2 + y^2}\right) + \\ & + E_2 \cos\left(-\omega_2 t + \phi_2 + \frac{2\pi}{\lambda_2} \sqrt{x^2 + (y - D)^2}\right) \end{aligned}$$

Per semplicità di notazione e di formule, si assumerà che $\lambda_1 = \lambda_2$, ma è bene sottolineare che il ragionamento è generale e vale per un numero qualsiasi di sorgenti di onde E-M arbitrarie. Nel caso in questione si ha

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = & E_1 \cos\left(-\omega t + \phi_1 + \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{x^2 + y^2}\right) + \\ & + E_2 \cos\left(-\omega t + \phi_2 + \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{x^2 + (y - D)^2}\right) \end{aligned}$$

Definisco la differenza di fase tra le onde

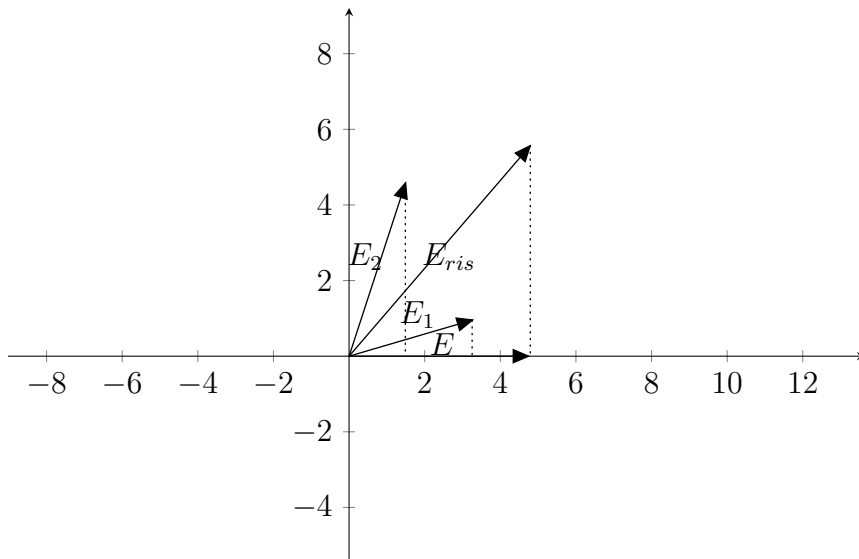
$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{x^2 + (y - D)^2}$$

e prendo la fase della prima onda in modo che $\phi_1 = -\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, dove (x_0, y_0) è il punto dove vogliamo misurare l'intensità dell'onda risultante. Questo procedimento equivale a decidere quale istante usare come zero della scala dei tempi, cosa che è sempre lecito fare. In questo modo posso scrivere

$$\psi(x_0, y_0, t) = E_1 \cos(-\omega t) + E_2 \cos(-\omega t + \Delta\phi)$$

Questa somma di coseni può essere vista in maniera intuitiva come un'altra cosinusoide. Immaginiamo che i due addendi siano le proiezioni lungo l'asse delle ascisse di vettori che ruotano in moto uniforme sul piano con velocità angolare $-\omega$ separati da un angolo $\Delta\phi$. I moduli dei vettori saranno proprio E_1 e E_2 , mentre l'ampiezza dell'onda risultante nel punto è appunto il modulo della somma di questi due vettori, che pure ruoterà nel piano con velocità angolare uniforme ω . Applicando il teorema del coseno si ha che il modulo della risultante è

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 \cos(\Delta\phi) E_1 E_2 \quad (17)$$



A noi però più che l'ampiezza dell'onda interessa la sua intensità, che le leggi dell'elettromagnetismo ci dicono essere proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda; non essendo utile in questa sede considerare la costante di proporzionalità, identificheremo l'intensità proprio come il quadrato dell'ampiezza $I = E^2$. Osservando l'equazione 17 si ha che, come indicato in precedenza, l'intensità dell'onda risultante non è ovunque la somma delle

intensità delle singole onde, ma in alcuni punti è maggiore, in alcuni minore, a seconda della differenza di fase che intercorre tra varie onde. È proprio quel termine aggiuntivo che genera il fenomeno dell'interferenza.

Cosa si può osservare in pratica? Se abbiamo le due sorgenti in questione e vediamo come viene illuminato uno schermo, possiamo vedere che si vanno a formare regioni alternate più scure e più chiare a seconda che la differenza di fase tra le onde porti ad un coseno positivo o negativo. Si può dunque pensare che la presenza di più sorgenti in un certo senso renda alcuni punti dello spazio più adatti di altri a farci passare energia. Una domanda potrebbe sorgere spontanea: perchè non vediamo allora tutto a bande chiare e scure? La ragione è che nella realtà la luce ha lunghezze d'onda molto piccole e ci sono tante sorgenti orientate in maniera differente che generano onde di frequenze diverse tra loro tanto che osservare l'effetto globale dell'interferenza tra queste onde richiederebbe una risoluzione⁹ sia spaziale che temporale da parte del nostro occhio di vari ordini di grandezza superiore a quella che possediamo; quindi possiamo semplicemente trascurare l'effetto dell'interferenza e definire una sorta di intensità media sullo spazio e sul tempo, che è quella che effettivamente percepiamo e che in genere è rilevante per i nostri semplici esperimenti quotidiani nel caso in cui la sorgente delle onde sia, per esempio, un corpo caldo, una lampada od il sole, che sono oggetti il cui comportamento è descritto dal mondo caotico della termodinamica. In questi casi ha senso trascurare completamente l'interferenza ed affidarsi ai principi su cui è basata l'ottica geometrica per studiare i fenomeni, almeno in prima approssimazione.

14.1 Esperimento di Young

Vediamo ora un esempio. Definisco schermo, come ci si può aspettare a partire dall'esperienza comune, un oggetto tale che se investito da un'onda elettromagnetica non si fa attraversare, come un muro, un'ombrellone da spiaggia o voi stessi quando siete sotto il sole. In queste dispense non indagheremo su che fenomeno si basi questa proprietà di impenetrabilità degli schermi. Immaginiamo di avere due schermi piani paralleli di spessore trascurabile, l'uno dei quali ha due fenditure rettilinee parallele di larghezza paragonabile a quella della lunghezza d'onda utilizzata. Assumiamo che gli schermi siano molto distanti l'uno dall'altro in termini di lunghezza d'onda della luce e della distanza tra le due fenditure e che lo schermo con le fenditure venga investito da luce parallela alla normale agli schermi, di lunghezza d'onda λ . La domanda è: cosa vediamo sul secondo schermo? Ci saranno zone più

⁹ovvero la capacità di distinguere come diverse due sorgenti luminose molto vicine o di rendersi conto della loro variazione temporale

chiare o più scure? Cerchiamo di risolvere il problema sulla base di quello che abbiamo visto nel paragrafo precedente. Prima di utilizzare i risultati che abbiamo trovato sull'interferenza, dobbiamo però far presente una cosa. In questo problema non è veramente ben definito quali sono le sorgenti della luce. Un principio matematico generale sulle onde, il principio di Huygens, asserisce che per studiare l'evoluzione di un'onda nel tempo si può istantaneamente considerare ogni punto del fronte d'onda come una sorgente e sovrapporne gli effetti. Sembra una cosa molto astratta e di difficile comprensione, ma nel nostro caso specifico si traduce in un fatto molto semplice: le uniche sorgenti di cui dobbiamo tenere conto sono i punti del fronte d'onda che non incontrano il primo schermo, quindi quelli all'interno delle fenditure. Viste le dimensioni delle fenditure in termini di λ , lavorando su un piano perpendicolare ai due schermi possiamo considerare queste sorgenti puntiformi. Ci siamo ridotti così ad un problema che con gli strumenti visti prima possiamo risolvere. Essendo gli schermi molto lontani in termini di distanza tra le due fenditure, si ha che possiamo considerare paralleli i percorsi che portano dalle due fenditure allo stesso punto dello schermo opposto. La differenza di cammino ottico tra le onde prodotte dalle due sorgenti è

$$\Delta l = d \sin(\theta)$$

con d distanza tra le fenditure e θ angolo che identifica il punto dello schermo opposto (come scritto prima, lavoriamo solo sul piano, quindi in particolare su quello definito dalla normale ai due schermi e la normale alle due fenditure giacente sul primo schermo). La differenza di fase tra le due onde è quindi

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda} \approx \frac{2\pi d\theta}{\lambda}$$

dove per l'ultima relazione si è usata l'approssimazione al primo ordine $\sin(\theta) \approx \theta$, lecita essendo gli schermi molto distanti a patto di non osservare troppo lontano dall'asse del sistema. Data la differenza di fase, possiamo trovare l'intensità in ogni punto dello schermo, dando per noto che l'ampiezza delle due onde sia la stessa perchè provengono da una stessa onda che investe il sistema

$$I = 2A^2 + 2A^2 \cos\left(\frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda}\right) = 4A^2 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}\right)$$

In base all'argomento del coseno abbiamo individuato quindi zone chiare e scure che si alternano in maniera simmetrica rispetto all'asse del sistema e possiamo anche trovare gli angoli dei massimi e dei minimi dell'intensità luminosa

$$\sin(\theta_{max,m}) = \frac{m\lambda}{d} \quad m \in \mathbb{Z}$$

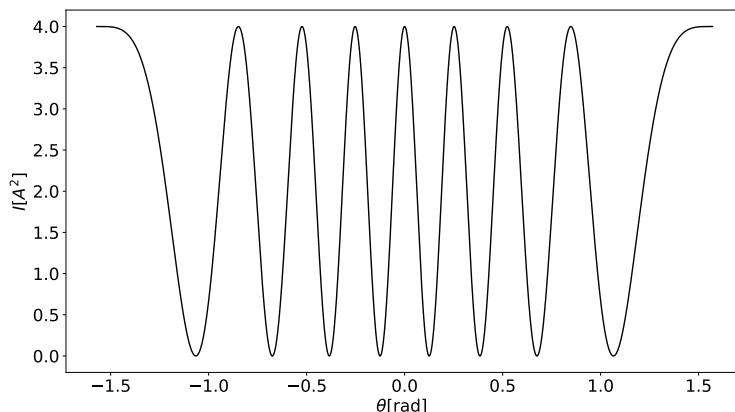


Figura 11: intensità luminosa misurata in unità di ampiezza quadra in funzione dell'angolo θ quando $d = 4\lambda$

$$\sin(\theta_{min,k}) = \frac{(k + \frac{1}{2})\lambda}{d} \quad k \in \mathbb{Z}$$

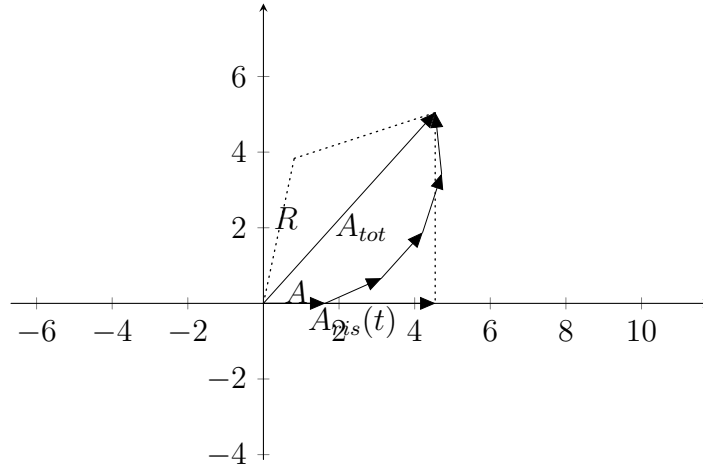
Attenzione! Non tutte le relazioni trovate per i massimi ed i minimi hanno senso: bisogna controllare che siano compatibili con l'immagine della funzione seno, ovvero che $-1 \leq \frac{(k+1/2)\lambda}{d} \leq 1$ ed allo stesso modo $-1 \leq \frac{m\lambda}{d} \leq 1$.

14.2 Young, ma con N fenditure

Studiamo ora un caso più complicato: il sistema è lo stesso dell'esperimento di Young, ma stavolta abbiamo N fenditure equispaziate a distanza d l'una dall'altra. Vogliamo ancora una volta studiare l'intensità della luce nei vari punti dello schermo. Come prima, per il principio di Huygens possiamo considerare come sorgenti le sole N fenditure. Su un punto dello schermo si ha che le onde provenienti dalle varie sorgenti, essendo queste equispaziate e rimanendo sempre nell'approssimazione di distanza tra gli schermi molto grande, hanno uno sfasamento reciproco costante:

$$\begin{aligned} \psi_1(y_0, t) &= A \cos(-\omega t) \\ \psi_2(y_0, t) &= A \cos(-\omega t + \phi_{y_0}) \\ &\dots \\ \psi_n(y_0, t) &= A \cos(-\omega t + (N-1)\phi_{y_0}) \\ \psi_{ris}(y_0, t) &= A \sum_{i=0}^{N-1} \left(\cos(-\omega t + i\phi_{y_0}) \right) \end{aligned}$$

dove con ψ_i si indica l'onda generata dalla sorgente i -esima.



Come fatto precedentemente, possiamo trovare l'ampiezza risultante considerando quella sommatoria come una somma di vettori che ruotano su un piano a velocità angolare $-\omega$. Se si va a fare un disegno, come in figura, si vede che i vettori vanno a formare i lati di parte di un poligono inscritto in una circonferenza di raggio R ; sapendo che i vettori hanno tutti la stessa lunghezza A e che l'angolo ϕ_{y_0} tra uno ed il successivo è costante, abbiamo che

$$A = 2R \sin\left(\frac{\phi_{y_0}}{2}\right)$$

e che la lunghezza del vettore che congiunge l'origine con la punta dell'ultimo vettore è

$$A_{ris} = 2R \sin\left(\frac{n\phi_{y_0}}{2}\right) = A \frac{\sin\left(\frac{N\phi_{y_0}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_{y_0}}{2}\right)}$$

Di conseguenza l'intensità risultante è

$$I = A_{ris}^2 = A^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{N\phi_{y_0}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_{y_0}}{2}\right)} \right)^2$$

Una pratica utile per controllare se si ha fatto bene i conti è controllare i casi banali o già noti. Il caso $N = 0$ dà, come ci aspettiamo, intensità nulla ovunque, come il caso $N = 1$, che dà intensità costante su tutto lo schermo e pari ad A^2 . Anche il caso $N = 2$ è noto e, come calcolato precedentemente, risulta essere $I = 4A^2 \cos^2\left(\frac{\phi_{y_0}}{2}\right)$, in accordo con quanto appena trovato.

Studiamo ora il caso generico: lo sfasamento risulta essere, con lo stesso ragionamento di prima $\phi_{y_0} = 2\pi \frac{d \sin(\theta_{y_0})}{\lambda}$. Essendo i seni funzioni periodiche, si ha che anche l'intensità è una funzione periodica in ϕ_{y_0} , di periodo 2π ; ci interessa quindi studiare il comportamento dell'intensità solo su un periodo, per convenzione $[0, 2\pi[$. Essendo l'intensità sempre positiva, i suoi minimi sul periodo, corrispondenti alle regioni scure dello schermo, coincidono con i suoi zeri; in base alle analisi fatte non è detto che non ci siano ulteriori minimi locali ed io non li cercherò in quanto lo studio degli zeri della derivata dell'intensità rispetto a ϕ non è banale, ma è una cosa che si può verificare numericamente. Nel disegno in figura questi zeri corrispondono a quando i vettori si richiudono su se stessi formando delle figure chiuse. Di primo acchito si potrebbe dire che questi minimi devono quindi corrispondere agli zeri di $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)$, il che è vero, ma con un'accortezza: in $\phi = 0$ ho che sia numeratore che denominatore vanno a zero, ma per un noto limite notevole si ha che quel rapporto tende a N , non a zero. Si ha quindi, come ci si aspetta, che al centro dello schermo ci sia un massimo, non un minimo, per di più di larghezza doppia rispetto a quella degli altri massimi. L'intensità della luce in quel punto è anche l'intensità massima ottenibile:

$$I_{maxcentr} = A^2 N^2$$

Le fasce scure corrispondono a tutti gli altri zeri di $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)$, in quanto in tutti questi punti il denominatore dell'intensità non è nullo. questi punti corrispondono a

$$\phi_{min_i} = \frac{2i\pi}{N} \quad i = 1, \dots, (N - 1)$$

che corrispondono a posizioni angolari sullo schermo

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\theta_{imin}) = \frac{2i\pi}{N}$$

$$\sin(\theta_{imin}) = \frac{i\lambda}{Nd} \quad i = 1, \dots, (N - 1)$$

Trovare i massimi dell'intensità diversi da quello centrale o da sue ripetizioni periodiche presenta le stesse difficoltà di trovare eventuali minimi locali diversi dagli zeri, ma sappiamo che esistono per un noto teorema di analisi. Il massimo che possiamo fare in questa sede è ipotizzare dove essi si trovano per N molto grande. In questo caso infatti si ha che il numeratore varia molto più velocemente del denominatore e quindi possiamo supporre che i massimi di I siano ben approssimati dai punti di massimo di $\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)$, ovvero da

$$\phi_{maxj} = (2i + 1) \frac{\pi}{N} \quad j = 1, \dots, (N - 2)$$

dove j può variare solo tra questi valori in quanto si verifica numericamente che non c'è un massimo tra il massimo centrale e il primo zero dell'intensità, come mostrato in figura. Finora abbiamo studiato l'intensità come funzione matematica, senza veramente pensare a se quello che abbiamo trovato abbia fisicamente senso. In particolare ha veramente senso studiare l'intensità facendo variare ϕ su tutto \mathbb{R} ? La risposta è no, e deriva dalla seguente relazione che abbiamo evidenziato in precedenza tra lo sfasamento relativo delle sorgenti e l'angolo che definisce il punto sullo schermo $\phi = 2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda}$ che implica

$$\sin(\theta) = \frac{\phi \lambda}{2\pi d}$$

Affinchè questa equazione abbia senso, essendo un seno sempre compreso tra -1 e 1, il termine a destra deve essere anch'esso limitato nello stesso range, il che si traduce in una condizione sul dominio di ϕ :

$$-\frac{2\pi d}{\lambda} \leq \phi \leq \frac{2\pi d}{\lambda}$$

Quindi noi sullo schermo in realtà vediamo solamente punti corrispondenti a

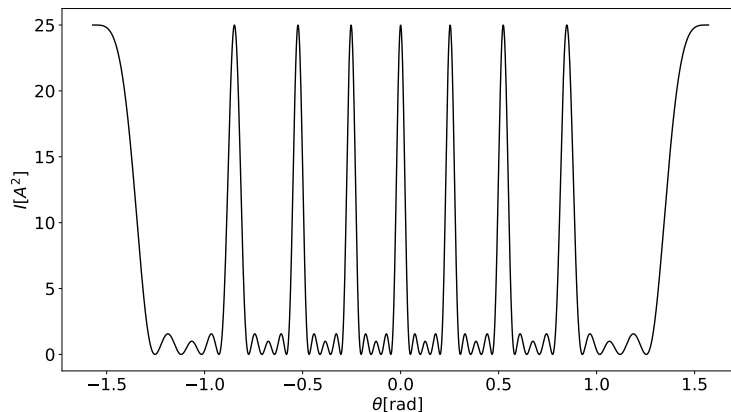


Figura 12: intensità luminosa misurata in unità di ampiezza quadra in funzione dell'angolo θ quando $d = 4\lambda$ e $N = 5$

sfasamenti inclusi in quell'intervallo, il che implica che, a seconda del rapporto tra la lunghezza d'onda della luce e la distanza relativa tra le fenditure posso vedere un numero maggiore o minore di fasce chiare e scure sullo schermo; in particolare se $\frac{\lambda}{d} > 1$ non vedo nessun'altra zona con intensità pari a quella del massimo centrale, perchè il dominio di ϕ è minore di due volte il periodo dell'intensità.

14.3 Diffrazione

In base a quello che abbiamo visto ci potremmo chiedere cosa succede se invece di esserci fenditure puntiformi sullo schermo, ci fosse una fenditura estesa di larghezza D ; il fenomeno risultante prende il nome di diffrazione della luce. Modellizziamo la cosa passando al limite del caso discusso precedentemente per il numero di fenditure puntiformi che va ad infinito e la loro distanza reciproca va a zero, mantenendo il prodotto $Nd = D$. Passando al limite l'equazione che avevamo trovato per l'intensità si ha

$$I_{ris} = 4I_{cent} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)}{\Phi} \right)^2$$

dove si è indicato con $\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} N\phi$ e $I_{centr} = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 A^2$ limite dell'intensità al centro del fascio e si è usato il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = x$. La relazione tra Φ e θ è

$$\sin(\theta) = \lim \frac{\Phi\lambda}{dN2\pi} = \frac{\Phi\lambda}{2\pi D}$$

Come nel caso di prima, i minimi sono semplici da trovare e corrispondono agli zeri del seno, quindi si trovano a

$$\begin{aligned} \Phi_{min} &= \pm 2n\pi \quad n \in \mathbb{N}^+ \\ \sin(\theta_{min}) &= \pm n \frac{\lambda}{D} \quad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

Cosa succede se le dimensioni della fenditura sono molto maggiori della lunghezza d'onda della luce? Per angoli θ piccoli si ha che la distanza angolare tra due bande scure diventa sempre minore, finchè le stesse bande scure non si distinguono più tra loro e con i massimi tra loro presenti, mentre per angoli θ maggiori lo smorzamento dell'intensità dovuto al denominatore predomina. Al nostro occhio, che non ha un'alta risoluzione spaziale, il tutto appare come se la luce non presentasse diffrazione, sempre rimanendo nel limite che la distanza tra gli schermi sia molto maggiore dell'ampiezza della fenditura. Qui per angoli θ piccoli intendo per i punti che appartengono alla proiezione della fenditura sul secondo schermo. In prima approssimazione quindi possiamo ritrovare quello che ci aspettiamo dall'esperienza comune: sullo schermo appare l'immagine luminosa della fenditura.

14.4 Schermi opachi

Vediamo ora a titolo di esempio che cosa succede se veniamo meno ad un'altra ipotesi: gli schermi ora si trovano a distanza L finita, non per

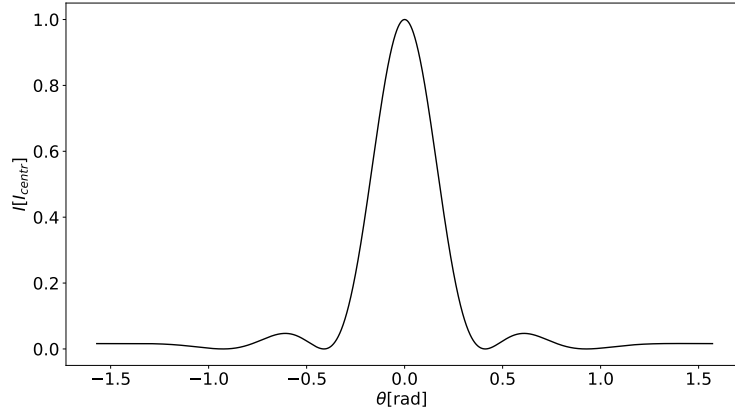


Figura 13: intensità luminosa misurata in unità di I_{centr} in funzione dell'angolo θ quando $D = 5\lambda$

forza incompatibile con le dimensioni della fenditura, ma molto grande in termini di lunghezza d'onda della luce usata. Ci interessa, come prima, calcolare l'intensità luminosa su un punto P dello schermo. Come prima modellizziamo la fenditura come un segmento continuo di sorgenti luminose infinitesime puntiformi. Dato che l'intensità di un'onda che si propaga in maniera uniforme in tutte le direzioni dello spazio generata da una sorgente puntiforme varia come l'inverso del quadrato della distanza dalla sorgente, le sorgenti infinitesime molto lontane dalla proiezione di P contribuiscono in maniera trascurabile, quindi ha senso usare l'approssimazione parassiale che avete già visto in ottica geometrica. Sia y la distanza della sorgente infinitesima dalla proiezione di P sul primo schermo. In base all'approssimazione parassiale possiamo dire quindi che la differenza di cammino ottico tra la sorgente in y e la sorgente sulla proiezione di P , rispetto alla quale misuriamo tutte le fasi, è

$$\Delta l(y) = \frac{y^2}{2L}$$

$$\phi(y) = \frac{\pi y^2}{L\lambda}$$

A differenza di prima vediamo che la fase non varia linearmente con la distanza tra le sorgenti, ma come il quadrato della distanza tra la sorgente e l'asse congiungente il punto dove stiamo misurando l'intensità e la sua proiezione sul primo piano. Questa cosa va a coincidere con il nostro senso fisico perchè se la fenditura è abbastanza estesa, di fatto si può considerare il sistema come perfettamente simmetrico attorno a quell'asse, quindi ha senso che le fasi siano

regolate da una funzione pari e la funzione pari più semplice è la parabola. Si può costruire una soluzione geometrica approssimata con lo stesso trucco che abbiamo usato per le N fenditure con la poligonale: considerando la fenditura come un numero finito di sorgenti equispaziate con fase relativa che varia quadraticamente si può costruire una poligonale che approssima la soluzione reale. Il passaggio al limite continuo di questa costruzione è difficile da ottenere, ma è noto alla matematica ed è detto Spirale di Cornu o Clotoide. In maniera analoga al discorso con la poligonale, presi i punti sulla

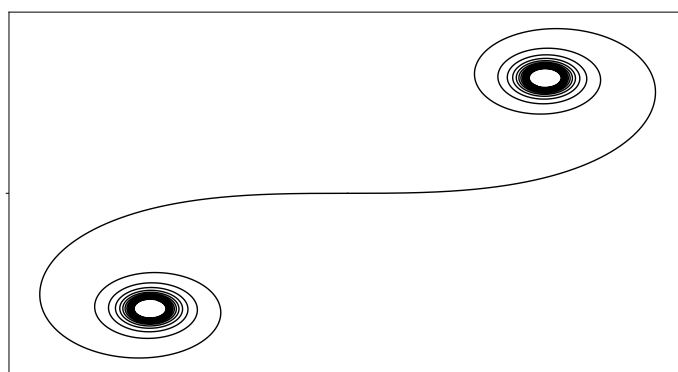


Figura 14: Spirale di Cornu o Clotoide

clotoide corrispondenti alle posizioni delle estremità della fenditura, il modulo quadro del segmento che li ha come estremi è l'intensità della luce nel punto P . Verifichiamo il caso banale: se la fenditura è infinitamente estesa, l'intensità luminosa su tutti i punti dello schermo è costante, come ci aspettiamo, perchè costante è la distanza tra i due "estremi" della clotoide. Possiamo anche verificare la coerenza con l'approssimazione parassiale effettuata: muoversi varie lunghezze d'onda fuori asse corrisponde a considerare sorgenti che lungo la clotoide corrispondono a punti che si addensano attorno ai "nodi" ed i cui contributi in media si annullano a vicenda, dunque trascurarne il contributo è una scelta coerente. Questa modellizzazione ci permette anche di studiare come si comporta l'intensità luminosa in punti sullo schermo la cui proiezione si trova sul bordo della fenditura, ovvero come sono fatti quelli che comunemente considereremmo i bordi dell'ombra dello schermo. Come ci si può aspettare, l'intensità luminosa allontanandosi dalla fenditura diminuisce bruscamente al bordo per poi tendere asintoticamente a zero, cosa di cui ci si può rendere conto ancora una volta osservando la clotoide e rendendosi conto che l'andamento dell'intensità va a corrispondere con quello della distanza

tra un punto della clotoide ed il nodo destro man mano che si percorre la curva verso quell'estremo; muovendosi invece dall'estremità della fenditura verso il suo interno, come ci aspettiamo, vediamo dei residui di diffrazione, individuabili dato che percorrendo il ramo sinistro della clotoide verso il nodo sinistro la distanza dal nodo destro ha un andamento oscillatorio.

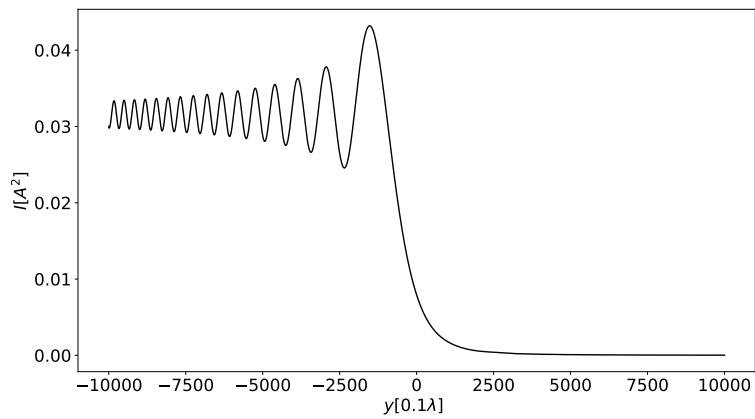


Figura 15: Andamento dell'intensità luminosa attorno al bordo dell'ombra della fenditura; per chi fosse interessato a riprodurre la simulazione, è stata modellizzata come 100000 sorgenti puntiformi equispaziate a 0.1λ di ampiezza $0.0001A$ con $\frac{\pi}{D} = 10^{-4}\lambda^{-1}$.

Esercizi

I Immagini

Data una lente convergente con lunghezza focale fissata f , dire, in funzione della posizione della sorgente, quando l'immagine è virtuale e quando è reale, quando è diritta e quando è capovolta, quando è ingrandita e quando è rimpicciolita.

Fare la stessa cosa per una lente convergente e per entrambi i tipi di specchi sferici (concavo e convesso).

II Specchio piano

Una persona di altezza h si guarda allo specchio, in piedi. Qual è la minima altezza dello specchio perché possa vedere la sua immagine completa?

III Gara di primo livello, olifis 2019 - modificato

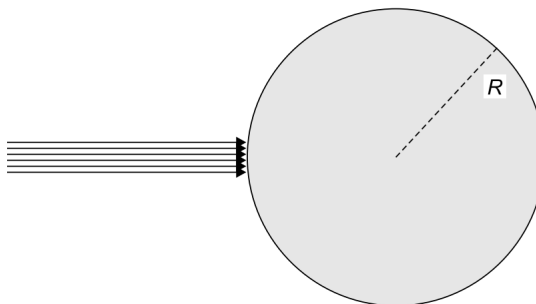
Si pone una sorgente davanti a una lente convergente di vetro crown ($n \simeq 1.52$) a distanza leggermente minore della distanza focale f . L'immagine prodotta è reale o virtuale? Nel caso sia virtuale, si vuole ottenere un'immagine reale mantenendo l'oggetto fermo e sostituendo la lente con una di forma identica, ma composta di un materiale diverso, posta nella stessa posizione della prima lente. È possibile? Come deve essere l'indice di rifrazione della nuova lente rispetto a quello del vetro crown?

IV Legge di Gladstone-Dale

La legge di Gladstone-Dale è una legge empirica che afferma che, detto n l'indice di rifrazione di un materiale e ρ la sua densità, $n - 1$ è direttamente proporzionale a ρ . Supponendo che la legge valga anche per ghiaccio e acqua e sapendo che quando un iceberg galleggia sul mare, solo il 10% del suo volume emerge, calcolare l'indice di rifrazione del ghiaccio a partire dal quello dell'acqua.

V Senigallia 2000/1A

Un sottile fascio di raggio luminosi paralleli incide su una sfera trasparente di raggio R e indice di rifrazione n lungo la direzione di un diametro, come mostrato in figura. I raggi vengono focalizzati in uno stesso punto che può essere interno o esterno alla sfera stessa. Trovare per quali valori di n il fascio viene focalizzato esternamente alla sfera.



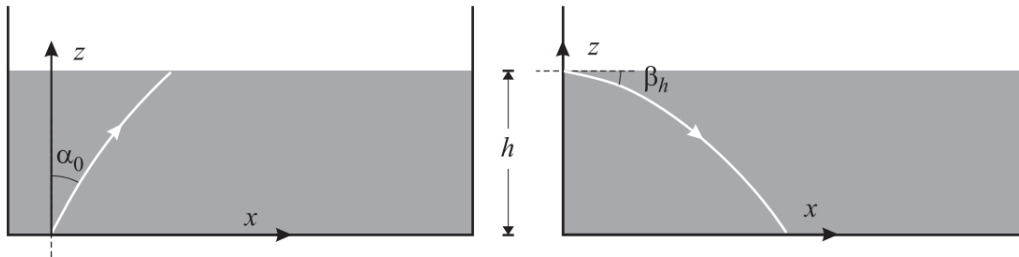
VI Senigallia 2015/1

Quando al di sopra di un piano orizzontale la temperatura varia con la quota, restando uniforme ad una stessa altezza dal suolo, anche l'indice di rifrazione dell'aria varia e ciò fa sì che i raggi luminosi siano deviati da un percorso rettilineo, dando luogo al ben noto fenomeno del miraggio.

Sarà studiato qui un fenomeno analogo. Si consideri un fascio di luce laser che entra in una vaschetta con le pareti piane e trasparenti. Nella vaschetta c'è una soluzione di acqua e zucchero in cui la concentrazione diminuisce progressivamente con l'altezza z : raggiunge il valore di saturazione sul fondo del recipiente ed è praticamente nulla al livello più alto.

L'indice di rifrazione n dipende dalla concentrazione e quindi varia anch'esso con la quota, ma la funzione $n(z)$ non è nota, non essendo nota la variazione della concentrazione al variare di z : si sa solo che sul fondo il valore di n è quello di una soluzione satura di acqua e zucchero ($n_0 = 1.46$) mentre al livello più alto, dove c'è la superficie orizzontale del liquido, $n_h = 1.33$. Al di sopra c'è aria, il cui indice di rifrazione può essere approssimato con $n_a = 1$.

Lo scopo di questo problema è quello di capire, adottando alcune ipotesi semplificative, il comportamento del fascio di luce.



Si inizia facendo entrare il fascio luminoso dal fondo della vaschetta, diretto dal basso verso l'alto (figura a sinistra). Sia α_0 l'angolo che il raggio forma con l'asse z appena entrato nel liquido. Si consideri un sistema cartesiano (x, z) nel piano verticale individuato dal raggio e dall'asse z , e si ponga l'origine nel punto d'ingresso (vedi figura a sinistra). A partire da questo punto il fascio luminoso devia seguendo una traiettoria non rettilinea.

1. Si trovi la deviazione angolare subita dal fascio nel liquido, dal fondo fino alla superficie superiore di separazione con l'aria, assumendo $\alpha_0 = 30^\circ$.
2. Si trovi qual è il valore minimo che deve avere l'angolo d'ingresso se si vuole che il fascio non emerga in aria alla superficie superiore ma subisca una riflessione totale.

Come si è visto, la traiettoria del fascio di luce nella soluzione non è rettilinea, tuttavia la deviazione dalla retta è piccola: per semplicità verrà approssimata con una parabola con asse verticale nel piano (x, z) , i cui parametri dipendono ovviamente dall'angolo di incidenza.

3. Si calcolino i parametri della parabola per una incidenza all'angolo limite calcolato al punto 2 supponendo che l'altezza del liquido nella vaschetta sia $h = 20$ cm. Si trovi inoltre la distanza, misurata sul fondo della vaschetta, dal punto di incidenza al punto in cui il raggio riflesso dalla superficie dell'acqua ritorna sul fondo della vaschetta (si supponga che la vaschetta sia sufficientemente lunga).
4. Si ricavi, dall'equazione della parabola derivata al punto 3, l'espressione dell'indice di rifrazione in funzione di z e lo si calcoli per $z = 5$ cm, $z = 10$ cm, $z = 15$ cm e si tracci un grafico approssimativo di $n(z)$.

Negli esempi considerati finora la deviazione dalla traiettoria rettilinea è molto piccola. In altre condizioni però può diventare molto consistente,

e il percorso del raggio può ricordare quello di un getto d'acqua sparato orizzontalmente.

Si supponga che il fascio entri nella vaschetta da una parete laterale, in un punto immediatamente sotto la superficie, quindi in $z = h$ e $x = 0$ (vedi figura a destra). Supponiamo che l'angolo di ingresso nel liquido sia $\beta_h = 2^\circ$ rispetto all'asse x , verso il basso, e che il raggio arrivi sul fondo prima di colpire la parete verticale opposta.

5. Si calcoli l'angolo β_0 che il raggio forma con l'asse x sul fondo e la deviazione angolare subita all'interno del liquido.
6. Supponendo che la traiettoria del raggio si possa approssimare con una parabola anche in questo caso di grande deviazione angolare, se ne calcolino i coefficienti. Si calcoli in quale punto il raggio arriva sul fondo.

VII Senigallia 1994/4

Guidando in una giornata assolata su un tratto piano e rettilineo di autostrada si nota che, in lontananza, il manto stradale appare "bagnato". Il fenomeno, noto da sempre a chi attraversa zone desertiche, viene detto miraggio ed è dovuto alla rifrazione atmosferica in presenza di un gradiente termico particolarmente accentuato nei bassi strati d'aria.

Si consideri uno strato d'aria piano e orizzontale, entro cui l'indice di rifrazione dipende solo dall'altezza. Sia α_i l'angolo di incidenza di un raggio di luce nello strato ed α_e l'angolo di emergenza dello stesso raggio dallo strato.

1. mostrare che, fissato α_i , l'angolo α_e dipende solo dai valori che l'indice di rifrazione assume sulle superfici superiore ed inferiore dello strato.

Per l'indice di rifrazione dell'aria si osserva sperimentalmente che $n - 1$ è proporzionale alla densità ρ

$$n - 1 = k\rho \text{ (legge di Gladstone \& Dale)}$$

e si misura $n = 1.00027$ in condizioni di pressione standard ad una temperatura di circa $27^\circ C$.

2. Mostrare che, per temperature prossime al valore dato, a pressione costante, l'indice di rifrazione dell'aria può essere approssimato dalla relazione $n = n_0(1 + \nu\Delta T)$. Verificare che $\nu = -0.9 \times 10^{-6} K^{-1}$.

L'automobilista, che ha gli occhi ad un'altezza $h_0 = 1.4$ m dal suolo, ha l'impressione di vedere la strada bagnata ad una distanza d_0 di circa 200 m davanti a sé. Con buona approssimazione le traiettorie dei raggi luminosi possono essere assimilate a parabole (con asse verticale e concavità rivolta verso l'alto).

3. Calcolare la lunghezza del tratto di strada effettivamente visibile da parte dell'automobilista.
4. Determinare l'indice di rifrazione all'altezza dell'occhio del guidatore $[n(h_0)]$ in funzione dei parametri dati e dell'indice di rifrazione al suolo $[n_0]$. Può essere utile tenere presente che $h_0 \ll d_0$.
5. Supponendo per semplicità che il gradiente termico dell'aria sia uniforme, cioè che la temperatura T dell'aria vari linearmente con l'altezza h secondo la legge $T(h) = T(0) + \theta h$, determinare il gradiente termico θ .

VIII IPhO 1984/1 - ridotto

Assumi di essere in un deserto ampio e piatto. Ad una distanza 250 m osservi quella che sembra una superficie d'acqua. Man mano che ti avvicini, però, l'acqua sembra allontanarsi in modo da restare a distanza costante. Assumi che i tuoi occhi si trovino ad una altezza di 1.60 m. L'indice di rifrazione dell'aria a 15°C e a pressione standard 101.3 kPa è 1.000 276. La temperatura dell'aria ad altezza superiore al metro è assunta costante e uguale a 30°C , la pressione è supposta standard e l'indice di rifrazione è tale che $n - 1$ è direttamente proporzionale alla densità dell'aria. Spiega il fenomeno (com'è possibile che la distanza apparente resti costante?) e trova la temperatura dell'aria vicino alla superficie del deserto.

IX IPhO 2021/1B

Questo problema consiste di due problemi indipendenti relativi all'interno dei pianeti. Gli effetti della curvatura della superficie dei pianeti può essere trascurata. Potrebbe essere utile usare la formula: $(1 + x)^\varepsilon \simeq 1 + \varepsilon x$, quando $|x| \ll 1$.

Parte B

Supponiamo che si verifichi un breve terremoto sulla superficie di un pianeta. Si può ipotizzare che le onde sismiche provengano da una sorgente

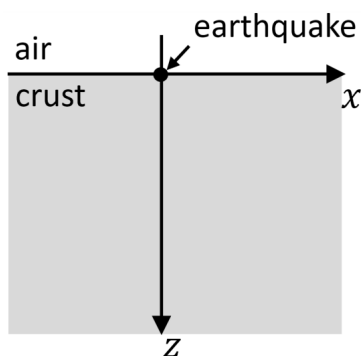


Figura 16: Sistema di coordinate utilizzato nella parte B

lineare situata a $z = x = 0$), dove x è la coordinata orizzontale e z è la profondità sotto la superficie (figura 16). Si può presumere che la sorgente dell'onda sismica sia molto più lunga di qualsiasi altra lunghezza considerata in questa domanda. A seguito del terremoto, viene emesso un flusso uniforme delle cosiddette onde longitudinali P lungo tutte le direzioni nel piano $x - z$ che ha componente positiva lungo l'asse z . Poiché la teoria delle onde in un solido è generalmente complicata, in questo problema trascuriamo tutte le altre onde emesse dal terremoto. La crosta del pianeta è stratificata in modo che il modulo della velocità v dell'onda P dipende dalla profondità z secondo la formula $v = v_0(1 + \frac{z}{z_0})$, dove v_0 è la velocità in superficie e z_0 è una costante positiva nota.

1. Consideriamo un singolo raggio emesso dal terremoto che forma un angolo iniziale $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ con l'asse z e si muove nel piano $x - z$. Qual è la coordinata orizzontale $x_1(\theta_0) \neq 0$ alla quale questo raggio può essere individuato sulla superficie del pianeta? È noto che il percorso del raggio è un arco di circonferenza. Scrivere la risposta nella forma $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ dove A e b sono costanti che devono essere determinate.

Se non sei riuscito a trovare A e b , nelle domande successive puoi usare il risultato $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ come fornito.

Supponiamo che l'energia totale, per unità di lunghezza della sorgente, rilasciata come onde P nella crosta durante il terremoto sia E . Supponiamo che le onde siano completamente assorbite quando raggiungono la superficie del pianeta provenendo dal basso.

2. Trova come la densità di energia per unità di area $\varepsilon(x)$ assorbita dalla superficie dipende dalla distanza lungo la superficie x . Disegna

l'andamento di $\varepsilon(x)$.

D'ora in poi, supponiamo che le onde siano invece completamente riflesse quando raggiungono la superficie. Immagina un dispositivo posizionato a $z = x = 0$ che ha la stessa geometria della sorgente sismica considerata in precedenza. Il dispositivo è in grado di emettere onde P in una distribuzione angolare liberamente scelta. Facciamo in modo che il dispositivo emetta un segnale con una gamma ristretta di angoli di emissione. In particolare, l'angolo iniziale che il segnale forma con la verticale appartiene all'intervallo $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, dove $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, $\delta\theta_0 \ll 1$ e $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.

3. A quale distanza x_{max} lungo la superficie dalla sorgente si trova il punto più lontano che non viene raggiunto dal segnale? Scrivere la risposta in funzione di θ_0 , $\delta\theta_0$ e delle altre costanti fornite sopra.

X IPhO 1995/2

La velocità di propagazione del suono nell'oceano varia con profondità, temperatura e salinità. Se z è l'asse verticale, in un modello in cui la velocità ha un minimo ad una certa profondità, la velocità del suono è $c = c_0 + b|z|$ (c_0 e b sono costanti), in cui si è fissato $z = 0$ in corrispondenza del minimo di c . La superficie dell'oceano è a $z = z_s$ e il fondale (assunto orizzontale) è a $z = -z_b$. Una sorgente è posta a $(x, z) = (0, 0)$ ed emette un "raggio sonoro" nel piano $x - z$ che forma un angolo θ_0 con l'asse z . A causa della variazione di c , il raggio verrà rifratto.

1. Mostrare che la traiettoria del raggio forma un arco di circonferenza di raggio $R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}$, con $0 < \theta_0 < \pi/2$
2. Trovare il più piccolo valore di θ_0 , per raggi diretti verso l'alto, per cui il raggio si trasmetta senza riflettersi sulla superficie dell'oceano, in funzione di z_s , c_0 e b
3. Un ricevitore sonoro è posizionato a $(x, z) = (X, 0)$. Trovare i valori di θ_0 per cui il raggio emesso dalla sorgente arrivi al ricevitore. Si assuma che z_s e z_b siano sufficientemente grandi da rimuovere la possibilità che il raggio si rifletta sulla superficie o sul fondale dell'oceano
4. Calcolare i quattro più piccoli valori di θ_0 che permettono al raggio di raggiungere il ricevitore nel caso in cui
 - $X = 10\,000$ m
 - $c_0 = 1500$ ms⁻¹

- $b = 0.02000 \text{ s}^{-1}$

5. Per il più *piccolo* valore di θ_0 trovato al punto 3, trovare il tempo impiegato dal raggio per andare dalla sorgente al ricevitore. Calcolarne il valore numerico usando i valori dati al punto 4. Può essere utile il seguente risultato:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \tan \frac{x}{2} + \text{cost}$$

Calcolare il tempo impiegato da un raggio che raggiunga il ricevitore muovendosi lungo $z = 0$. Se vengono emessi insieme, quale dei due raggi arriverà prima?

XI Senigallia 2017/3¹⁰

La cosiddetta lente gravitazionale è un fenomeno astronomico previsto dalla teoria della relatività generale, dovuto alla deflessione della luce proveniente da una sorgente lontana nell'attraversamento di un campo gravitazionale molto intenso. Tale fenomeno si può descrivere in forma semplificata col seguente diagramma nel quale, per chiarezza, gli angoli sono enormemente amplificati e il percorso curvilineo della luce è approssimato con due tratti rettilinei, come se la deviazione avvenisse in un solo punto. In figura H è la posizione dell'osservatore, θ l'angolo sotto cui si osserva l'anello di luce e δ l'angolo di deflessione dovuta al campo gravitazionale di A ; questo, espresso in termini della massa M della galassia A e della distanza $R = AD$, si scrive:

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 R} \quad (18)$$

1. Esprimere la distanza R in funzione della massa M e delle distanze d_A e d_B delle due galassie, indicate in figura (Ricordare la relazione tra gli angoli δ , θ e θ' e tenere presente che le misure di questi angoli sono sempre dell'ordine dei secondi d'arco).
2. Esprimere l'angolo di deflessione δ in funzione delle stesse grandezze.
3. Mostrare che la massa M della galassia-lente A può essere ricavata se sono note le distanze d_A e d_B e la misura angolare (θ) del raggio dell'anello di Einstein.

¹⁰Il testo è stato parzialmente modificato e l'immagine è stata presa dal testo originale

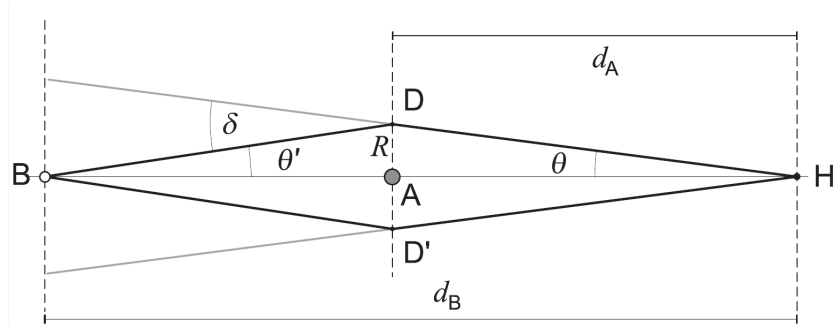


Figura 17: Diagramma della lente gravitazionale

4. Fissata la distanza d_A e posto $d_B = kd_A$, determinare per quale valore di k la misura angolare dell'anello visto da H è massima e trovare la corrispondente espressione di θ_{\max} .

Si supponga che la galassia A sia a forma di disco schiacciato e che sia su un piano perpendicolare alla linea di vista. Perché l'anello possa essere osservato occorre che la misura angolare del suo raggio sia abbastanza maggiore dell'apertura angolare sotto cui si osserva il raggio R_A della galassia A , ovvero che sia almeno $\theta > 2\frac{R_A}{d_A}$. Questo determina una relazione tra la distanza della galassia e la sua "compattezza", espressa in termini di densità superficiale $\sigma = \frac{M}{\pi R_A^2}$

5. Tenuto conto che la massima densità osservata per una galassia compatta è dell'ordine di $\sigma_0 = 200 \text{ kg m}^{-2}$, trovare la minima distanza d_A a cui una galassia compatta può generare un anello di Einstein che sia almeno il doppio delle dimensioni apparenti della galassia. Esprimere il risultato in megaparsec ($1 \text{ Mpc} = 3.08568 \times 10^{22} \text{ m}$).

Volendo esaminare in che senso si può parlare di lente gravitazionale si può confrontare l'andamento della deflessione δ in funzione di R , con l'analoga relazione per la deviazione prodotta da una sottile lente ottica convergente di focale f , in funzione della distanza R tra l'asse ottico e il punto di intersezione del raggio con la lente.

6. Determinare la funzione $\delta(R)$ per una lente ottica quando sorgente e immagine sono a distanze p e q dalla lente e gli angoli sono piccoli (ovvero per $p, q \gg R$).

Posto adesso $q = d_A$ e $p = d_B - d_A$, si consideri il cono formato dai raggi di luce che incidono sulla lente gravitazionale ad una distanza R dall'asse ottico.

7. Si dimostri che, limitatamente all'insieme dei raggi di questo cono, la lente gravitazionale equivale ad una lente ottica con una distanza focale F dipendente dal parametro R (oltre che dalle altre costanti) e si trovi l'espressione di $F(R)$. Si mostri con uno schizzo il differente comportamento di una lente gravitazionale rispetto ad una lente ottica, tracciando – in entrambi i casi – tre raggi relativi a tre coni con $R = r, 2r, 3r$.
8. Nel caso particolare in cui la galassia B possa essere considerata a distanza infinita, mostrare che per l'osservatore H , la luce di quella galassia appare provenire da una sorgente a forma di anello, posto a distanza D da H : determinare tale distanza in termini di d_A .

XII Doppietto di lenti

Si prendano due lenti sottili convergenti e si facciano coincidere i loro assi ottici. Si supponga che le lenti siano a distanza d e abbiano lunghezze focali pari a f_1 e f_2 . Si assuma inoltre che il sistema ottico sia equivalente a una lente (ovviamente con delle limitazioni, la sorgente non potrà trovarsi tra le due lenti). Trovare la lunghezza focale e la posizione della lente equivalente. Le formule trovate sono valide anche se le lenti iniziali non sono convergenti?

XIII Reticolo di diffrazione

Un reticolo di diffrazione non è altro che uno schermo con n fenditure per unità di lunghezza. Si consideri un sistema come l'esperimento di Young, dove un reticolo di diffrazione viene investito perpendicolarmente da una luce polarizzata linearmente parallelamente alle fenditure. Oltre il reticolo, a distanza molto grande rispetto alla lunghezza d'onda λ della luce utilizzata ed alle dimensioni del reticolo, c'è uno schermo. La larghezza del reticolo di diffrazione è d

1. trovare le posizioni angolari dei massimi principali (quelli d'intensità massima assoluta) e dei minimi sullo schermo.

Un reticolo di diffrazione può essere usato per separare la luce non monocromatica nelle varie onde di cui è composta in base alla loro frequenza. Infatti onde a frequenze diverse formano massimi sullo schermo in posizioni diverse.

Si definisce risoluzione del reticolo di diffrazione la sua capacità di distinguere due onde di lunghezza d'onda simile. Tale capacità è quantificata tramite il criterio di Rayleigh come $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ dove con $\Delta\lambda$ si intende la differenza di lunghezza d'onda che deve intercorrere tra λ e λ' in modo tale che l'onda con λ' assuma il primo massimo principale nel punto coincidente al minimo successivo al primo massimo principale dell'onda con λ

2. trovare la risoluzione di un reticolo di diffrazione, notando in particolare come non dipenda dalla lunghezza d'onda. Trovare la risoluzione anche nel caso in cui venisse definita con $\Delta\lambda$ riferita all' n -esimo massimo principale.

Si immagini ora che la luce investa il reticolo con un angolo di incidenza δ , ma sempre rimanendo nel piano perpendicolare alle fenditure.

3. trovare le posizioni angolari dei minimi e dei massimi principali sullo schermo

Si immagini ora di porre uno schermo anche dal lato del reticolo da cui questo viene investito dalla luce, sempre a grande distanza rispetto a λ ed alle dimensioni del reticolo.

4. descrivere qualitativamente e quantitativamente cosa ci si aspetta di vedere su questo schermo, sempre nel caso in cui l'incidenza della luce sul reticolo sia δ .

XIV Tempo di coerenza

Date due sorgenti puntiformi di luce nello spazio che emettono luce di pari intensità, ma a frequenze differenti ω_1 e ω_2 tali che $|\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_{1,2}}| \ll 1$ e dato un rivelatore di radiazione posto in un punto dello spazio equidistante dalle due sorgenti che ne misura l'intensità media, si definisce tempo di coerenza della radiazione il tempo scala in cui il valore letto dal rivelatore cambia significativamente. Si determini tale tempo.

XV Lunghezza di coerenza

Non esistono sorgenti di radiazione perfettamente monocromatica. Possiamo modellizzare una sorgente reale come due sorgenti puntiformi che emettono luce di pari intensità, ma a frequenze differenti ω_1 e ω_2 tali che $|\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_{1,2}}| \ll 1$ che si trovano nello stesso punto dello spazio. Utilizziamo questa sorgente per effettuare un esperimento di diffrazione a N fenditure; sapendo che lo schermo con le fenditure si trova ad una distanza L dalla sorgente, si

determini la scala della spaziatura tra le fenditure oltre la quale si ottengono risultati significativamente diversi rispetto al caso monocromatico.

XVI Michelson interferometer

L'interferometro di Michelson e Morley è diventato famoso presso il grande pubblico in tempi moderni in quanto è l'apparato con cui si riescono a rilevare le onde gravitazionali.

Il suo principio di funzionamento è il seguente: una sorgente monocromatica di luce (solitamente un LASER) emette un fascio di radiazione (che possiamo immaginare come un'onda piana) che viene diviso da un cosiddetto beam-splitter in due fasci (onde piane) identici che seguono percorsi differenti per poi essere fatte interferire su uno stesso rivelatore di intensità luminosa che assumiamo puntiforme. Uno dei due fasci percorre una distanza fissa L prima di investire il rivelatore, mentre il secondo compie un percorso di cui possiamo variare la lunghezza con una precisione altissima. Modellizzando la sorgente di radiazione come nell'esercizio precedente, si trovi un modo di determinare il tempo di coerenza della radiazione emessa.

XVII Fabry-Perot interferometer

Un interferometro di Fabry-Perot è composto da due specchi sottili piani paralleli semitrasparenti di riflettività R e trasmittività T distanti tra loro L . Questo sistema viene investito perpendicolarmente da un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda λ e intensità I . Si determini l'intensità della radiazione in uscita dal sistema (sia di quella riflessa che di quella trasmessa).

XVIII Spettrometro a echelle

Un prisma o un reticolo di diffrazione sono modi efficaci di scomporre la radiazione nelle sue componenti monocromatiche (invece di ottenere picchi distinti, i massimi principali delle varie lunghezze d'onda della luce bianca formeranno un arcobaleno sullo schermo). Hanno solo un problema: qualora voglia ottenere un'alta risoluzione in lunghezza d'onda mantenendo comunque un'ampio intervallo di frequenze analizzate si ha bisogno di rivelatori molto estesi.

- Si determini la larghezza dell'intervallo dei picchi del primo ordine associati alla radiazione visibile per un reticolo di diffrazione con tacche spaziate di $1\ \mu\text{m}$ distante $SI10\text{cm}$ dallo schermo di rivelazione.

- Si determinino dei vincoli sulla distanza tra le tacche del reticolo affinché l'intervallo dei picchi del prim'ordine per la radiazione visibile si sovrapponga con l'intervallo dei picchi dell' n -esimo ordine (sempre per la radiazione visibile)
- Si pensi ad un modo per aumentare la risoluzione in frequenza dell'apparato avendo a disposizione un ulteriore reticolo di diffrazione senza aumentarne la dimensione laterale.

XIX Effetto Doppler

Come tutti i fenomeni ondulatori, anche la luce presenta effetto Doppler: se un ricevitore si muove rispetto alla sorgente di radiazione, vedrà la luce ad una frequenza dipendente da tale moto relativo. Però a differenza del suono, che si propaga attraverso un mezzo (l'aria) il cui moto è ben definito rispetto a sorgente e osservatore, la luce si propaga anche nel vuoto! Ma come si definisce il movimento del vuoto rispetto all'osservatore o alla sorgente? Questa è una domanda a cui risponde la relatività speciale. Per quanto riguarda questo problema, basti sapere che l'osservatore nel vuoto si vede sempre immobile rispetto al mezzo attraverso cui passa la luce e vede la sorgente in moto rispetto a questo. Si ricavino, trascurando ogni altro effetto relativistico, le formule dell'effetto doppler per la luce.

XX Thermal Doppler broadening (Senigallia 2018) (complicato)

La luce di un laser non può essere mai rigorosamente monocromatica ma è sempre distribuita entro un piccolo intervallo di lunghezze d'onda, la cui ampiezza dipende da molti fattori. Questo problema prenderà in esame uno solo di questi, l'effetto Doppler classico, dovuto al moto di agitazione termica degli atomi che emettono la luce; altri effetti saranno del tutto ignorati. Si potrà dunque fare l'ipotesi che, se gli atomi fossero fermi, la luce emessa sarebbe rigorosamente monocromatica, con una lunghezza d'onda λ_0 . Si consideri un laser He-Ne, schematicamente rappresentato in figura; si supponga che il sistema si trovi all'equilibrio termodinamico alla temperatura di 300 K. La luce viene generata da atomi di neon che si trovano all'interno di una cavità ottica, la quale ha lo scopo di amplificare la radiazione che si propaga in un'unica direzione (quella di emissione del fascio). A causa delle diverse velocità degli atomi, la radiazione emessa da ciascun atomo viene vista da un osservatore esterno, per effetto Doppler, con una lunghezza d'onda leggermente diversa da quella emessa dagli altri atomi, cosicché l'effetto

complessivo è quello di un “allargamento” della riga spettrale attorno al valore $\lambda_0 = 632.816 \text{ nm}$. Si fissi un asse x nella direzione di osservazione della radiazione. Dalla teoria cinetica dei gas si ricava che la velocità quadratica media è

$$v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

dove k è la costante di Boltzmann, m la massa di una molecola e T la temperatura assoluta degli atomi del gas.

- Si ricavi il valore quadratico medio della componente v_x della velocità degli atomi di neon (si ricordi che il neon è monoatomico).

Per valutare l’allargamento della riga spettrale occorre conoscere la distribuzione della componente v_x della velocità degli atomi di neon. In un modello teorico molto semplificato si può assumere che questa sia distribuita uniformemente entro un intervallo compreso tra $-v_0$ e $+v_0$. Per “distribuzione di velocità” si intende una funzione $h(v)$ tale che $h(v)dv$ rappresenti la frazione di atomi con velocità compresa tra v e $v + dv$.

- Nel caso del modello semplificato descritto sopra, la distribuzione $h(v_x)$ ha un valore costante all’interno dell’intervallo $(-v_0; +v_0)$ e nulla fuori; si determini l’espressione di questa costante in funzione di v_0 .

Per una data distribuzione di velocità, il valore medio di una funzione $f(v)$ è dato dall’integrale $\langle f \rangle = \int f(v)h(v)dv$.

- Si determini l’ampiezza dell’intervallo di distribuzione delle velocità degli atomi, in modo tale che il valore quadratico medio di v_x sia uguale a quello trovato al punto 1.
- Calcolare l’ampiezza dell’intervallo di lunghezze d’onda emesse dal laser, secondo questo modello semplificato.

In un modello teorico un po’ più sofisticato, si può considerare che la componente v_x delle velocità degli atomi si distribuisca secondo la legge di Maxwell-Boltzmann

$$h(v_x) = h_0 \exp -\frac{mv_x^2}{2kT}$$

dove h_0 è un’opportuna costante.

- Ricavare analiticamente e disegnare schematicamente la funzione di distribuzione $I(\lambda)$ della luce emessa dal laser, cioè la funzione tale che $I(\lambda)d\lambda$ rappresenti la frazione di fotoni aventi lunghezza d’onda compresa tra λ e $\lambda + d\lambda$.

- Calcolare l'ampiezza dell'intervallo di lunghezze d'onda emesse dal laser, secondo questo modello. (Si intende la distanza in λ tra i punti per cui la distribuzione vale metà del massimo).

Riferimenti bibliografici

- [BLM21] Pietro Benotto, Antonio Lombardi, and Antonio Matteri. Ottica, 2021. Reperibile [qui](#).
- [FLS] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *La fisica di Feynman, vol. 1*. Zanichelli.
- [Tom18] Giovanni Maria Tomaselli. ottica geometrica, 2018. Reperibile [qui](#).