

Relatività avanzata

Bruno Bucciotti

Febbraio 2024

Sommario

Dando per noti i quadrivettori (posizione, velocità, quantità di moto) e le loro trasformazioni di Lorentz, tratteremo gli urti relativistici. Passeremo poi alle leggi di trasformazione del campo elettrico e magnetico, che sono unificati in relatività. Faremo infine cenni di relatività generale, cercando di avvicinare il lettore al principio di equivalenza e discutendo il redshift gravitazionale, anche intorno a un buco nero.

Indice

1	Richiami	2
2	Urti relativistici	3
2.1	Decadimento nel sistema fermo	4
2.2	Decadimento nel sistema del laboratorio	4
2.3	Urto nel sistema del CdM e del laboratorio	5
3	Campi elettromagnetici	5
3.1	Esempio col filo infinito	5
3.2	Parità del campo elettrico e magnetico	6
3.3	Trasformazioni in generale	7
4	Gravità e buchi neri	7
4.1	Moto uniformemente accelerato	8
4.2	Redshift relativistico	9
4.3	Redshift gravitazionale	9
5	Problemi	11

1 Richiami

La relatività (ristretta) si occupa di sistemi la cui velocità può essere una frazione significativa della velocità della luce (in questa lezione, $c = 1$). In questo caso le trasformazioni corrette sono quelle di Lorentz, secondo le quali il tempo trasforma da un sistema di riferimento ad un altro. Questa è una generalizzazione dell'idea che sotto rotazioni le tre coordinate di un vettore trasformano fra di loro; solo che ora il tempo non gioca più un ruolo passivo ma trasforma a sua volta. In relatività si parla quindi di *quadrivettori* anziché di semplici vettori (tridimensionali).

Il quadrivettore più importante è la quadriposizione (e il quadrispostamento)

$$x^\mu = (t, \vec{x}), \quad \delta x^\mu = (\delta t, \delta \vec{x}) \quad (1)$$

Si possono costruire invarianti semplicemente prendendo due quadrivettori e considerando

$$v_1^\mu = (v_1^t, \vec{v}_1), \quad v_2^\mu = (v_2^t, \vec{v}_2) \Rightarrow v_1^\mu v_{2,\mu} = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - v_1^t v_2^t \quad (2)$$

dove la notazione con l'indice in basso indica che va cambiato il segno alla parte tempo

$$v^\mu = (v^t, \vec{v}) \Rightarrow v_\mu = (-v^t, \vec{v}) \quad (3)$$

e si è adottata la convenzione di Einstein secondo cui si somma sugli indici (che rappresentano tempo e spazio) ripetuti.

Esiste quindi un invariante, detto tempo proprio, associato a un quadrispostamento δx^μ (reintroduciamo c per chiarezza):

$$\delta\tau^2 = \delta t^2 - \frac{1}{c^2} |\delta \vec{x}|^2 \quad (4)$$

che nel limite non-relativistico (formalmente $c \rightarrow \infty$ tenendo finiti $\delta t, \delta \vec{x}$) diventa $\delta\tau \simeq \delta t$.

Si definisce il fattore di Lorentz γ , che dipende dalla velocità come

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (5)$$

e che va da 1 (particelle ferme) a $+\infty$ (limite ultra-relativistico). Così

$$\delta\tau = \delta t \sqrt{1 - \frac{|\delta \vec{x}|^2}{\delta t^2}} = \frac{\delta t}{\gamma}, \quad \vec{v} = \frac{\delta \vec{x}}{\delta t} \quad (6)$$

Si definisce allora la quadrivelocità come

$$u^\mu = \frac{\delta x^\mu}{\delta\tau} = \left(\frac{\delta t}{\delta\tau}, \frac{\delta \vec{x}}{\delta\tau} \right) = (\gamma, \gamma \vec{v}) \quad (7)$$

La massa è un invariante, e il quadrimpulso (o, più propriamente, quadrimomento) è semplicemente

$$p^\mu = m u^\mu = (m\gamma, m\gamma \vec{v}) \quad (8)$$

Ispirandosi al limite nonrelativistico, conviene definire l'energia (cinetica) e l'impulso come

$$E = m\gamma, \quad \vec{p} = m\vec{v}\gamma \quad (9)$$

dove $m\gamma$ la chiamo energia cinetica, ma rispetto alla sua controparte nonrelativistica contiene anche un $+m$ addizionale. Da queste definizioni segue

$$E^2 - p^2 = m^2 \quad (10)$$

La seconda legge di Newton diventa

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (11)$$

dove generalmente la forza sarà o quella di Lorentz elettromagnetica, oppure (nel caso di forze meccaniche) sarà generalmente assegnata nel sistema di riferimento fermo rispetto alla particella.

Possiamo verificare che la variazione dell'energia nel tempo sia la potenza, che è sempre $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$:

$$\frac{dE^2}{dt} - \frac{dp^2}{dt} = 0 \Rightarrow 2E \frac{dE}{dt} = 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (12)$$

dove nel penultimo passaggio si è usato che $\vec{p} = E\vec{v}$. La corretta interpretazione di E è quindi di energia cinetica non solo per via del limite nonrelativistico, ma anche perché se la forza è conservativa

$$F = -\frac{dU}{dx} \quad (\vec{F} = -\vec{\nabla}U) \quad (13)$$

allora vale che $E + U$ si conserva nel tempo:

$$\frac{d(E + U)}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dU}{dt} = v_x F_x + \frac{dU}{dx} v_x = 0 \quad (14)$$

dove abbiamo ipotizzato il moto in una dimensione per semplicità, altrimenti si somma sulle varie direzioni.

2 Urti relativistici

Spesso si dice che è comodo lavorare con i quadrivettori perché trasformano in modo noto da un sistema di riferimento ad un altro, tuttavia la trasformazione rimane abbastanza complicata. Il punto principale di insistere con i quadrivettori è che diventa facile scrivere quantità invarianti (scalari).

Si conserva la somma del prodotto delle rispettive componenti di due quadrivettori (i.e. tempo con tempo e spazio con spazio), se il prodotto sul tempo è cambiato di segno.

Studieremo ora il decadimento di una particella massiva M in due particelle identiche più leggere m_1, m_2 , inizialmente nel sistema in cui la particella M è ferma (sistema 'fermo'). Dedurremo poi cosa accade nel sistema del laboratorio, in cui la particella M è vista muoversi con velocità \vec{V} . Il secondo problema sarà un urto elastico fra due particelle, prima nel sistema del centro di massa e poi in quello del laboratorio.

Otterremo i risultati nel sistema del laboratorio costruendo prima dei quadrivettori nel sistema fermo, e poi eventualmente costruendo invarianti da questi. In certi casi quest'ultimo passaggio semplifica molto i calcoli.

2.1 Decadimento nel sistema fermo

La pallina ferma di massa M va in due palline di massa m_1, m_2 . Quali sono energia e quantità di moto delle due palline? Possiamo imporre

$$\begin{cases} M = E_1 + E_2 \\ E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2 \end{cases} \quad (15)$$

che vengono dalla conservazione dell'energia e del modulo dell'impulso, rispettivamente. Da queste,

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad E_2 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} \quad (16)$$

In mancanza di una descrizione completa del sistema, non siamo in grado di predire in che direzione andranno le due particelle leggere, e diventa ragionevole parlare della probabilità di trovare i prodotti di decadimento lungo una certa direzione. Supponendo come esempio che la probabilità sia la stessa per ogni direzione (ovvero immaginiamo che la particella mostri perfetta simmetria sferica, e non abbia alcuna direzione preferenziale; controesempi possono essere sia corpi estesi non sferici, sia particelle elementari come i fotoni, che hanno una polarizzazione), allora

$$P(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{1}{4\pi} \, d|\cos \theta| \, d\phi \quad (17)$$

ovvero nell'angolo solido $\sin \theta \, d\theta \, d\phi$ c'è una probabilità indipendente da θ, ϕ di trovare la particella.

2.2 Decadimento nel sistema del laboratorio

Dobbiamo ora trasformare il quadrivettore impulso fra sistema fermo e sistema del laboratorio, che si muove a velocità $-\vec{V}$. Per prima cosa, osserviamo che conviene cercare di scrivere energia e impulso nel laboratorio in funzione di quelli del sistema fermo, così le quantità incognite vengono in funzione di quelle note. Chiamando Γ il fattore di Lorentz per la velocità V e denotando con θ_L, θ_0 l'angolo formato dall'impulso con \vec{V} , si ha (per una delle due particelle, mettendo pedice L per le quantità nel laboratorio e 0 per quelle nel sistema fermo)

$$E_L = \Gamma(p_0 \cos \theta_0 V + E_0) \quad (18)$$

$$p_L \cos \theta_L = \Gamma(p_0 \cos \theta_0 + \frac{V}{c^2} E_0) \quad (19)$$

Si noti che le quantità a destra sono completamente note, tranne per θ_0 che è una variabile libera. Se supponiamo di variarla, ci aspettiamo che cambino anche E_L, p_L, θ_L . In effetti si avrà

$$\begin{aligned} \delta E_L &= \Gamma p_0 V \delta \cos \theta_0 \\ \delta p_L \cos \theta_L + p_L \delta \cos \theta_L &= \Gamma p_0 \delta \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (20)$$

Dalla prima ricaviamo la distribuzione dell'energia delle particelle nel sistema del laboratorio, supposta nota la distribuzione angolare nel sistema fermo. Se assumiamo che quest'ultima sia uniforme,

$$\delta P_{\theta_0} = \frac{1}{2} \delta |\cos \theta_0| = \frac{1}{2\Gamma V p_0} \delta E_L = \delta P_{E_L} \quad (21)$$

dove per prima cosa scriviamo la probabilità di avere particelle ad angolo θ_0 , e alla fine (usando la Eq. (20)) riconosciamo che quanto abbiamo scritto è la frazione di particelle con energia nel sistema del laboratorio compresa fra E_L e $E_L + \delta E_L$.

Un trucchetto utile viene dal differenziare $E^2 - p^2 = m^2$, che porta a $p\delta p = E\delta E$. La seconda della (20) permette allora di scrivere $\delta \cos \theta_L$ in termini di $\delta \cos \theta_0$.

2.3 Urto nel sistema del CdM e del laboratorio

Affrontiamo per semplicità il caso di due particelle di stessa massa m , che collidono nel sistema del centro di massa in modo elastico. Nota la loro energia E_0 , è noto il loro impulso p_0 in modulo: $E_0^2 - p_0^2 = m^2$. L'angolo di deflessione sia detto χ . Questo rimane un parametro libero.

Andiamo ora nel sistema del laboratorio. Qui è dove facciamo le misure, quindi lo scopo sarà collegare energie ed angoli misurati qui con l'angolo χ definito sopra. Supponiamo che nel sistema del laboratorio una delle due particelle (diciamo la 2) sia inizialmente ferma. Immaginiamo schematicamente $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$.

Secondo la logica più diretta, dovremmo calcolare la velocità a cui si muove 2 nel sistema del centro di massa, e poi fare un boost di ognuno dei tre restanti impulsi in modo da azzerare la velocità di 2. In modo più rapido per arrivare al risultato è prendere prodotti scalari di vettori nei due sistemi di riferimento. Siano $p_{1,2,3,4}$, $E_{1,2,3,4}$ gli impulsi e le energie delle particelle prima (1, 2) e dopo (3, 4) lo scattering

$$p_1 \cdot p_2 = -p_0^2 - E_0^2 = -mE_1 \quad (22)$$

$$p_3 \cdot p_2 = -p_0^2 \cos \chi - E_0^2 = -mE_3 \quad (23)$$

$$p_4 \cdot p_2 = p_0^2 \cos \chi - E_0^2 = -mE_4 \quad (24)$$

Queste formule collegano le energie nel sistema del laboratorio con l'angolo χ nel centro di massa. Cerchiamo ora di determinare gli angoli θ_3, θ_4 formati da \vec{p}_3, \vec{p}_4 con \vec{p}_1 . La relazione fra i due è data da

$$p_1 \cdot p_3 = |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta_3 - E_1 E_3 = p_0^2 \cos \chi - E_0^2 \quad (25)$$

$$p_1 \cdot p_4 = |\vec{p}_1| |\vec{p}_4| \cos \theta_4 - E_1 E_4 = -p_0^2 \cos \chi - E_0^2 \quad (26)$$

3 Campi elettromagnetici

3.1 Esempio col filo infinito

Immaginiamo un filo infinito di carica positiva, con densità di carica lineare λ . Questo filo produce un campo elettrico. Però se guardiamo il filo da un sistema di riferimento in moto (lungo la direzione del filo), allora vediamo non

solo una densità di carica ma anche una corrente, a cui è accompagnato un campo magnetico. La conclusione di questo esercizio mentale è che un campo elettrico in un sistema di riferimento trasforma in un campo sia elettrico che magnetico nel nuovo sistema.

Parlando quindi di oggetti covarianti sotto Lorentz (come ad esempio i quadrivettori), ci saremmo potuti aspettare che il campo elettrico fosse completato in una sorta di ‘quadricampo’ (la cui componente tempo sarebbe al momento non chiara), e analogamente per il campo magnetico. In realtà questa ipotesi non regge a priori, perché in tal caso il campo elettrico trasformerebbe nel nuovo sistema di riferimento senza produrre il campo magnetico.

Facciamo allora l’esercizio di trovare campo elettrico e magnetico per il filo fermo e in movimento a velocità v . I risultati (ben noti) nel caso fermo sono

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (27)$$

$$\vec{B} = \vec{0} \quad (28)$$

Nel caso in movimento il calcolo è altrettanto standard, ma sottolineiamo che fare il boost contrae le lunghezze, ergo la densità di carica $\lambda = \frac{\delta q}{\delta L}$ risulta aumentata di un fattore γ . Il risultato è

$$\vec{E}' = \frac{\lambda\gamma}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (29)$$

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0\lambda\gamma v}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (30)$$

che possiamo riscrivere come

$$E' = \gamma E, \quad B' = v\gamma E \quad (31)$$

dove si è fatto uso di $\epsilon_0\mu_0(c^2) = 1$. Si noti che questa relazione vale in questo caso particolare e non è una legge di trasformazione completamente generale. Per questo motivo abbiamo intenzionalmente omissi i simboli di vettore: in realtà la discussione completa richiede più attenzione. Questa forma dell’equazione sottolinea però il fatto principale, ovvero una strettissima analogia fra le trasformazioni del campo elettrico e magnetico con le trasformazioni di posizione e tempo per una particella ferma in un dato sistema iniziale.

3.2 Parità del campo elettrico e magnetico

Per capire meglio come procedere, è utile la seguente ulteriore osservazione. Sia definita la parità come la riflessione attorno al piano (ad esempio) xy . Normalmente penseremmo ad un vettore come a qualcosa le cui componenti lungo x, y restano invariate sotto parità, mentre la componente z cambia segno. Questo è effettivamente il caso per un sacco di vettori (posizione, velocità, accelerazione, forza, ...), ma ci sono delle eccezioni. L’esempio principale è il prodotto vettoriale.

Dati due vettori nel piano x, y , diciamo \vec{v}_1, \vec{v}_2 , il loro prodotto vettore è

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \quad (32)$$

ed è diretto lungo z . Se ora facciamo la trasformazione di parità, i vettori \vec{v}_1, \vec{v}_2 non cambiano (perché sono nel piano x, y), e allora non cambia nemmeno \vec{v}_3 ,

nonostante sia completamente allineato lungo z e ci aspetteremmo quindi una sua inversione. Prendere atto di questo fatto porta a concludere che, specificata la legge di trasformazione usuale per $\vec{v}_{1,2}$ (che chiameremo vettori *polari*), allora il loro prodotto vettore trasforma in un modo diverso (vettore *assiale*). I vettori assiali mantengono la componente ortogonale al piano di riflessione e invertono le due componenti parallele.

È facile convincersi che il campo magnetico è di questo secondo tipo di vettore. È altrettanto facile osservare che una legge fisica qualsiasi (dinamica, di trasformazione, anche una banale definizione) dovrà collegare fra loro oggetti che abbiano proprietà di trasformazione compatibili. Questo vi è già familiare per le rotazioni: non scriveremmo mai la somma fra un vettore e uno scalare. Qui stiamo dicendo qualcosa di molto simile, cioè che ad esempio

$$\text{nuovo vettore} = \text{vettore polare}_1 + \text{vettore assiale}_2 \quad (33)$$

non è un'equazione possibile, perché se facciamo una trasformazione di parità su tutti gli elementi l'equazione non rimane vera. Allo stesso modo

$$E' \simeq \gamma E + \gamma v B \text{ (schematicamente)} \quad (34)$$

non è un'equazione possibile senza la presenza di qualche prodotto vettore.

3.3 Trasformazioni in generale

In effetti si può mostrare che le trasformazioni generali dei campi elettrico e magnetico sotto un boost lungo una data direzione trattano in modo diverso le componenti dei campi parallele e ortogonali alla velocità, e in particolare si ha

$$E'_{//} = E_{//}, \quad E'_{\perp} = \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)_{\perp} \gamma \quad (35)$$

$$B'_{//} = B_{//}, \quad B'_{\perp} = \left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right)_{\perp} \gamma \quad (36)$$

$$(37)$$

Queste leggi sono ricavabili supponendo vere le equazioni di Maxwell in ogni sistema di riferimento, e sapendo in che modo trasformano le sorgenti ρ, \vec{J} dei campi.

4 Gravità e buchi neri

Immaginiamo un raggio di luce che entra in una stanza, sistema di riferimento inerziale, e la percorre da parete a parete. Chiaramente vale la prima legge di Newton e la luce va dritta. Immaginiamo ora che il pavimento si metta in moto con accelerazione costante g verso l'alto. La luce continua ad andare dritta, ma la sua distanza dal pavimento decresce nel tempo. Se immaginiamo ora di essere solidali al pavimento della stanza (sistema non inerziale), vedremo in pratica due effetti:

1. Tutti i gravi cadono con accelerazione costante g , come se fossimo in un campo gravitazionale

2. Anche la luce sembra cadere

L'idea alla base del principio di equivalenza è che valga il ragionamento inverso, cioè che se fossimo in un vero campo di gravità uniforme e iniziassimo ad accelerare verso il basso, saremmo in un sistema inerziale. La prima sorprendente conclusione è che la luce cade.

Notate che questo è ovvio nel caso dei gravi, ma ai tempi di Einstein era chiaro che le leggi della gravità andassero riviste alla luce delle idee di località portate dalla relatività ristretta, quindi il contenuto fisico non è banale (come già si vede dal nostro esempio con la luce, che non ci si aspettava cadesse). L'enunciato del principio di equivalenza è che la gravità si può localmente (in questo caso, globalmente) cancellare semplicemente lasciandosi cadere (N.B. nel realizzare queste dispense non sono state defenestrate persone o animali).

Il primo esercizio sarà di sostanziare la discussione di sopra calcolando il moto uniformemente accelerato del pavimento verso l'alto, e poi si chiede di fare un boost affinché il pavimento sia fermo e di capire cosa succede alla traiettoria della luce nel nuovo sistema. Per semplificare un po' il problema, studiamo qui il caso in cui la luce si muove in verticale. Notate che in questo caso il boost va fatto "diverso a ogni tempo", che a livello concettuale non è banale ma funziona.

4.1 Moto uniformemente accelerato

Dobbiamo applicare $F = ma$ relativistica. Possiamo pensare a $F = \frac{dp}{dt} = mg$ e, usando la definizione di impulso relativistico, ottenere

$$g = \frac{dv\gamma}{dt} \Rightarrow v\gamma = gt \Rightarrow v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt)^2}} \quad (38)$$

Questa è la velocità del pavimento verso l'alto. Si nota

$$\gamma(t) = \sqrt{1 + (gt)^2} \quad (39)$$

Facciamo ora un boost, diverso per ogni t , considerando un sistema di riferimento che al tempo t si muova verso l'alto a velocità $v(t)$. Chiaramente istante per istante il pavimento sarà fermo, mentre la luce andrà verso il basso a velocità $v(t)$. Ma allora, lungo la direzione orizzontale deve rallentare per mantenere fissata la sua velocità complessiva. Si ha dunque

$$c^2 = v_{\text{oriz.}}(t)^2 + v(t)^2 \Rightarrow v_{\text{oriz.}}(t) = \frac{1}{\gamma(v(t))} = \frac{1}{\sqrt{1 + (gt)^2}} \quad (40)$$

Calcoliamo infine la distanza verticale percorsa dal raggio di luce. Stiamo cioè cercando

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' = \frac{1}{g} \sqrt{1 + (gt)^2} - \frac{1}{g} = \frac{1}{g} (\gamma(t) - 1) \quad (41)$$

dove come posizione al tempo zero è stata scelta l'origine. Riconosciamo la parentela fra questa formula e $\gamma(t)$.

4.2 Redshift relativistico

Nel sistema inerziale la luce viaggia verso l'alto percorrendo una distanza λ in un tempo $\frac{\lambda}{c}$. Abbiamo quindi due eventi, prima l'onda di luce che ha una cresta, e il secondo è la cresta successiva a una lunghezza d'onda di distanza.

Al tempo t il pavimento si muove a velocità $v(t)$, che è la velocità del boost verso l'alto necessaria per rendere il pavimento istantaneamente fermo. Qual è la distanza spaziale fra le due creste menzionate sopra in questo nuovo sistema? La risposta si ottiene con una trasformazione di Lorentz

$$\lambda' = \gamma(\lambda + v\lambda) = \lambda\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \quad (42)$$

dove abbiamo ricordato la definizione di $\gamma(v)$ nell'ultimo passaggio. Questa formula ci dice che la lunghezza d'onda di un raggio di luce cresce se inseguiamo tale raggio. Un modo per rendere intuitivo il risultato è pensare che, inseguendo corpi massivi, si abbassa la loro velocità e di conseguenza la loro energia cinetica. L'energia di un raggio di luce si abbassa non rallentando il raggio, che viaggia sempre a c , ma spostando il colore verso il rosso (maggiori lunghezze d'onda).

4.3 Redshift gravitazionale

Come abbiamo già detto, tutto l'esercizio è volto non solo a calcolare il redshift relativistico, ma a dedurre l'eventuale redshift gravitazionale cercando di simulare un campo di gravità con un sistema di riferimento accelerato (principio di equivalenza). Dobbiamo essenzialmente sostituire $v(t)$ del pavimento nella formula del redshift relativistico, ma vorremmo al contempo esprimere il risultato in termini della distanza della luce dal pavimento, misurata nel sistema in cui c'è gravità. Ricordiamo che facciamo partire pavimento e luce dall'origine in simultanea, entrambi verso l'alto.

Per prima cosa ricaviamo t in funzione di v , ottenendo

$$t = \frac{v}{g\sqrt{1-v^2}} \quad (43)$$

Consideriamo poi l'altezza della luce dal pavimento nel sistema con gravità (pavimento fermo). Stiamo discutendo la distanza h fra due punti nello spazio, ovvero la distanza fra due eventi simultanei (nel sistema con gravità). Possiamo dedurre $\Delta x, \Delta t$ nel sistema senza gravità con una trasformazione di Lorentz

$$\Delta x = \gamma h \quad (44)$$

$$\Delta t = \gamma v h \quad (45)$$

dove abbiamo usato che nel sistema con gravità le distanze spaziali sono misurate simultaneamente, quindi per tale sistema non c'è Δt . Vogliamo ora imporre che, spostandosi di tali $\Delta x, \Delta t$ dal punto $(t, x(t))$ sulla linea mondo del pavimento, si finisca sulla linea mondo del raggio di luce. La condizione è

$$t + \Delta t = x(t) + \Delta x \quad (46)$$

da cui

$$\frac{v}{g}\gamma + v\gamma h = \frac{1}{g}(\gamma - 1) + \gamma h \quad (47)$$

$$\Rightarrow (1 - v)\gamma = \frac{1}{1 + gh} \quad (48)$$

e infine

$$\lambda' = \lambda(1 + gh) \quad (49)$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{gh}{c^2} \quad (50)$$

ovvero più la luce sale nel potenziale gravitazionale, più diventa rossa. Se definiamo il potenziale gravitazionale come $V(h) = \frac{U(h)}{m} = gh$, vediamo che nel nostro esempio $\Delta\lambda = \Delta V(h)\lambda$. Ricordando la relazione che lega frequenza e lunghezza d'onda $\nu = \frac{1}{\lambda}$, abbiamo infine che (stavolta solo per variazioni infinitesime)

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{d\lambda}{\lambda} = -dV \quad (51)$$

ovvero che la frequenza diminuisce. Questo porta ad un'altra conseguenza importante, poiché la frequenza della luce è l'inverso del tempo che impiega la fase della luce a compiere un'oscillazione completa. Riprendendo l'esempio del pavimento che accelera verso l'alto, immaginiamo di esplorare il campo gravitazionale con un orologio meccanico e un raggio di luce, che è una sorta di orologio che ticchetta con frequenza ν . Visto che possiamo andare nel sistema di riferimento inerziale in cui non c'è gravità (il sistema fermo con pavimento che accelera), i due orologi non hanno motivo di battere il tempo in modo diverso, quindi resteranno sincronizzati. Ma allora la variazione di frequenza della luce che abbiamo osservato qui sopra acquista un carattere molto generale: il tempo rallenta quando andiamo in luoghi dal potenziale gravitazionale più basso (i.e. più negativo).

Questo risultato è stato ottenuto estrapolando l'esperimento mentale del pavimento accelerato, che approssima bene il campo gravitazionale (uniforme) magari nella città di Pisa ma non è accurato alle scale planetarie, dove l'accelerazione punta sempre verso il centro della terra e non rimane ovunque parallela a se stessa. In effetti il risultato ottenuto è corretto per campi gravitazionali sufficientemente deboli, ma (pur rimanendo qualitativamente corretto) va modificato. Ad esempio, per una distribuzione di massa M a simmetria sferica (come un pianeta o un buco nero) vale

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \simeq dt \left(1 - \frac{GM}{r}\right) \quad (52)$$

dove $d\tau$ è l'intervallo di tempo come percepito dall'osservatore fermo a distanza r (e.g. $d\tau = 1h$ indica che per l'orologio da polso dell'astronauta è passata un'ora), mentre dt è lo stesso intervallo di tempo però misurato da un osservatore all'infinito (e.g. la nave spaziale a grande distanza per cui, ad esempio, passano 23 anni). Nell'ultimo passaggio abbiamo approssimato la radice per grandi r , ritrovando il risultato già derivato, come controllo. Per r più piccoli, la relatività

generale completa (la teoria che descrive la gravità nel modo ad oggi più accurato) diventa sempre più importante. Notiamo che per

$$r = r_{\text{Schwarzschild}} = \frac{2GM}{c^2} \quad (53)$$

l'accelerazione gravitazionale è talmente intensa che il tempo si ferma: può passare un tempo dt (finito) arbitrario e $d\tau$ rimane zero. Fisicamente, da lontano vedremmo il nostro orologio ticchettare normalmente mentre l'eventuale orologio vicino all'orizzonte degli eventi (distanza $r_{\text{Sch.}}$) resterebbe immobile.

5 Problemi

1. Scattering Compton: un fotone urta elasticamente un atomo inizialmente fermo. Relazionare la variazione di lunghezza d'onda del fotone con l'angolo di cui devia la traiettoria del fotone.
2. Partendo da Eq. (25), esprimere prima χ in funzione delle variabili nel sistema del laboratorio, e poi ricavare invece θ_3 in funzione delle variabili nel sistema del centro di massa (E_0, χ). Se nel sistema del laboratorio la particella incidente è molto veloce, ci aspettiamo che solo θ_3 piccoli siano permessi. Come si vede questo?
3. Urto elastico fra particella massiva e particella con massa molto più piccola, diciamo trascurabile. In meccanica non-relativistica se la massa della seconda particella è piccola rispetto alla massa della prima, il trasferimento di energia è quasi nullo. Questo è ancora vero in meccanica relativistica?
4. Siano date due piastre piane parallele con carica rispettivamente σ e $-\sigma$. Calcolare il campo elettromagnetico in tutto lo spazio. Fare un boost lungo la direzione ortogonale alle piastre e ricalcolare le distribuzioni di carica e il campo elettromagnetico (sempre dalle equazioni di Maxwell). Verificare la consistenza con le leggi di trasformazione dei campi date. Ripetere per un boost parallelo alle piastre (più interessante).
5. Controllare che l'equazione della forza di Lorenz sia compatibile con le leggi di trasformazione di Lorentz sia della forza che del campo elettromagnetico. Questo controllo di consistenza è banalizzato dall'osservazione che si può scrivere la forza di Lorenz come $f_\mu = qu^\nu F_{\mu\nu}$, dove $F_{\mu\nu}$ si definisce come

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

6. In meccanica non-relativistica ci si aspetta un effetto Doppler per sorgenti che si muovono allontanandosi o avvicinandosi a noi, mentre non c'è spostamento di frequenza per moto circolare intorno all'osservatore. Questo resta vero in meccanica relativistica?