

Meccanica Avanzata

Luca Milanese*

6 febbraio 2024

Sommario

Richiami di moto in campo centrale, problema dei due corpi, urti tra due particelle, piccole oscillazioni radiali in orbita, Teorema di Bertrand. Cinematica del corpo rigido, meccanica del corpo rigido nello spazio, tensore d'inerzia, assi principali, Equazioni di Eulero, trottola simmetrica libera. Invarianti adiabatici, moti quasiperiodici, evoluzione delle quantità medie.

Indice

I	Meccanica celeste	3
1	Richiami di moto in campo centrale	3
2	Problema dei due corpi	5
2.1	Un esempio: urti tra particelle	7
3	Piccole oscillazioni attorno a orbite circolari	9
3.1	Il Teorema di Bertrand	11
II	Meccanica del Corpo Rigido	12
4	Cinematica del Corpo Rigido	12
5	Dinamica del Corpo Rigido	14
5.1	Il tensore d'inerzia e il Teorema di Huygens-Steiner	14
5.2	Assi principali ed Equazioni di Eulero	16
III	Invarianti Adiabatici	19

*luca.milanese@sns.it

6	Primi esempi	19
6.1	Esempio 1: pallina tra due muri	19
6.2	Esempio 2: pendolo di lunghezza decrescente	21
7	Integrale di Poincaré	23
IV	Problemi	25
8	Meccanica Celeste	25
9	Meccanica del Corpo Rigido	29
10	Invarianti Adiabatici	35

Parte I

Meccanica celeste

1 Richiami di moto in campo centrale

In questa sezione ricapitoliamo brevemente i principali risultati sul moto nello spazio di un corpo puntiforme di massa m in un campo centrale, ossia soggetto a una forza \vec{F} diretta sempre lungo la congiungente origine - particella e i cui modulo e verso dipendono solo dalla distanza del corpo dall'origine:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}.$$

A questa forza può essere associata un'energia potenziale $U(r)$ tale che $F(r) = -U'(r)$ (dove $U'(r)$ indica la derivata di U rispetto all'argomento r), perciò è conservativa. Inoltre, il suo momento torcente rispetto all'origine è identicamente nullo, dunque in questo moto si conservano sia l'energia meccanica che il momento angolare rispetto all'origine:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U(r) = \text{cost} \quad \vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{cost},$$

dove $\dot{\vec{r}}$ indica la derivata della funzione $\vec{r}(t)$ rispetto al tempo, ossia la velocità dell'oggetto¹. La seconda conservazione ci dice che il moto avviene in un piano costante, passante per l'origine e ortogonale alla direzione di \vec{L} . Conviene dunque passare a coordinate polari, scegliendo \hat{z} come direzione di \vec{L} : $\vec{r} = r\hat{r}$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$. In questo modo si ha

$$E = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} + U \quad \vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{z} \Rightarrow L = mr^2\dot{\theta}.$$

La seconda equazione permette di separare il moto radiale da quello angolare. Infatti, sostituendo di lì $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ nella prima, si ottiene

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E.$$

Questa non è altro che la conservazione dell'energia per una particella di massa m soggetta in una dimensione all'energia potenziale $U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$, detta energia potenziale efficace, o, più comunemente, *potenziale efficace*. Come sempre avviene nei moti a un grado di libertà (in questo caso, la coordinata r), derivando rispetto al tempo la conservazione dell'energia e semplificando \dot{r} si ottiene l'equazione del moto

$$m\ddot{r} = -U'(r) + \frac{L^2}{mr^3} \Leftrightarrow m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) = -U'(r),$$

¹In generale, in Fisica, è convenzione indicare con un puntino la derivazione rispetto al tempo. In queste dispense faremo ampio uso di questa convenzione.

che è stata riarrangiata in modo da riconoscervi la componente radiale della Seconda Legge di Newton. La componente tangenziale si riduce invece alla derivata rispetto al tempo della conservazione di L . In linea di principio, la conservazione dell'energia permette di risolvere per $r(t)$, da cui, sfruttando la definizione di L , si potrebbe trovare $\theta(t)$. In pratica, ciò è spesso infattibile analiticamente, e generalmente non necessario per risolvere i problemi che si incontrano.

Quando l'aspetto temporale del problema non è rilevante, si può trovare direttamente una relazione tra r e θ per descrivere le orbite. Infatti, per *chain rule*, si ha

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta},$$

da cui, sostituendo nella conservazione dell'energia,

$$\frac{L^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E.$$

In termini di $u = \frac{1}{r}$, questa diventa

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2m(E - U)}{L^2},$$

che chiameremo *equazione delle orbite* (attenzione: questa nomenclatura non è standard) e può essere integrata per restituire implicitamente una relazione tra u (quindi r) e θ , cioè un'equazione che determina implicitamente la traiettoria della particella. Inoltre, la derivata rispetto a θ di quest'equazione,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{dU}{du},$$

viene chiamata *Equazione di Binet*. Come esempio di sua applicazione, vediamo cosa succede in assenza di potenziale. Ponendo $U = 0$ troviamo

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0 \Rightarrow u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta,$$

che, a meno di una ridefinizione dello zero di θ , possiamo riscrivere come

$$u(\theta) = u_0 \cos \theta,$$

dove u_0 è l'inverso della minima distanza r_0 raggiunta tra la particella e l'origine, e θ varia tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. In coordinate cartesiane otteniamo

$$x = r \cos \theta = \frac{\cos \theta}{u} = r_0 \quad y = r \sin \theta = r_0 \tan \theta.$$

Come atteso, troviamo una parametrizzazione di una retta nel piano xy , in questo caso parallela all'asse y per via della scelta fatta per lo zero di θ .

Notiamo, infine, un'ultima caratteristica del moto in campo centrale: poiché l'equazione delle orbite è invariante sotto lo scambio $\theta \rightarrow -\theta$, se la derivata $\frac{du}{d\theta}$ si annulla in un punto P (cioè, se r raggiunge un massimo o un minimo lungo l'orbita), allora la traiettoria sarà simmetrica rispetto alla congiungente OP , essendo O l'origine. Per convenzione, si pone solitamente lo zero di θ in un tale P .

Esercizio Trovare la forma delle orbite per un potenziale $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ (distinguendo tra $\alpha < 0$ e $\alpha > 0$) e per uno della forma $U(r) = \frac{kr^2}{2}$, con $k > 0$, al variare di E ed L , usando il metodo esposto. Per quest'ultimo, trovare anche esplicitamente $r(t)$ e $\theta(t)$, notando a posteriori che in questo caso le coordinate polari non sono la scelta più saggia. In quali casi (per quali valori di α , E , L) è comodo trovare $r(t)$ anche col primo potenziale?

2 Problema dei due corpi

Studiamo ora il moto nello spazio di due corpi puntiformi di masse m_1 e m_2 che interagiscono tra loro con un'energia potenziale U nel caso particolare, di importanza fondamentale e onnipresente in Fisica, in cui quest'ultima dipende solo dalla distanza relativa $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ tra i due corpi: tali sono, ad esempio, l'interazione gravitazionale tra due masse puntiformi in Meccanica classica e, approssimativamente², l'interazione elettrica tra due cariche puntiformi che si muovono a basse velocità in Elettromagnetismo classico.

In assenza di altre forze rispetto a quelle derivanti da U , che sono forze interne, la quantità di moto totale $\vec{P} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2$ del sistema si conserva. Risulta dunque utile passare alle coordinate

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

che identificano rispettivamente la posizione del centro di massa del sistema e lo spostamento relativo dei due corpi. Invertendo queste relazioni troviamo

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2},$$

da cui, osservando che $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ per la conservazione di $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$, dove $M = m_1 + m_2$ è la massa totale del sistema, possiamo esprimere le accelerazioni $\ddot{\vec{r}}_1$ e $\ddot{\vec{r}}_2$ come

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_2\ddot{\vec{r}}}{m_1 + m_2} \quad \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{m_1\ddot{\vec{r}}}{m_1 + m_2}.$$

²Ricordiamo, infatti, che cariche in movimento producono campi elettrici e magnetici non banali e di conseguenza non interagiscono tra loro tramite la Legge di Coulomb, ma in maniera più complessa; oltretutto, cariche accelerate irraggiano, perciò la propria energia non si conserva. Una trattazione completa, pur rimanendo nell'ambito della teoria classica (non quantistica), sarebbe intrinsecamente relativistica.

Poiché $\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$ la Seconda Legge di Newton per i due corpi si scrive come

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r},$$

ovvero,

$$\frac{m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}}{m_1 + m_2} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}.$$

Abbiamo ottenuto solo un'equazione dalle due precedenti in quanto la seconda informazione che avremmo potuto ottenere da esse ci era già nota (la conservazione della quantità di moto totale) ed era già stata usata nel cambio di variabili, dunque non c'è di che stupirsi.

Osserviamo ora che questa equazione è formalmente identica a quella che si otterrebbe applicando la Seconda Legge di Newton a un corpo puntiforme di massa

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

soggetto unicamente alla forza derivante da un'energia potenziale centrale $U(\vec{r}) = U(r)$. La quantità μ è detta *massa ridotta*. Ciò vuol dire che per risolvere il moto dei due corpi è sufficiente risolvere il problema equivalente appena descritto: infatti, una volta nota la corrispondente soluzione $\vec{r}(t)$, per risalire a $\vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2(t)$ basta tornare alle relazioni precedenti tra le coordinate nel sistema di riferimento iniziale e quelle relative al centro di massa, tenendo conto che il moto di quest'ultimo è un moto rettilineo uniforme che solitamente riveste poca o nessuna importanza.

Il problema equivalente, data la forma di U , è un moto in un campo centrale costante nel tempo, le cui proprietà sono in qualche senso “ereditate” dal moto complessivo delle due particelle. In particolare, abbiamo sia la conservazione dell'energia totale che del momento angolare totale. Notiamo infatti che, per i Teoremi di König, possiamo scrivere

$$E_{\text{tot}} = K_{\text{cm}} + E_{/ \text{cm}} = K_{\text{cm}} + K_{/ \text{cm}} + U,$$

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{cm}} + \vec{L}_{/ \text{cm}},$$

dove $K_{/ \text{cm}}$ e $\vec{L}_{/ \text{cm}}$ sono l'energia cinetica e il momento angolare misurati nel sistema di riferimento inerziale del centro di massa, mentre K_{cm} e \vec{L}_{cm} sono l'energia cinetica e il momento angolare associati al moto del centro di massa nel sistema di riferimento iniziale (sistema del laboratorio). Osserviamo che

$$K_{/ \text{cm}} + U = \frac{m_1(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{R}})^2}{2} + \frac{m_2(\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{R}})^2}{2} + U = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + U,$$

$$\vec{L}_{/ \text{cm}} = m_1(\vec{r}_1 - \vec{R}) \times (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{R}}) + m_2(\vec{r}_2 - \vec{R}) \times (\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{R}}) = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}},$$

cioè, queste due quantità misurate nel sistema di riferimento del centro di massa corrispondono alle stesse quantità relative alla particella di massa ridotta nel

problema equivalente, dunque ne deduciamo la conservazione. Le due quantità K_{cm} e \vec{L}_{cm} si conservano invece perché il moto del centro di massa è rettilineo uniforme. Segue la conservazione di E_{tot} e \vec{L}_{tot} , come voluto. Ovviamente, queste stesse leggi di conservazione si sarebbero potute ricavare direttamente dalle equazioni del moto (cioè, dalla Seconda Legge di Newton applicata ai due oggetti) rimanendo nel sistema del laboratorio, tuttavia è bene conoscere e saper sfruttare questa separazione dei due moti.

2.1 Un esempio: urti tra particelle

I risultati appena trovati ci permettono di analizzare abbastanza in generale il problema di un urto elastico tra due particelle. In generale, quando parliamo di urti ci riferiamo a un processo in cui due o più particelle interagiscono significativamente per un periodo di tempo breve rispetto ai tempi caratteristici dei loro moti “imperturbati” (ossia, in assenza di interazione reciproca), e ci chiediamo come questa interazione modifichi i loro moti.

In un urto elastico, come è noto, la quantità di moto totale e l’energia totale dei due oggetti si conservano. Se, però, il nostro obiettivo è trovare (almeno in qualche senso) le traiettorie delle particelle, ciò non è sufficiente se l’urto non è frontale. Nel caso che avremo in mente come prototipo, l’interazione tra le due particelle sarà descritta da un’energia potenziale dipendente solo dalla distanza reciproca, tale da annullarsi per $r \rightarrow +\infty$ (il potenziale Coulombiano e quello Newtoniano soddisfano entrambe le condizioni), e assumeremo che una delle due particelle, di massa m_2 , sia inizialmente (cioè, per $t \rightarrow -\infty$) ferma nell’origine, mentre l’altra, di massa m_1 , arriva da molto lontano con una velocità $v_0 \hat{x}$ all’infinito, cui corrisponderebbe, in assenza di interazione, la traiettoria $z = 0, y = b$. La lunghezza $|b|$ è detta *parametro d’impatto*. Ci aspettiamo che per $t \rightarrow +\infty$ il moto di ciascuna delle due masse tenda al rettilineo uniforme, e cerchiamo di caratterizzare questi moti.

Anzitutto, è evidente che il moto di entrambe le particelle rimarrà limitato al piano $z = 0$. Passando al problema equivalente, scriviamo le quantità conservate nel sistema di riferimento del centro di massa, prestando attenzione a non confonderci con le quantità totali:

$$\vec{L}_{/\text{cm}} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (-b \hat{y}) \times (-v_0 \hat{x}) = -\frac{m_1 m_2 b v_0 \hat{z}}{m_1 + m_2},$$

$$E_{/\text{cm}} = U(r = +\infty) + \frac{\mu \dot{r}^2}{2} = \frac{m_1 m_2 v_0^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Per comodità di notazione, scriverò $E = E_{/\text{cm}}$ e $L = \vec{L}_{/\text{cm}} \cdot \hat{z}$. Assumiamo che l’energia potenziale sia tale da non far collassare le due particelle, ma le faccia avvicinare solo fino a una distanza minima r_{min} determinata da

$$E = \frac{L^2}{2\mu r_{\text{min}}} + U(r_{\text{min}}).$$

In questo modo, passando alle coordinate polari (r, θ) , e sostituendo per comodità $u = \frac{1}{r}$, possiamo integrare l'equazione delle orbite facendo corrispondere l'angolo $\theta = 0$ all'orientazione iniziale di \vec{r} (cioè lungo \hat{x}):

$$\theta = - \int_0^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{2(m_1+m_2)U(u)}{m_1 m_2 v_0^2 b^2} - u^2}}.$$

Il segno scelto è coerente col verso convenzionale di θ . Questa relazione è valida per $0 < u < u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}}$, ma è sufficiente a determinare, data la simmetria del moto in campo centrale rispetto alla retta passante per il centro di forza e il punto di massimo avvicinamento del corpo al centro di forza, l'angolo totale spazzato dal vettore \vec{r} durante l'urto (cioè, tra $t = -\infty$ e $t = +\infty$),

$$\Delta\theta = -2 \int_0^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{2(m_1+m_2)U(u)}{m_1 m_2 v_0^2 b^2} - u^2}}.$$

In questo modo, pur senza risolvere completamente il moto (il che spesso non è fattibile analiticamente), troviamo il valore terminale (per $t \rightarrow +\infty$) della velocità relativa delle due particelle (cioè di $\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1$),

$$\vec{v}_\infty = v_0(\cos(\Delta\theta)\hat{x} + \sin(\Delta\theta)\hat{y}),$$

e quindi, essendo $\vec{V}_{\text{cm}} = \dot{\vec{R}}_{\text{cm}} = \frac{m_1 v_0 \hat{x}}{m_1 + m_2}$, troviamo le velocità limite delle due particelle come

$$\vec{v}_1 = \frac{v_0[m_1 \hat{x} - m_2(\cos(\Delta\theta)\hat{x} + \sin(\Delta\theta)\hat{y})]}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{v}_2 = \frac{m_1 v_0[(1 + \cos(\Delta\theta))\hat{x} + \sin(\Delta\theta)\hat{y}]}{m_1 + m_2}.$$

Controlliamo alcuni casi limite. Per $U = 0$, cioè in assenza di interazione, l'integrale è elementare e si ha $\Delta\theta = -\pi$, da cui

$$\vec{v}_1 = v_0 \hat{x} \quad \vec{v}_2 = \vec{0}$$

come deve essere. Per potenziali deboli (si definisca per esercizio cosa ciò voglia dire), l'integrale si può espandere in serie come³

$$\begin{aligned} \Delta\theta &\approx -2 \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2}} - \frac{2(m_1 + m_2)b}{m_1 m_2 v_0^2} \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{U(u) du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2}} \\ &= -\pi + \delta\theta, \quad |\delta\theta| \ll 1, \end{aligned}$$

³Per chi si stesse chiedendo perché il secondo termine è stato riscritto come una derivata formale rispetto a b , il motivo è più matematico che fisico: vogliamo che l'integrale converga, cosa che è garantita per $u \rightarrow \frac{1}{b}$ se l'esponente del denominatore è $\frac{1}{2}$ (più in generale, se è minore di 1), ma non se è $\frac{3}{2}$.

perciò, al prim'ordine in $\delta\theta$ vale

$$\vec{v}_1 \approx v_0 \hat{x} + \frac{m_2 v_0 \delta\theta \hat{y}}{m_1 + m_2} \quad \vec{v}_2 \approx -\frac{m_1 v_0 \delta\theta \hat{y}}{m_1 + m_2}.$$

Quindi, come atteso, abbiamo solo una leggera deviazione dalle traiettorie iniziali, di intensità quantificata dalla grandezza $\delta\theta$. Al contrario, per $\Delta\theta = 0$, otteniamo un urto frontale:

$$\vec{v}_1 = \frac{v_0(m_1 - m_2)\hat{x}}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{v}_2 = \frac{2m_1 v_0 \hat{x}}{m_1 + m_2}.$$

Infine, nel caso in cui la particella inizialmente ferma abbia massa molto maggiore dell'altra ($m_2 \gg m_1$), l'espressione per la velocità terminale di quest'ultima si riduce a

$$\vec{v}_1 \approx -v_0(\cos(\Delta\theta)\hat{x} + \sin(\Delta\theta)\hat{y}),$$

come potevamo aspettarci notando che, in questo caso, $\mu \rightarrow m_1$.

3 Piccole oscillazioni attorno a orbite circolari

Torniamo ora alla situazione in cui un corpo puntiforme di massa m percorre orbite in un potenziale centrale $U(r)$. Consideriamo le orbite circolari. Imponendo la condizione $r(t) = r_0$, troviamo la condizione (con $\dot{\theta} = \omega$)

$$m r_0 \omega^2 = U'(r_0),$$

oppure, in termini del momento angolare,

$$\frac{L^2}{m r_0^3} = U'(r_0),$$

che equivale a porre $U'_{\text{eff}}(r_0) = 0$. Osserviamo, per inciso, che orbite circolari sono possibili solo nei punti in cui il potenziale è crescente.

Cosa succede se “perturbiamo” queste orbite? Se si tratta di orbite stabili (il senso di ciò verrà specificato in seguito), ci aspettiamo che l'oggetto percorra una traiettoria oscillante attorno all'orbita circolare imperturbata. Per studiare il moto al primo ordine in $\frac{a}{r_0}$, dove a è l'ampiezza di queste piccole oscillazioni, scriviamo $r(t) = r_0 + \delta r(t)$, con $|\delta r| \ll r_0$, e sostituiamo nell'equazione del moto radiale:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(r_0 + \delta r) = \frac{L^2}{m(r_0 + \delta r)^3} - U'(r_0 + \delta r),$$

da cui, espandendo al primo ordine, si ha

$$m \ddot{\delta r} \approx \frac{L^2}{m r_0^3} \left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^{-3} - U'(r_0) - U''(r_0) \delta r$$

$$\Rightarrow m\ddot{\delta r} = \frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{3L^2\delta r}{mr_0^4} - U'(r_0) - U''(r_0)\delta r.$$

Cancellando i termini che si semplificano per la condizione di orbita circolare, rimaniamo con

$$\ddot{\delta r} = -\delta r \left(\frac{U''(r_0)}{m} + \frac{3L^2}{m^2r_0^4} \right),$$

perciò, per $\frac{U''(r_0)}{m} + \frac{3L^2}{m^2r_0^4} > 0$, si hanno effettivamente delle oscillazioni sinusoidali:

$$\delta r(t) \approx a \sin \left(\sqrt{\frac{U''(r_0)}{m} + \frac{3L^2}{m^2r_0^4}} t \right).$$

Sfruttando la conservazione del momento angolare, possiamo trovare la prima correzione alla velocità angolare dell'oggetto:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{L}{m(r_0 + \delta r(t))^2} \approx \frac{L}{mr_0^2} - \frac{2L}{mr_0^3} \delta r(t).$$

Confrontando la pulsazione delle oscillazioni radiali e la velocità angolare orbitale all'ordine zero,

$$\frac{\omega_r}{\omega_\theta} \approx \sqrt{3 + \frac{mr_0^4 U''(r_0)}{L^2}} = \sqrt{3 + \frac{r_0 U''(r_0)}{U'(r_0)}},$$

Possiamo stimare la precessione dell'orbita. Infatti, in questo modo troviamo che l'angolo orbitale spazzato dalla particella in un tempo $\frac{2\pi}{\omega_r}$, cioè tra due punti consecutivi di massimo per r , è dato da

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3 + \frac{r_0 U''(r_0)}{U'(r_0)}}}.$$

Di conseguenza, l'angolo di precessione, dato da $\Delta\theta - 2\pi$, risulta essere

$$\delta\theta = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3 + \frac{r_0 U''(r_0)}{U'(r_0)}}} - 1 \right).$$

Se proviamo ad applicare questi risultati a orbite circolari in un potenziale Newtoniano,

$$U(r) = -\frac{GMm}{r},$$

Troviamo $\omega_r = \omega_\theta = \frac{L}{mr_0^2}$, e quindi $\delta\theta = 0$ al prim'ordine. Questo non è un caso: com'è ben noto, *tutte* le orbite limitate in un potenziale Newtoniano sono delle ellissi con un fuoco nel centro di forza, perciò, perturbando un'orbita circolare, si ottiene un'ellisse. In questo modo, risulta ovvio che, poiché r raggiunge massimo una sola volta lungo l'orbita, le due pulsazioni devono coincidere (non solo al prim'ordine), cioè tutte le orbite limitate (non solo quelle ottenute perturbando le orbite circolari) sono chiuse.

Esercizio Studiare le piccole oscillazioni orbitali per un potenziale $U(r) = \frac{\alpha}{r^k}$, al variare di α , k e del raggio r_0 dell'orbita circolare perturbata. Per quali valori di α , k e r_0 le orbite circolari sono stabili? Per quali le loro piccole perturbazioni restano chiuse? Quali potenziali notevoli soddisfano entrambe le condizioni?

3.1 Il Teorema di Bertrand

Con gli strumenti appena sviluppati, possiamo ottenere una dimostrazione di un risultato molto elegante della Meccanica Classica, noto come *Teorema di Bertrand*. Esso afferma che gli unici potenziali centrali in cui tutte le orbite limitate sono chiuse sono il potenziale Newtoniano $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ (con $\alpha > 0$) e il potenziale armonico $U(r) = \frac{kr^2}{2}$ (con $k > 0$). Negli esercizi precedenti abbiamo visto che questi potenziali soddisfano effettivamente questa condizione.

Per dimostrare il teorema, facciamo la seguente osservazione preliminare. La condizione per avere un'orbita chiusa è che il rapporto tra l'angolo orbitale $\Delta\theta$ tra due massimi consecutivi di r e l'angolo giro 2π sia un numero razionale $\eta = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{N}_0$. Poiché orbite "vicine" si possono ottenere perturbando successivamente un'orbita data in maniera continua (ad esempio, variando in maniera continua l'energia E e il momento angolare L), anche il parametro η dovrà variare in modo continuo. Tuttavia, affinché η resti razionale per ogni orbita, l'unica possibilità è che tutte le orbite in un dato potenziale siano caratterizzate dallo stesso η . Otterremo quindi una condizione necessaria sui potenziali imponendo la costanza di η per orbite diverse.

Per orbite simil-circolari⁴, come già visto, si ha

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{3 + \frac{r_0 U''(r_0)}{U'(r_0)}}},$$

dunque, essendo sicuramente $\eta \neq \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, otteniamo

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\eta^2} - 3 \right) = \frac{U''}{U'} \Rightarrow U'(r) = kr \left(\frac{1}{\eta^2} - 3 \right) \Rightarrow U(r) = \frac{k}{\frac{1}{\eta^2} - 2} r \left(\frac{1}{\eta^2} - 2 \right).$$

Osserviamo che deve essere $k > 0$ per via della condizione sull'esistenza di orbite circolari. Abbiamo ora due situazioni distinte a seconda del segno di $\frac{1}{\eta^2} - 2$, quantità che per comodità chiameremo d'ora in poi β .

⁴Ci si potrebbe chiedere se la richiesta che esistano orbite circolari sia legittima, ossia se così facendo non stiamo forse escludendo potenziali che non ammettono orbite circolari ma in cui tutte le orbite limitate risulterebbero chiuse. Per vedere che ciò non può succedere, ragioniamo come segue. I potenziali che stiamo escludendo, come visto, sono quelli tali che $U'(r) \leq 0$. Supponiamo che un tale potenziale ammetta un'orbita limitata e chiusa. Nel punto di massimo avvicinamento sarà $\dot{r} = 0$. Scrivendo la componente radiale dell'equazione del moto, abbiamo $\ddot{r} = \dot{\theta}^2 r - U'(r) \geq 0$, pertanto, con la condizione iniziale $r = r_0$, $\dot{r} = 0$, otteniamo una soluzione tale che $r \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, a meno che non sia identicamente $\dot{\theta} = 0$ e $U'(r_0) = 0$. Tuttavia, questa situazione corrisponde a un'orbita banale in cui la particella resta ferma nella posizione iniziale, che dunque non ci interessa.

Per $\beta > 0$ possiamo studiare orbite limitate con energia “grande” (quantificare per esercizio questa condizione) a momento angolare fissato. Integrando l'equazione delle orbite, troviamo

$$\Delta\theta = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{2mk}{L^2\beta u^\beta} - u^2}},$$

dove u_{\min} e u_{\max} sono radici del denominatore. Per $E \rightarrow +\infty$ con L fissato, si ha $u_{\min} \rightarrow 0$ e $u_{\max} \rightarrow \frac{\sqrt{2mE}}{L}$, dunque l'integrale tende a π . Visivamente, le orbite tendono a ellissi molto schiacciate sull'asse maggiore, centrate nel centro di forza. Perciò, imponendo la condizione per orbite chiuse, si arriva a

$$\Delta\theta = \pi \Rightarrow \eta = \frac{1}{2} \Rightarrow U(r) = \frac{kr^2}{2}.$$

Per $\beta < 0$, e quindi $-2 < \beta < 0$, guardiamo, a L fissato, il limite per $E \rightarrow 0^-$. In tale limite si ha

$$u_{\min} \rightarrow 0^+ \quad u_{\max} \rightarrow \left(-\frac{2mk}{L^2\beta}\right)^{\frac{1}{2+\beta}} = u_0,$$

e, di conseguenza⁵,

$$\Delta\theta \rightarrow 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{\frac{u_0^{2+\beta}}{u^\beta} - u^2}} = \frac{2\pi}{2+\beta},$$

perciò

$$\eta = \eta^2 \Rightarrow \eta = 1 \Rightarrow U(r) = -\frac{k}{r}.$$

In questo modo il teorema è dimostrato.

Parte II

Meccanica del Corpo Rigido

4 Cinematica del Corpo Rigido

Finora abbiamo avuto a che fare con punti materiali, cioè oggetti di dimensione trascurabile rispetto alle scale di lunghezza caratteristiche del problema, e la cui struttura interna non riveste particolare importanza. Pertanto ci è risultato sufficiente, ai fini della trattazione, approssimare tali oggetti a dei punti e studiare delle equazioni per una sola legge oraria $\vec{r}(t)$ che descriva la posizione di ciascuno.

⁵Per fare l'integrale conviene operare la sostituzione $u = u_0 x^{\frac{2}{2+\beta}}$.

Tuttavia, non sempre è possibile fare questa approssimazione, e anzi in molti casi la fisica di un processo dipende sostanzialmente dal fatto che gli oggetti coinvolti hanno estensione finita. Per aggirare il problema, possiamo considerare un corpo esteso come un insieme di tanti punti materiali (infiniti nel limite in cui ciascuno diviene puntiforme), e studiare come evolve nel tempo la posizione di ciascuno. In questa sezione ci occuperemo di un tipo particolare di tali oggetti, cioè quelli in cui la distanza tra ogni coppia di punti che lo compongono è costante nel tempo: questi sono detti *corpi rigidi*.

Per studiare il moto di un corpo rigido non è più sufficiente esibire una singola $\vec{r}(t)$ (o, meglio, tre leggi orarie $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$), perchè essa non dà informazioni sul moto di ciascun punto componente l'oggetto. Ci poniamo allora il problema di quante leggi orarie sia necessario fornire per descrivere completamente il moto di un corpo rigido, cioè di quanti siano i gradi di libertà ad esso associati. Se stessimo trattando un sistema di N particelle libere, avremmo $3N$ gradi di libertà, in quanto per ciascuna particella dovremmo specificare le tre coordinate cartesiane (o altre tre coordinate, a seconda del sistema scelto) in funzione del tempo. La condizione sulla distanza tra ogni coppia di punti dell'oggetto riduce il numero di gradi di libertà, in particolare vale il seguente risultato:

A un corpo rigido in tre dimensioni sono associati 6 gradi di libertà.

La dimostrazione si può ottenere in maniera costruttiva, vedendo il corpo rigido come fatto da $N \geq 3$ punti materiali. Preso il primo punto, ad esso sono associati tre gradi di libertà. Aggiungendone un secondo, i gradi di libertà diventano cinque, perché ai tre nuovi ne va sottratto uno per via della condizione sulla distanza tra i due. Aggiungendo il terzo, otteniamo un ulteriore grado di libertà (tre meno i due persi per la rigidità del triangolo). Da ora in poi, aggiungendo punti, non guadagniamo più gradi di libertà, perchè ogni nuovo punto dovrà trovarsi sull'intersezione di (almeno) tre sfere, e tale punto, se esiste, è unico (in realtà i punti possono anche essere due, ma, non potendo il punto materiale muoversi in maniera continua dall'uno all'altro, contano come un solo punto.)

Una comoda interpretazione dei sei gradi di libertà è la seguente: la posizione nello spazio di un corpo rigido è completamente determinata dalla posizione di un suo punto P (tre gradi di libertà), dalla scelta di un asse r passante attraverso P (due gradi di libertà, pensiamo ad esempio alle coordinate sferiche) e dall'angolo di cui il corpo è ruotato attorno a tale asse (un grado). Come conseguenza, abbiamo il *Teorema di Chasles*:

Consideriamo un corpo rigido che si muove di un moto arbitrariamente complicato. Sia P un punto del corpo. Ad ogni istante temporale il moto del corpo può essere scritto come somma di un moto di traslazione di P rispetto all'origine del sistema di riferimento, e una rotazione intorno ad un qualche asse (che in generale può cambiare nel tempo) passante per P .

Questo teorema permette di definire, associato al moto di un corpo rigido, il vettore *velocità angolare* $\vec{\omega}$ tale che, se P e Q sono due punti del corpo rigido, \vec{v}_P e \vec{v}_Q le loro velocità istantanee, e \vec{r} è il vettore posizione da P a Q , abbiamo

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Va notato che la velocità angolare è relativa al sistema di riferimento scelto: in particolare, se nel sistema S il corpo rigido ha velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$, e il sistema S' ruota con velocità angolare $\vec{\Omega}$ rispetto a S , allora la velocità angolare dell'oggetto in S' è

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} - \vec{\Omega}.$$

Potete convincervi che la formula è sensata pensando a cosa accade nel caso in cui $\vec{\Omega}$ e $\vec{\omega}$ hanno la stessa direzione. Se invece gli assi di S ed S' non ruotano gli uni rispetto agli altri (come avviene, ad esempio, se sono due sistemi inerziali il cui moto relativo è rettilineo uniforme), allora misurano la stessa $\vec{\omega}$. Una conseguenza importante è che possiamo sempre scegliere un sistema di riferimento inerziale in cui ciascun punto del corpo rigido abbia velocità ortogonale a $\vec{\omega}$: infatti, dalla relazione precedentemente introdotta segue che tutti i punti del corpo hanno la stessa velocità lungo la direzione di $\vec{\omega}$, perciò ci basta metterci in un sistema di riferimento in cui questa componente è nulla. Quando questa condizione è soddisfatta, possiamo scrivere $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_0)$, dove \vec{r}_P è la posizione di P e \vec{r}_0 è un opportuno vettore che non dipende dalla scelta di P : ricordando che $\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$, abbiamo infatti

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_0) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) = \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_0).$$

Il luogo di punti dato dalla retta passante per il punto descritto da \vec{r}_0 e parallela alla direzione di $\vec{\omega}$ è detto *asse istantaneo di rotazione*. Va notato che questo asse può sia trovarsi esternamente al corpo sia passargli attraverso: nel secondo caso, tutti i punti del corpo sull'asse sono istantaneamente fermi. Questa osservazione può spesso aiutare a trovare l'asse istantaneo.

5 Dinamica del Corpo Rigido

5.1 Il tensore d'inerzia e il Teorema di Huygens-Steiner

Le proprietà dei corpi rigidi permettono di ricavare un'espressione molto pulita per la loro energia cinetica e il loro momento angolare. Poiché, grazie ai Teoremi di König, sappiamo separare queste due quantità in contributi *del* centro di massa e *relativi al* centro di massa, e sappiamo scrivere banalmente i primi, ci concentreremo sui secondi, denotandoli semplicemente con K e \vec{L} . Mettendoci dunque nel sistema di riferimento del centro di massa, scriviamo la velocità di un punto in posizione \vec{r} (rispetto al centro di massa) come $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Abbiamo quindi

$$K = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \quad \vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm.$$

Queste espressioni non ci dicono ancora nulla. Passando esplicitamente in coordinate cartesiane, riusciremo a esplicitare la dipendenza di queste quantità da $\vec{\omega} = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}$, e introdurremo un nuovo oggetto utile per descrivere la dinamica dei corpi rigidi. Riscrivendo anzitutto l'integrale per il momento angolare, otteniamo

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int [(\omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z})(x^2 + y^2 + z^2) - (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)] dm \\ &= \left[\left(\int (y^2 + z^2) dm \right) \omega_x + \left(- \int xy dm \right) \omega_y + \left(- \int xz dm \right) \omega_z \right] \hat{x} \\ &\quad + \left[\left(- \int xy dm \right) \omega_x + \left(\int (x^2 + z^2) dm \right) \omega_y + \left(- \int yz dm \right) \omega_z \right] \hat{y} \\ &\quad + \left[\left(- \int xz dm \right) \omega_x + \left(- \int yz dm \right) \omega_y + \left(\int (x^2 + y^2) dm \right) \omega_z \right] \hat{z}.\end{aligned}$$

Da qui vediamo che il momento angolare dipende *linearmente* dalla velocità angolare, con dei coefficienti che sono funzione unicamente della geometria del corpo rigido, ossia delle sue dimensioni e della sua estensione di massa. Usando la notazione dell'algebra lineare, possiamo riscrivere questa relazione in maniera compatta:

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega},$$

dove \vec{L} e $\vec{\omega}$ vanno intesi come vettori colonna, mentre \mathbf{I} è la matrice simmetrica

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int xz dm & - \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix},$$

detta *Tensore d'inerzia*. Le sue entrate diagonali si chiamano *momenti d'inerzia*, mentre le altre vengono talvolta dette *prodotti d'inerzia*. La lezione principale da trarre da questo lungo conto è che, in generale, \vec{L} e $\vec{\omega}$ possono avere direzioni diverse.

Eseguendo il medesimo calcolo per l'energia cinetica, scopriamo che il tensore d'inerzia entra anche nella sua espressione. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} \int [(x\omega_y - y\omega_x)^2 + (y\omega_z - z\omega_y)^2 + (z\omega_x - x\omega_z)^2] dm \\ &= \frac{1}{2} \left(\int (y^2 + z^2) dm \right) \omega_x^2 + \frac{1}{2} \left(- \int xy dm \right) \omega_y \omega_x + \frac{1}{2} \left(- \int xz dm \right) \omega_z \omega_x \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(- \int xy dm \right) \omega_x \omega_y + \frac{1}{2} \left(\int (x^2 + z^2) dm \right) \omega_y^2 + \frac{1}{2} \left(- \int yz dm \right) \omega_z \omega_y \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(- \int xz dm \right) \omega_x \omega_z + \frac{1}{2} \left(- \int yz dm \right) \omega_y \omega_z + \frac{1}{2} \left(\int (x^2 + y^2) dm \right) \omega_z^2,\end{aligned}$$

che, in notazione più compatta, diventa

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I} \vec{\omega},$$

ossia, tramite un'espressione in cui il tensore d'inerzia non compare esplicitamente,

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}.$$

Più in generale, il tensore d'inerzia di un corpo rigido può essere definito rispetto a qualunque punto dello spazio. Indicando con $\vec{r} = (x, y, z)$ le posizioni dei punti del solido rispetto a un dato polo, infatti, le formule sopra usate per il momento angolare e l'energia cinetica restano valide, se il momento angolare è preso rispetto a tale polo e l'oggetto sta ruotando con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno a un asse passante per il polo. Poiché non stiamo più usando il centro di massa come punto privilegiato, infatti, non possiamo più applicare il Teorema di König, perciò dobbiamo ricondurci a una situazione particolare, e le quantità K e \vec{L} così calcolate sono quelle totali, non solo i contributi relativi al centro di massa.

Il Teorema di Huygens-Steiner, o degli assi paralleli, che voi conoscerete per i momenti d'inerzia, si estende in questo modo ai tensori di inerzia: con un semplice calcolo (esercizio!) otteniamo infatti la relazione

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_{\text{cm}} + \mathbf{I}_{\text{cm}},$$

dove \mathbf{I}_P è il tensore d'inerzia rispetto al generico polo P , \mathbf{I}_{cm} è il tensore d'inerzia rispetto al centro di massa, e \mathbf{I}_{cm} è la matrice

$$\mathbf{I}_{\text{cm}} = M \begin{pmatrix} Y^2 + Z^2 & -XY & -XZ \\ -XY & X^2 + Z^2 & -YZ \\ -XZ & -YZ & X^2 + Y^2 \end{pmatrix},$$

in cui (X, Y, Z) indica la posizione del punto P rispetto al centro di massa.

5.2 Assi principali ed Equazioni di Eulero

Come si dimostra in Algebra Lineare, poiché il tensore d'inerzia è simmetrico, è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate cartesiane $O'x'y'z'$ nel quale la matrice che rappresenta il tensore d'inerzia è diagonale, cioè ha la forma

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int (y'^2 + z'^2) dm & 0 & 0 \\ 0 & \int (x'^2 + z'^2) dm & 0 \\ 0 & 0 & \int (x'^2 + y'^2) dm \end{pmatrix}.$$

In questo modo osserviamo che, per oggetti planari (ad esempio, ristretti al piano $z' = 0$), il momento d'inerzia relativo all'asse principale perpendicolare a tale piano (I_3 nell'esempio) è uguale alla somma degli altri due: questo fatto è talvolta detto *Teorema degli assi perpendicolari* e può accorciare il calcolo dei

tensori d'inerzia. Se i momenti d'inerzia relativi agli assi principali sono tutti distinti, il corpo rigido è detto *trottola asimmetrica*, mentre se sono tutti uguali si parla di *trottola sferica*. Nel caso intermedio (supponiamo $I_1 = I_2 = I \neq I_3$) abbiamo una *trottola simmetrica*.

Nel sistema di riferimento degli assi principali, quindi, valgono

$$K = \frac{I_1\omega_{x'}^2}{2} + \frac{I_2\omega_{y'}^2}{2} + \frac{I_3\omega_{z'}^2}{2} \quad \vec{L} = I_1\omega_{x'}\hat{x}' + I_2\omega_{y'}\hat{y}' + I_3\omega_{z'}\hat{z}',$$

dove $(\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'})$ sono le componenti cartesiane del vettore $\vec{\omega}$ nel sistema $Ox'y'z'$. Dunque gli assi principali semplificano le espressioni delle quantità dinamiche. Il prezzo pagato per ottenere ciò è che ora gli assi cartesiani usati non sono fissi, ma si muovono insieme al corpo: infatti, è chiaro che, essendo il tensore d'inerzia determinato dalla geometria dell'oggetto, sarà necessario mettersi in un sistema di coordinate solidale al corpo stesso per ottenere un tensore di inerzia con entrate costanti e tale da essere diagonale. Le simmetrie degli oggetti considerati aiutano spesso a capire a priori quali siano gli assi principali di un dato corpo rigido (si vedano, a tal proposito, i problemi a fine dispense).

Poiché il corpo rigido ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$, deduciamo che le direzioni degli assi principali variano secondo le equazioni

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}' \quad \frac{d\hat{y}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{y}' \quad \frac{d\hat{z}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{z}'.$$

Scrivendo la Seconda Equazione Cardinale prendendo come polo il centro di massa, e usando le espressioni suddette, otteniamo (intendendo con I_i le entrate del tensore d'inerzia rispetto al centro di massa)

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}/_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt} (I_1\omega_{x'}\hat{x}' + I_2\omega_{y'}\hat{y}' + I_3\omega_{z'}\hat{z}')$$

$$= (I_1\dot{\omega}_{x'}\hat{x}' + I_2\dot{\omega}_{y'}\hat{y}' + I_3\dot{\omega}_{z'}\hat{z}') + I_1\omega_{x'}(\vec{\omega} \times \hat{x}') + I_2\omega_{y'}(\vec{\omega} \times \hat{y}') + I_3\omega_{z'}(\vec{\omega} \times \hat{z}'),$$

ossia, svolgendo i prodotti vettoriali e scrivendo per componenti:

$$\tau_{x'} = I_1\dot{\omega}_{x'} + (I_3 - I_2)\omega_{y'}\omega_{z'},$$

$$\tau_{y'} = I_2\dot{\omega}_{y'} + (I_1 - I_3)\omega_{z'}\omega_{x'},$$

$$\tau_{z'} = I_3\dot{\omega}_{z'} + (I_2 - I_1)\omega_{x'}\omega_{y'}.$$

Queste equazioni sono dette *Equazioni di Eulero per il corpo rigido*. Si noti che si ottengono l'una dall'altra ciclando gli indici.

Possiamo ora studiare un sistema particolarmente esemplificativo di quanto visto finora: una trottola simmetrica libera (cioè non soggetta ad alcuna forza o momento torcente esterno). Approcceremo dapprima il problema lavorando nel sistema di riferimento inerziale del laboratorio, e in seguito ci metteremo nel sistema solidale alla trottola.

Sistema del laboratorio Supponiamo $I_1 = I_2 = I \neq I_3$. A meno di un moto rettilineo uniforme, possiamo supporre di essere nel sistema di riferimento del centro di massa. Poiché non agiscono momenti torcenti esterni sul sistema, e sappiamo che i momenti torcenti interni in un corpo rigido si annullano a vicenda, il momento angolare \vec{L} (che prenderemo rispetto al centro di massa) è conservato. Senza perdita di generalità, scegliamo gli assi cartesiani in maniera tale che sia $\vec{L} \propto \hat{z}$. Essendo il sistema anche isolato, poiché abbiamo visto che $K = \frac{1}{2}\vec{L} \cdot \vec{\omega}$, si conserva anche la componente ω_z di ω lungo \hat{z} .

Consideriamo ora un sistema di assi principali (rotanti) x', y', z' . Abbiamo

$$\vec{L} = I(\omega_{x'}\hat{x}' + \omega_{y'}\hat{y}') + I_3\omega_{z'}\hat{z}' \quad \vec{\omega} = \omega_{x'}\hat{x}' + \omega_{y'}\hat{y}' + \omega_{z'}\hat{z}'.$$

Eliminando $\omega_{x'}\hat{x}' + \omega_{y'}\hat{y}'$ dalle due espressioni otteniamo

$$\vec{L} = I(\vec{\omega} - \omega_{z'}\hat{z}') + I_3\omega_{z'}\hat{z}' = I\vec{\omega} + (I_3 - I)\omega_{z'}\hat{z}'.$$

Da questa relazione deduciamo che i tre vettori \vec{L} , $\vec{\omega}$ e \hat{z}' giacciono nello stesso piano. Poiché \vec{L} è costante, ci aspettiamo che gli altri due ruotino attorno ad esso, conservando la propria proiezione su \vec{L} . Abbiamo già visto che ciò vale per ω_z tramite la conservazione dell'energia, se prendiamo il prodotto scalare con \hat{z} troviamo

$$L = I\omega_z + (I_3 - I)\omega_{z'}\hat{z} \cdot \hat{z}',$$

dunque pure $\hat{z} \cdot \hat{z}'$ è costante, come voluto. Prendiamo invece il prodotto vettoriale della relazione precedente con \hat{z}' :

$$\vec{L} \times \hat{z}' = I\vec{\omega} \times \hat{z}' = I \frac{d\hat{z}'}{dt}.$$

Questa relazione, come atteso, ci dice che il vettore \hat{z}' ruota attorno alla direzione di \vec{L} , con velocità angolare di modulo

$$\Omega = \frac{L}{I},$$

Per via della relazione lineare tra \vec{L} , $\vec{\omega}$ e \hat{z}' , anche $\vec{\omega}$ ruota con la stessa velocità angolare. Nel sistema di riferimento inerziale, quindi, il moto rotatorio del corpo rigido è la composizione di una rotazione attorno al proprio asse principale \hat{z}' con velocità angolare costante $\omega_{z'} = \frac{L_{z'}}{I_3}$ e di una rotazione di tale asse attorno a \vec{L} con velocità angolare $\Omega\hat{z}$.

Sistema del corpo rigido Usiamo le Equazioni di Eulero, e per alleggerire la notazione chiamiamo x, y, z gli assi principali. Essendo $\vec{\tau} = \vec{0}$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= I\dot{\omega}_x + (I_3 - I)\omega_y\omega_z, \\ 0 &= I\dot{\omega}_y + (I - I_3)\omega_z\omega_x, \\ 0 &= I_3\dot{\omega}_z. \end{aligned}$$

L'ultima equazione ci dice che ω_z è costante. Derivando la prima rispetto al tempo e sostituendone $\dot{\omega}_y$ nella seconda, otteniamo

$$0 = \frac{I^2 \ddot{\omega}_x}{(I - I_3)\omega_z} + (I - I_3)\omega_z\omega_x \Rightarrow \ddot{\omega}_x = - \left(\frac{I - I_3}{I} \omega_z \right)^2 \omega_x,$$

da cui, a meno di una traslazione temporale, si trova

$$\omega_x(t) = A \sin \left(\frac{I - I_3}{I} \omega_z t \right),$$

e, di conseguenza, dalla prima equazione di Eulero,

$$\omega_y(t) = A \cos \left(\frac{I - I_3}{I} \omega_z t \right).$$

Perciò, in questo sistema di riferimento, otteniamo che il vettore $\vec{\omega}$ ruota attorno all'asse principale di momento di inerzia I_3 con pulsazione $\left| \frac{I - I_3}{I} \omega_z \right|$. Il lettore può convincersi che le due descrizioni del moto così ottenute sono consistenti.

Parte III

Invarianti Adiabatici

6 Primi esempi

Esiste un'ampia classe di problemi che coinvolge sistemi animati da un moto "quasiperiodico". Tipicamente, si ha un sistema meccanico caratterizzato da uno o più parametri tali che, quando essi restano costanti nel tempo, il moto del sistema è periodico con periodo T , ma che, nella situazione con cui si ha a che fare, variano lentamente (o *adiabaticamente*), ossia in maniera tale che, se λ è uno di questi parametri, si abbia:

$$T \left| \frac{d\lambda}{dt} \right| \ll |\lambda|$$

In queste situazioni, è spesso possibile studiare la variazione nel tempo, mediata su un quasiperiodo del sistema, delle sue grandezze caratteristiche cinematiche e dinamiche: in questo modo si determina il comportamento del sistema su tempi lunghi rispetto a T . Per rendere il discorso meno astratto, vediamo subito alcuni esempi.

6.1 Esempio 1: pallina tra due muri

Abbiamo una particella di massa m che si muove in una dimensione su una superficie piana e priva di attrito, rimbalzando elasticamente tra due muri verticali. Il muro a sinistra è immobile, mentre quello a destra si muove con una

velocità w costante verso il primo. Al tempo $t = 0$, la velocità della pallina è $v_0 \gg w$ verso sinistra, essa si trova appena a sinistra del muro mobile, e la distanza tra i due muri è x_0 . Determinare il modulo della velocità della pallina quando la distanza tra i due muri è x .

Per prima cosa, dobbiamo interpretare cosa ci sta chiedendo il problema. Infatti, è chiaro che, a essere rigorosi, l'andamento della velocità v della particella rispetto a x è costante a tratti: ogni volta che la pallina urta col muro mobile, la sua velocità cambia sia in modulo che in verso per via dell'impulso impressole da quest'ultimo, mentre negli urti col muro immobile il modulo si conserva. Tra due urti successivi, inoltre, la velocità è parimenti conservata perché sulla pallina non agiscono forze nette. Tuttavia, grazie alla condizione $w \ll v_0$, possiamo pensare di approssimare questa curva costante a tratti a una curva regolare, in quanto, in ogni urto, la velocità della pallina aumenta di poco rispetto al suo valore istantaneo, e il muro mobile si è spostato di poco, dalla sua posizione all'urto precedente, rispetto alla distanza percorsa avanti e indietro dalla particella.

Proviamo dapprima a impostare il problema in maniera esatta: chiamando v_n la velocità della pallina dopo l' n -esimo urto con il muro mobile da $t = 0$, t_n l'istante di tempo in cui tale urto avviene, e x_n la corrispondente posizione del muro (si noti che queste scelte sono consistenti con la notazione del problema), troviamo, con della semplice cinematica, le relazioni

$$w(t_{n+1} - t_n) = x_n - x_{n+1} \quad v_n(t_{n+1} - t_n) = x_n + x_{n+1},$$

mentre, studiando l'urto col muro mobile nel sistema di riferimento di quest'ultimo, troviamo

$$v_{n+1} - v_n = 2w.$$

Dall'ultima relazione segue subito $v_n = v_0 + 2wn$. Sostituendola nelle prime due, ed eliminandone il tempo, otteniamo la seguente relazione ricorsiva per x_n :

$$x_{n+1} = \frac{v_0 + w + 2wn}{v_0 - w + 2wn} x_n.$$

La corrispondente soluzione x_n potrebbe, in linea di principio, essere invertita per dare $n(x)$ e dunque, tramite l'espressione per v_n , una relazione tra v_n e x_n . Tenendo conto della variazione di x tra due urti, si otterrebbe la curva costante a tratti desiderata.

Cerchiamo ora una soluzione approssimata ma più efficace, sfruttando la condizione $w \ll v_0$. Dato che, evidentemente, la velocità della pallina è (debolmente) crescente nel tempo, varrà pure sempre $w \ll v$. Ciò ci autorizza a trattare formalmente n come un parametro continuo, e a riscrivere le relazioni ricorsive come relazioni tra variazioni infinitesime:

$$w \frac{dt}{dn} = - \frac{dx}{dn} \quad v \frac{dt}{dn} = 2x.$$

Come prima eliminiamo il tempo, ottenendo però stavolta un'equazione differenziale che possiamo risolvere sfruttando la chain rule. Infatti, poiché, come visto, è $v_n = v_0 + 2wn$, possiamo scrivere

$$\frac{dv}{dn} = 2w \Rightarrow \frac{dx}{dn} = \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dn} = 2w \frac{dx}{dv},$$

da cui, prendendo il rapporto delle prime due equazioni differenziali,

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{dn} &= \frac{2wx}{v}, & \frac{dx}{dn} &= 2w \frac{dx}{dv} & \Rightarrow & \frac{dx}{dv} = -\frac{x}{v} \\ & & & & \Rightarrow & xv = \text{cost} = x_0 v_0. \end{aligned}$$

In questo modo troviamo la relazione cercata. In questo problema, evidentemente, il ruolo di “parametro del sistema” è ricoperto dalla posizione x del muro mobile, e la condizione di adiabaticità è data da $w \ll v$. Si potrebbe, eventualmente, sostituire a x la sua legge oraria $x(t) = x_0 - wt$, ottenendo

$$v(t) = \frac{v_0}{1 - \frac{wt}{x_0}}.$$

Come discusso in generale, questa espressione filtra il moto quasiperiodico del sistema (i rimbalzi della particella tra i due muri), e fornisce direttamente un'informazione sul suo moto “globale”, su tempi lunghi.

6.2 Esempio 2: pendolo di lunghezza decrescente

Consideriamo un pendolo ideale consistente in una massa puntiforme m appesa all'estremo di un filo (di massa trascurabile) che pende da un piccolo buco nel soffitto.

Il pendolo viene lentamente tirato su, a velocità costante v , in modo che la sua lunghezza efficace ℓ diminuisca col tempo. Se A è l'ampiezza angolare (istantanea) delle oscillazioni del pendolo, che supponiamo avvenire sempre nello stesso piano verticale (non ci interessa considerare eventuali effetti di precessione), valgono inizialmente $v \ll A_0 \sqrt{g\ell_0}$ e $A_0 \ll 1$. Trovare, in funzione del tempo, l'ampiezza angolare $A(\ell)$.

Anche stavolta, come sempre, potremmo impostare il problema esatto tramite le equazioni del moto: passando a coordinate polari, con la condizione $r(t) = \ell_0 - vt$, la Seconda Legge di Newton si scriverebbe in componenti come

$$-m\dot{\theta}^2(r_0 - vt) = -T + mg \cos \theta \quad m(-2v\dot{\theta} + (\ell_0 - vt)\ddot{\theta}) = -mg \sin \theta,$$

dove T è la tensione del filo, dovuta in ultima analisi al meccanismo che tira su il pendolo. Poiché non siamo in grado di risolvere le due equazioni in maniera esatta (la seconda per trovare $\theta(t)$ e dunque risolvere il moto, la prima per calcolare anche la tensione $T(t)$ in funzione del tempo), dobbiamo trovare un'altra strategia. Osserviamo che, se fosse $v = 0$, ci troveremo di fronte alle consuete oscillazioni isocrone del pendolo, cioè a un comportamento periodico. Per

v piccola (come espresso quantitativamente nel testo del problema), possiamo studiare l'evoluzione del sistema come una transizione continua e adiabatica tra oscillazioni successive, mediando le equazioni sui singoli periodi. Otteniamo così delle equazioni differenziali che legano tra loro le variazioni dei valori medi (nel senso specificato) dell'ampiezza delle oscillazioni, della lunghezza del pendolo e della tensione T .

Consideriamo un intervallino di tempo in cui il filo viene sollevato di $|d\ell| = -d\ell \ll \ell$. Il lavoro infinitesimo fatto sul sistema da chi sta sollevando il pendolo è $-\langle T \rangle d\ell$. Questo lavoro va eguagliato alla variazione dell'energia media del sistema. Poiché, in approssimazione di moto periodico con ampiezza angolare piccola, abbiamo delle oscillazioni armoniche, il valor medio dell'energia cinetica è dato da

$$\langle K \rangle \approx \frac{mg\ell A^2}{4},$$

essendo $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$ il quadrato della pulsazione delle oscillazioni e $A\ell$ la loro ampiezza. Per l'energia potenziale, che va presa rispetto al livello del soffitto, abbiamo

$$U = -mg\ell \cos \theta \approx mg\ell \left(\frac{\theta^2}{2} - 1 \right) \Rightarrow \langle U \rangle \approx -mg\ell + \frac{mg\ell A^2}{4},$$

dunque

$$-\langle T \rangle d\ell = d \left(\frac{mg\ell A^2}{2} - mg\ell \right) = mg\ell A dA - mg d\ell + \frac{mgA^2 d\ell}{2}.$$

Per trovare $\langle T \rangle$, cioè il valor medio della tensione in un'oscillazione, prendiamo la componente radiale dell'equazione del moto, ed espandiamo per piccole oscillazioni:

$$T \approx mg \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + m\ell \dot{\theta}^2,$$

di conseguenza

$$\langle T \rangle \approx mg \left(1 + \frac{A^2}{4} \right).$$

Sostituendo e riarrangiando, troviamo infine

$$\frac{3}{4} \frac{d\ell}{\ell} + \frac{dA}{A} = 0,$$

e, quindi,

$$\ell^3 A^4 = \ell_0^3 A_0^4.$$

Notiamo che questa relazione vale con approssimazione tanto peggiore quanto più decresce ℓ . Infatti, la condizione $A \ll 1$ perde di validità per $\ell \rightarrow 0$. Lo stesso discorso si sarebbe potuto fare nell'esempio precedente per $x \rightarrow 0$, in quanto viene a mancare l'ipotesi $T \left| \frac{d\lambda}{dt} \right| \ll |\lambda|$ (con $\lambda = x$). Più in generale, vale che, se delle disuguaglianze o approssimazioni valgono a un certo istante di

tempo, è lecito assumere che lo saranno ancora negli istanti successivi, su tempi corti rispetto a quelli caratteristici di evoluzione del sistema, per continuità, e che le soluzioni trovate su tali basi abbiano validità locale. Tuttavia, in generale, non si può dire nulla sull'andamento dell'errore compiuto per tempi grandi, e nei problemi appena discussi abbiamo visto degli esempi in cui l'approssimazione diventa peggiore al crescere di t .

7 Integrale di Poincaré

Le strategie “euristiche” con cui abbiamo risolto i problemi finora incontrati trovano un’elaborazione sistematica e rigorosa nella Meccanica Hamiltoniana. Poiché la trattazione e le tecniche Hamiltoniane vanno molto al di là degli scopi di questa lezione (nonché, a ragion veduta, del livello richiesto e, spesso, accettato, nelle competizioni di Fisica pre-universitarie), ci limiteremo a esporre il risultato principale e a mostrare come la sua applicazione permetta di ritrovare alquanto velocemente le soluzioni faticosamente ottenute negli esempi proposti.

Dato un sistema unidimensionale descritto da una coordinata q e da un momento coniugato p , che dipende da un parametro λ restando costante il quale il moto del sistema è periodico (cioè, si ha $q(t) = q(t+T)$ e $p(t) = p(t+T)$ per qualche periodo T e per ogni tempo t), allora, se λ varia lentamente, cioè $\lambda(t)$ soddisfa $T \left| \frac{d\lambda}{dt} \right| \ll |\lambda|$, la quantità

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq,$$

dove l'integrale è calcolato su un periodo del sistema “imperturbato” (cioè a λ costante) si conserva al primo ordine in $\left| \frac{T}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right|$.

La quantità I è detta *invariante adiabatico*, o, talvolta, *integrale di Poincaré*. In generale, il *momento coniugato* a una coordinata q si definisce in Meccanica Lagrangiana e Hamiltoniana. Per quel che servirà sapere ora, se l'energia cinetica del sistema si scrive come $K(q, \dot{q}) = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2}$ e l'energia potenziale non dipende da \dot{q} , allora si ha:

$$p = m(q)\dot{q}.$$

Esempi familiari sono le coordinate cartesiane, in cui si ha $m(q) = m$ (indipendente dalla coordinata $q = x$) e quindi $p = m\dot{x}$, coincidente con l'espressione della quantità di moto, e le coordinate polari quando ci si restringe agli spostamenti angolari:

$$q = \theta, \quad K = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} \Rightarrow m(\theta) = mr^2, \quad p = mr^2\dot{\theta},$$

cioè, in questo caso p coincide con la componente z del momento angolare.

Alla luce di questo risultato, torniamo agli esempi precedenti. Nel primo, fissata la distanza x tra i due muri, abbiamo, scegliendo l'origine di q nel muro

di sinistra,

$$0 \leq q \leq x, p = m\dot{q} \Rightarrow I = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^x m\dot{q} dq = \frac{mvx}{\pi},$$

da cui ritroviamo subito $xv = \text{cost.}$

Nel secondo, usando le coordinate polari e scrivendo, in regime di piccole oscillazioni, $\theta(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$, abbiamo

$$I = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A m\ell^2 \dot{\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} m\ell^2 A^2 \left(\frac{g}{\ell}\right) \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) dt = \frac{mA^2\sqrt{g\ell^3}}{2}.$$

Da questa espressione deduciamo la conservazione di $\sqrt{\ell^3}A^2$, come atteso.

Come ultimo esempio, calcoliamo l'invariante adiabatico per un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω , la cui legge oraria è

$$x(t) = a \sin(\omega t) \Rightarrow \dot{x}(t) = a\omega \cos(\omega t),$$

quindi

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} ma^2\omega^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{ma^2\omega}{2} = \frac{E}{\omega},$$

dove E è l'energia dell'oscillatore. Supponiamo di avere una molla con costante elastica k lentamente variabile nel tempo (ad esempio, perché la molla è soggetta a riscaldamento). Allora troviamo una relazione tra l'ampiezza a e k data da

$$I = \frac{\sqrt{kma^2}}{2} \Rightarrow a^4 k = \text{cost.}$$

La relazione $I = \frac{E}{\omega}$ compare, in forma leggermente diversa, in meccanica quantistica, dove la quantizzazione degli osservabili rende gli invarianti adiabatici uno strumento molto potente per studiare sistemi in lenta evoluzione.

In generale, quando si incontrano problemi simili a quelli discussi in questa sezione, è bene cercare di studiarli con i metodi euristici che abbiamo cercato di illustrare, senza invocare subito l'invariante adiabatico.

Parte IV

Problemi

8 Meccanica Celeste

Trio gravitazionale

Tre corpi (considerati come punti materiali) di masse m_1 , m_2 e m_3 interagiscono tra di loro solo gravitazionalmente. Sotto quali condizioni sulle mutue posizioni e sulla velocità angolare i tre corpi ruotano rigidamente attorno al centro di massa comune?

Potenziale di Yukawa

Un corpo di massa m è in moto di un potenziale di Yukawa, cioè della forma

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}e^{-\lambda r}$$

con $\lambda > 0$. Inizialmente il corpo percorre un'orbita circolare di raggio r_0 , dopodiché subisce una piccola spintarella in direzione radiale.

1. Trovare la densità di massa a simmetria sferica $\rho(r)$ che genera tale potenziale;
2. Trovare per quali r_0 l'orbita circolare iniziale è stabile;
3. Per tali valori di r_0 , trovare la pulsazione delle piccole oscillazioni radiali e discutere la precessione.

Potenziale Einsteniano

Un corpo di massa m è in moto di un potenziale della forma

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3}$$

dove L è il momento angolare del corpo. Inizialmente il corpo percorre un'orbita circolare di raggio r_0 , dopodiché subisce una piccola spintarella in direzione radiale.

1. Trovare la densità di massa a simmetria sferica $\rho(r)$ che genera tale potenziale, e i possibili valori di r_0 ;
2. Trovare per quali r_0 l'orbita circolare iniziale è stabile;
3. Per tali valori di r_0 , trovare la pulsazione delle piccole oscillazioni radiali e discutere la precessione.

Il potenziale dato si ottiene approssimando “classicamente” le Equazioni di Einstein risultanti dalla Relatività Generale. Il termine $-\frac{GML^2}{mc^2r^3}$ può essere quindi visto come una prima correzione relativistica al potenziale Newtoniano.

More Puzzling Physics Problems 167

Consideriamo una zona dello spazio in cui è presente un campo magnetico costante e uniforme di modulo B . Abbiamo due elettroni che si muovono in un piano perpendicolare al campo magnetico, su cui agiscono solo le forze dovute a quest'ultimo e all'interazione Coulombiana reciproca. Inizialmente, la distanza tra i due elettroni è d , uno dei due è fermo e l'altro ha velocità \vec{v} . Dimostrare che è possibile scegliere modulo e verso di v in maniera tale che, nel moto seguente, la distanza tra i due elettroni resti costante. Trovare anche il valore minimo di d necessario per ottenere questa situazione, la traiettoria del centro di massa, e dopo quanto tempo la velocità dell'elettrone inizialmente in movimento si annullerà per la prima volta.

OPhO 2022 Oper Round, problema 20

Due anelli concentrici e complanari, di raggi a e $2a$ e masse rispettivamente m e $2m$, si trovano in una regione dello spazio priva di gravità. Viene creata una sottile pellicola di sapone, con tensione superficiale σ , nella zona tra i due anelli (cioè a riempire la corona circolare $a \leq r \leq 2a$). L'anello più piccolo viene ora spostato in maniera tale da rimanere parallelo e coassiale all'altro anello, ma non complanare. La distanza che ora si ha tra i due centri è piccola rispetto ad a . Trovare il periodo delle piccole oscillazioni risultanti.

More Puzzling Physics Problems 27

Su un tavolo orizzontale privo di attrito sono posti due piccoli magneti permanenti. La distanza tra i loro punti più vicini è d , mentre la distanza tra i loro centri di massa è $d+d_0$. I due magneti sono posti in posizione relativa tale che la forza tra di essi sia attrattiva e i momenti torcenti siano nulli. Osserviamo che, tenendo fermo il primo magnete e lasciando libero l'altro, essi collidono dopo un tempo T_1 , mentre, scambiando i ruoli, collidono dopo un tempo T_2 . Dopo quanto tempo colliderebbero lasciando liberi entrambi contemporaneamente?

Punti di Lagrange

I punti di Lagrange sono i punti di equilibrio nel piano dell'orbita terrestre per il potenziale gravitazionale. Sono 5 in tutto, vediamo di individuarli.

In tutto il problema supporre il Sole di massa M_S e la Terra di massa $M_T \ll M_S$. Potrebbe essere utile ricordare che per αx abbastanza piccolo in modulo, vale

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x.$$

I primi 3 punti giacciono sulla retta passante per il Sole e la Terra.

1. Ponendosi nel sistema di riferimento rotante che ha origine nel Sole e asse \hat{x} che punta sempre verso la Terra, trovare le posizioni lungo tale asse in cui è possibile inserire una massetta di prova che subisca una forza totale

nulla.

Nota: Supporre che la Terra giri intorno al centro del Sole su un'orbita circolare di raggio R .

2. Ripetere il punto precedente, ma considerando l'origine del sistema di riferimento nel baricentro del sistema Terra-Sole, attorno a cui ruotano su orbite circolari il Sole e la Terra. I due corpi mantengono comunque una distanza R costante tutto il tempo. I risultati ottenuti sono diversi da quelli del punto precedente?

Gli altri 2 punti di Lagrange sono invece fuori dall'asse di simmetria.

3. Restando nel sistema inerziale del baricentro del sistema, supporre che il Sole sia nel punto \vec{R}_S e la Terra nel punto \vec{R}_T . Scrivere la forza percepita da una massetta m posta nel punto \vec{r} .

HINT: usare la notazione vettoriale, ovvero cercate di non passare in componenti.

4. Trovare la distanza tra \vec{r} e uno degli altri due corpi affinché la forza subita dalla massetta sia diretta verso il baricentro del sistema Terra-Sole e abbia il giusto modulo per farla restare in orbita.

Asteroide verso l'orbita terrestre

Un asteroide di massa m si muove su una traiettoria parabolica intorno al Sole (la cui massa è M_S) nello stesso piano dell'orbita terrestre, che si assume essere circolare e di raggio R . Trascurare l'attrazione tra asteroide e Terra.

1. Sia p la distanza di minimo avvicinamento dell'asteroide dal Sole. Nel caso in cui $p < R$, trovare il tempo T che la cometa spende all'interno dell'orbita terrestre.
2. Calcolare il massimo valore possibile di T in giorni. Per quale valore di p avviene ciò?

Se, invece, p è minore del raggio del Sole, l'asteroide ci cadrà dentro e la massa del Sole aumenterà di una frazione $\alpha \equiv \frac{m}{M_S}$.

3. Studiare come cambiano i parametri dell'orbita terrestre (asse maggiore ed eccentricità) al variare di α .

Corpo rigido in orbita

Abbiamo una trottola simmetrica di massa m con momenti principali di inerzia $I_1 = I_2 = I \neq I_3$ (riferiti al centro di massa C) in orbita attorno a un pianeta di massa $M \gg m$. L'orbita è pressoché circolare, con raggio R molto maggiore delle dimensioni caratteristiche della trottola.

1. Si calcoli, al variare dell'angolo tra la congiungente pianeta- C e l'asse principale con momento di inerzia I_3 , il momento torcente di origine gravitazionale che agisce sulla trottola;
2. Discutere le posizioni di equilibrio (rispetto alle rotazioni attorno al proprio centro di massa) risultanti per la trottola, lavorando nel sistema rotante attorno al pianeta, e trovare la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio.

9 Meccanica del Corpo Rigido

Momenti di inerzia

Calcolare il tensore di inerzia dei seguenti oggetti, tutti di massa M , rispetto a un sistema di assi principali:

- sfera di raggio R , sia cava che piena;
- cilindro di altezza h e raggio R ;
- asta di lunghezza L ;
- prisma a base triangolare con lati a , b e c e altezza h ;
- cubo di lato L ;
- sfera di raggio R con cavità sferica di raggio r a distanza d dal centro.

Urto tra sfere

Una sfera A di massa m_A e raggio R è a riposo sul piano. Una seconda sfera (B) di massa m_B e raggio R colpisce la sfera A con velocità prima dell'urto v_0 e parametro d'impatto $b < 2R$. In questo caso il parametro di impatto b è definito come la distanza perpendicolare tra la traiettoria della sfera A e il centro della sfera B. Trovare le velocità finali di entrambe le sfere. Trascurare l'attrito.

Urto tra asta e pallina

Un'asta omogenea lunga l e di massa m , inizialmente a riposo in assenza di gravità, viene colpita da una massa puntiforme di massa m' a una distanza a dell'estremo superiore dell'asta ($0 < a < l/2$) con velocità prima dell'urto v_0 perpendicolare all'asta. Trovare la relazione fra le m , m' , a , l e v_0 per cui c'è un unico urto fra l'asta e la massa. Trascurare l'attrito.

Asta che cade

Sia data un'asta omogenea lunga l appoggiata ad una parete, che forma un certo angolo $\theta_0 < \pi/2$ rispetto al pavimento. Improvvisamente sparisce l'attrito sul pavimento e sulla parete che teneva l'asta in posizione. Determinare a quale angolo avviene il distacco tra l'asta e la parete verticale.⁶

⁶Può essere utile fare il problema prendendo come polo il centro di massa, l'intersezione fra la parete e il pavimento, il punto (mobile) in cui la scala tocca il muro o il pavimento, o ancora un polo più furbo (quello per cui i momenti delle forze di contatto sono nulli).

Matita che cade

Una matita, modellizzabile come asta rigida omogenea di massa m e lunghezza l , è tenuta in equilibrio sulla punta. Viene ora una piccola spinta iniziale. Nel caso in cui il tavolo in cui poggia sia privo d'attrito, si dimostri che la punta resta sempre in contatto con il tavolo e trovi la velocità angolare con cui la matita impatta il tavolo. Cosa cambia se invece il tavolo ha attrito infinito?

Tidal lock

È risaputo che la Luna mostra sempre, più o meno, la stessa faccia alla Terra. Questa curiosità non è una coincidenza, ma una semplice conseguenza delle forze di marea che agiscono tra la Terra e la Luna. Nel corso del tempo, le forze di marea hanno continuamente rallentato la rotazione della Luna asse fino a quando il periodo di quella rotazione è diventato uguale al periodo orbitale della Luna intorno alla Terra. È per la stessa ragione per cui la rotazione della Terra attorno al suo asse rallenta continuamente e la velocità orbitale della Luna sta ancora decrescendo.

1. Stimare il rapporto tra la diminuzione di energia cinetica della Terra e della Luna per unità di tempo.
2. Durante il programma Apollo (voli 11, 14 e 15), dei catadiottri (serie di specchi laser ad angolo cubo) sono stati posizionati sulla Luna. Secondo le misurazioni laser estremamente accurate rese possibili dalla presenza dei catadiottri, la distanza lineare della Luna dalla Terra è attualmente in aumento a una velocità di 3,8 cm per anno. Utilizzando questo dato, stimare la variazione della lunghezza di un giorno terrestre durante un anno.
3. Se il sistema Terra-Luna continuasse il suo moto indisturbato, come a risultato dell'effetto frenante delle forze di marea, dopo un tempo sufficientemente lungo, la Terra mostrerebbe sempre la stessa faccia alla Luna, cioè le rotazioni e i movimenti orbitali di questi due corpi sarebbero sincronizzati⁷. Quante volte più lungo di oggi sarebbe un giorno della Terra e quanto più grande di oggi sarebbe la distanza Terra-Luna?

Si supponga che l'orbita della Luna rimanga circolare e si trascuri l'effetto di marea del Sole.

Disco da hockey

Un disco piatto omogeneo (come un disco da hockey su ghiaccio) scivola e rotola su una superficie ghiacciata. A causa dell'attrito, entrambi i tipi di movimento decelerano e infine fermarsi. Quale dei due movimenti si ferma prima, la rotazione o lo scivolamento? Supponiamo che il disco preme uniformemente sul

⁷In realtà, prima che questo possa accadere, il Sole esploderà in una gigante rossa.

ghiaccio, che la forza di attrito tra due superfici non dipenda dalla loro velocità relativa e che resistenza dell'aria sia trascurabile.

Giradischi

Un disco orizzontale con superficie ruvida è tenuto in rotazione attorno il suo asse di simmetria con velocità angolare Ω . Una sfera ruvida di raggio R rotola senza strisciare e il suo centro si muove su una circonferenza di raggio r_0 , concentrica al disco. Trovare la velocità lineare iniziale e la velocità angolare iniziale che la palla deve avere per compiere questo moto. Qual è il moto del centro della sfera se inizialmente ha velocità e velocità angolare uguali in modulo rispetto a quello trovate nella domanda precedente, ma opposte?

Matita che rotola

Si modellizzi una matita lunga l come un prisma che ha per base un esagono regolare di lato $a \ll l$, e ha una massa M distribuita omogeneamente. Si pone ora la matita su un piano inclinato di un angolo θ con attrito infinito, con il lato lungo sempre alla stessa altezza. Viene quindi data una spinta alla matita che comincia a rotolare. Si assuma che le facce del prisma siano leggermente concave in modo che solo gli spigoli siano in contatto con il piano, ma che la concavità non abbia effetto sul momento d'inerzia.

1. Si dimostri che il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse centrale del prisma vale $I = \frac{5}{12}Ma^2$.
2. Si trovi la relazione fra la velocità angolare della matita appena prima che uno spigolo colpisca il tavolo e la velocità angolare immediatamente dopo l'urto. Domanda analoga per l'energia cinetica. Trovare ora l'energia cinetica minima appena dopo un impatto affinché possa avvenire l'impatto successivo. Trovare la velocità limite della matita. Si assuma che la matita tocchi il piano in ogni istante.
3. Qual è il minimo valore di θ per cui esiste una velocità limite non nulla? Qual è il valore massimo di θ per cui la matita rimane sempre in contatto con il piano?

Teorema della Racchetta

Dimostrare che, in una trottola asimmetrica (con $I_1 < I_2 < I_3$), le rotazioni attorno a uno degli assi principali estremali (cioè quelli con $I = I_1$ o $I = I_3$) sono stabili, mentre quelle attorno all'asse intermedio sono instabili. Trovare, per i primi due, la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio.

Quanti assi principali?

Dimostrare che, in una trottola simmetrica, fissato un polo per il tensore d'inerzia, qualunque coppia di assi mutuamente ortogonali passanti per tale polo

e appartenenti al piano definito dai due assi principali con lo stesso momento d'inerzia può essere scelta come assi principali al posto dei due dati. Cosa si può dire nel caso di una trottola sferica?

More Puzzling Physics Problems 53

Una palla da biliardo, inizialmente a riposo su un tavolo da biliardo, viene colpita in un suo punto T . Siano O il centro della palla e P il suo punto di contatto col tavolo: allora l'impulso impresso alla pallina giace nel piano cui appartengono T , O e P . Trovare l'angolo che deve formare tale impulso con l'orizzontale affinché:

1. I moti traslatorio e rotatorio della pallina risultanti terminino contemporaneamente;
2. La pallina rotoli senza scivolare, qualunque sia il coefficiente di attrito tra essa e il tavolo.

Assumere che, durante il colpo, non ci sia slittamento tra l'asta e la pallina da biliardo.

Angolo di rotazione

Una disco piatto omogeneo di massa m e raggio r può ruotare sul piano senza attrito. Un bambino di massa m' sale sul disco dove c'è un segno S e fa un giro completo lungo il bordo del disco tornando in S . Dove si trova il bambino rispetto al punto dove è salito? Di quale angolo ha ruotato il disco rispetto al suo centro?

Dipolo in campo magnetico

Possiamo schematizzare un dipolo elettrico come una sbarretta rigida di lunghezza l ai cui capi sono attaccate due cariche, una $+q$ e l'altra $-q$. Il verso di l è fatto in modo che il vettore vada dalla carica negativa a quella positiva. Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$.

1. Leggi di conservazione.
 - Calcolare la forza totale agente sul dipolo, e il momento torcente rispetto al centro di massa. Scrivere le equazioni del moto per il centro di massa del dipolo e per la rotazione attorno al centro di massa.
 - Dalle equazioni del moto trovare la quantità di moto modificata che si conserva. Denotarla con \vec{P} . Scrivere la conservazione dell'energia meccanica totale E .
 - Mostrare che la quantità definita come

$$J = (\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \vec{B}$$

è una costante del moto (I è il momento di inerzia rispetto al centro di massa).

2. Moto nel piano perpendicolare a \vec{B} .

- Supponiamo che all'istante iniziale il centro di massa del dipolo sia fermo nell'origine, \vec{l} punti nella direzione x e la velocità angolare iniziale sia $\omega_0 \hat{z}$. Se ω_0 è minore di un certo valore critico ω_c , il dipolo non compie un giro completo rispetto al centro di massa. Trovare ω_c .
- Per un generico $\omega_0 > 0$ qual è la massima distanza d_{\max} nella direzione x , che il centro di massa può raggiungere?
- Qual è la tensione sulla sbarretta in funzione di ω ?

Altalena ideale

Studiamo le piccole oscillazioni di un'altalena. Consideriamo una sbarretta unidimensionale di lunghezza d e massa m uniformemente distribuita, ai cui estremi sono attaccati due fili leggerissimi di lunghezza L . I loro altri due capi sono attaccati a due punti del soffitto la cui distanza relativa è d . La gravità è \vec{g} . Ruotiamo l'altalena di un angolo ϕ piccolo (quantificare tale condizione) attorno a un asse verticale passante per il suo centro nella posizione di equilibrio, e poi la rilasciamo. Trovare la pulsazione delle piccole oscillazioni risultanti.

Decelerazione di una bicicletta

Abbiamo una bicicletta di massa M che si muove con velocità v_0 e il cui centro di massa è a un'altezza D dal terreno. Le due ruote sono equidistanti dal centro di massa, con i rispettivi centri a una distanza orizzontale $2L$ l'uno dall'altro. Il momento d'inerzia delle due ruote è trascurabile. Le due ruote possono rotolare senza strisciare fintantoché si abbia $F \leq \mu N$, dove F è la forza applicata nel punto di contatto tra ruota e terreno, parallela a quest'ultimo, N è la reazione normale e μ è il coefficiente d'attrito. Alla bicicletta è impressa una decelerazione a .

1. nel caso in cui si possa frenare solo con la ruota anteriore, dire qual è il massimo valore di a (in modulo) tale che la bicicletta non slitti durante la frenata;
2. fare lo stesso nel caso in cui si possa frenare solo con la ruota posteriore.

La gravità è presente e vale \vec{g} .

Monociclo

Un monociclista viaggia su un monociclo il cui punto più basso percorre una traiettoria circolare piana di raggio R . Monociclista e monociclo assieme possono essere modellizzati come un'asta rigida e uniforme di lunghezza L , inclinata di un

angolo θ verso il centro della circonferenza rispetto alla verticale. Supponendo che il coefficiente d'attrito fra monociclo e terreno sia abbastanza alto, qual è la velocità angolare alla quale viene percorsa la traiettoria? La gravità è \vec{g} .

EuPhO 2019/2

Una palla omogenea di raggio R e massa m possiede una densità di carica uniforme, tale che la carica totale sia Q . Essa viene posta su un piano orizzontale e la si mette in moto in maniera tale che sia in regime di puro rotolamento, con velocità del centro di massa v_0 . Il piano è sufficientemente scabro da non farla slittare, ed è presente un campo magnetico costante e uniforme di modulo B e diretto verso l'alto. Descrivere il moto risultante della palla.

Puzzling Physics Problems 69

Tre fili di lunghezze h_1 , h_2 e h_3 sono attaccate per un estremo ai tre vertici di un triangolo omogeneo di massa m , mentre l'altro estremo di ciascuna è attaccato a uno stesso punto del soffitto. Ognuno dei tre fili è teso. Trovare i rapporti tra le tensioni dei tre fili.

10 Invarianti Adiabatici

USAPhO 2015/A3

Un parallelepipedo molto lungo di massa m_1 è posto su una superficie orizzontale priva di attrito. Un blocco di massa m_2 si trova sopra il parallelepipedo, collegato con una molla di costante elastica k tenuta orizzontale a un muro verticale. Il coefficiente di attrito (sia statico che dinamico) tra i due oggetti è μ . Si tratti il moto dei due corpi come unidimensionale. Si assuma che il blocco non cada mai dal parallelepipedo. Inizialmente, entrambi gli oggetti sono fermi, e il blocco è spostato di una lunghezza A dalla posizione di equilibrio e successivamente rilasciato.

- Si trovi il valore limite A_c di A tale che, nel moto seguente, non ci sia dissipazione di energia in attrito.
- Assumendo ora $A \gg A_c$, si determini la variazione ΔA dell'ampiezza delle oscillazioni del blocco rispetto alla sua posizione di equilibrio ad ogni oscillazione completa.

Tetherball

Una piccola massa m è appesa a un estremo di un filo di lunghezza L_0 e massa trascurabile, la cui altra estremità è attaccata a un palo verticale sottile (ossia, di raggio $r \ll L_0$). Inizialmente, il filo è del tutto srotolato e tenuto dritto in modo da formare un angolo α_0 con la verticale, dopodiché alla massa viene impressa una velocità orizzontale tale che il suo moto sia inizialmente approssimabile a un moto circolare attorno al palo. Assumendo che il filo non scivoli lungo il palo, trovare l'angolo α tra il filo e la verticale quando la lunghezza della parte non arrotolata del filo è divenuta L .

Muro tra due palline

Consideriamo una versione modificata dell'Esempio 1. Si hanno due muri verticali immobili, posti a distanza $2L$ l'uno dall'altro, separati da una superficie piana e priva di attrito. A eguale distanza tra i due è posto un terzo muro verticale, mobile e di massa M . In ciascuna delle due regioni risultanti è presente una pallina di massa $m \ll M$ che rimbalza tra il muro mobile e il corrispondente muro immobile. Le due palline hanno inizialmente velocità approssimativamente uguale a v_0 . Se il muro mobile viene spostato di $s \ll L$ dalla posizione di equidistanza dai muri fissi, determinare il periodo delle sue oscillazioni risultanti attorno alla posizione di equilibrio.

Due pulegge

Su due pulegge ideali poste alla stessa altezza da terra scorre uno stesso filo di massa trascurabile, posto in maniera tale che, inizialmente, esso penda per

un'uguale lunghezza ℓ da entrambe. A ciascuno dei due estremi è attaccata una piccola massa m , ed è presente la gravità terrestre \vec{g} . La massa di destra viene spostata di un piccolo angolo $\theta_0 \ll 1$, dopodiché il sistema viene lasciato evolvere. Qual è la velocità della massa di sinistra quando la lunghezza del filo sporgente da sinistra è diventata $\frac{\ell}{2}$?

Physics Cup 2017/3

Consideriamo un gas di elettroni a bassa densità immerso in un campo magnetico uniforme di modulo B a temperatura T . Il modulo del campo magnetico viene dapprima portato lentamente da B a $2B$, cioè con $\frac{dB}{dt} \ll \frac{B^2 e}{m}$, dove e è la carica elementare e m è la massa dell'elettrone. Attendiamo che il gas raggiunga l'equilibrio termico, dopodiché riportiamo altrettanto lentamente il campo magnetico da $2B$ a B e lo lasciamo di nuovo termalizzare. Qual è la temperatura finale del gas?

Pendolo su piano inclinato

Sia dato un piano liscio inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, a un punto del cui spigolo superiore è appeso un pendolo ideale di massa m e lunghezza ℓ . La distanza tra la base del piano e il suo spigolo superiore è d . La gravità è \vec{g} . Il pendolo, che poggia sul piano, è in regime di piccole oscillazioni, e l'angolo α viene variato lentamente. Trovare l'ampiezza angolare A delle piccole oscillazioni in funzione di α , conoscendo il valore A_0 che assume quando $\alpha = \alpha_0$.