

# Dispense di Meccanica

Giacomo Calogero \*, Guglielmo Di Grazia †

6 Febbraio 2024, Pisa

## Sommario

Leggi di conservazione di energia, quantità di moto e momento angolare. Teoremi di König per momento angolare ed energia cinetica. Uso delle coordinate polari e derivate dei versori. Cenni di moto in campo centrale, in particolare uso del potenziale efficace e breve trattazione delle leggi di Keplero.

## 1 Conservazione dell'energia

### 1.1 Forze conservative

Le leggi di conservazione ricoprono un ruolo di fondamentale importanza in Fisica: spesso consentono di semplificare la risoluzione di un problema, di capire alcune proprietà di un sistema anche quando non è possibile risolvere analiticamente le equazioni che lo descrivono, o di mettere in luce particolari simmetrie e proprietà. Non tutte le forze fisicamente possibili, però, ammettono delle leggi di conservazione esprimibili in maniera compatta ed elegante.

Una forza  $\vec{F}$  può dipendere esplicitamente da più parametri: solitamente questi sono la posizione  $\vec{r}$  della particella su cui agisce, la sua velocità  $\vec{v}$  e il tempo  $t$ . Per alcune forze dipendenti dal tempo è possibile trovare un analogo della familiare energia, ma non si conserverà al variare di  $t$ ; escluderemo quindi questo caso. Le forze dipendenti dalla velocità sono comunemente forze dissipative e anch'esse non permettono di trovare quantità non banali conservate. Ci concentreremo quindi su forze nella forma  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ .

Per qualsiasi forza vale il Teorema dell'energia cinetica: *il lavoro netto  $\Delta W$  svolto dalle forze su un oggetto equivale alla sua variazione di energia*

---

\*giacomo.calogero@sns.it

†guglielmo.digrazia@sns.it

*cinetica*  $\Delta K$ .

Affinché sia possibile trovare un'energia che si conservi, tale lavoro deve dipendere soltanto dal punto di partenza e di arrivo dell'oggetto e non dal percorso seguito per arrivarvi o, equivalentemente, il lavoro svolto dalla forza lungo un cammino chiuso dev'essere nullo. Tutte le forze che soddisfano questa condizione per ogni possibile cammino sono dette forze conservative: esempi notevoli sono la forza elettrostatica e gravitazionale. Non sempre ciò accade: la forza d'attrito, ad esempio, non soddisfa tale condizione, dal momento che il lavoro svolto su un circuito chiuso è sempre strettamente negativo. Esamineremo innanzitutto il caso in cui le uniche forze che compiono lavoro sul sistema sono conservative.

## 1.2 Particella in moto unidimensionale

Consideriamo una particella puntiforme vincolata a muoversi lungo l'asse  $\hat{x}$ , sotto l'azione di una forza conservativa  $\vec{F} = F(x)\hat{x}$ . Tralasciando i casi patologici, è possibile trovare una funzione  $U(x)$  tale che

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Possiamo esibire un esempio esplicitamente: dato un qualsiasi punto  $x_0$ , definiamo

$$U(x) = -\int_{x_0}^x F(x)dx$$

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale,  $U(x)$  soddisferà la condizione richiesta.

La scelta del simbolo  $U$  non è casuale: in seguito vedremo come essa coincida con la già familiare energia potenziale. Possiamo convincerci di ciò esaminando la Seconda Legge di Newton, scritta nel seguente modo:

$$m\dot{v} = -\frac{dU}{dx}$$

Moltiplicando da entrambi i lati per  $v$  si ottiene:

$$m\dot{v}v = -\frac{dU}{dx}v$$

Ma il lato sinistro può essere riscritto come

$$m\dot{v}v = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right)$$

mentre possiamo applicare la regola per la derivazione di una funzione composta al lato destro, ottenendo:

$$-\frac{dU}{dx}v = -\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{dU(x)}{dt}$$

Ciò significa che

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{dU(x)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U(x)\right) = 0$$

Di conseguenza la quantità tra parentesi è una costante del moto, a cui viene comunemente dato il nome di energia:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \text{cost.}$$

Energia ed energia potenziale sono definite a meno di una costante additiva: aggiungere una quantità  $U_0$  a entrambe non altererebbe la fisica del problema, visto che  $U(x)$  appare nelle equazioni del moto solo sotto l'azione di una derivata.

### 1.3 Particelle interagenti in moto unidimensionale

Un caso simile al precedente e altrettanto frequente è quello di due particelle di massa  $m_1$ ,  $m_2$  interagenti attraverso una forza conservativa. Consideriamo come prima il caso unidimensionale: sia  $\hat{x}$  l'asse su cui le particelle sono vincolate,  $x_1$ ,  $x_2$  le rispettive posizioni, sia  $r = x_1 - x_2$  la distanza tra le due. Analogamente a prima, la forza dovrà dipendere solo dalle posizioni delle particelle e, visto che è una forza di interazione tra le due, sarà funzione solo della distanza relativa  $r$ .

Sia quindi  $F(r)$  la forza agente sulla prima particella (sulla seconda agirà  $-F$ ): come prima, possiamo trovare una funzione  $U(r)$  tale che  $F(r) = -\frac{dU}{dr}$ . Ripetiamo i passaggi precedenti, moltiplicando le equazioni cardinali per  $v_1$ ,  $v_2$  rispettivamente:

$$m_1\dot{v}_1 = -\frac{dU}{dr} \Rightarrow m_1\dot{v}_1v_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2\right) = -\frac{dU}{dr}v_1$$

$$m_2\dot{v}_2 = +\frac{dU}{dr} \Rightarrow m_2\dot{v}_2v_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_2v_2^2\right) = +\frac{dU}{dr}v_2$$

Sommando membro a membro e ricordando la definizione di  $r$ , si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) = -\frac{dU}{dr}(v_1 - v_2) = -\frac{dU}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{dU(r)}{dt}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + U(r) = \text{cost.}$$

Ancora una volta, questa quantità conservata, così come  $U(r)$ , è definita a meno di una costante. Nella maggior parte dei casi la forza di interazione tende a zero per  $r \rightarrow +\infty$ , quindi si è soliti scegliere tale costante in modo che anche  $U(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow +\infty$ : ad esempio, nel caso della forza gravitazionale l'energia potenziale di interazione sarà  $U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ .

## 1.4 Caso generale

Tramite strumenti matematici più avanzati è possibile dimostrare che, per forze conservative, la legge di conservazione dell'energia continua a valere anche in più dimensioni. Ciò significa che per una particella in moto in un campo di forze conservativo l'energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r})$$

sarà conservata, dove  $U(x, y, z)$  è una funzione della posizione tale che

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z} \right)$$

Si può dimostrare che l'esistenza di una funzione  $U$  per cui quest'ultima condizione è verificata è equivalente a richiedere che la forza sia conservativa, ovvero che il lavoro svolto su un qualsiasi cammino dipenda soltanto dal punto di partenza e di arrivo. Nel caso in cui lo sia, possiamo quindi "costruire" una possibile funzione  $U(\vec{r})$  scegliendo arbitrariamente un punto  $\vec{r}_0$  in cui  $U$  si annulla e ponendo per qualsiasi altro punto

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove l'integrale è svolto su un qualsiasi cammino con origine in  $\vec{r}_0$  e terminante in  $U(\vec{r})$ . L'arbitrarietà del punto di annullamento equivale alla possibilità di poter aggiungere ad  $U$  una qualsiasi costante senza alterare la fisica del problema.

Notiamo inoltre come l'energia potenziale per una coppia di particelle interagenti sia un unico termine associato alla coppia, e non uno per ciascuna particella. A questo punto è immediato generalizzare al caso di  $N$  particelle mutualmente interagenti, associando un termine  $U_{ij}$  alla coppia fatta dall' $i$ -esima e  $j$ -esima particella.

Nel caso più generale (particelle interagenti poste in un campo di forze conservative esterno) avremo quindi un'energia potenziale data dalla somma di termini  $U_i$  per ciascuna particella, dovuti alla presenza del campo esterno, e termini  $U_{ij}$  dovuti all'interazione tra coppie: in assenza di forze non conservative, l'energia totale del sistema sarà data da

$$E = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{1 \leq i \leq N} U_i(\vec{r}_i) + \sum_{1 \leq j < i \leq N} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

## 1.5 Sistemi ad un grado di libertà

Il numero di *gradi di libertà* di un sistema è definito come il numero minimo di variabili necessarie per avere una descrizione completa del suo stato: una particella libera di muoversi avrà 3 gradi di libertà, corrispondenti alle 3 coordinate  $(x, y, z)$ , mentre se fosse vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera fissata sarebbero necessari soltanto due angoli  $(\theta, \varphi)$ , rendendo il numero di gradi di libertà pari a 2.

In ambito olimpico molti dei sistemi meccanici hanno un unico grado di libertà, e la legge di conservazione dell'energia consente di trovare le equazioni del moto senza dover ricorrere a forze e momenti. Per fare ciò, è necessario trovare un parametro  $\eta$  in funzione del quale esprimere tutte le coordinate rilevanti  $x_i(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$  etc.; solitamente si tratterà di una distanza o un angolo. Tale parametrizzazione dipenderà dal modo in cui il sistema è vincolato, visto che è soltanto grazie ai vincoli che è possibile descrivere l'intero sistema in funzione di una sola coordinata.

A questo punto sarà possibile esprimere l'energia potenziale in funzione di  $\eta$ :  $U = U(x_1(\eta), x_2(\eta), \dots) = U(\eta)$ . Derivando rispetto al tempo, possiamo riscrivere  $\dot{x}_i = \dot{\eta} \frac{dx_i}{d\eta}$  e inserire ciò nell'espressione dell'energia cinetica, ottenendo

$$E = \frac{1}{2} \mu(\eta) \dot{\eta}^2 + U(\eta)$$

dove  $\mu(\eta)$  è la nuova "massa efficace" del sistema (potenzialmente dipendente da  $\eta$ ). Ciò ci consente di ottenere  $\dot{\eta}$  dato  $\eta$ , e quindi anche ogni altro valore delle velocità una volta scelto lo stato del sistema.

Se volessimo calcolare le accelerazioni, possiamo notare che

$$\ddot{\eta} = \frac{d\dot{\eta}}{dt} = \frac{d\dot{\eta}}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{2} \dot{\eta}^2 \right) = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{E - U(\eta)}{\mu(\eta)} \right)$$

ottenendo quindi un'espressione per  $\ddot{\eta}$  in funzione esclusivamente di  $\eta$ . Per un esempio pratico di questo metodo, si vedano i problemi 5, 6, 7.

## 2 Conservazione della quantità di moto

Dato un oggetto su cui la risultante delle forze è nulla, la Seconda Legge della Dinamica afferma che

$$\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Di conseguenza,  $\vec{p}$  rimane costante nel moto successivo. La Legge di conservazione della quantità di moto costituisce una generalizzazione di questo fatto.

Prima di tutto, richiamiamo la definizione di centro di massa di un sistema di particelle: il vettore posizione del centro di massa è dato da

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Nel caso (più comune) in cui le masse delle particelle rimangano invariate, possiamo derivare rispetto a  $t$  entrambi i membri, ottenendo

$$M\dot{\vec{R}} = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{P}$$

dove abbiamo posto  $M = \sum m_i$  (massa totale del sistema) e  $\vec{P} = \sum \vec{p}_i$  (quantità di moto totale del sistema). Abbiamo quindi ottenuto che la quantità di moto del sistema è pari a quella di una particella di massa  $M$ , posta in corrispondenza del centro di massa. Ciò vale non solo per sistemi di particelle ma anche per sistemi dove sono presenti corpi estesi, dal momento che anch'essi possono essere visti come composti da un insieme di parti infinitesime trattabili a loro volta come particelle puntiformi. Esse interagiranno tramite forze interne che complessivamente si annulleranno a coppie, dunque il risultato finale rimarrà valido anche in questo caso.

Supponiamo adesso che sulla  $i$ -esima particella del sistema agiscano una forza esterna netta  $\vec{F}_i^{ext}$  e una forza interna netta  $\sum_j \vec{F}_{ij}$  dovuta alle interazioni con le altre particelle. Si avrà

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

Sommando questa quantità per tutte le particelle del sistema, otteniamo

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i,j} \vec{F}_{ij}$$

Riconosciamo che il lato sinistro è pari a  $\dot{\vec{P}}$ ; inoltre, dalla Terza Legge di Newton si ha  $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}$ , quindi  $\sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = \vec{0}$  dal momento che stiamo

contanto esattamente una volta sia la coppia ordinata  $(i, j)$  sia  $(j, i)$ . Di conseguenza

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Da ciò segue immediatamente che se la forza esterna netta è nulla,  $\vec{P}$  si conserva. Ciò vale anche se la risultante ha una sola (o due) componenti nulle: se  $\sum_i F_{i(x)}^{ext} = 0$  allora  $P_x$  sarà una costante del moto, indipendentemente da ciò che accade lungo gli altri due assi.

Di norma, nei casi in cui  $\vec{P}$  si conserva, è utile porsi nel sistema di riferimento che ha il c.d.m. come origine: questo sarà inerziale, dunque non necessita di aggiunta di forze apparenti, ed inoltre varranno le seguenti:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = \vec{0} \qquad \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

In seguito vedremo un esempio in cui queste condizioni vengono sfruttate.

### 3 Conservazione del momento angolare

Fissato un polo  $O$ , il momento angolare di una particella rispetto ad esso è definito come

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{p}$$

Definendo il momento di una forza come  $\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{F}$ , sappiamo che

$$\sum_i \vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Generalizziamo quest'equazione a un sistema di particelle. Ci limiteremo a discutere il caso in cui il polo sia fisso nel sistema di riferimento scelto: è possibile estendere questo procedimento a poli mobili, ma nei problemi di livello olimpico molto spesso è possibile scegliere il proprio sistema di riferimento in modo da ridursi al caso che discuteremo.

Calcoliamo quindi il momento angolare totale del sistema:

$$\vec{L}_O = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times m_i \vec{v}_i$$

Prendendone la derivata otteniamo

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_O &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times m_i \dot{\vec{v}}_i + \sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_i = \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_{ij}\end{aligned}$$

Concentriamoci sul secondo termine: possiamo scriverlo come

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i, j \leq N} (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_{ij} &= \sum_{1 \leq j < i \leq N} (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_{ij} + \sum_{1 \leq j < i \leq N} (\vec{r}_j - \vec{r}_O) \times \vec{F}_{ji} = \\ &= \sum_{1 \leq j < i \leq N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}\end{aligned}$$

dove abbiamo prima spezzato la sommatoria in due parti, una con  $j < i$  e viceversa, e poi abbiamo applicato la Terza Legge di Newton. A questo punto, utilizziamo la *forma forte* di quest'ultima, la quale afferma che le forze interne tra due particelle sono uguali in modulo, opposte in direzione e allineate con la congiungente dei due centri. Ciò significa che  $\vec{F}_{ij} \propto \vec{r}_i - \vec{r}_j$ , ovvero ciascuno dei termini rimasti dell'ultima sommatoria in esame è nullo.

Tornando all'espressione precedente, abbiamo ottenuto che

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_i^{ext} = \sum_i \vec{\tau}_i^{ext}$$

ovvero che gli unici momenti che causano una variazione di  $\vec{L}$  sono quelli esterni. Come conseguenza, se il momento torcente esterno netto è nullo,  $\vec{L}$  si conserva; come prima, se il momento esterno si annullasse lungo una sola componente, sarebbe soltanto la rispettiva componente del momento angolare a conservarsi.

## 4 Teorema di König

Abbiamo visto in precedenza come la quantità di moto di un sistema di particelle sia la stessa che si otterrebbe se tutta la massa fosse concentrata in una particella posta nel centro di massa. Delle relazioni simili esistono anche per l'energia cinetica e per il momento angolare, consentendoci di decomporli in una componente relativa al c.d.m. e una corrispondente al sistema visto come particella puntiforme.

## 4.1 Prima parte - momento angolare

Dato un polo fisso  $O$  rispetto a cui calcolare  $\vec{L}$ , sia  $\vec{r}_O$  la sua posizione,  $\vec{R}$  quella del c.d.m.,  $\vec{r}_i, \vec{v}_i$  posizione e velocità della particella  $i$ -esima nel sistema di riferimento originario,  $\vec{r}_{i(cm)}, \vec{v}_{i(cm)}$  le stesse quantità nel sistema di riferimento del centro di massa. Si avrà

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_{i(cm)} \quad \vec{v}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_{i(cm)}$$

Calcoliamo  $\vec{L}$  rispetto al polo scelto:

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_{i(cm)} - \vec{r}_O) \times m_i (\dot{\vec{R}} + \vec{v}_{i(cm)}) \\ &= (\vec{R} - \vec{r}_O) \times \sum_i m_i \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}_{i(cm)} \times m_i \vec{v}_{i(cm)} \\ &\quad + (\vec{R} - \vec{r}_O) \times \left( \sum_i m_i \vec{v}_{i(cm)} \right) + \left( \sum_i m_i \vec{r}_{i(cm)} \right) \times \dot{\vec{R}} \end{aligned}$$

Notiamo innanzitutto che, dal momento che sono misurati nel sistema con il c.d.m. come origine, i due termini tra parentesi sono nulli (corrisponderebbero alla posizione e alla velocità del c.d.m. nel sistema di riferimento in cui è a riposo nell'origine). Per quanto riguarda gli altri due termini, il primo può essere riscritto come

$$(\vec{R} - \vec{r}_O) \times \sum_i m_i \dot{\vec{R}} = (\vec{R} - \vec{r}_O) \times M \dot{\vec{R}}$$

ovvero il momento angolare di una particella puntiforme di massa  $M$  coincidente con il centro di massa. Il secondo è invece

$$\vec{L}_{(cm)} = \sum_i \vec{r}_{i(cm)} \times m_i \vec{v}_{i(cm)}$$

ed è pari al momento angolare del sistema misurato rispetto al centro di massa, nel sistema di riferimento di quest'ultimo. Perciò possiamo scrivere

$$\vec{L}_O = (\vec{R} - \vec{r}_O) \times M \dot{\vec{R}} + \vec{L}_{(cm)}$$

Questo risultato è particolarmente utile nei casi in cui il sistema sia un corpo rigido rotante di momento d'inerzia noto, in quanto riduce il calcolo a due termini facilmente calcolabili con metodi elementari.

## 4.2 Seconda parte - Energia cinetica

Utilizzando la stessa notazione della parte precedente, calcoliamo l'energia cinetica di un sistema di particelle:

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{R}} + \vec{v}_{i(cm)}) \cdot (\dot{\vec{R}} + \vec{v}_{i(cm)}) \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{i(cm)} \cdot \vec{v}_{i(cm)} + \dot{\vec{R}} \cdot \left( \sum_i m_i \vec{v}_{i(cm)} \right) \end{aligned}$$

Come prima, il termine tra parentesi sarà nullo. Il primo dei due termini rimasti,  $\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$ , è pari all'energia cinetica di una particella puntiforme di massa  $M$  coincidente con il c.d.m., mentre l'altro è pari a

$$K_{(cm)} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{i(cm)} \cdot \vec{v}_{i(cm)}$$

ovvero l'energia cinetica del sistema calcolata dal sistema di riferimento del centro di massa. Perciò possiamo scrivere

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + K_{(cm)}$$

concludendo l'enunciato del Teorema di König. Abbiamo dunque visto come sia sempre conveniente esaminare un sistema nel sistema di riferimento del centro di massa, per poi ottenere quantità relative ad altri sistemi di riferimento tramite la decomposizione enunciata poco sopra.

## 5 Esempio svolto - EuPhO 2018/1

Vediamo adesso un'applicazione pratica dei principi enunciati finora, in un problema tratto da una vera competizione. Il testo è il seguente:

*Tre piccole sfere identiche (indicate con  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ), ciascuna di massa  $m$ , sono collegate a due aste rigide e prive di massa, in modo che una colleghi  $A$  e  $B$ , l'altra  $B$  e  $C$ . Esse sono incernierate su  $B$  in modo che l'angolo tra esse possa cambiare senza sforzo. Il sistema è a riposo nel vuoto, in assenza di gravità, con le tre sfere allineate. Alla sfera  $A$  viene istantaneamente impressa una velocità  $v$  perpendicolare all'asta. Trascurando l'attrito, si trovi la minima distanza tra  $A$  e  $C$  nel moto successivo.*

Prima di tutto, notiamo che sul sistema non agiscono forze esterne, quindi il centro di massa si muoverà di moto rettilineo uniforme. La sua velocità nel s.d.r. originario sarà  $\frac{1}{3}\vec{v}$ . Spostiamoci nel s.d.r. che lo ha come origine: per quanto detto prima, sarà inerziale. Si avrà

$$\vec{v}'_A = \frac{2}{3}\vec{v} \quad \vec{v}'_B = \vec{v}'_C = -\frac{1}{3}\vec{v}$$

In questo s.d.r. possiamo applicare la legge di conservazione dell'energia e del momento angolare. Ci aspettiamo che il moto avvenga in un piano: tutte le velocità iniziali sono complanari e non ci sono forze che possano accelerare una delle sfere in un'altra direzione.  $\vec{L}$  sarà quindi sempre diretto lungo un asse  $\hat{z}$  perpendicolare al piano del moto.

Calcoliamo l'energia e il momento angolare iniziali: si ha

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{3}mv^2$$

L'origine del s.d.r. del c.d.m. inizialmente coinciderà istantaneamente con  $B$ , quindi

$$L = \frac{2}{3}mvl + \left(-\frac{1}{3}mv\right)(-l) = mvl$$

Chiamiamo  $\phi$  l'angolo tra le due sbarrette. Se la distanza minima fosse zero, si può verificare che impostando la conservazione di  $E$  e  $L$  si otterrebbe un assurdo; di conseguenza, la distanza è minima quando  $\dot{\phi} = 0$ .

Ciò significa che in quell'istante il sistema sta ruotando rigidamente, visto che le aste sono istantaneamente immobili una rispetto all'altra. Possiamo quindi calcolarne il momento d'inerzia  $I$  rispetto all'origine ed esprimere la conservazione dell'energia e del momento angolare in funzione di esso, consentendoci di trovare la distanza richiesta. Il sistema starà ruotando con una velocità angolare  $\omega$ : avremo allora

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad L = I\omega$$

$$\Rightarrow I = \frac{L^2}{2E} = \frac{3}{2}ml^2$$

A questo punto non ci resta che esprimere  $I$  in funzione della distanza  $d$  tra  $A$  e  $C$ . Ciò si riduce ad una serie di passaggi geometrici ed algebrici percorribili in vari modi, ma il metodo più semplice prevede l'utilizzo della seguente formula, valida per calcolare il momento d'inerzia di un sistema di particelle rispetto al loro centro di massa:

$$I_{(cm)} = \frac{\sum_{i,j} m_i m_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}{\sum_i m_i}$$

dove la sommatoria è sulle coppie non ordinate  $(i, j)$ . La dimostrazione è lasciata come esercizio al lettore.

Nel nostro caso, avremo

$$I = \frac{1}{3}m (AB^2 + AC^2 + BC^2) = \frac{1}{3}m (2l^2 + d^2)$$

Confrontandolo con l'espressione precedente, si ottiene infine  $d = l\sqrt{\frac{5}{2}}$ .

## 6 Moto in campo centrale

### 6.1 Coordinate polari

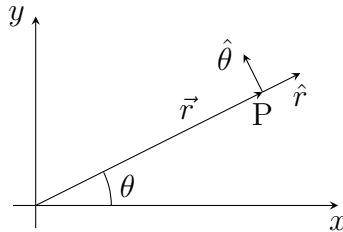


Figura 1: Individuazione di un punto sul piano attraverso le coordinate polari. Ogni punto è univocamente determinato dai parametri  $r$  e  $\theta$ .

Conosciamo tutti come individuare univocamente punti sul piano attraverso le coordinate cartesiane: per molti sistemi fisici tuttavia risulta più comodo e significativo utilizzare un altro sistema di coordinate, normalmente chiamate *coordinate polari*, in cui ogni punto (tranne l'origine) è identificato da due parametri (siamo sempre su un piano, quindi avremo sempre due gradi di libertà!), di solito indicati con  $r$  (la distanza del punto in questione dall'origine) e  $\theta$  (l'angolo orientato tra la congiungente punto-origine e l'asse  $x$ ), come indicato in Figura 1. Risulta immediato verificare che è sempre possibile passare da coordinate polari a cartesiane mediante le relazioni

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

così come, viceversa, passare dalle cartesiane alle polari

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right).^1 \end{aligned}$$

Osserviamo che questa operazione non è altro che un cambio della base, ossia del sistema di versori, che utilizziamo per rappresentare i nostri vettori nel piano: se prima i nostri versori erano  $\hat{x}$  ed  $\hat{y}$  (vettori di modulo 1 diretti rispettivamente lungo l'asse  $x$  ed  $y$ ), ora abbiamo scelto di considerare  $\hat{r}$  (il versore radiale, un vettore di modulo 1 diretto lungo la congiungente origine-punto) e  $\hat{\theta}$  (sempre di modulo 1, che possiamo considerare perpendicolare a  $\hat{r}$  e diretto in modo che il verso positivo sia quello antiorario). In quest'ottica facciamo attenzione a non confonderci tra le *componenti* e i *versori*: questi ultimi, caratterizzati da una notazione con il “cappellino” (come  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$ ), sono vettori e ci dicono “in che direzione ci stiamo muovendo” per trovare il punto, mentre le prime (indicate come  $x$ ,  $y$ ,  $r$ ,  $\theta$  associate ai rispettivi versori) sono degli scalari che ci dicono “di quanto ci muoviamo” in ciascuna direzione.

## 6.2 Vettori in coordinate polari

Ora che sappiamo cosa sono le coordinate polari e come usarle per descrivere i vettori, vogliamo scoprire come operare su di essi: l'operatore più importante che non risulta di immediata formalizzazione in questo sistema è probabilmente quello di derivata temporale, che passiamo quindi ad illustrare (nel seguito utilizzeremo la notazione “puntata” per indicare la derivata rispetto al tempo dell'oggetto, ad esempio  $\frac{dx}{dt}$  sarà indicato con  $\dot{x}$ ). Ricordando il formalismo di prima, un punto può essere individuato come

$$\vec{r} = r\hat{r},$$

dove  $r$  è lo scalare che ci indica di quanto ci siamo allontanati dall'origine e  $\hat{r}$  ci dice in che direzione. Ora, per effettuare la derivata temporale di  $\vec{r}$  in realtà dobbiamo calcolare due derivate temporali diverse, che tengano conto delle due diverse quantità che possono cambiare nel tempo, ossia  $r$  ed  $\hat{r}$ , per poi combinarle tra loro (utilizzando la normale regola del prodotto):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}.$$

Il primo termine è la derivata di una normalissima funzione scalare che moltiplica un vettore, mentre il secondo termine ci preoccupa un po' di più: come può cambiare un versore nel tempo? Riflettiamo: il suo modulo non può cambiare (è fisso a 1 per definizione) e non risente di traslazioni del sistema poiché l'unica informazione che porta è una direzione; l'unico modo

---

<sup>1</sup>Questa relazione in realtà vale solo per  $x > 0$ ; possiamo dare una definizione leggermente diversa che dia sempre  $\theta \in [-\pi, \pi]$  ed è  $\theta = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ .

in cui si modifica l'informazione di cui si fa carico è una rotazione (l'unico modo di cambiare direzione, in un certo senso), che può essere rappresentata da un vettore  $\vec{\Omega}$  di modulo  $\Omega$  (la velocità angolare con cui ruota il vettore) e perpendicolare al piano del moto (quindi parallelo all'asse di rotazione). Ruotando il versore di un angolo infinitesimo  $\Omega dt$ , è facile convincersi che esso varia di un vettore infinitesimo di modulo  $\Omega dt$  e perpendicolare a  $\hat{r}$ . Ciò può essere scritto compattamente con la formula

$$\dot{\hat{r}} = \vec{\Omega} \times \hat{r},$$

che prenderemo d'ora in poi per buona<sup>2</sup>.

Dato che in questo caso stiamo assumendo che  $\vec{r}$  sia sempre sul piano  $xy$ , il sistema di coordinate polari ci permette di scrivere

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \hat{z},$$

che con le dovute sostituzioni ci porta a

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{z} \times \hat{r}.$$

Ossia, osservando che  $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$ ,

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}.$$

Questa formula ce la potevamo aspettare, vediamo un metodo più intuitivo e meno formale per ricavarla. La velocità ha in generale 2 componenti, una lungo  $\hat{r}$  e una lungo  $\hat{\theta}$ . Per la parte radiale ci si aspetta che non conti  $\theta$  per invarianza sotto rotazioni; non conta nemmeno  $\dot{\theta}$  in quanto, a patto di prendere un tempo abbastanza piccolo, uno spostamento in direzione ortogonale a  $\hat{r}$  non cambia il valore di  $r$ . Per la parte angolare, non ci si aspetta una dipendenza da  $\theta$  sempre per invarianza sotto rotazioni, mentre ci si aspetta che sia proporzionale a  $\dot{\theta}$  (se  $\dot{\theta} = 0$  allora la velocità angolare sarà nulla); del resto per analisi dimensionale si può notare che il coefficiente è proporzionale proprio a  $r$  e non dipende da  $\dot{r}$  per un ragionamento analogo a quello per cui la velocità radiale non dipende da  $\dot{\theta}$ . A questo punto il valore del fattore numerico può essere trovato pensando al moto circolare uniforme: la velocità quando  $\dot{r} = 0$  è proprio  $r \dot{\theta}$ .

Derivando la velocità si ottiene l'accelerazione, e dunque, riapplicando l'operazione di derivata a  $\dot{\vec{r}}$  si ottiene l'accelerazione espressa in coordinate

---

<sup>2</sup>Una dimostrazione rigorosa di questo risultato è riportata nell'Appendice A.

polari

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{z} \times \hat{r} + \dot{r}\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\hat{z} \times \hat{\theta} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}.\end{aligned}$$

Quando si ha tra le mani un problema di dinamica bisogna, quindi, risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f_r \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = f_\theta \end{cases}, \quad (1)$$

che corrisponde proprio alla seconda legge di Newton  $m\vec{a} = \vec{F} = f_r\hat{r} + f_\theta\hat{\theta}$ . Notiamo come a primo membro sia possibile riconoscere il termine della forza centripeta ( $-mr\dot{\theta}^2\hat{r}$ ) e quello della forza di Coriolis ( $2m\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$ ).

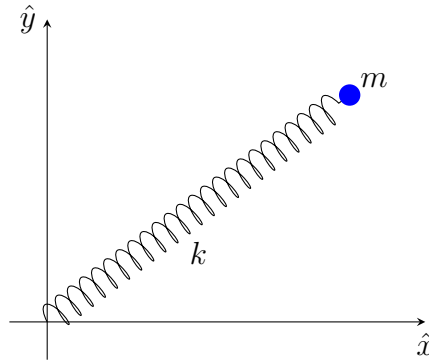


Figura 2: Massa collegata a una molla.

Vediamo ora un'applicazione di questa *nuova* metodologia, molto utile nel caso di forze dirette verso un punto fisso. Consideriamo una molla vincolata nell'origine, con costante elastica  $k$ , alla cui estremità è agganciata una massa  $m$  libera di ruotare nel piano  $xy$ , come in Figura 2.

In questo caso il sistema (1) diventa

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -kr \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases}.$$

Per trovare il raggio di equilibrio (quello per cui si ha un moto circolare) basterà imporre  $\ddot{r} = \dot{r} = 0$  che riduce le equazioni di prima a:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}^2 &= \frac{k}{m}, \\ \ddot{\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Si vede che questa è effettivamente una soluzione del sistema, quindi, è possibile avere orbite circolari di raggio qualsiasi purché la velocità angolare sia  $\dot{\theta} = \sqrt{k/m}$ .

### 6.3 Campi radiali e centrali

Come abbiamo cominciato a vedere, e vedremo meglio in seguito, questo nuovo sistema di coordinate risulta estremamente versatile quando stiamo lavorando con forze dirette verso un centro. Fissato un punto di riferimento  $O$ , definiamo *campo radiale* un campo vettoriale i cui vettori puntano sempre nella direzione radiale  $\hat{r}$ , mentre un *campo centrale* è un campo radiale in cui vale la condizione aggiuntiva che la componente radiale dipende solo dalla sua distanza dal centro. A titolo di esempio, il campo  $\vec{F}_1 = 3r^2 \cos \theta \hat{r}$  è solo radiale a causa della dipendenza dalla coordinata angolare, mentre il campo  $\vec{F}_2 = 3r^2 e^{-\alpha r} \hat{r}$  è centrale.

## 7 Gravitazione

Oltre alla forza elastica, vista nell'esercizio precedente, un'altra forza centrale d'estrema importanza in fisica è quella gravitazionale. La legge di gravitazione universale, che esprime la forza di attrazione tra due masse puntiformi  $m_1$  e  $m_2$  poste a una certa distanza  $r_{12}$ , afferma che

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}.$$

Mettiamoci nell'ipotesi in cui una delle due masse sia molto più grande dell'altra ( $M \gg m$ ) in modo da interessarci solo al moto della seconda (ad esempio, se consideriamo l'attrazione tra un satellite e la Terra, quest'ultima può considerarsi ferma). In questo modo possiamo fissare l'origine del sistema di coordinate nel centro del corpo grande. Eliminando i pedici, la forza agente sul corpo piccolo potrà scriversi come

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}.$$

Questa forza ammette un potenziale della forma

$$U = -\frac{GMm}{r} \equiv -\frac{\alpha}{r}.$$

## 7.1 Quantità conservate

Generalmente esistono due modi di risolvere un problema di meccanica: il primo consiste nel trovare le leggi orarie dei corpi del sistema a partire dalla seconda legge di Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ), per poi risolverle bovinamente attraverso conti arbitrariamente brutti, mentre il secondo si basa su alcune leggi di conservazione che legano la velocità alla posizione e che sperabilmente conducono a una trattazione più comoda del fenomeno. In questa sezione vedremo due interessanti quantità che vengono conservate nei moti in potenziale gravitazionale e che risultano spesso utili per risolvere problemi in meccanica celeste. Stiamo parlando di:

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{\alpha}{|\vec{r}|} \quad \text{Energia Meccanica}$$
$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad \text{Momento Angolare}$$

L'energia meccanica si conserva perché la forza gravitazionale è una forza conservativa<sup>3</sup> e sul sistema non agiscono forze dissipative.

Il momento angolare si conserva perché la forza gravitazionale è una forza centrale che non produce alcun momento torcente sul sistema, in effetti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r} = 0.$$

Questo fatto ha una notevole conseguenza fisica poiché, essendo  $\vec{L}$  un vettore, si conserva non solo il modulo, ma anche la direzione. Da questo si evince immediatamente che la traiettoria si trova sul piano perpendicolare a  $\vec{L}$ .

In un sistema di coordinate polari un'espressione per il momento angolare è data da

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = mr\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{z}.$$

## 7.2 Potenziale efficace

Introduciamo ora un approccio generale molto utile in meccanica celeste. Consideriamo una particella di massa  $m$  che si muove in un campo centrale descritto dal potenziale  $V(r)$ . La sua energia scritta in coordinate polari è data da

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2r^2 + V(r).$$

---

<sup>3</sup>Si può dimostrare che un qualsiasi campo centrale è conservativo, ma si necessita di potenti mezzi matematici, che sono decisamente superflui ai fini di questa lezione.

Sfruttiamo la conservazione del momento angolare per eliminare la dipendenza da  $\dot{\theta}$  ottenendo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2)$$

Abbiamo, così, ridotto il problema a una sola dimensione, dove l'energia ha due termini ben distinti: uno che dipende da  $r$  (termine potenziale) e uno che dipende da  $\dot{r}$  (termine cinetico). Il termine potenziale è detto potenziale efficace:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Si noti che generalmente i potenziali che ci interessano divergono per  $r \rightarrow 0$  meno di  $r^{-2}$ , quindi l'aggiunta del termine con  $L$ , detto termine centrifugo, dà un andamento tipico per piccole distanze. Dalla forma del potenziale efficace è possibile ricavare importanti proprietà sulle orbite percorse dalla particella. Per fissare le idee, prendiamo il potenziale più semplice possibile, ossia un potenziale armonico

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2.$$

Il potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2,$$

il cui grafico è riportato in Figura 3.

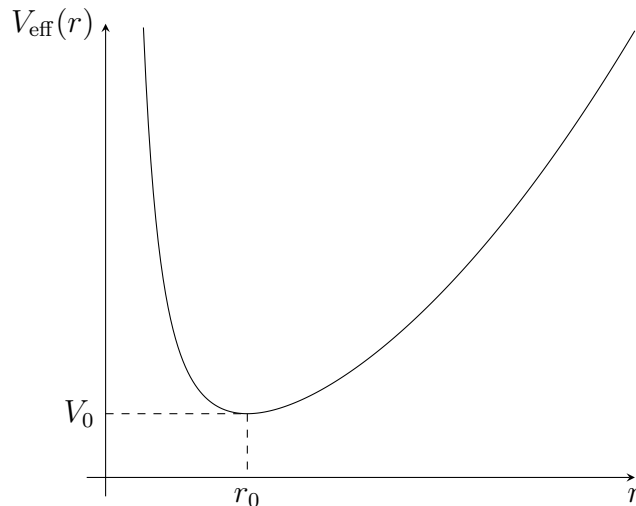


Figura 3: potenziale efficace per un oscillatore armonico.

Il potenziale efficace diverge sia a grandi che a piccole distanze: la prima divergenza è dovuta al termine armonico, la seconda al termine centrifugo. Notiamo ora che nell'Equazione 2 il termine cinetico è non negativo, pertanto il moto è limitato alla regione in cui  $V(r) \leq E$ .

Detto  $V_0$  il valore minimo di  $V_{\text{eff}}$ , possiamo distinguere diversi regimi:

- per  $E < V_0$  nessuna regione è accessibile dalla particella;
- per  $E = V_0$ , la particella è vincolata a stare nel minimo di  $V_{\text{eff}}$ , ossia  $r = r_0$  in ogni istante, quindi il moto è circolare;
- per  $E > V_0$  la particella si muove in una regione limitata  $r_1 \leq r \leq r_2$ , dove  $r_1$  e  $r_2$  dipendono in generale da  $E$ .

Supponiamo invece di avere un potenziale gravitazionale

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

In tal caso il potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r},$$

il cui grafico è riportato in Figura 4. Anche in questo caso il potenziale

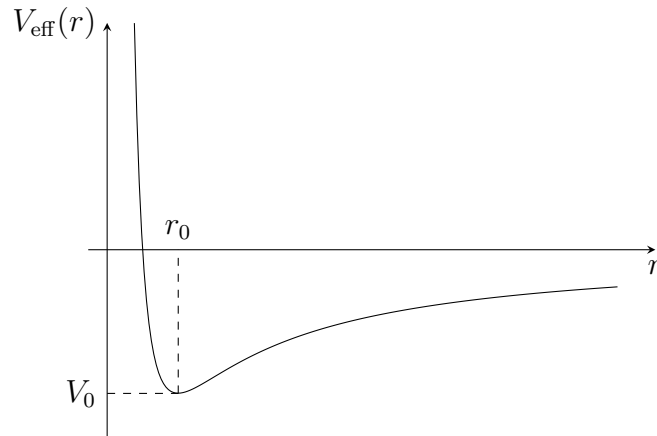


Figura 4: potenziale efficace per un potenziale gravitazionale.

efficace diverge a piccole distanze come  $r^{-2}$ . A grandi distanze, invece, la situazione è differente, dato che per  $r \rightarrow +\infty$  sia  $V(r)$  sia il termine centrifugo si annullano. Questa caratteristica, assente nel potenziale armonico, permette l'esistenza di orbite illimitate. Più precisamente:

- per  $E < V_0$  nessuna regione è accessibile dalla particella;
- per  $E = V_0$ , la particella è vincolata a stare nel minimo di  $V_{\text{eff}}$ , ossia  $r = r_0$  in ogni istante, quindi il moto è circolare;
- per  $V_0 < E < 0$  la particella si muove in una regione limitata  $r_1 \leq r \leq r_2$ , dove  $r_1$  e  $r_2$  dipendono in generale da  $E$ ;
- per  $E \geq 0$  la particella può muoversi in una semiretta  $\bar{r} \leq r$ , con  $\bar{r}$  dipendente da  $E$ . La particella quindi prima o poi si allontana indefinitamente dall'origine.

I punti di massima e minima distanza corrispondono a punti di inversione del moto, in cui la velocità radiale e quindi il termine cinetico in  $\dot{r}$  si annullano. Per trovare  $r_1$  e  $r_2$  è, pertanto, sufficiente imporre il potenziale efficace uguale al valore dell'energia meccanica totale  $E$ .

## 8 Leggi di Keplero

Trattiamo ora in modo sintetico le famose *Leggi di Keplero*:

1. Le orbite descritte dai pianeti sono delle ellissi, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro dei pianeti spazza aree uguali in tempi uguali.
3. I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo dei semiassi maggiori delle rispettive ellissi.

### 8.1 Prima Legge

La prima legge stabilisce il tipo di traiettoria percorsa dai pianeti. Per i pianeti del sistema solare sono solo ellissi, ma nel caso generale le orbite possibili sono delle coniche, quindi circonferenze, ellissi, parabole o iperboli. Per brevità di trattazione forniamo solo l'espressione matematica della legge, lasciando ai più interessati un paio di modi di ricavarla all'interno delle appendici. Nell'Appendice B.1 potete trovare la trattazione classica per ricavare la forma delle orbite a partire dall'espressione del potenziale efficace. Nell'appendice B.2, invece, proponiamo un'alternativa più carina (e che necessita di molti meno conti) che fa uso di un'ulteriore quantità conservata, chiamata Vettore di Lenz.

L'espressione di  $r(\theta)$  che descrive la traiettoria dell'orbita è data da

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \theta} = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad ,$$

dove

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GMm)^2 m}} \quad (3)$$

che è l'equazione di una conica di eccentricità  $\epsilon$  in coordinate polari. Questo ci porta alla seguente caratterizzazione delle orbite in base all'eccentricità e quindi all'energia meccanica totale:

- $\epsilon = 0$ , ossia  $E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}$  per orbite circolari;
- $0 < \epsilon < 1$ , ossia  $-\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} < E < 0$  per orbite ellittiche;
- $\epsilon = 1$  ossia  $E = 0$  per orbite paraboliche;
- $\epsilon > 1$ , ossia  $E > 0$  per orbite iperboliche.

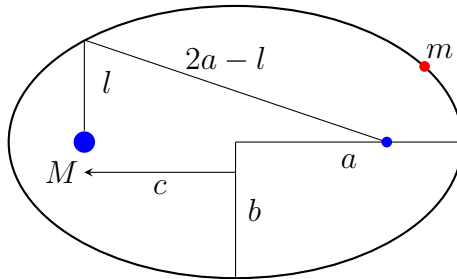


Figura 5: Satellite in moto su un'orbita ellittica di semiassi  $a$  e  $b$ .

Concentriamoci ora ad analizzare il caso di orbita chiusa come rappresentato in Figura 5. Dalla geometria è ben noto che

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad ,$$

quindi considerando il triangolo rettangolo di cateti  $l$ ,  $2c$  e  $2a - l$  abbiamo che

$$(2a - l)^2 = l^2 + 4c^2 = l^2 + 4a^2 \epsilon^2 \implies l = a(1 - \epsilon^2) = \frac{b^2}{a} \quad .$$

Dall'Equazione 3 otteniamo che

$$\frac{L^2}{GMm^2} = -a \frac{2EL^2}{(GMm)^2 m} \implies E = -\frac{GMm}{2a},$$

$$\frac{L^2}{GMm^2} = \frac{b^2}{a} \implies L = mb\sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (4)$$

Abbiamo, quindi, ricavato delle espressioni per energia e momento angolare di un'orbita ellittica che dipendono dai suoi parametri geometrici.

## 8.2 Seconda Legge

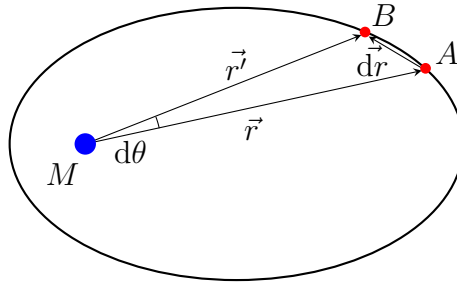


Figura 6: Visualizzazione della 2<sup>a</sup> legge di Keplero.

Prendiamo come riferimento la Figura 6. Per piccoli angoli  $d\theta$  l'area  $dA$  spazzata dal raggio vettore  $\vec{r}$  andando da  $A$  a  $B$  equivale a quella del triangolo  $MAB$ , che può essere assunto isoscele, pertanto

$$dA = \frac{1}{2}r|d\vec{r}| = \frac{1}{2}r^2d\theta.$$

In un piccolo intervallo  $dt$  la velocità areolare è data da

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2m}mr^2\dot{\theta} = \frac{L}{2m}, \quad (5)$$

che è una costante essendo  $L$  costante.

## 8.3 Terza Legge

Isolando i differenziali nell'Equazione 5 e integrando lungo un periodo  $T$  otteniamo che

$$\pi ab = \int dA = \frac{L}{2m} \int_0^T dt = \frac{LT}{2m},$$

dove è stato usato il noto fatto che l'area di un'ellisse è pari a  $\pi ab$ .  
Elevando al quadrato entrambi i membri e sostituendo l'espressione di  $L$  trovata nell'Equazione 4 otteniamo

$$(\pi ab)^2 = \frac{T^2}{4m^2} L^2 = T^2 b^2 \frac{GM}{4a} \implies \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2},$$

che è proprio l'espressione richiesta.

# Appendici

## A Derivate dei versori

I versori  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  possono essere scritti in coordinate cartesiane:

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad (6)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \quad (7)$$

Possiamo calcolare le derivate dei secondi membri delle Equazioni (6) e (7) senza particolari problemi, perchè i versori  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  sono fissi. Si ha:

$$\dot{\hat{r}} = -\hat{x}\dot{\theta} \sin \theta + \hat{y}\dot{\theta} \cos \theta = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\hat{x}\dot{\theta} \cos \theta - \hat{y}\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta}\hat{r}$$

Queste derivate sono proprio della forma:

$$\dot{\hat{r}} = \vec{\Omega} \times \hat{r}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \vec{\Omega} \times \hat{\theta}$$

a patto di porre  $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$ .

Più in generale, consideriamo un vettore  $\vec{v}$  di modulo costante ed eseguiamo su di esso una rotazione attorno ad un asse  $\hat{n}$  di un angolo  $\theta$ , come in Figura 7. La componente di  $\vec{v}$  parallela a  $\hat{n}$ , ossia

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

è lasciata inalterata dalla trasformazione. Al contrario, la componente perpendicolare:

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$$

è ruotata di un angolo  $\theta$  e rimane nel piano perpendicolare ad  $\hat{n}$ . In particolare, se indichiamo con un apice i vettori dopo la rotazione si avrà:

$$\vec{v}'_{\perp} = (\vec{v} - \vec{v}_{\parallel}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Di conseguenza il vettore ruotato sarà:

$$\vec{v}' = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Supponiamo ora che un vettore  $\vec{v}$  ruoti a velocità angolare  $\omega$  (in generale dipendente dal tempo) attorno ad un asse  $\hat{n}$ . Se  $d\theta = \omega dt$  è l'angolo

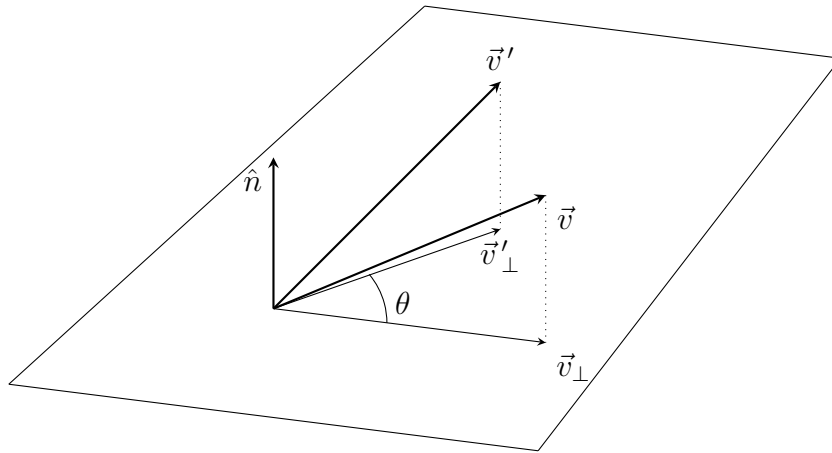


Figura 7: rotazione di  $\vec{v}$  intorno a  $\hat{n}$ .

infinitesimo di cui ruota  $\vec{v}$ , al primo ordine in  $dt$  (e anche in  $d\theta$  attorno a  $\theta = 0$ ) abbiamo:

$$\vec{v}(t+dt) = (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v}(t) - (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n}) + (\hat{n} \times \vec{v}(t))\omega dt = \vec{v}(t) + \omega(\hat{n} \times \vec{v}(t)) dt$$

Ossia:

$$\frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}(t)$$

e al limite  $dt \rightarrow 0$  si ha:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

## B Un paio di derivazioni della prima legge di Keplero

### B.1 Derivazione classica mediante potenziale efficace

Riprendiamo l'espressione dell'energia in campo gravitazionale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Dato che l'energia è una costante del moto, derivandola rispetto al tempo otteniamo

$$0 = \dot{E} = m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} + \frac{\alpha}{r^2}\dot{r} = \dot{r} \left( m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} \right).$$

Il caso di  $\dot{r} = 0$  costantemente corrisponde all'orbita circolare e non è di particolare interesse, quindi possiamo limitarci a

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} = 0.$$

Volendo noi trovare la forma dell'orbita  $r(\theta)$ , cambiamo la variabile di derivazione:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2},$$

dove abbiamo usato il fatto che  $L = mr^2\dot{\theta}$ .

Abbiamo, quindi, che

$$m \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \frac{L}{mr^2} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}.$$

Per integrare questo schifo torna utile la sostituzione

$$u = \frac{1}{r},$$

che ci porta a

$$\begin{aligned} m \frac{d}{d\theta} \left( \frac{Lu^2}{m} \left( -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \right) \frac{Lu^2}{m} &= \frac{L^2 u^3}{m} - \alpha u^2 \\ -\frac{L^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= \frac{L^2}{m} u - \alpha \end{aligned}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta} = -u + \frac{\alpha m}{L^2}.$$

Questa non è altro che l'equazione di un moto armonico, la cui soluzione è data da

$$u(\theta) = A \cos(\theta + \phi) + \frac{\alpha m}{L^2}.$$

Possiamo porre  $\phi = 0$  ruotando opportunamente gli assi delle coordinate e, ricordando la definizione di  $u$ , ottenere finalmente

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \frac{L^2 A}{\alpha m} \cos \theta} = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad ,$$

che abbiamo visto essere l'equazione di una conica in polari.

## B.2 Derivazione alternativa mediante vettore di Lenz

Abbiamo visto nella trattazione precedente come energia meccanica e momento angolare siano quantità conservate in un moto sotto sola azione della gravità. Ne introduciamo ora una terza

$$\vec{A} = m\vec{v} \times \vec{L} - m\alpha\hat{r},$$

chiamata vettore di Lenz. Essa, come è chiaro dalla sua espressione, è necessariamente collocata sul piano dell'orbita. Per mostrare che il vettore di Lenz è una costante del moto, sfruttiamo il fatto che  $\vec{L}$  è a sua volta costante.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} + m\vec{v} \times \frac{d\vec{L}}{dt} - m\alpha \frac{d\hat{r}}{dt} = \vec{F} \times \vec{L} - m\alpha\dot{\theta}\hat{\theta} = \\ &= -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r} \times mr^2\dot{\theta}\hat{z} - m\alpha\dot{\theta}\hat{\theta} = -m\alpha\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{z} + \hat{\theta}) = 0. \end{aligned}$$

Consideriamo, ora, il seguente prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \theta.$$

Dalla definizione di  $\vec{A}$  segue che

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (m\vec{v} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - m\alpha\hat{r} \cdot \vec{r} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{L} - m\alpha r = \vec{L} \cdot \vec{L} - m\alpha r = L^2 - m\alpha r.$$

Dove è stata usata la seguente identità vettoriale:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Questo ci conduce all'espressione finale

$$\begin{aligned} Ar \cos \theta &= L^2 - m\alpha r \\ \implies r(\theta) &= \frac{L^2}{m\alpha + A \cos \theta} = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \theta}. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso il modulo del vettore  $\vec{A}$  sfruttando la perpendicolarità di  $\vec{v}$  e  $\vec{L}$ :

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{m^2} &= \alpha^2 - 2\alpha \hat{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{L}) + |\vec{v} \times \vec{L}|^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha L^2}{mr} + v^2 L^2 = \\ &= \alpha^2 + \frac{2L^2}{m} \left( -\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2} m v^2 \right) = \alpha^2 + \frac{2EL^2}{m}. \end{aligned}$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione per  $r(\theta)$ , otteniamo

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \theta} = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad . \quad (8)$$

Dall'Equazione 8 notiamo che il valore minimo di  $r$  si ha per  $\theta = 0$ , ossia quando  $\vec{r}$  e  $\vec{A}$  sono paralleli, pertanto abbiamo che il vettore di Lenz, essendo una quantità fissata, punta sempre verso il pericentro dell'orbita.

## 9 Problemi

### 9.1 Doppio urto

Una palla da biliardo assolutamente elastica e liscia si muove a velocità  $v$  verso due altre sfere identiche, a riposo. Quest'ultime sono tangenti e la congiungente dei loro centri è perpendicolare a  $\vec{v}$ . La palla in movimento è diretta verso il punto di tangenza delle altre due sfere. Quale sarà la velocità finale delle tre sfere se le due a riposo vengono colpite contemporaneamente? Quale se una viene colpita marginalmente prima?

### 9.2 Manubrio rotante

Due masse  $m$  identiche sono collegate da una sbarra rigida, inestensibile e priva di massa lunga  $l$  e giacciono a riposo su un piano orizzontale liscio. Un'altra massa  $m$  si muove con velocità  $\vec{v}$  perpendicolare alla sbarretta, diretta verso una delle due masse ferme. L'urto è anelastico: si trovi la velocità dell'estremità di massa  $2m$  subito dopo l'urto e dopo che la sbarretta ha compiuto una rotazione di  $180^\circ$ .

### 9.3 Massima deflessione ★

Una massa  $M$  collide con un'altra massa  $m$  a riposo. Se  $M < m$ ,  $M$  può rimbalzare completamente all'indietro; se invece  $M > m$ , l'angolo di deflessione non può superare un certo angolo limite  $\theta_{im}$ : si calcoli questo valore.

*(Hint: porsi nel sistema del centro di massa)*

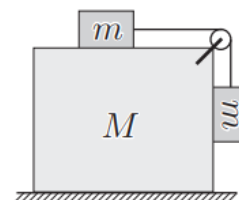
### 9.4 Sopra al gradino ★

Una sfera di massa  $M$ , raggio  $R$  e momento d'inerzia  $I = \frac{2}{5}MR^2$  rotola senza scivolare su un pavimento a velocità  $v_0$ . Ad un certo punto urta uno scalino di altezza  $h$ ; si assuma che nel moto successivo non si stacchi dal bordo del gradino finché non l'ha superato. Qual è il valore minimo di  $v_0$  per cui la sfera riesce a superare lo scalino?

## 9.5 Accelerazioni ambigue ★★

Un blocco di massa  $M$  giace su una superficie orizzontale liscia. Sopra di esso c'è un altro blocco di massa  $m$  che a sua volta è attaccato a un blocco identico tramite una corda.

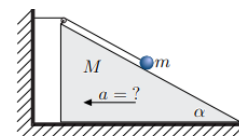
Quest'ultima è stata tesa attraverso una carrucola situata all'angolo del blocco più grande; il secondo blocco è appeso verticalmente. Inizialmente il sistema è tenuto a riposo. Trovare l'accelerazione del blocco più grande subito dopo il rilascio del sistema.



## 9.6 Piano inclinato semovente ★★

Un piccolo blocchetto di massa  $m$  giace su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  e massa  $M$ .

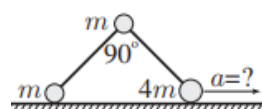
Il blocchetto è attaccato a una corda collegata orizzontalmente al muro e fatta passare attraverso una carrucola posta sulla sommità del piano inclinato. Assumendo che non ci sia attrito, si trovi l'accelerazione del piano inclinato al momento del rilascio.



## 9.7 Caduta del tripode ★★

Tre piccole sfere sono connesse tramite aste rigide prive di massa; è presente un giunto sulla sfera centrale che permette alle aste di far variare liberamente l'angolo tra di esse.

Inizialmente questo angolo è retto e le tre sfere sono ferme. Due di esse hanno massa  $m$ , una delle due laterali ha massa  $4m$ . Si trovi l'accelerazione di quest'ultima appena il sistema viene rilasciato, ignorando l'attrito.



## 9.8 Via dalla semisfera ★★

Una particella puntiforme di massa  $m$  si trova a riposo sopra una semisfera liscia di massa  $m$ , che poggia su un tavolo privo di attrito. La particella riceve un piccolo impulso e scivola lungo la semisfera (che inizierà a sua volta a muoversi). A quale angolo  $\theta$  (misurato dalla sommità della semisfera) la particella perderà il contatto con la semisfera?

### 9.9 Masse in movimento (Physics Cup 2012) ★★★

È dato un sistema planare costituito da tre aste identiche di massa trascurabile e lunghezza  $L$ , che condividono uno stesso vertice. All'altro estremo di ciascuna asta è attaccata una massa puntiforme, che vale  $m$ ,  $2m$  o  $3m$  in base all'asta. Il sistema è libero di traslare nel piano che lo contiene, e le aste sono libere di ruotare attorno al vertice comune. Inizialmente l'angolo tra ciascuna coppia di aste è uguale e vale  $\frac{2\pi}{3}$ . Improvvisamente, alla massa  $3m$  è impressa una velocità  $v_0$  perpendicolare alla sua asta. Si determinino le accelerazioni delle tre masse in quell'istante. La gravità è trascurabile.

### 9.10 Acceleratore meccanico (EuPhO 2020/2) ★★★

Un filo privo di massa è avvolto  $N$  volte attorno a un cilindro inizialmente a riposo, come in figura. Inizialmente, le due estremità libere del filo sono allineate lungo l'asse  $X$ . Successivamente, un oggetto  $P$  dotato di massa viene attaccato a una delle due estremità, mentre l'altra viene tirata a velocità costante  $u$  lungo l'asse  $X$ . Si trovi la massima velocità di  $P$  nel moto successivo. Si assuma che il cilindro sia libero di ruotare attorno a un asse verticale passante per il proprio centro, che il filo sia avvolto così strettamente da poterlo considerare giacente su un unico piano, e che gli attriti siano trascurabili.

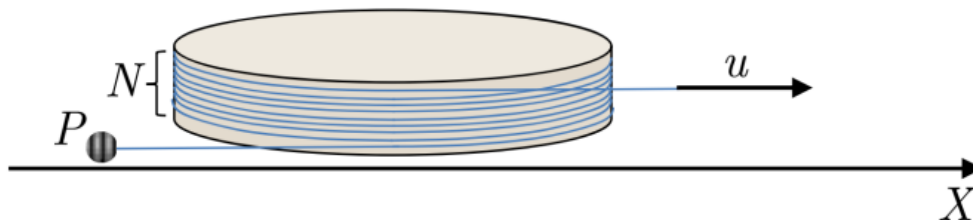


Figura 8: Acceleratore meccanico

### 9.11 Scivolo cilindrico (IPhO 2014/1a) ★★★

Un piccolo blocchetto di massa  $m$  viene posizionato sulla superficie interna di un cilindro sottile e cavo di massa  $M$  e raggio  $R$ . Inizialmente, il cilindro poggia su un piano orizzontale con il proprio asse orizzontale e il blocchetto si trova ad un'altezza  $R$  dal piano. Trovare la forza tra il cilindro e il blocchetto nel momento in cui quest'ultimo raggiunge il punto più basso della sua traiettoria. Si supponga che l'attrito sulla superficie interna del cilindro sia

assente e che il cilindro si muova sul piano senza scivolare. L'accelerazione gravitazionale è  $g$ .

### 9.12 Blocco rimbalzante ★★★

Un blocco di massa  $M$  scivola a velocità  $v_0$  su un piano orizzontale liscio verso un muro verticale. Colpisce elasticamente un blocchetto con una piccola massa  $m$ , originariamente a distanza  $L$  dal muro. Il blocchetto colpisce il muro, rimbalza indietro, colpisce nuovamente il blocco più grande e così via, continuando a colpire alternatamente blocco e muro. Assumendo che  $M \gg m$ , quante collisioni avvengono tra i due blocchi? Qual'è la distanza di minimo avvicinamento del blocco più grande al muro?

### 9.13 Palla in tubo rotante

Un pallina di massa  $m$  è inserita all'interno di un tubo liscio messo in rotazione, attorno a un estremo fissato, a velocità angolare costante  $\omega$  su un piano verticale. Supponiamo che all'istante iniziale l'angolo tra il tubo e il piano orizzontale sia zero, che la pallina abbia velocità radiale nulla e che sia a distanza  $a$  dall'estremo incernierato.

1. Calcolare la legge oraria della pallina trascurando l'effetto della gravità.
2. Supponendo che il sistema sia immerso in un campo gravitazionale verticale  $\vec{g}$  costante, calcolare nuovamente la legge oraria.

### 9.14 Farfalle kamikaze ★

Per spiegare il motivo che porta una farfalla notturna a cadere a spirale sulla fiamma di una candela, si può fare l'ipotesi che normalmente esse facciano riferimento alla luce della luna per guidarsi, mantenendo costante l'angolo tra la direzione di provenienza di questa e la propria direzione di volo. Mostrare che questa è una strategia suicida se la luce di riferimento è quella di una fiamma vicina. Perché invece funziona se la luce è molto lontana?

### 9.15 Esercizio base

Consideriamo un satellite di massa  $m$  su un'orbita circolare di raggio  $R$  attorno alla Terra (di massa  $M$ ), che supporremo ferma.

1. Trova la velocità  $v_R$  ed il periodo orbitale  $T$  del satellite.
2. Trova l'energia meccanica totale del satellite ed il suo momento angolare.

3. Trova il valore di  $R$  nel caso dell'orbita geostazionaria.

Supponiamo adesso che il satellite si muova su un'orbita ellittica (di semiasse maggiore  $a$  ed eccentricità  $\epsilon$ ) attorno alla Terra.

4. Trova  $v_m$  e  $v_M$ , rispettivamente la velocità minima e massima del satellite durante il moto orbitale
5. Trova il periodo  $T$  del moto orbitale.
6. Dimostra che
 
$$a = \frac{T}{2\pi} \sqrt{v_m v_M}$$
7. Trova l'energia meccanica totale del satellite.

### 9.16 Missile verso l'equatore

Un missile viene lanciato con la prima velocità cosmica (i.e.  $v = \sqrt{GM/R}$ ) dal polo Nord in modo tale da farlo cadere su un punto posto all'equatore.

1. Trova il semiasse maggiore dell'orbita del missile.
2. Qual è la massima altezza dalla superficie terrestre a cui il satellite arriva?
3. Quanto vale il tempo di volo del satellite? (Ricorda che l'area di un'ellisse vale  $S = \pi ab$ )

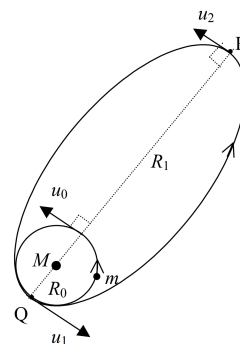
### 9.17 Trasferimento alla Hohmann (APhO 2003/1)

Un satellite di massa  $m$  è in orbita circolare di raggio  $R_0$  attorno a un pianeta di massa  $M$

1. Quanto vale la velocità del satellite  $u_0$ ?

Vogliamo ora trasferire il satellite su una nuova orbita passante per il punto  $P$ , a distanza  $R_1$  dal centro del pianeta, aumentando istantaneamente la sua velocità nel punto  $Q$  dal valore  $u_0$  a  $u_1$ .

2. Quanto vale  $u_1$ ?
3. Qual è il minimo valore di  $u_1$  che permetta al satellite di allontanarsi indefinitamente del pianeta?



4. Quanto vale la velocità  $u_2$  del satellite nel punto  $P$ ?

Vogliamo adesso trasferire il satellite su un'orbita circolare di raggio  $R_1$  aumentando istantaneamente la sua velocità nel punto  $P$  dal valore  $u_1$  a  $u_2$ .

5. Quanto vale  $u_2$ ?

### 9.18 Pianeti e palline ★

Due pianeti identici, di raggio  $R = 1000$  km, sono fissi nello spazio e i loro centri distano fra loro  $d = 5R$ . Su uno di questi pianeti ci sono  $n$  palline in contatto l'una sopra l'altra, con masse  $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$  (denominando con 1 la pallina più in basso, con 2 quella soprastante e così via), poste in modo che i baricentri di tutte le palline si trovano sulla congiungente dei centri dei due pianeti. La pallina più in basso viene lasciata libera di cadere da un metro d'altezza dalla superficie di uno dei pianeti. Supponendo che tutti gli urti siano elastici e che le dimensioni delle palline siano trascurabili, determinare il minimo valore di  $n$  tale che almeno una pallina possa arrivare sull'altro pianeta.

### 9.19 Asteroidi dentro l'orbita terrestre ★

Un asteroide di massa  $m$  si muove su una traiettoria parabolica intorno al Sole (la cui massa è  $M_s$ ) nello stesso piano dell'orbita terrestre, che si assume essere circolare e di raggio  $R$ . Trascurare l'attrazione tra asteroide e Terra.

1. Sia  $p$  la distanza di minimo avvicinamento dell'asteroide dal Sole. Nel caso in cui  $p < R$ , trovare il tempo  $T$  che la cometa spende all'interno dell'orbita terrestre.
2. Calcolare il massimo valore possibile di  $T$  in giorni. Per quale valore di  $p$  avviene ciò?

Se, invece,  $p$  è minore del raggio del Sole, l'asteroide ci cadrà dentro e la massa del Sole aumenterà di una frazione  $\alpha \equiv \frac{m}{M_s}$ .

3. Studiare come cambiano i parametri dell'orbita terrestre (asse maggiore ed eccentricità) al variare di  $\alpha$ .

## 9.20 Cambio di eccentricità ★

Un corpo si trova in un'orbita ellittica di eccentricità  $\epsilon_1$  attorno a una stella. Quando si trova nel pericentro un urto gli fornisce un impulso radiale che trasforma l'orbita in una di eccentricità  $\epsilon_2$ . Trovare l'angolo formato tra gli assi maggiori delle due orbite.

## 9.21 Strana orbita circolare ★★

Un punto materiale di massa  $m$  si muove in un campo di forza centrale di simmetria sferica. Una possibile traiettoria del moto del punto materiale è descritta da una circonferenza  $\mathcal{C}$  passante per il centro della forza e avente diametro  $d_0$ .

1. Scrivere l'equazione parametrica della traiettoria  $\mathcal{C}$ ,  $r = r(\theta)$ .
2. Fissato il momento angolare  $L$ , scrivere l'espressione della forza che genera il moto.

## 9.22 Trio gravitazionale ★★★

Tre corpi (considerati come punti materiali) di masse  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  interagiscono tra di loro solo gravitazionalmente. Sotto quali condizioni sulle mutue posizioni e sulla velocità angolare i tre corpi ruotano rigidamente attorno al centro di massa comune?