

# Elettrostatica Avanzata

Daniele Fedeli\*, Fares Hasan†  
lezione tenuta da: Daniele Fedeli §

8 febbraio 2024

## Sommario

Lo scopo della lezione di "Elettrostatica Avanzata" è mostrare le tecniche per affrontare problemi avanzati di elettromagnetismo, trattando gli argomenti attraverso la risoluzione di problemi di livello Senigallia/IPhO. Nello specifico parleremo di leggi di Maxwell in forma differenziale, teorema di unicità del potenziale (con cariche immagini), conduttori, dipolo, equazione di continuità, magnetismo e legge di Faraday.

## 1 Le leggi di Maxwell in elettrostatica

Iniziamo con un richiamo riassuntivo alle leggi dell'elettrostatica. Conosciamo la legge di Coulomb per la forza tra cariche, da essa definiamo il campo generato da una distribuzione di carica  $\rho$  in un punto  $\vec{r}$  dello spazio

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

Manipolando questa legge si riescono ad ottenere due fatti molto importanti. Il primo è il noto **teorema di Gauss**:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

che in forma locale diventa:

$$\text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Il secondo afferma che la *circuitalità* del campo è sempre nulla, o equivalentemente il campo elettrico è *conservativo*, che in forma locale<sup>1</sup> diventa

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

---

\*daniele.fedeli@sns.it

†fares.hasan@sns.it

§daniele.fedeli@sns.it

<sup>1</sup>in sede di revisione ci viene richiesto di specificare per i matematici più pignoli che le due formulazioni sono equivalenti solo se il dominio è semplicemente connesso (che in pratica vuol dire che non ha buchi)

Ricordando che un campo vettoriale con rotore nullo può essere scritto come gradiente di una funzione "potenziale", si definisce poi il potenziale elettrostatico in modo che  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ . Possiamo esprimere quindi le due leggi in un'ulteriore forma compatta

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La precedente equazione che mette in relazione il potenziale elettrico con la densità di carica è detta **equazione di Poisson**. Per avere una visione più chiara di ciò che stiamo facendo riportiamo l'equazione in coordinate cartesiane

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Per concludere questa sezione introduttiva vogliamo anche richiamare la validità del *principio di sovrapposizione lineare* in elettrostatica tramite un semplice esempio.

## 1.1 Esercizio svolto: potenziale su un tetraedro

È dato un tetraedro regolare di lato  $L$ , le 4 facce sono tenute a potenziale  $V_1, V_2, V_3, V_4$ . Si determini il potenziale nel centro.

### 1.1.1 Soluzione

Si intuisce immediatamente che il potenziale al centro sarà la media dei 4 potenziali sulle facce. Vorremmo sfruttare la simmetria del sistema e il principio di sovrapposizione lineare per mostrarlo. Osserviamo per esempio che se operiamo una rotazione che manda il tetraedro in se stesso ma scambia i potenziali sulle facce allora il potenziale al centro deve rimanere invariato. Chiamiamo il potenziale al centro  $V_0$ . Prendiamo ora tutte e 24 le possibili permutazioni dei potenziali sulle 4 facce (supponendo di averle numerate). Sovrapponiamo le 24 configurazioni risultanti e otteniamo che, per il principio di sovrapposizione lineare il potenziale al centro sarà  $24V_0$ . Osserviamo inoltre che su ogni faccia il potenziale sarà  $6V_1 + 6V_2 + 6V_3 + 6V_4$ . Abbiamo dunque un tetraedro che possiede lo stesso potenziale su tutte e 4 la facce. Non essendo presente carica all'interno del tetraedro la soluzione sarà campo nullo e potenziale costante su tutto il volume da cui otteniamo che per il potenziale al centro vale

$$24V_0 = 6V_1 + 6V_2 + 6V_3 + 6V_4 \Rightarrow V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

Dunque tramite il principio di sovrapposizione lineare e le simmetrie siamo riusciti a confermare formalmente l'intuizione che il potenziale al centro sia la media dei potenziali sulla facce.

## 2 Discontinuità del campo elettrico

Vorremmo ora studiare e formalizzare le *discontinuità del campo elettrico* nei pressi di una densità di carica superficiale. In particolare vogliamo usare le leggi di Maxwell per determinare la discontinuità.

Supponiamo di avere una superficie generica con una densità superficiale<sup>2</sup> dipendente dalla posizione. Riduciamoci a osservare un piccolo intorno nei pressi di un punto della superficie in modo che la superficie appaia piatta e i due campi (separati dalla superficie) e la  $\sigma$  risultino

<sup>2</sup>il tutto "funziona" solo nei pressi di superfici lisce

uniformi. Utilizziamo ora il teorema di Gauss in un piccolo cilindretto di superficie  $S$  e altezza  $h$  con  $h^2 \ll S$ , allineato con la superficie. Definendo il versore normale alla superficie  $\hat{n}$  in modo che punti dallo spazio 1 allo spazio 2, troviamo che

$$\vec{E}_2 \cdot \hat{n} - \vec{E}_1 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

dove  $E_1$  ed  $E_2$  sono i campi da un lato e dall'altro della superficie. Notiamo intanto che il verso dato al versore  $\hat{n}$  è l'unico che fa assumere alla formula il segno corretto. Abbiamo dunque valutato la discontinuità nella componente perpendicolare, vediamo ora cosa accade per la componente parallela alla superficie.

Restringiamoci ad una zona in cui la superficie è approssimativamente piatta e sia  $\sigma$  che  $\vec{E}$  sono localmente costanti e uniformi, rispettivamente dai due lati della superficie. Chiamiamo  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$  i campi nei due spazi. Costruiamo una spira rettangolare in modo che abbia due lati normali alla superficie e due lati paralleli. Supponiamo inoltre che i due lati paralleli siano immersi uno nel primo campo e l'altro nel secondo. Chiamiamo  $\vec{L}$  il vettore che individua i lati paralleli alla superficie. Abbiamo che la circuitazione sulla spira è uguale a

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{L} - \vec{E}_2 \cdot \vec{L} = 0$$

poiché le componenti dei campi perpendicolari alla superficie hanno circuitazione complessiva nulla. Abbiamo dunque che

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{L} = \vec{E}_2 \cdot \vec{L} = 0$$

indipendentemente da  $\vec{L}$  che è un generico vettore parallelo alla superficie. Da ciò discende facilmente che le componenti parallele alla superficie dei due campi sono uguali. Dunque per riassumere abbiamo che

$$E_1^\perp - E_2^\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_1^\parallel = \vec{E}_2^\parallel$$

Questo risultato, di estrema importanza e spesso utilizzato, discende direttamente dalle leggi di Maxwell.

## 3 Conduttori e cariche immagini

### 3.1 Conduttori perfetti

In questa sezione e nei relativi esercizi si farà riferimento a conduttori perfetti, dei quali si ricorda di seguito la definizione.

Il **conduttore perfetto** è un oggetto tridimensionale (però si possono dare definizioni analoghe per conduttori 1D o 2D) tale che per ogni disposizione di cariche elettriche nello spazio la sua superficie risulta **equipotenziale** (a potenziale elettrico costante).

Tratteremo questo genere di oggetti in regime statico. Nella vita reale il conduttore è un oggetto dentro il quale le cariche elettriche sono libere di muoversi: queste cariche tenderanno spontaneamente a disporsi sulla superficie del conduttore e in condizioni di equilibrio si manterranno ferme. In questa condizione statica il campo elettrico superficiale non può altro che essere perpendicolare alla superficie stessa: se ci fosse un'eventuale componente del campo parallela

alla superficie, questa agirebbe sulle cariche superficiali mettendole in moto e violando quindi la condizione di staticità. Quindi:

$$\vec{E}_{\parallel} = 0$$

Si suppone che le cariche superficiali siano vincolate a rimanere comunque "attaccate" al conduttore, quindi una componente perpendicolare non nulla del campo non avrebbe effetto su di esse. La componente parallela del campo elettrico risulta nulla, quindi il potenziale sulla superficie è costante.

Il valore di tale potenziale è determinato dalle condizioni statiche del sistema: ad esempio si può imporre la carica totale presente sul conduttore (in questo caso si dice che il conduttore è **isolato**), oppure imponendo dall'esterno che la superficie del conduttore sia a un certo potenziale  $V_0$  rispetto alla terra. La "terra" denota l'infinito, per il quale convenzionalmente il potenziale elettrico è fissato a 0. Si consideri che in quest'ultimo caso la carica totale del conduttore non è fissata, per cui non è detto che sia isolato. In altre parole i vincoli a cui il sistema è sottoposto sono il potenziale sulla superficie del conduttore e ovviamente la forma geometrica del conduttore stesso.

In realtà serve la condizione aggiuntiva che all'interno del conduttore non sia presente carica fissa (non libera di muoversi): questo vincolo fa sì che se fossero presenti cariche libere all'interno, queste potrebbero solo depositarsi sulla superficie, per cui in condizioni statiche la carica interna è nulla. Più avanti si discuterà meglio questo aspetto. Il fatto che la carica interna sia nulla implica che il potenziale all'interno del conduttore sia uniforme e pari a  $V_0$  (potenziale sulla superficie) per il teorema di unicità (che vedremo in seguito).

Osserviamo per concludere che è possibile determinare la componente perpendicolare del campo sulla superficie attraverso ciò visto sulla discontinuità. Sappiamo infatti che il campo all'interno del conduttore è nullo dunque che:

$$\vec{E}_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

### 3.2 Capacità di un conduttore

Per cominciare si vuole usare le definizioni date in precedenza per dimostrare un fatto che spesso alle superiori viene dato per scontato, ma che in realtà nasconde una giustificazione profonda.

Consideriamo un singolo conduttore di forma qualsiasi. Definiamo la **capacità** del conduttore come:

$$C = \frac{Q}{V}$$

dove  $Q$  è la carica totale sul conduttore e  $V$  è il potenziale sulla superficie (rispetto a terra).

Dalla precedente definizione sembra che si abbia troppa libertà sul valore della capacità: in realtà questa grandezza è funzione solo delle caratteristiche geometriche del conduttore, in particolare non dipende né dalla carica  $Q$ , né dal potenziale  $V$ .

Ricordo che, per quanto detto prima, la carica del conduttore è distribuita soltanto sulla superficie di esso, per cui all'equilibrio la carica interna risulta nulla.

NOTA: il fatto che lo zero del potenziale è fissato all'infinito sarà fondamentale in seguito <sup>3</sup>. Supponiamo di assegnare uno specifico potenziale  $V_0$  alla superficie del conduttore. Di conseguenza

<sup>3</sup>nei problemi di potenziale ciò risulta spesso conveniente, soprattutto perché il potenziale della carica puntiforme  $k \frac{q}{r}$  assume la forma più semplice

si disporrà su di essa una carica totale  $Q_0$ . Per cui la capacità del conduttore vale:

$$C = \frac{Q_0}{V_0}$$

Tutto quello che stiamo facendo vale se nello spazio è presente un solo oggetto conduttore. La carica totale  $Q_0$  ovviamente deriva da una distribuzione di carica superficiale  $\sigma(\vec{r})$  che in generale non è uniforme. Inoltre il potenziale in tutto lo spazio sarà una certa funzione  $V(\vec{r})$  tale che sulla superficie del conduttore assumerà valore  $V_0$  e all'infinito tenderà a 0.

Supponiamo adesso di applicare un nuovo potenziale  $V_1 = \alpha V_0$  al conduttore. Perciò sul conduttore si depositerà una carica  $Q_1$  che sarà diversa da  $Q_0$ .

Vorremmo che la nostra definizione di capacità non cambi, cioè che valga sempre  $C = \frac{Q_1}{V_1}$ .

Con queste nuove condizioni il nuovo potenziale in tutto lo spazio sarà una funzione  $\tilde{V}(\vec{r})$  tale che assumerà valore  $V_1$  sulla superficie del conduttore e all'infinito tenderà a 0.

Innanzitutto ci chiediamo come venga modificato il potenziale in tutto lo spazio esterno al conduttore.

La soluzione è che la nuova funzione potenziale risulterà  $\alpha$  volte la vecchia funzione:

$$\tilde{V}(\vec{r}) = \alpha V(\vec{r})$$

Questo perché se la vecchia funzione  $V(\vec{r})$  risolve l'equazione di Poisson, siamo sicuri che anche la nuova funzione  $\tilde{V}(\vec{r}) = \alpha V(\vec{r})$  risolve l'equazione di Poisson rispettando le nuove *condizioni al bordo*. Si ricorda che questa equazione è **lineare**, per cui è risolta anche dalle vecchie soluzioni riscalate di fattori costanti.

Risolto il potenziale dobbiamo trovare la nuova carica superficiale del conduttore. Notiamo che anche il campo elettrico esterno viene riscalato sempre dello stesso fattore  $\alpha$  (essendo  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ ).

Infine si ricorda che in un conduttore la densità di carica superficiale è  $\sigma = E_{\perp} \epsilon_0$ . Quindi anche la  $\sigma$  superficiale viene riscalata dello stesso fattore  $\alpha$ :

$$\tilde{\sigma}(\vec{r}) = \alpha \sigma(\vec{r}),$$

perciò lo stesso vale anche la carica totale del conduttore:

$$Q_1 = \alpha Q_0$$

In conclusione la capacità rimane invariata.

### 3.3 Richiamo sulle cariche immagine

Spesso ci si trova davanti a problemi di elettrostatica in cui viene assegnato un conduttore messo a un certo potenziale  $V_0$  e si chiede magari di trovare il campo elettrico in un qualche punto dello spazio.

Questa domanda può essere ricondotta a risolvere il potenziale in tutto lo spazio, poiché dal potenziale è facile calcolare il campo elettrico.

#### 3.3.1 Esempio: Carica davanti alla sfera

Prendiamo un esempio abbastanza classico e noto per introdurre questo metodo.

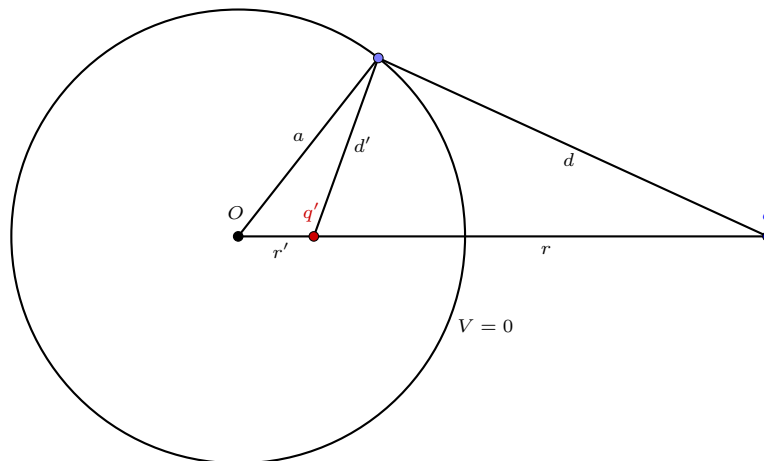
Consideriamo una *sfera conduttrice* di raggio  $a$  messa a terra. Davanti ad essa è posta una carica puntiforme  $q$  a distanza  $r$  dal centro della sfera. Si chiede di risolvere il potenziale nello spazio esterno alla sfera.

Le *condizioni al bordo* di questo particolare problema sono: il potenziale deve essere nullo all'infinito e sulla superficie della sfera.

È noto che la soluzione per questo problema è risolta posizionando una **carica immagine**  $q' = -\frac{a}{r}q$  all'interno della sfera a distanza  $r' = \frac{a^2}{r}$  dal centro sulla congiungente del centro e la carica originale. In altre parole il potenziale nello spazio esterno alla sfera è quello generato dalla carica reale  $q$  e dalla carica immagine  $q'$  interna al conduttore.

Quest'ultima affermazione si può giustificare calcolando esattamente il campo prodotto dalle due cariche puntiformi e dimostrare che sulla superficie della sfera soltanto la componente perpendicolare risulta non nulla.

Un modo alternativo di derivare questo risultato può essere il seguente.



Si faccia riferimento alla figura. Per simmetria cilindrica, possiamo limitarci a studiare il problema bidimensionale.

In particolare si vuole dedurre la posizione della carica immagine in modo tale che per ogni punto sulla circonferenza valga:

$$k\frac{q}{d} + k\frac{q'}{d'} = 0 \Rightarrow \frac{q}{q'} = -\frac{d}{d'}$$

Questo implica che  $d$  e  $d'$  devono mantenere la stessa proporzionalità per ogni punto della circonferenza. Questo problema è risolto imponendo che il triangolo individuato dai lati  $r' - a - d'$  sia simile al triangolo individuato dai lati  $r - a - d$ . In questo caso particolare l'ultima condizione è verificata se e solo se  $r' = \frac{a^2}{r}$ . Si noti che questo vincolo è verificato automaticamente per ogni punto sulla circonferenza. Avendo trovato  $r'$  ricaviamo che:

$$q' = -q\frac{a}{r}$$

$$r' = \frac{a^2}{r}$$

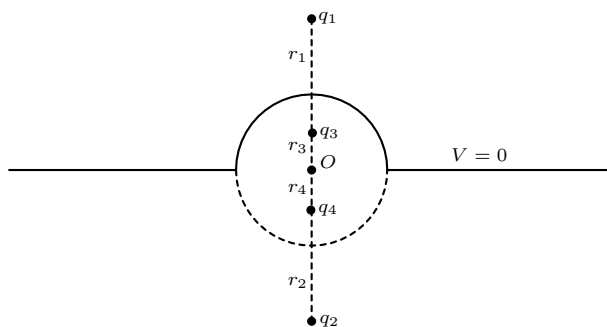
NOTA: in generale se si vogliono usare delle cariche immagini per risolvere un problema di conduttori, la regione di spazio (in cui si vuole risolvere il problema) contornata dal conduttore stesso e l'infinito *non* può contenere cariche immagine.

### 3.4 Esercizio svolto: sistema di conduttori

Si consideri un conduttore formato da un piano sopra il quale è innestata una superficie semisferica conduttrice di raggio  $a$ , come mostrato in figura. Il conduttore è messo a terra e davanti ad esso è posta una carica puntiforme  $q_1$  a distanza  $r_1$  dal centro della sfera. Si trovi il potenziale in tutto lo spazio.

#### 3.4.1 Soluzione

Richiamiamo le *condizioni al bordo* del sistema: il potenziale deve essere nullo all'infinito e sulla superficie del conduttore.



Il modo di procedere in questi casi è iterativamente: ignorando per il momento la superficie sferica, voglio posizionare una carica immagine che annulli il potenziale sul piano conduttore. La soluzione è posizionare una carica  $q_2 = -q_1$  a distanza  $r_2 = -r_1$  dal centro della sfera.

Tornando a considerare la sfera, mi rendo conto che con una sola carica immagine ho messo a zero il potenziale del piano, ma non quello della sfera. Avendo due cariche al di fuori della sfera è noto che, per sovrapposizione delle soluzioni, il modo per annullare il potenziale sulla sua superficie è porre altre due cariche immagini  $q_3 = -\frac{a}{r_1}q_1$  e  $q_4 = -\frac{a}{r_2}q_2$  all'interno della sfera a distanza rispettivamente  $r_3 = \frac{a^2}{r_1}$  e  $r_4 = \frac{a^2}{r_2}$ . Notiamo che casualmente queste ultime due non modificano il potenziale sul piano perché sono poste specularmente l'una di fronte all'altra rispetto al piano stesso, quindi il problema è risolto da tre cariche immagini.

## 4 Teorema di unicità

Vorremmo ora accennare ad un importante teorema dell'elettrostatica necessario per formalizzare alcune soluzioni. Vedremo solo l'enunciato senza la dimostrazione.

Prima di enunciare il teorema vorremmo capire meglio cosa vuol dire risolvere il *problema dell'elettrostatica*. In generale vuol dire trovare un potenziale  $V(\vec{r})$  che rispetti determinate condizioni. La prima è l'**equazione di Poisson**: nota  $\rho(\vec{r})$ , il potenziale deve soddisfare:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

La seconda è la **condizione al contorno**, cioè le informazioni note sul comportamento del potenziale sul bordo del dominio. Esistono due tipi di condizioni:

1. **Condizioni di Dirichlet**: è noto il potenziale per ogni punto al bordo

2. **Condizioni di Neumann:** è nota la componente normale (al bordo) del gradiente su ogni punto del bordo

Il **teorema di unicità** afferma che il gradiente è unico per tutte le possibili soluzioni. Dunque una volta trovato un potenziale risolvete esso determina *univocamente* il campo.

Proviamo a vedere una semplice applicazione che si riconduce a ciò detto sulla capacità dei conduttori. Supponiamo di avere un conduttore di forma generica su cui è depositata una carica  $Q_0$ , vorremmo mostrare che è unico il modo in cui la carica si può disporre rispettando le leggi note sui conduttori. Proviamo a capire cosa si intende per problema dell'elettrostatica in questo caso.

Il dominio su cui vogliamo definire  $V$  è tutto lo spazio meno il conduttore, poiché nel conduttore il potenziale è banalmente costante. Sappiamo inoltre che all'interno del dominio  $\rho = 0$  poiché non c'è carica nello spazio se non al contorno. Come condizioni al contorno abbiamo potenziale costante sul conduttore  $V_0$  che potrebbe dipendere dalla configurazione delle cariche e potenziale all'infinito uguale a zero. Supponiamo ora di avere due differenti configurazioni con la stessa carica totale sul conduttore  $Q_0$  ma che portano il potenziale sul conduttore a due diversi valori  $V_1$  e  $V_2$ . Osserviamo intanto che la carica totale non è una condizione al contorno che vogliamo considerare, vogliamo quindi lavorare solo con  $V_1$  e  $V_2$ . Supponiamo di aver trovato una soluzione  $\tilde{V}_1(\vec{r})$  alla prima configurazione. Se ora prendiamo la funzione

$$\tilde{V}_2(\vec{r}) = \frac{V_2}{V_1} \tilde{V}_1(\vec{r})$$

è evidente che questa rispetta le condizioni al contorno della seconda configurazione e ha, anch'essa, il laplaciano nullo in tutto il dominio. Quindi per il *teorema di unicità* possiamo dire che il campo delle due configurazioni è lo stesso a meno di un fattore  $\frac{V_2}{V_1}$ . Questo chiaramente è in conflitto con l'ipotesi che abbiano la stessa carica totale, dato che la carica totale è univocamente determinata dal campo (per il teorema di Gauss). Dunque  $V_1 = V_2$ .

Rimane solo da puntualizzare che non solo le due configurazioni portano il conduttore allo stesso potenziale, ma sono identiche. Infatti per il teorema di unicità il campo è univocamente determinato dal potenziale e dalla forma del conduttore, ed esso determina univocamente la densità superficiale di carica  $\sigma$  in ogni punto del conduttore (oltre che la carica totale come già detto).

Il teorema di unicità è molto spesso utilizzato senza essere esplicitamente richiamato, l'esempio più noto è sicuramente quello della tecnica delle cariche immagine. Nell'utilizzo delle cariche immagine si sostituisce ad un determinato conduttore una configurazione di carica in modo che il potenziale generato risolva (nello spazio considerato) il problema dell'elettrostatica. La potenza del teorema di unicità risiede nel fatto che una volta trovata tale configurazione di carica sappiamo che il campo generato è l'unico che può risolvere tali condizioni. La questione può sembrare sottile ma è di estrema importanza.

## 4.1 Riassunto della procedura per uso di cariche immagine

In conclusione vorremmo riassumere cosa esattamente fare e a cosa stare attenti quando si usano cariche immagine per risolvere un problema.

Supponiamo che il problema abbia la seguente formulazione: sia dato un conduttore volumico di qualche forma messo a potenziale  $V_0$  (rispetto all'infinito) oppure con carica totale  $Q_0$  e nello spazio esterno al conduttore è presente una densità di carica  $\rho(\vec{r})$ . Si trovi il potenziale e il campo in tutto lo spazio.

Iniziamo dicendo che per ciò dimostrato sulla capacità ci basterà risolvere il caso del conduttore a

potenziale fissato. Se si vorrà risolvere quello a carica fissata basta trovare la carica a potenziale fissato e poi riscalarlo tutto.

1. Pensiamo di poter risolvere il problema con la tecnica delle cariche immagine.
2. All'interno del conduttore il campo è nullo e il potenziale costante quindi vogliamo risolvere solo nello spazio esterno.
3. Andiamo dunque alla ricerca di una configurazione di carica che abbia le seguenti caratteristiche fondamentali:
  - Nello spazio in cui **non** è presente il conduttore la distribuzione di carica deve coincidere con quella data dal testo per rispettare l'equazione di Poisson.
  - Sulla superficie del conduttore il potenziale deve essere costante e uguale a  $V_0$  rispetto all'infinito.
  - Eventualmente la condizione sopra si può sostituire con l'imporre che il campo sia sempre perpendicolare alla superficie del conduttore (e almeno un punto sia a  $V_0$ ).
4. Una volta trovata tale configurazione utilizziamo il teorema di unicità per affermare che la soluzione del problema è unica e **nello spazio fuori dal conduttore** coincide con quella data dalla distribuzione di carica trovata.

## 5 Dipoli elettrici

Il *dipolo fisico* è un sistema di cariche elettriche che è ottenibile agendo secondo il seguente limite:

si considerano due cariche puntiformi distanti tra loro  $d$  e aventi carica rispettivamente  $+q$  e  $-q$  (con  $q > 0$ ). Si indica con  $\vec{d}$  il vettore di modulo  $d$  che congiunge le due cariche partendo da quella negativa. Il dipolo ideale si ottiene considerando il limite per  $d \rightarrow 0$  e  $q \rightarrow \infty$  mantenendo costante il prodotto  $q \cdot d$ . Fissiamo il valore di tale prodotto uguale a  $p$ , unico parametro determinante le caratteristiche del dipolo ideale. Si denota con  $\vec{p} \equiv q \cdot \vec{d}$ .

È interessante determinare il campo prodotto da tale oggetto partendo dalle due cariche iniziali e fare in seguito il limite di dipolo ideale. Conviene partire dapprima dal potenziale elettrostatico.

Se si svolge questo esercizio si trova che se il dipolo  $\vec{p}$  è posto nell'origine del sistema di assi, il potenziale elettrostatico assume la seguente espressione ( $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ):

$$V(\vec{r}) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

In seguito per il calcolo del campo elettrico prodotto da un dipolo ideale si può usare  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , oppure considerare sempre il campo prodotto dalle due cariche e svolgere il limite.

Se si svolgono i calcoli si ottiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

È importante marcare il fatto che in fisica non esistono dipoli ideali, però spesso il comportamento di molti sistemi può essere approssimato a quello di un dipolo elettrico.

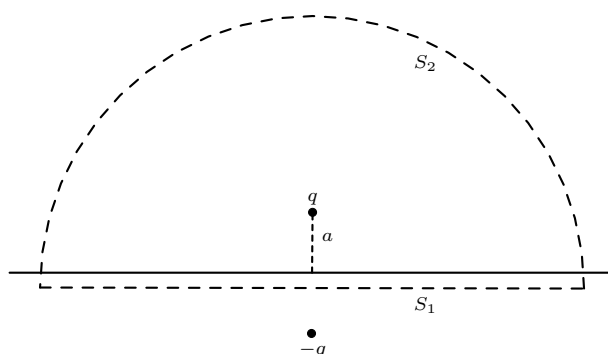
## 5.1 Esercizio svolto: carica sul piano

Una carica puntiforme  $q$  è posizionata a una distanza  $a$  davanti a un piano conduttore messo a terra. Si calcoli la carica totale presente sulla superficie del piano.

### 5.1.1 Soluzione

Intuitivamente ci si aspetta che la carica totale sul piano sia proprio la somma delle cariche immagini che usiamo per risolvere il problema dell'elettrostatica.

Diamo per assodato che la soluzione del potenziale corrisponda a posizionare una carica immagine  $-q$  dentro il piano a una distanza  $-a$  dalla superficie del conduttore. Ovviamente questo problema si può risolvere con la "forza bruta" calcolando la densità di carica sul piano e poi integrando su tutta la superficie.



Ora vedremo invece la soluzione che utilizza il *teorema di Gauss*. Richiamo il teorema di Gauss in forma globale: data una superficie chiusa  $S$  vale che  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ , dove  $Q_{\text{int}}$  è la carica interna contenuta nella superficie. L'idea è scegliere la superficie in questione che contenga il piano conduttore. La superficie più comoda è quella semisferica mostrata nella figura. Questa particolare superficie non contiene veramente tutto il piano, ma possiamo immaginare di mandare il raggio della semisfera all'infinito, e calcolare in quel limite la carica interna.

Applichiamo il teorema di Gauss: la superficie si divide in due parti. Su  $S_1$  sappiamo che il flusso del campo elettrico è 0, poiché dentro un conduttore il campo elettrico è nullo.

Per calcolare il flusso del campo elettrico su  $S_2$  serve un ragionamento più raffinato: immaginiamo di metterci molto lontano dall'origine del sistema, dove dovremo calcolare il campo elettrico. Fuori dal piano conduttore il campo elettrico è quello generato da due cariche puntiformi opposte distanti  $2a$ . Se siamo molto lontani il campo di queste tenderà sempre più al campo di un dipolo ideale  $\vec{p} = 2aq\hat{z}$ . Usiamo questa approssimazione: allora il flusso del campo elettrico sarà:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \cdot d\vec{A}$$

Si vuole mostrare che questo integrale tende ad annullarsi nel limite in cui il raggio della semisfera tende a infinito.

Se prendiamo il modulo dell'integrale, valgono i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} & \left| \oint_S k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \cdot d\vec{A} \right| = \left| \oint_S k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \cdot \hat{n} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right| \leq \\ & \leq \int_S \left| k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \cdot \hat{n} \right| R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \leq \int_S k\alpha |\vec{p}| \frac{1}{R^3} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ & = k\alpha |\vec{p}| \frac{1}{R} \int_S \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi k\alpha |\vec{p}| \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La seconda disuguaglianza raccoglie i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \cdot \hat{n} \right| \leq \left| \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \right| = \frac{|3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} + r^2\vec{p}|}{r^5} \leq \\ & \leq \frac{|3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}| + |r^2\vec{p}|}{r^5} \leq \frac{4|r^2\vec{p}|}{r^5} = \frac{4|\vec{p}|}{r^3} = \frac{\alpha|\vec{p}|}{R^3}; \quad \text{nel nostro caso } \alpha = 4. \end{aligned}$$

Quindi questo ci dice che la carica interna netta contenuta nella semisfera è nulla. Ma visto che questa contiene la carica puntiforme  $q$ , necessariamente la carica sulla superficie del piano vale  $-q$ .

## 5.2 Esercizio svolto: sfere che si compenetrano

Si considerino due sfere cariche con densità volumica uniforme  $\rho$  e  $-\rho$  di raggio  $R$ , con i centri rispettivamente nei punti  $(d, 0, 0)$  e  $(-d, 0, 0)$ .

1. Si trovi il campo all'interno dell'intersezione tra le due sfere.
2. Nell'approssimazione in cui  $\rho$  tende a infinito ma il prodotto  $2\rho d = P_0$  mantiene valore costante, si trovi il campo in tutto lo spazio e la densità superficiale di carica sulla sfera di raggio  $R$  centrata nell'origine.

### 5.2.1 Soluzione

Sappiamo che per una singola sfera uniformemente carica posta con centro nell'origine il campo vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} & \text{per } |\vec{r}| > R \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} & \text{per } |\vec{r}| < R \end{cases}$$

Chiamando  $\vec{d} = (d, 0, 0)$  troviamo che il campo nell'intersezione delle due sfere vale

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} ((\vec{r} - \vec{d}) - (\vec{r} + \vec{d})) = -\frac{2\rho}{3\epsilon_0} \vec{d}$$

Dunque il campo all'interno dell'intersezione è costante e diretto lungo l'asse  $x$  con modulo  $\frac{2\rho d}{3\epsilon_0}$ . Ci domandiamo ora cosa accade nel limite in cui  $\rho$  tende a infinito ma il prodotto  $2\rho d = \vec{P}_0$  si mantiene costante. Osserviamo innanzitutto che le due sfere si sovrappongono totalmente, dunque il risultato finale sarà una distribuzione superficiale di carica sulla sfera centrata nell'origine. All'interno di tale sfera le due densità volumiche  $\rho$  e  $-\rho$  si cancellano. Per determinare la densità superficiale di carica vogliamo descrivere il campo all'esterno della sfera. Dato che il campo

all'esterno di una sfera uniformemente carica è uguale a quello di un'opportuna carica puntiforme posta nel centro, osserviamo che nel limite che stiamo facendo il campo esterno sarà proprio quello di un dipolo

$$\vec{p} = 2 \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \vec{d} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{P}_0$$

Conoscendo ora il campo all'esterno e all'interno della sfera possiamo utilizzare le condizioni al bordo per il campo elettrico per determinare la densità di carica superficiale sulla sfera. Notiamo innanzitutto che il sistema ha simmetria azimutale lungo l'asse  $x$ , dunque la densità superficiale  $\sigma$  dipende solo da  $\theta$  cioè l'angolo formato dal vettore posizione con l'asse  $x$ . Ricordando che il campo è:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}_0 & \text{per } |\vec{r}| < R \\ \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{3(\vec{P}_0 \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}_0}{r^5} & \text{per } |\vec{r}| > R \end{cases}$$

Troviamo dunque la discontinuità sulla sfera della componente radiale del campo. Otteniamo che:

$$\frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} = \frac{1}{3\epsilon_0} P_0 \cos \theta + \frac{2}{3\epsilon_0} P_0 \cos \theta$$

$$\sigma(\theta) = P_0 \cos \theta$$

Dunque abbiamo trovato il campo in tutto lo spazio e la distribuzione di carica superficiale. Per riassumere puntualizziamo un risultato importante. È possibile ottenere il campo esatto di un dipolo distribuendo carica su una sfera, in particolare la distribuzione su una sfera per ottenere un dipolo di modulo  $P$  è proprio:

$$\sigma(\theta) = P_0 \cos \theta$$

## 6 Densità di corrente e magnetostatica

Gli unici oggetti che abbiamo trattato finora sono soltanto sistemi di cariche elettriche che generano un campo. Ora è il momento di introdurre un nuovo oggetto fisico di estrema importanza: la **densità di corrente**, che generalizza il concetto di corrente elettrica.

Una corrente elettrica è uno spostamento di cariche attraverso lo spazio ed è descritta dal vettore **densità di corrente**:

$$\vec{J}(\vec{r}) \equiv \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$$

dove  $\vec{v}$  è la velocità a cui si muove la carica di densità  $\rho(\vec{r})$ . La più familiare corrente  $I$  attraverso una superficie  $S$  è il flusso di  $\vec{J}$  attraverso  $S$ :

$$I \equiv \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

A questo punto risulta naturale formulare una legge di **conservazione della carica**, la quale necessariamente deve essere sempre rispettata.

Quindi questa legge impone che, per ogni intervallo di tempo, la quantità di carica uscente attraverso una data superficie chiusa sia uguale ed opposta alla variazione della carica nel volume

racchiuso dalla superficie, ovvero  $I_S dt = -dQ_{\text{int}}$ ; facendo tendere a zero l'intervallo di tempo si ha:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = 0$$

Quest'ultima è la forma integrale dell'**equazione di continuità**. Questa compare in molte aree della fisica, e descrive in modo completo la variazione di quantità continue nello spazio in funzione del loro spostamento, in questo caso dato dal flusso di corrente. Questa equazione non compare fra le leggi di Maxwell solo perché, nella loro forma completa, queste la implicano.

Anche l'equazione di continuità ha una corrispondente formulazione locale, vale a dire:

$$\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Il lettore è invitato a dimostrare che questa formulazione locale implica la corrispondente formula integrale.

L'aver introdotto la corrente elettrica ci porta a parlare di campo magnetico, che rispetto al campo elettrico soddisfa leggi completamente diverse.

Sperimentalmente si verifica che a generare un *campo magnetico* siano proprio le correnti elettriche, come a generare il campo elettrico siano le cariche. Ora vediamo come le caratteristiche dei campi magnetici possano essere descritte nelle leggi di Maxwell.

Per ora tratteremo il caso della magnetostatica, in cui si suppone che tutte le quantità vettoriali e scalari siano indipendenti dal tempo.

Le leggi dell'elettromagnetismo sono spesso espresse nella forma delle leggi di Maxwell, che racchiudono in modo compatto e completo una descrizione dei fenomeni dell'elettrodinamica classica. In particolare i fenomeni magnetostatici possono essere descritti dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0 && \text{(assenza di monopoli)} \\ \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 \oint_{S_{\gamma}} \vec{J} \cdot d\vec{S}, && \text{(legge di Ampère)} \end{aligned}$$

dove nella prima equazione  $S$  è una qualsiasi superficie chiusa, e nella seconda equazione  $\gamma$  è una qualsiasi curva chiusa e  $S_{\gamma}$  una qualsiasi superficie con bordo  $\gamma$ .

La prima legge riflette l'assenza di cariche magnetiche libere; le linee di campo prodotte dalle sorgenti di campo magnetico sono linee chiuse, quindi il loro flusso attraverso una superficie chiusa è nullo.

La seconda legge invece esprime la relazione fra le correnti ed il campo magnetico; questa formulazione ha il vantaggio di facilitare, in casi di particolare simmetria, la computazione del campo magnetico nello spazio. Inoltre questa formulazione permette di osservare una certa asimmetria fra i campi: il campo elettrico dipende dalla densità di carica tramite una relazione di flusso, mentre il campo magnetico dipende dalla densità di corrente tramite una relazione di circuitazione.

Per dare senso matematico alla seconda legge è necessario utilizzare la convenzione della mano destra: se i vettori tangenti alla curva  $d\vec{\ell}$  hanno il verso delle dita della mano destra, i vettori normali alla superficie  $d\vec{S}$  hanno il verso del pollice. Questa convenzione, insieme a quella del flusso uscente da una superficie chiusa, è di gran lunga la più utilizzata nella letteratura (dato che evita in molte formule un segno meno).

È possibile dare una formulazione locale anche per le ultime equazioni che abbiamo scritto. In particolare esse diventano:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Anche in questo caso il lettore è invitato a verificare che la formulazione locale implica la formulazione integrale.

La magnetostatica si propone di studiare situazioni *stazionarie* nelle correnti e nella densità di carica, in cui la carica netta contenuta in una qualsiasi regione di spazio rimane costante nel tempo. Dall'equazione di continuità otteniamo:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \text{o equivalentemente} \quad \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

Questo ha un'importante conseguenza: in magnetostatica è ben definito il **flusso di corrente concatenato** ad una curva chiusa, ovvero per ogni superficie  $S_\gamma$  con bordo in una stessa curva chiusa  $\gamma$  il flusso di  $\vec{J}$  attraverso  $S_\gamma$  è sempre lo stesso, purché si usi la regola della mano destra per scegliere l'orientazione di  $S_\gamma$ .

Torniamo per un momento al caso di densità di carica non costante nel tempo e vediamo un'applicazione interessante dei concetti appena esposti.

Iniziamo intanto a dare la definizione di conduttore ohmico. Un **conduttore ohmico** è un oggetto materiale che soddisfa la seguente proprietà: la densità di corrente  $\vec{J}$  e il campo elettrico  $\vec{E}$  all'interno di esso soddisfano la relazione

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

dove  $\sigma$  è la così detta conducibilità del materiale. Questa legge descrive il comportamento dei metalli conduttori più comuni usati nei circuiti elettrici.

Adesso con le conoscenze che abbiamo vogliamo dedurre l'andamento temporale della carica libera all'interno di un conduttore ohmico. In particolare vogliamo trovare la dipendenza temporale della densità di carica  $\rho(\vec{r}, t)$ . Immaginiamo dunque di avere fissato al tempo  $t = 0$  la densità di carica interna al conduttore  $\rho(\vec{r}, 0)$ . Tutto quello di cui abbiamo bisogno adesso sono la prima equazione di Maxwell e l'equazione di continuità, che riportiamo in seguito:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Essendo il conduttore ohmico sappiamo che  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ . Per cui le precedenti equazioni diventano:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \sigma \operatorname{div}(\vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Infine ricaviamo facilmente l'equazione per la densità di carica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 0$$

La precedente equazione ammette come soluzione la funzione esponenziale decrescente, per cui:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Questo fatto è estremamente interessante perché rappresenta quello che ci aspetteremmo intuitivamente da un conduttore: le cariche libere tendono a respingersi e andare verso i bordi lasciando l'interno del conduttore privo di carica. Per cui possiamo dedurre che aspettando un tempo abbastanza lungo verrà realizzata la condizione di **conduttore perfetto**.

## 6.1 Esercizio svolto: particelle tra due griglie

Si consideri lo spazio compreso tra due griglie piane perpendicolari all'asse  $\hat{x}$  rispettivamente a  $x = 0$  e  $x = L$ , la prima mantenuta a potenziale  $V = V_0$  e la seconda a potenziale  $V = 0$ . Particelle di massa  $M$  e carica  $Q$  entrano in questa regione attraverso la griglia a  $x = 0$  con velocità iniziale trascurabile e creano una densità di corrente  $J$  costante e uniforme tra una griglia e l'altra, uscendo infine attraverso la griglia a  $x = L$ .

1. Indicando con  $v(x)$  la velocità delle particelle e con  $\rho(x)$  la densità di carica, si scriva l'equazione di Poisson per il potenziale  $V(x)$  con  $0 < x < L$ .
2. La si risolva e si ricavi  $J$  in funzione di  $M$ ,  $Q$ ,  $L$  e  $V_0$  nell'ipotesi che il campo elettrico vada a zero per  $x \rightarrow 0^+$ .

### 6.1.1 Soluzione

Iniziamo intanto osservando che, per ragioni di simmetria, il potenziale e tutte le altre grandezze fisiche possono dipendere solo dalla coordinata  $x$ . Inoltre tutte le particelle si spostano sotto la sola azione del campo elettrico che, essendo un vettore, può avere solo componente parallela all'asse  $x$ . Notiamo che attraverso la conservazione dell'energia possiamo legare  $v(x)$  e  $V(x)$ , in particolare sappiamo che:

$$\frac{1}{2}Mv(x)^2 = Q(V_0 - V(x))$$

Inoltre l'equazione di Poisson, poichè  $V$  dipende solo da  $x$  sarà:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

Osserviamo che essendo  $J$  costante e uniforme in tutto lo spazio allora vale la relazione (direttamente in forma scalare):

$$v(x) = \frac{J}{\rho(x)}$$

Dunque otteniamo dalle equazioni sopra che:

$$V(x) = V_0 - \frac{Mv(x)^2}{2Q}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{J}{\epsilon_0 v(x)}$$

Derivando la prima equazione due volte si trova che:

$$-\frac{M}{Q} \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{J}{\epsilon_0 v} \Rightarrow \frac{QJ}{M\epsilon_0} = v \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Notiamo che le condizioni del testo impongono

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{M}{Q} v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

poiché il campo nei pressi dell'origine tende al nullo. Provando una soluzione polinomiale si trova

$$v(x) = \sqrt[3]{\frac{9QJ}{2\epsilon_0 M}} x^{\frac{2}{3}}$$

Notiamo che questa soluzione rispetta le condizioni del testo. Vogliamo dunque ora ricavare  $J$  dall'espressione del potenziale.

$$V(x) = V_0 - \sqrt[3]{\frac{81MJ^2}{32Q\epsilon_0^2}} x^{\frac{4}{3}}$$

Imponendo che  $V(L) = 0$  otteniamo

$$V_0 = \frac{3L}{2} \sqrt[3]{\frac{3MJ^2L}{4Q\epsilon_0^2}} \Rightarrow J = \frac{4V_0\epsilon_0}{9L^2} \sqrt{\frac{2V_0Q}{M}}$$

## 7 Cenni all'elettrodinamica

Finora abbiamo parlato di elettrostatica e magnetostatica, cioè soltanto casi in cui le quantità vettoriali e scalari non dipendono esplicitamente dal tempo. Infatti riportiamo le *equazioni di Maxwell statiche*:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

dove tutte le quantità vettoriali e scalari hanno soltanto dipendenza spaziale e non temporale. Inoltre abbiamo dedotto anche la legge di *conservazione della carica*:

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ovviamente ci chiediamo come possano essere formulate delle leggi simili che valgano anche con la dipendenza temporale.

Ciò che venne verificato sperimentalmente è che le prime due leggi rimangono invariate, al contrario delle ultime due leggi che subiscono delle correzioni.

In particolare tutto cominciò dalle osservazioni sperimentali di Faraday che analizzò il comportamento di circuiti posti in campi magnetici variabili nel tempo. Possiamo riassumere le sue osservazioni fondamentali mediante tre fenomeni empiricamente verificati:

1. **Circuito in movimento.** Spostando un circuito fuori da un campo magnetico, una corrente scorre nel filo.
2. **Magnete in movimento.** Spostando la sorgente del campo magnetico, nuovamente una corrente scorre nel filo.
3. **Variazione di intensità.** Facendo variare l'intensità del campo magnetico, anche questa volta una corrente scorre nel circuito.

Faraday interpretò la comparsa di una corrente come conseguenza della variazione del flusso del campo magnetico attraverso il circuito. Per formulare questa legge definiamo due grandezze fisiche:  $\mathcal{E}$  e  $\Phi(\vec{B})$ . Pensando il circuito come una curva chiusa  $\gamma$  tracciata nello spazio, la variazione di flusso magnetico induce un campo elettrico del quale possiamo definire la **forza elettromotrice** lungo  $\gamma$  come l'integrale su  $\gamma$  del campo elettrico indotto  $\vec{E}'$ :

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell}$$

e detta  $S_{\gamma}$  una superficie che ha come bordo la curva  $\gamma$ , che delinea il circuito, possiamo scrivere il flusso del campo magnetico come:

$$\Phi(\vec{B}) \equiv \oint_{S_{\gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

È importante chiarire subito che la scelta del sistema di riferimento non è indifferente: indicheremo con  $\vec{E}'$  il campo elettrico indotto dal campo magnetico *nel sistema di riferimento solidale al circuito*, mentre con  $\vec{B}$  il campo magnetico presente nel laboratorio. Le osservazioni di Faraday sono così espresse con la seguente legge:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Nel segno del membro di destra è manifesta la **legge di Lenz**: la variazione di flusso del campo magnetico induce una corrente che genera un campo magnetico il cui flusso si oppone alla variazione originaria di flusso.

Scriviamo ora più esplicitamente questa legge, nei termini del campo elettrico indotto e del flusso del campo magnetico,

$$\oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \oint_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{A}, \quad (1)$$

Considerando il caso in cui il circuito  $\gamma$  rimane fisso, deduciamo la seguente formulazione differenziale:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Quindi quando la dipendenza temporale non è banale, il campo elettrico **non** è più conservativo. Ciò vuol dire che non è più possibile definire un potenziale  $V$  tale che  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ .

Anche la quarta legge di Maxwell necessita delle correzioni. Infatti notiamo che così come è scritta contraddice l'equazione di continuità: se facessimo la divergenza in ambo i membri, otterremmo che  $\text{div} \vec{J} = 0$ , che vale solo se  $\rho$  non dipende dal tempo.

Un modo per correggere la quarta equazione è aggiungere un campo  $\vec{\Lambda}(\vec{r}, t)$  che soddisfi la seguente proprietà:

$$\begin{aligned}\text{rot}\vec{B} &= \mu_0\vec{J} + \vec{\Lambda} \\ \text{div}\vec{\Lambda} &= \frac{\partial\rho}{\partial t}\end{aligned}$$

Tuttavia ricordandoci della prima equazione di Maxwell che rimane comunque valida otteniamo che  $\vec{\Lambda} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ , quindi la quarta equazione di Maxwell diventa:

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Di seguito si riportano le nuove equazioni di Maxwell, valide in qualsiasi condizione statica o dinamica:

$$\begin{aligned}\text{div}\vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{div}\vec{B} &= 0 \\ \text{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}\vec{B} &= \mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

## 8 Esercizi

### 8.1 Sfere conduttrici

Si risolva il problema dell'elettrostatica in tutto lo spazio nel caso siano presenti i seguenti oggetti.

1. Una sfera conduttrice messa a potenziale  $V_0$ .
2. Una sfera conduttrice messa a potenziale  $V_0$  e una carica puntiforme  $q$  posizionata davanti ad essa.
3. Una sfera conduttrice di carica  $Q$  e una carica puntiforme  $q$  posizionata davanti ad essa.
4. Una carica puntiforme  $q$  posta all'interno di un guscio sferico conduttore messo a terra.
5. Una carica puntiforme  $q$  posta all'interno di un guscio sferico conduttore messo a potenziale  $V_0$ .

### 8.2 Piani conduttori

Si risolva il problema dell'elettrostatica nei seguenti casi.

1. Una carica  $q$  è posta in posizione  $(a, b, 0)$  con  $a, b > 0$  ed è presente un conduttore nella regione di spazio  $x < 0 \vee y < 0$ .  
E se invece il conduttore fosse in  $x < 0 \wedge y < 0$ ?

- Usando ora un sistema di coordinate cilindriche, studiare il sistema in cui è presente un conduttore nella regione di spazio  $\theta \in [\alpha, 2\pi]$  con  $\alpha = \pi/2n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}^+$  e una carica  $q$  in posizione  $(r, \alpha/2, z = 0)$ .  
Studiare lo stesso sistema di prima dove però  $q$  è in posizione  $(r, \bar{\theta}, z = 0)$  con  $\bar{\theta} \in [0, \alpha]$  qualunque.
- Due cariche  $q$  sono poste rispettivamente in posizione  $(a, b, 0)$  e  $(-a, -b, 0)$  con  $a, b > 0$  ed è presente un conduttore (messo a terra) nella regione di spazio  $-d < x < d$  (ovviamente con  $d < a$ ).

### 8.3 Densità positiva o negativa?

Una carica puntiforme  $q$  si trova a distanza  $r > a$  dal centro di un guscio sferico conduttore non a terra con raggio  $a$  e carica netta anch'essa uguale a  $q$ . Se la carica puntiforme si trova molto vicino al guscio, la densità di carica sulla superficie più vicina è negativa. Ma se la carica puntiforme si trova molto lontana dal conduttore, la densità superficiale è positiva ovunque (e sostanzialmente uniforme). Si trovi la distanza  $r$  per cui la densità subisce questo cambio di segno.

### 8.4 Attrattiva o repulsiva?

Una carica puntiforme  $q$  si trova a distanza  $r > a$  dal centro di un guscio sferico conduttore non a terra con raggio  $a$  e carica netta anch'essa uguale a  $q$ . Se la carica puntiforme è molto lontana dal conduttore, questo si comporta essenzialmente come una carica puntiforme  $q$ , quindi la forza tra i due oggetti è repulsiva. Ma se la carica  $q$  è molto vicino al guscio, allora diventa dominante la carica negativa in eccesso sul lato vicino del guscio, quindi la forza è attrattiva. Si trovi la distanza  $r$  per cui la forza subisce questo cambio di segno.

### 8.5 Piano con innesto sferico

Si un sistema conduttore formato da un piano con l'innesto sferico esattamente uguale all'esercizio svolto a lezione. Si risolva il problema dell'elettrostatica nei seguenti due casi.

- Il sistema conduttore è a terra e la carica esterna  $q$  può essere posizionata ovunque nel semispazio superiore.
- Non è presente carica esterna, ma il sistema conduttore (sempre messo a terra) è immerso in un campo elettrico uniforme perpendicolare al piano.

### 8.6 Densità di carica sul piano con innesto sferico

Torniamo alla situazione dell'esercizio svolto 3.4. Supponiamo che la distanza  $r$  della carica  $q$  sia molto più grande del raggio  $a$  dell'emisfera. Mostra che nel limite  $r \gg a$ , la densità di carica superficiale nella parte superiore dell'emisfera è tre volte più grande della densità sul piano (ai piedi della perpendicolare passante per  $q$ ) se avessimo semplicemente un piano senza l'innesto. Sempre in questo limite quanto vale la densità di carica in corrispondenza della linea di contatto tra piano e emisfera?

## 8.7 Giunzione bipolare

Una giunzione  $p-n$  (o meglio noto come diodo) può essere rappresentata come due lastre adiacenti uniformemente cariche con densità  $\rho_p > 0$  e  $\rho_n < 0$ . Si denoti con  $s_p$  e  $s_n$  gli spessori delle piastre. Si trovi la condizione per cui all'esterno della giunzione il campo elettrico sia nullo. In questa condizione si calcoli il campo elettrico all'interno della giunzione e il relativo potenziale elettrico.

## 8.8 Capacità delle sfere

Si consideri un conduttore composto da due sfere conduttrici di raggio  $a$  in contatto tra loro. Si calcoli la capacità del sistema (può essere utile lo sviluppo di Taylor di  $\log(1+x)$ ...).

## 8.9 Sfere conduttrici nello spazio

Due sfere conduttrici di raggio  $a$  distano  $d \gg a$  l'una dall'altra. Su entrambe le sfere è presente una carica di ugual modulo  $Q$  ma segno opposto. Calcolare al primo ordine in  $a/d$  la forza di interazione elettrostatica.

## 8.10 Cilindri carichi

Si considerino due cilindri infiniti carichi con densità volumica uniforme  $\rho$  e  $-\rho$  di raggio  $R$ , con i centri rispettivamente nei punti  $(d, 0, 0)$  e  $(-d, 0, 0)$ .

1. Si trovi il campo all'interno dell'intersezione tra i due cilindri.
2. Nell'approssimazione in cui  $\rho$  tende a infinito ma il prodotto  $2\rho d = P_0$  si mantiene valore costante, si trovi il campo in tutto lo spazio e la densità superficiale di carica sul cilindro di raggio  $R$  centrato nell'origine.

## 8.11 Sfera conduttrice in campo esterno

Si consideri una sfera conduttrice messa a terra immersa in un campo uniforme esterno di modulo  $E_0$ . Si risolva il potenziale elettrostatico in tutto lo spazio. E se la sfera non fosse messa a terra ma avesse carica  $Q_0$ ?

## 8.12 Sfera ohmica in campo esterno

Si consideri una sfera di raggio  $a$  di materiale ohmico di conducibilità  $\sigma_1$  immersa in un materiale ohmico di conducibilità  $\sigma_2$ . Attraverso l'intero sistema si fa scorrere una densità di corrente uniforme  $J_0$  proveniente dall'infinito. Si calcoli il campo elettrostatico in tutto lo spazio.

## 8.13 Aureola bella carica (200 More Physics Puzzling Problems 151)

Considero un anello e una sfera conduttori di raggi rispettivamente  $R$  e  $r$ . L'anello è caricato in modo che al suo centro il potenziale sia  $V_0$ , mentre la sfera è messa a terra. Ora avvicino l'anello alla sfera in modo tale che il piano in cui giace l'anello sia tangente nel centro dell'anello alla sfera. Calcola la carica totale indotta sulla sfera.

### 8.14 Potenziale in un cubo (200 More Physics Puzzling Problems 141)

Considera un cubo con densità di carica volumica uniforme  $\rho$ . Prendendo lo 0 del potenziale all'infinito ( $V(\infty) = 0$ ) trova il rapporto fra il potenziale al centro del cubo e quello su uno dei vertici.

### 8.15 Methane is so mundane (200 More Physics Puzzling Problems )

Quattro piccole sfere identiche conduttrici  $A, B, C$  e  $D$  sono posizionate ai vertici di un tetraedro regolare. Se metto  $q$  su  $A$  questa ha potenziale  $V$ . La sfera  $A$  ha potenziale  $V$  anche se metto  $3q/4$  su  $A$  e su una delle altre sfere.

1. Calcola la carica che va messa su  $A$  e altre due sfere per avere nuovamente il potenziale di  $A$  uguale a  $V$  (nel senso che su ciascuna delle tre sfere ci deve essere la stessa carica).
2. Stessa domanda di sopra ma utilizzando tutte le sfere.

### 8.16 Esplosione coulombiana 1

Una nube sferica uniformemente carica di raggio  $R$  e carica totale  $Q$  inizia a espandersi al tempo  $t = 0$  a causa della repulsione coulombiana.

1. Mostrare che se per due particelle vale  $r_1(0) < r_2(0)$  allora varrà sempre  $r_1(t) < r_2(t)$ .
2. Trovare inoltre l'equazione differenziale del moto e dimostrare che la densità di carica rimane uniforme durante l'espansione.
3. Dire se esiste una velocità asintotica delle particelle che compongono la nube e nel caso calcolarla.

### 8.17 Esplosione Coulombiana 2

La situazione è la stessa dell'esercizio precedente, ma al posto di una sfera si consideri un cilindro infinito di raggio  $R$ . Si risponda alle stesse domande dell'esercizio precedente.

### 8.18 Rutherford era un grand'uomo (IPHO 2011 - 3)

Uno ione di massa  $m$  e carica  $Q$ , inizialmente molto lontano, si muove con velocità iniziale non relativistica  $v_0$  verso un atomo neutro di massa  $M \gg m$  e polarizzabilità  $\alpha$ . Il parametro di impatto è  $b$  come illustrato in figura 1.

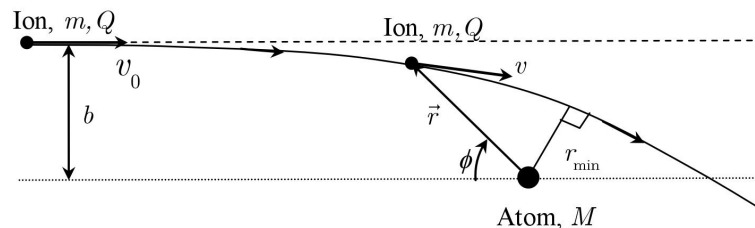


Figura 1: Problema della deviazione coulombiana di un atomo, tratto dalle IPHO 2011.

L'atomo è istantaneamente polarizzato (dunque acquista momento di dipolo  $\mathbf{p}$  dal campo elettrico dello ione che si avvicina. In questo problema si trascuri qualsiasi perdita di energia per radiazione.

1. Calcolare il campo elettrico  $\mathbf{E}_p$  ad una distanza  $r$  dal dipolo elettrico ideale  $\mathbf{p}$  situato nell'origine O, lungo la direzione individuata da  $\mathbf{p}$  nella Figura 2.
2. Trovare l'espressione della forza  $\mathbf{f}$  che l'atomo polarizzato esercita sullo ione. Dimostrare che la forza è attrattiva indipendentemente dalla carica dello ione.
3. Qual è l'energia potenziale elettrica dell'interazione ione-atomo in funzione di  $\alpha$ ,  $Q$  e  $r$ ?
4. Trovare l'espressione di  $r_{\min}$ , cioè la distanza di massimo avvicinamento (vedi Figura 1).
5. Se il parametro d'impatto  $b$  è minore di un valore critico  $b_c$ , lo ione cadrà sull'atomo descrivendo un percorso a spirale. In tale caso, lo ione sarà neutralizzato e l'atomo, invece, si caricherà. Questo processo è conosciuto con il nome di interazione di "scambio di carica". Qual è l'area della sezione d'urto,  $A = \pi b_c^2$ , dello "scambio di carica" della collisione tra atomo e ione?

### 8.19 Carica tra due piastre

Due piastre parallele bidimensionali sono poste una di fronte all'altra in corrispondenza rispettivamente dei piani  $z = 0$  e  $z = s$  e sono messe a terra. Si assuma che la distanza  $s$  tra le piastre sia molto più piccola delle loro dimensioni laterali. Una carica puntiforme  $q$  si trova a distanza  $a < s$  da una delle due piastre. Qual è il valore delle carica netta su ciascuna piastra conduttrice?

NOTA: in questo problema non si chiede semplicemente la somma delle due cariche delle piastre (che può essere dedotta con facilità), piuttosto il valore esatto di ciascuna delle due. In questo caso il metodo delle cariche immagini non porta a nessun risultato sperato (si provi comunque a trovare la configurazione di cariche immagini per questo problema). Può risultare utile notare che posizionando un'altra carica  $q$  ovunque sul piano  $z = a$  avrebbe l'effetto per sovrapposizione di raddoppiare la carica netta sulle piastre (pur cambiando la distribuzione di carica su di esse). Si utilizzi questa osservazione per risolvere il problema.

### 8.20 Corrente tra due elettrodi 1

Si consideri un semplice circuito formato da due elettrodi conduttori connessi con un filo. Gli elettrodi consistono in due piastre parallele molto vicine tra loro. A un certo punto uno ione di carica  $Q_0$  viene emesso da uno dei due elettrodi e viaggia con velocità  $v_0$  verso l'altro finché non si deposita su di esso. Si calcoli la corrente che scorre nel filo in funzione del tempo.

### 8.21 Corrente tra due elettrodi 2

Si consideri un semplice circuito formato da due elettrodi conduttori connessi con un filo. Gli elettrodi consistono in due gusci cilindrici molto lunghi e concentrici. A un certo punto uno ione di carica  $Q_0$  viene emesso da uno dei due elettrodi e viaggia con velocità  $v_0$  verso l'altro finché non si deposita su di esso. Si calcoli la corrente che scorre nel filo in funzione del tempo.

## 8.22 Disco conduttore

Si consideri un disco conduttore carico di raggio  $a$  con carica totale  $Q_0$ . Si assuma che il disco abbia soltanto estensione bidimensionale.

1. Si calcoli la densità di carica superficiale in funzione del raggio in condizioni statiche (Hint: può essere utile pensare al campo elettrico all'interno di un guscio sferico carico uniformemente sulla superficie...).
2. Si usi il risultato precedente per calcolare la capacità del sistema.

## 8.23 Bastoncino conduttore

Si consideri un bastoncino conduttore carico di lunghezza  $l$  con carica totale  $Q_0$ . Si assuma che il bastoncino abbia soltanto estensione unidimensionale.

1. Si calcoli la densità di carica lineare in funzione della distanza dal centro in condizioni statiche (Hint: può essere utile pensare al campo elettrico all'interno di un guscio sferico carico uniformemente sulla superficie...).
2. Si usi il risultato precedente per calcolare la capacità del sistema.

# 9 Soluzioni

Di seguito ci saranno le indicazioni per consultare le soluzioni degli esercizi. Molte di queste sono state prese dalle dispense dell'anno scorso, altre invece provengono da altre fonti.

A ogni esercizio verrà riportata la fonte precisa. Ci dispiace se non troverete direttamente le soluzioni scritte su queste dispense: nel caso troviate difficoltà a reperire la soluzione, entrambi noi ci rendiamo disponibili ad aiutarvi. Non esitate a contattarci!

## 9.1 Sfere conduttrici

Non è concettualmente diverso dall'esempio mostrato a lezione. L'idea è quella di pensare di risolvere il problema dell'elettrostatica in due regioni dello spazio diverse: prima fuori e poi dentro il conduttore. Poi si aggiustano le condizioni al bordo (cioè la superficie della sfera) affinché il potenziale sia una funzione continua.

## 9.2 Piani conduttori

Fonte: *problema 4* delle dispense della lezione di Elettrostatica 2022.

## 9.3 Densità positiva o negativa?

Fonte: *problema 3.49* da *E. M. Purcell, D. Morin (2013), Electricity and Magnetism*.

## 9.4 Attrattiva o repulsiva?

Fonte: *problema 3.50* da *E. M. Purcell, D. Morin (2013), Electricity and Magnetism*.

## 9.5 Piano con innesto sferico

Non è specificato nel testo, ma si richiede di risolvere il problema dell'elettrostatica solo nella parte di spazio che *contiene* l'innesto sferico. Il primo punto è concettualmente identico all'esercizio svolto a lezione. Un hint per risolvere il secondo punto può essere la parola *dipolo elettrico*: provate a posizionarlo al centro della sfera e ad aggiustare il suo module in modo da rispettare le condizioni al bordo.

## 9.6 Densità di carica sul piano con innesto sferico

Fonte: *problema 3.48* da *E. M. Purcell, D. Morin (2013), Electricity and Magnetism*.

## 9.7 Giunzione bipolare

La prima condizione si trova imponendo che la carica totale sia nulla. Per trovare il campo elettrico dentro si può immaginare di sommare il campo elettrico generato da piani infiniti di spessore infinitesimo, oppure usando il teorema di Gauss.

## 9.8 Capacità delle sfere

Per risolvere il problema si procede in modo iterativo:

- suppongo prima di porre il sistema a potenziale  $V_0$ ;
- se le due sfere fossero isolate l'una dall'altra, basterebbe porre una carica immagine  $Q_0 = V_0 a/k$  al centro di ciascuna delle due;
- le rimetto insieme. Ciascuna delle due adesso "vede" una carica  $Q_0$  a distanza  $r_0 = 2a$  dal proprio centro. Per mantenere il proprio potenziale uguale a  $V_0$  è necessario posizionare dentro ciascuna delle due una carica  $Q_1 = -\frac{a}{r_0} Q_0$  a distanza  $r_1 = \frac{a^2}{r_0}$  dal proprio centro;
- lo stesso problema si pone per la carica  $Q_1$  che abbiamo posizionato. Allora è necessario porre una carica  $Q_2 = -\frac{a}{2a-r_1} Q_1$  a distanza  $r_1 = \frac{a^2}{2a-r_1}$  dal proprio centro, e si continua così.

A questo punto si possono sommare tutte le cariche immagine che abbiamo posizionato, e si trova il valore della capacità.

## 9.9 Sfere conduttrici nello spazio

Fonte: *problema 5* delle dispense della lezione di Elettrostatica 2022.

## 9.10 Cilindri carichi

Concettualmente è identico all'esercizio svolto a lezione.

## 9.11 Sfera conduttrice in campo esterno

Il "trucco" per risolvere questo esercizio è provare a posizionare un dipolo elettrico al centro della sfera e trovare il suo valore per rispettare le condizioni al contorno. Nel caso la sfera avesse una carica totale  $Q_0$ , basta posizionare una carica puntiforme al centro della sfera (il dipolo è neutro).

## 9.12 Sfera ohmica in campo esterno

Non è concettualmente diverso dall'esercizio precedente, ma bisogna fare attenzione al fatto che non valgono più le condizioni di conduttore perfetto che abbiamo dato finora. Per cui a priori il potenziale sulla superficie può non essere uniforme. La condizione essenziale da imporre è l'*equazione di continuità*. Questo è un argomento che non è stato trattato a lezione ma è comunque presente sulle dispense. Per la soluzione basta porre sempre un dipolo al centro imponendo le nuove *condizioni al bordo*. Inoltre si consideri che il campo elettrostatico all'interno non è necessariamente nullo.

## 9.13 Aureola della carica

Fonte: *problema 10* delle dispense della lezione di Elettrostatica 2022.

## 9.14 Potenziale in un cubo

Fonte: *problema 2* delle dispense della lezione di Elettrostatica 2022.

## 9.15 Methane is so mundane

Fonte: *problema 11* delle dispense della lezione di Elettrostatica 2022.

## 9.16 Esplosione coulombiana 1

Fonte: *problema 3* delle dispense della lezione di Elettrostatica 2022.

## 9.17 Esplosione coulombiana 2

Concettualmente è identico al problema precedente.

## 9.18 Rutherford era un grand'uomo

Fonte: *problema 13* delle dispense della lezione di Elettrostatica 2022.

## 9.19 Carica tra due piastre

Fonte: *problema 3.37* da *E. M. Purcell, D. Morin (2013), Electricity and Magnetism*.

## 9.20 Corrente tra due elettrodi 1

Fonte: *problema 4.21* da *E. M. Purcell, D. Morin (2013), Electricity and Magnetism*.

## 9.21 Corrente tra due elettrodi 2

Fonte: *problema 4.21* da *E. M. Purcell, D. Morin (2013), Electricity and Magnetism*.

## 9.22 Disco conduttore

Fonte: *problema 3.4* da *E. M. Purcell, D. Morin (2013), Electricity and Magnetism*.

### 9.23 Bastoncino conduttore

Fonte: *problema 3.5* da *E. M. Purcell, D. Morin (2013), Electricity and Magnetism*.