

Introduzione all'Analisi matematica

Giovanni Marzenta*, Pietro Gualdi†

5 febbraio 2024

Sommario

In questa lezione spiegheremo come usare alcuni strumenti matematici indispensabili per la risoluzione di molti problemi di fisica, ovvero i numeri complessi, il calcolo infinitesimale, le derivate, gli sviluppi di Taylor, gli integrali ed un'introduzione alle equazioni alle derivate ordinarie (ODE). Non saremo molto formali, dato che l'obiettivo è solo quello di fornire gli strumenti per affrontare i problemi delle Olifis.

*giovanni.marzenta@sns.it

†pietro.gualdi@sns.it

1 Prerequisiti

1.1 Notazione

1.1.1 Simboli insiemistici

In questa dispensa useremo vari simboli insiemistici, che per completezza vengono riportati di seguito:

- Il simbolo \in indica l'appartenenza ad un insieme, quindi per esempio $a \in A$ significa che l'elemento a appartiene all'insieme A .
- Se A, B sono due insiemi, con $A \cup B$ si indica la loro unione e con $A \cap B$ la loro intersezione.
- Con \emptyset si indica l'insieme vuoto.
- Con \mathbb{N} si indicano i numeri naturali. Con numeri naturali noi intendiamo $\{0, 1, 2, \dots\}$, ma alcuni testi escludono lo zero.
- Con \mathbb{Z} si indicano i numeri interi, ovvero $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Con \mathbb{R} si indicano i numeri reali. Inoltre, se a, b sono numeri reali con $a < b$, indichiamo con (a, b) l'insieme dei numeri reali compresi tra a e b , estremi esclusi, ovvero $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Indichiamo poi con $[a, b]$ l'insieme dei numeri reali compresi tra a e b , estremi inclusi, ovvero $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Analogamente sono definiti $[a, b), (-\infty, b), [a, +\infty)$, eccetera.
- Quantificatori: il simbolo \exists significa "esiste", mentre il simbolo \forall significa "per ogni". Ad esempio $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : y < x$ significa "per ogni numero intero x esiste un numero intero y che è minore di x ".

1.1.2 Definizioni

Talvolta in questa dispensa utilizzeremo il simbolo $:=$, che indica che stiamo definendo il primo membro come uguale al secondo membro. Per fare un esempio con le notazioni definite sopra:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

1.1.3 Sommatorie e produttorie

Quando si usano serie ed espansioni (vedi Taylor) è molto comodo poter scrivere una somma (anche di infiniti addendi) in modo compatto, senza indicare i primi termini e poi mettere i puntini (che non è poi così compatto. . .). Introduciamo quindi il simbolo di sommatoria \sum , che riporta sotto il più piccolo indice a partire dal quale si somma e sopra l'indice fino al quale si somma. Questa definizione vale quando l'insieme degli indici è contenuto (non in modo stretto) in \mathbb{N} :

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)$$

si legge come “somma per i che va da 1 a n di effe di x con i^1 ” e significa, come è prevedibile, che sommo $f(x_i)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ compreso tra 1 ed n .

Introduciamo il concetto di somma su un generico insieme I di indici, che si indica con:

$$\sum_{i \in I}$$

In particolare, per definizione, la somma vuota è nulla:

$$\sum_{i \in \emptyset} f(i) = 0$$

Possiamo inoltre scrivere:

$$\sum_{i=a}^b f(i) = \sum_{i \in \{k \in \mathbb{Z} : a \leq k \leq b\}} f(i)$$

Inoltre, la sommatoria è lineare (il che deriva dalle proprietà dell'addizione), ovvero

$$\sum_{i \in I} (f(i) + g(i)) = \sum_{i \in I} f(i) + \sum_{i \in I} g(i)$$

$$\sum_{i \in I} \lambda f(i) = \lambda \sum_{i \in I} f(i)$$

$$(A \cup B = I) \wedge (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \sum_{i \in I} f(i) = \sum_{i \in A} f(i) + \sum_{i \in B} f(i)$$

¹dove x_i è una famiglia di elementi di un insieme A indicizzati sull'insieme I degli indici ed è una notazione equivalente a indicare una funzione $x : I \rightarrow \mathbb{R}$

Indichiamo con \prod la produttoria (ovvero l'analogo della sommatoria per l'operazione prodotto), allora analogamente vale

$$(A \cup B = I) \wedge (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \prod_{i \in I} f(i) = \left(\prod_{i \in A} f(i) \right) \cdot \left(\prod_{i \in B} f(i) \right)$$

$$\prod_{i \in I} (f(i)g(i)) = \left(\prod_{i \in I} f(i) \right) \left(\prod_{i \in I} g(i) \right)$$

In particolare, nel caso di g costante uguale a λ ,

$$\prod_{i \in I} (\lambda f(i)) = \prod_{i \in I} f(i) \prod_{i \in I} \lambda$$

e, in particolare, se $|I| = n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i \in I} (\lambda f(i)) = \lambda^n \prod_{i \in I} f(i)$$

Inoltre, per definizione,

$$\prod_{i \in \emptyset} f(i) = 1$$

Infine, analogamente al caso delle sommatorie:

$$\prod_{i=a}^b f(i) = \prod_{i \in \{k \in \mathbb{Z} : a \leq k \leq b\}} f(i)$$

1.2 Combinatoria

Gli elementi di combinatoria che stiamo per trattare sono fondamentali per molti altri argomenti affrontati in questa dispensa, tra cui l'espansione di Taylor, e hanno anche una diretta applicazione in termodinamica.

1.2.1 Permutazioni

Per permutazione di n elementi si intende una funzione bigettiva σ da $\{1, 2, \dots, n\}$ in sé. Si può visualizzare questo oggetto matematico come un modo di mischiare un mazzo di n carte distinte, oppure come un anagramma di una parola di n lettere tutte diverse tra loro.

Vogliamo sapere quante sono le permutazioni di n elementi. Cominciamo con l'osservare che abbiamo n modi di scegliere $\sigma(1)$, che può infatti assumere qualunque valore in $\{1, 2, \dots, n\}$. Dopo di che osserviamo che, una volta scelto $\sigma(1)$, abbiamo $n - 1$ modi di scegliere $\sigma(2)$, ovvero tutti gli elementi

di $\{1, 2, \dots, n\}$ tranne $\sigma(1)$. Analogamente otteniamo che abbiamo $n - 2$ modi per scegliere $\sigma(3)$ e così via. Infine, abbiamo un solo modo di scegliere $\sigma(n)$. Facendo il prodotto di tutti questi numeri otteniamo il numero di permutazioni di n elementi:

$$P_n = \prod_{i=1}^n (n + 1 - i) = \prod_{i=1}^n i$$

Definiamo ora il fattoriale²:

$$n! := \prod_{i=1}^n i$$

Per cui si ha che le permutazioni di n elementi sono proprio $n!$ (che si legge “enne fattoriale”).

Trattiamo ora le permutazioni per ripetizione, che possiamo immaginare come anagrammi di una parola qualsiasi, in cui eventualmente qualche lettera è ripetuta. Calcoliamo a titolo di esempio il numero di anagrammi della parola “ANALISI” e ci sarà evidente come generalizzare il procedimento.

Per cominciare, riconduciamoci al caso in cui le lettere sono tutte distinte. Vogliamo perciò trovare quanti sono gli anagrammi della parola “A₁N₁A₂L₁I₁S₁I₂”. Sappiamo che questi sono P_7 . A questo punto vogliamo tener conto del fatto che alcune permutazioni le abbiamo contate più volte: ad esempio, moralmente “A₁A₂L₁I₁S₁I₂N₁” e “A₂A₁L₁I₁S₁I₂N₁” sono la stessa permutazione. Per tener conto di questo fatto, dobbiamo dividere per il numero di modi di permutare A₁ e A₂, ovvero per P_2 . Analogamente, considerando la N dobbiamo dividere per P_1 , considerando la I per P_2 e così via. Il numero che cerchiamo è perciò:

$$\frac{P_7}{P_2 P_1 P_1 P_2 P_1} = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$$

Più in generale, il numero di anagrammi di una parola di n lettere, detto A l’insieme delle sue lettere ed $f(X)$ il numero di volte in cui la lettera X compare in quella parola, è:

$$\frac{n!}{\prod_{X \in A} (f(X))!}$$

²Per calcolare $0!$, osserviamo che $\prod_{i=1}^0 i = \prod_{i \in \{k \in \mathbb{Z}: 1 \leq k \leq 0\}} i = \prod_{i \in \emptyset} i = 1$.

1.2.2 Disposizioni

Per disposizione semplice di n elementi in k posizioni si intende una funzione iniettiva da $\{1, 2, \dots, k\}$ in $\{1, 2, \dots, n\}$. Può essere visualizzata come un modo di scegliere k carte da un mazzo di n e di mischiarle. Analogamente a come abbiamo trovato il valore di P_n , possiamo dimostrare che:

$$D_{n,k} = \prod_{i=1}^k (n + 1 - i) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Per disposizione con ripetizione di n elementi in k posizioni si intende una qualsiasi funzione δ da $\{1, 2, \dots, k\}$ in $\{1, 2, \dots, n\}$. Può essere visualizzata come un modo di riempire k spazi con una lettera ciascuno prendendola da un alfabeto di n lettere, con eventualmente lettere che compaiono in più di uno spazio (o anche in nessuno). Ragionando analogamente ai casi precedenti, osserviamo che abbiamo n modi di scegliere $\delta(1)$, n modi di scegliere $\delta(2)$, \dots , n modi di scegliere $\delta(k)$. Perciò si ha:

$$D_{n,k}^* = \prod_{i=1}^k n = n^k$$

1.2.3 Combinazioni

Per combinazione di n elementi in k posizioni si intende un k -sottoinsieme di $\{1, 2, \dots, n\}$ (ovvero un sottoinsieme di $\{1, 2, \dots, n\}$ con k elementi). Possiamo visualizzarla come un modo di estrarre k palline da un sacchetto che ne contiene n numerate da 1 a n , senza che importi l'ordine in cui vengono estratte. Possiamo perciò osservare che dividendo $D_{n,k}$ per il numero di ordinamenti possibili per k elementi, ovvero P_k , otteniamo il numero di combinazioni di n elementi in k posizioni:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

1.2.4 Coefficienti binomiali e binomio di Newton

Il $C_{n,k}$ appena definito ha molte applicazioni in matematica oltre a quella dei banali conteggi di combinatoria. Per questo, è definito il coefficiente binomiale di n su k che è sostanzialmente $C_{n,k}$ e viene indicato con la seguente notazione:

$$\binom{n}{k}$$

Il coefficiente binomiale gode di alcune proprietà utili che si possono dimostrare utilizzando la formula di $C_{n,k}$ e facendo un paio di conti:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Come forse avrete notato, quest'ultima proprietà ricorda molto la regola con cui si costruisce il triangolo di Tartaglia. Ovviamente non è una coincidenza, e di seguito mostriamo perché.

Cominciamo col considerare il seguente polinomio nelle n variabili x_1, x_2, \dots, x_n :

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) := \prod_{i=1}^n (x_i + a_i)$$

Dove gli a_i sono delle costanti. Espandendo il prodotto otteniamo una scrittura di questo polinomio in cui compaiono tutti i possibili monomi ottenibili scegliendo un monomio per ciascun addendo e moltiplicando tra loro i monomi scelti. Vogliamo ora calcolare quanti tra i monomi ottenuti sono di grado k per un certo k tra 0 ed n . La risposta è proprio $\binom{n}{k}$: infatti, l'insieme dei monomi ottenuti può essere messo in bigezione con l'insieme delle parti di $\{1, 2, \dots, n\}$, dove il monomio corrispondente all'insieme A è il seguente:

$$\left(\prod_{i \in A} x_i \right) \cdot \left(\prod_{i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus A} a_i \right)$$

Osserviamo che il grado di questo monomio è uguale al numero di elementi di A e che quindi il numero di monomi di grado k è il numero di k -sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, n\}$, ovvero $\binom{n}{k}$. Alla luce di ciò, consideriamo ora il seguente polinomio nella variabile x nel caso particolare in cui tutti gli a_i sono uguali tra loro a un certo valore a :

$$p(x) := q(x, x, \dots, x)$$

Questo polinomio si può scrivere come:

$$p(x) = \prod_{i=1}^n (x + a) = (x + a)^n$$

Alla luce di quanto detto sopra, sappiamo che nello sviluppo di questo prodotto compaiono $\binom{n}{k}$ termini di grado k , che però sono tutti uguali a $x^k a^{n-k}$. Si ha perciò:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k} \quad (1)$$

Questa formula è nota come binomio di Newton. Sostituendo $(x, a) = (1, 1)$ prima e $(x, a) = (-1, 1)$ poi otteniamo altre proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

1.3 Logaritmi

Sia $a > 0; a \neq 1$ e sia $f(x) = a^x$. Il logaritmo in base a , che si indica con \log_a , è la funzione inversa di f . Questa funzione ha per dominio l'insieme dei reali positivi ed è strettamente³ crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente altrimenti. Inoltre, gode delle seguenti proprietà:

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x^c) = c \log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(xy^{-1}) = \log_a x + \log_a(y^{-1}) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

³Una funzione g si dice *strettamente crescente* se per $x_1 < x_2$ vale $g(x_1) < g(x_2)$. Specifichiamo *strettamente* per escludere le funzioni *debolmente* crescenti, per cui per $x_1 < x_2$ vale $g(x_1) \leq g(x_2)$. Discorso analogo per le funzioni decrescenti.

1.4 Trigonometria di base

Capita spesso che risulti più comodo fare i conti con gli angoli espressi in radianti anziché in gradi. Se α è la lunghezza di un arco di circonferenza di raggio 1, allora α è la misura in radianti dell'angolo al centro corrispondente. Va ricordato che in realtà i radianti non sono una vera e propria unità di misura: infatti, ad esempio, $0.35 \text{ rad} = 0.35$. Di solito si scrive rad giusto per ricordarsi che si sta lavorando con degli angoli.

Definiamo ora le funzioni seno e coseno. Sul piano cartesiano, sia γ la circonferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio 1 e θ un angolo. Ruotando il semiasse positivo delle x dell'angolo θ intorno all'origine in senso antiorario otteniamo la semiretta s_θ . Intersecando s_θ con γ otteniamo il punto P , le cui coordinate sono per definizione $(\cos \theta, \sin \theta)$. Come si può notare dalla definizione, queste funzioni sono periodiche di periodo 2π . Inoltre, valgono le seguenti relazioni, che è bene ricordare:

$$\sin 0 = 0; \cos 0 = 1; \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = -\sin(-\theta); \cos(-\theta) = \cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (\text{per il teorema di Pitagora})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta + \theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Invertendo le formule con cui possiamo esprimere il coseno di 2θ possiamo trovare delle formule che esprimono il seno e il coseno di θ , a meno del segno:

$$|\sin \theta| = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}; |\cos \theta| = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}$$

Dato un triangolo rettangolo di ipotenusa h e con un angolo acuto uguale a θ , i cateti opposto ed adiacente a θ hanno rispettivamente le seguenti lunghezze:

$$c_{\text{opposto}} = h \sin \theta; c_{\text{adiacente}} = h \cos \theta$$

Dato un triangolo di lati a, b, c in cui gli angoli opposti ai lati sono rispettivamente α, β, γ , valgono i seguenti teoremi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{teorema dei seni})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (\text{teorema di Carnot})$$

Oltre alle funzioni seno e coseno, esistono altre funzioni trigonometriche. Le più utili sono la tangente e l'arcotangente, che sono così definite:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}; \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Queste funzioni sono entrambe periodiche di periodo π . Le formule di addizione, sottrazione e duplicazione per queste funzioni si ricavano facilmente da quelle di seno e coseno scritte sopra.

Tutte le funzioni trattate in questo paragrafo sono periodiche, quindi non iniettive, quindi non invertibili. Esistono però intervalli in cui sono invertibili. In particolare, il seno e la tangente sono invertibili in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, il coseno e la cotangente in $[0, \pi]$. L'inversa del seno in questo intervallo è detta arcoseno e si indica con \arcsin . Analogamente sono definite l'arcocoseno, l'arcotangente e l'arcocotangente.

2 Successioni e serie

Per successione si intende una funzione che ha dominio \mathbb{N} . Generalmente tratteremo successioni di reali, che, come il nome suggerisce, sono funzioni da \mathbb{N} in \mathbb{R} . Per le successioni si tende a non utilizzare la notazione che viene in generale utilizzata per le funzioni: in una successione a , il valore associato ad n viene indicato non come $a(n)$, bensì come a_n .

Una successione può essere definita in due modi: con una formula esplicita o per ricorrenza. Un esempio di definizione mediante formula esplicita è il seguente:

$$a_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Un esempio di successione definita per ricorrenza è invece il seguente:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In generale, una buona definizione per ricorrenza può anche essere data esplicitando i primi k termini ed esprimendo ciascuno degli altri in termini dei

k precedenti, come ad esempio nella definizione della successione di Fibonacci:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Poste queste basi, cominciamo a studiare alcune successioni notevoli.

2.1 Progressioni aritmetiche

Dato un reale k , per progressione aritmetica di ragione k si intende una successione a che soddisfa la seguente relazione:

$$a_{n+1} = a_n + k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una progressione aritmetica di ragione k può essere esplicitata nel seguente modo:

$$a_n = a_0 + nk \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Questa successione soddisfa la seguente proprietà:

$$\sum_{i=0}^n a_i = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.2 Progressioni geometriche

Dato un reale q , per progressione geometrica di ragione q si intende una successione a che soddisfa la seguente relazione:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una progressione geometrica di ragione q può essere esplicitata nel seguente modo:

$$a_n = a_0 \cdot q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Questa successione soddisfa le seguenti proprietà:

$$\prod_{i=0}^n a_i = a_0^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 \cdot \sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} (n+1)a_0 & \text{se } q = 1 \\ a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2)$$

Quest'ultima proprietà è banale nel caso $q = 1$, mentre nell'altro caso può essere facilmente verificata moltiplicando i due membri per $q - 1$ ed espandendo il prodotto $(q - 1) \cdot \sum_{i=0}^n q^i$. Ci sarà utile in seguito quando parleremo di serie.

2.3 Serie

Per serie si intende una sommatoria indicizzata su \mathbb{N} . Possiamo vedere una serie anche come la somma di tutti i valori di una successione. Una serie si può indicare con le seguenti tre notazioni⁴:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

In generale, si tende ad usare la terza di queste tre notazioni.

Spesso una serie diverge, ovvero la somma di tutti gli elementi della successione tende a $+\infty$ (o a $-\infty$). Ci sono invece casi più interessanti dove la serie converge, ovvero in cui questa somma tende ad un valore finito. Altre volte, infine, la serie oscilla, ovvero non tende a nessun valore finito né a ∞ . Per chiarire queste definizioni, facciamo un importante esempio: la serie geometrica:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

Evidentemente, per $|x| > 1$, il valore di x^i tende a ∞ , per cui la somma tende a ∞ , cioè la serie diverge. Ci si può facilmente convincere che la serie diverge anche per $x = 1$. Per quanto riguarda il caso $x = -1$, possiamo scrivere, senza troppo formalismo:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i = +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Si può notare come il valore di questa somma oscilli tra 0 ed 1, senza tendere a nessun valore. Considerando infine il caso $|x| < 1$, si ha che x^i tende a 0, il che ci fa sospettare che la serie converga. In effetti, non solo essa

⁴Formalmente, in realtà, la prima notazione non è equivalente alle altre due. Queste ultime infatti indicano il limite della somma da 0 a n , come risulta evidente dalla seconda notazione. Tuttavia, in questa somma gli addendi vengono sommati in ordine, ovvero non vale la proprietà commutativa. Invece, nella prima notazione gli addendi non vengono sommati in un particolare ordine. Di conseguenza, alcune serie convergono con la seconda e con la terza notazione, ma non con la prima (come ad esempio $\sum (-1)^i \frac{1}{i+1}$)

converge, ma sappiamo anche calcolare il valore a cui converge sfruttando l'Equazione 2:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x} \quad (\text{se } |x| < 1) \quad (3)$$

Purtroppo in generale sapere che i termini della serie tendono a 0 non è sufficiente a dimostrare che la serie converga. Ad esempio, la serie armonica non converge:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$$

3 Limiti e continuità

Nella sezione precedente abbiamo usato due volte la notazione di limite, ma non le abbiamo dato una definizione. Data una successione a , il suo limite, se esiste, è un valore l tale che $|a_n - l|$ assume valori sempre più vicini a 0 all'aumentare di n . Scritto con un formalismo migliore:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

In particolare, se $l = 0$, a è un infinitesimo. Invece, una successione tende a $+\infty$ se a_n assume valori arbitrariamente grandi all'aumentare di n . Formalmente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n > n_0$$

Analogamente si definisce il limite uguale a $-\infty$. In questi due casi, l è un infinito.

Oltre ai limiti di successioni possiamo definire anche i limiti di funzioni. Se $f(x)$ si avvicina sempre di più ad λ all'avvicinarsi di x a χ , allora scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow \chi} f(x) = \lambda$$

Dove λ e χ possono anche essere infiniti. La formalizzazione di questa definizione è analoga a quella del limite di successioni.

Se $\lambda = 0$, f è un infinitesimo per x che tende a χ , mentre se $\lambda = \infty$, f è un infinito per x che tende a χ .

Se χ è un numero, può capitare di vedere scritto:

$$\lim_{x \rightarrow \chi^+} f(x) = \lambda$$

Questo significa che, se x si avvicina a χ “da sopra”, cioè restando sempre maggiore di χ , allora $f(x)$ si avvicina a λ . Analogamente, per $x \rightarrow \chi^-$, si ha che x si avvicina a χ “da sotto”.

Si noti che, sia nel caso di limite di successioni, sia nel caso di limite di funzioni, non è detto che il limite esista. Ad esempio, non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$. Tuttavia, questa è una questione che in generale non riguarda i problemi di fisica.

Definiamo ora che cosa sono le funzioni continue. Informalmente, una funzione è continua se il suo grafico può essere disegnato senza staccare la matita dal foglio, ovvero senza che ci siano salti. Formalmente, una funzione f si dice continua in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; si dice continua in un insieme A se è continua in ogni elemento di A ; si dice continua se è continua nel suo dominio.

Siccome solitamente si ha sempre a che fare con funzioni continue, per trovare il limite di una funzione spesso basta sostituire alla x il valore a cui essa tende e fare il conto. Tuttavia, ci sono dei casi in cui questo non è possibile, perché facendo questa sostituzione si ottengono forme indeterminate. Queste forme sono le seguenti:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; +\infty - \infty; 1^\infty; \infty^0; 0^0$$

Se capita una forma indeterminata, bisogna cercare di rimaneggiare l'espressione della funzione affinché si semplifichino i termini che vanno a 0 o a ∞ (insomma, quelli che causano il problema), ottenendo una forma diversa da quelle indeterminate.

3.1 Due limiti notevoli

Spesso è comodo tenere a mente questo limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (4)$$

Anche il seguente limite ci tornerà utile:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad (5)$$

Definiamo il numero di Nepero come:

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828 \dots$$

Questo numero soddisfa la seguente relazione:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Il logaritmo in base e è anche detto logaritmo naturale, e si indica con \log (viene omessa la base)⁵.

4 Differenziali e derivate

4.1 Differenziali e ordini di infinitesimi

Nel corso di fisica del liceo avrete certamente conosciuto la notazione Δx , che indica l'incremento di una variabile x . Nei problemi che ci interesseranno maggiormente nel corso di questo stage, tuttavia, questo incremento sarà spesso un incremento infinitesimo, ovvero molto vicino a zero, che indicheremo con un'altra notazione: dx . Questa notazione si chiama *differenziale*. Il differenziale è definito anche per le funzioni: se $y = f(x)$, scriviamo $dy = f(x + dx) - f(x)$.

Siano a, b due infinitesimi definiti come nella sezione precedente (ovvero due successioni o due funzioni per x che tende a χ). Studiamo il limite di $\frac{a}{b}$, (per $n \rightarrow +\infty$ o per $x \rightarrow \chi$). Se questo limite è 0, a ha un ordine di infinitesimo maggiore di b . Se è ∞ , $+\infty$ o $-\infty$, a ha un ordine di infinitesimo minore di b . Se è un valore finito diverso da 0, a e b hanno lo stesso ordine di infinitesimo. Esistono anche casi in cui tale limite non esiste, ma nei problemi di fisica questo accade raramente. Moralmente, se a ha un ordine di infinitesimo maggiore di b , allora possiamo trascurare a nei conti in cui compare b .

Possiamo utilizzare gli ordini di infinitesimi anche quando lavoriamo coi differenziali. Infatti, possiamo considerare un prodotto di n differenziali e considerarlo come un infinitesimo di ordine n , e trascurare gli infinitesimi di ordine maggiore.

4.2 Definizione di derivata

Avete probabilmente visto al liceo che il coefficiente angolare di una retta si può scrivere come $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Considerando una funzione $y = f(x)$, facendo diventare gli incrementi infinitesimi, troviamo che il coefficiente angolare della tangente ad una funzione in un punto, che è $\frac{dy}{dx}$. Questo rapporto tra

⁵Alcuni testi indicano con \ln il logaritmo naturale e con \log il logaritmo in base 10

differenziali, al variare di x , dà la derivata della funzione f , che è a sua volta una funzione. Quest'ultima funzione, calcolata in $x = x_0$, dà la derivata di f in x_0 .

Ricordiamo che non tutte le funzioni sono derivabili, anche se in fisica capita raramente di trovarne di non derivabili. Ad esempio, la funzione $y = |x|$ non è derivabile in $x = 0$. Si ha però che tutte le funzioni derivabili sono continue.

Osserviamo che possiamo derivare la funzione derivata di f , che possiamo chiamare *derivata prima*, per ottenere la *derivata seconda*, la quale può essere a sua volta derivata ottenendo la *derivata terza*, e così via.

Supponiamo che f abbia più di una variabile. Ad esempio, supponiamo che ne abbia tre, che chiamiamo x, y, z . Questa funzione ha una derivata per ogni variabile e ognuna di queste derivate è detta *derivata parziale*. La derivata parziale di f rispetto ad x può essere calcolata come la derivata ordinaria, considerando y e z come fossero costanti anziché variabili.

4.2.1 Notazioni

Data una funzione f , la sua derivata prima si indica spesso con f' , la derivata seconda con f'' e così via. Alternativamente, la derivata n -esima si può indicare con $f^{(n)}$. C'è anche chi la indica con f^N , dove con N intendiamo la scrittura di n in romano. Queste tre notazioni sono dovute a Lagrange.

La notazione di Leibniz è in linea con la definizione che abbiamo dato: la derivata di f si indica con $\frac{df}{dx}$. La derivata seconda di f si può indicare con $\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$. Intuitivamente, è un po' come fare il differenziale di df e dividerlo due volte per dx . Scrivendo il differenziale di df come $d df$, possiamo scrivere che la derivata seconda di f è $\frac{d df}{(dx)^2}$. Nella notazione di Leibniz, questa si indica con $\frac{d^2 f}{dx^2}$, e più in generale la derivata n -esima come $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Nella notazione di Arbogast, si indica con Df la derivata prima di f e con $D^n f$ la derivata n -esima di f .

Introduciamo infine la notazione di Newton, molto compatta e molto usata in fisica per derivare funzioni rispetto al tempo. Se x è una funzione del tempo, $\dot{f} := \frac{df}{dt}$ e $\ddot{f} := \frac{d^2 f}{dt^2}$.

4.2.2 Utilità

Le derivate sono comode per trovare i punti in cui una funzione è massima o minima. Infatti, in quei punti la derivata è 0. Si deve però tenere a mente che non vale il viceversa: esistono infatti funzioni che hanno derivata 0 in un punto che non è di massimo né di minimo: ad esempio, la derivata di x^3 in

$x = 0$ è nulla, come vedremo dopo, ma in $x = 0$ la funzione non è massima né minima.

Ci sono poi alcune grandezze fisiche che sono definite proprio come derivate di altre grandezze rispetto ad alcune variabili. Ad esempio, la velocità e l'accelerazione istantanee sono rispettivamente la derivata prima e seconda della posizione rispetto al tempo.

4.3 Calcolo delle derivate

4.3.1 Derivate di potenze

Si ha:

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ed, in particolare, la derivata di $x^0 = 1$ è 0, come ci potevamo aspettare dal fatto che x^0 è costante, e perciò una retta orizzontale. La tangente a questa funzione sarà perciò sempre orizzontale, ovvero con coefficiente angolare 0.

Dimostriamo questa affermazione nel caso più semplice in cui α è un intero positivo. Ricordando com'è definito il differenziale di una funzione sappiamo che:

$$d(x^\alpha) = (x + dx)^\alpha - x^\alpha$$

Da cui, ricordando l'Equazione 1:

$$d(x^\alpha) = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} dx^n x^{\alpha-n} - x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} dx + \sum_{n=2}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} dx^n x^{\alpha-n} \approx \alpha x^{\alpha-1} dx$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato tutti gli infinitesimi di ordine superiore al primo. Da questo otteniamo proprio quello che cercavamo:

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \frac{\alpha x^{\alpha-1} dx}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^+$$

Il risultato per $\alpha \in \mathbb{R}$ è del tutto analogo e si può ottenere scrivendo $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ e applicando le regole che vedremo in seguito.

4.3.2 Linearità della derivata

Osserviamo che l'operatore derivata è lineare, ovvero che prese due qualunque funzioni derivabili f, g e un numero λ si ha che:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}; \quad \frac{d}{dx}(\lambda f(x)) = \lambda \frac{df}{dx}$$

Entrambe queste proprietà sono ovvie se si pensa ai differenziali. Infatti, si ha:

$$\begin{aligned} d(f(x) + g(x)) &= (f(x + dx) + g(x + dx)) - (f(x) + g(x)) = \\ &= (f(x + dx) - f(x)) + (g(x + dx) - g(x)) = df + dg \\ d(\lambda f(x)) &= (\lambda f(x + dx)) - (\lambda f(x)) = \lambda(f(x + dx) - f(x)) = \lambda df \end{aligned}$$

4.3.3 Derivata della composizione di due funzioni

Scrivendolo nella Notazione di Leibniz, abbiamo una funzione f che soddisfa $f(x) = g(h(x))$ per certe funzioni g, h che sappiamo derivare. Vogliamo calcolare la derivata di f :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(h(x))}{dh(x)} \cdot \frac{dh(x)}{dx} = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

In realtà questa dimostrazione non è completamente precisa: potrebbero infatti sorgere problemi moltiplicando e dividendo per una quantità che si annulla in punti arbitrariamente vicini a quello in cui stiamo derivando. Tuttavia, è più snella da scrivere in questa notazione, ed è sufficiente per gli scopi di questa dispensa.

4.3.4 Derivata del prodotto e del rapporto

Date due funzioni f, g di cui conosciamo le derivate, vogliamo calcolare la derivata del loro prodotto:

$$\begin{aligned} d(f(x) \cdot g(x)) &= f(x + dx) \cdot g(x + dx) - f(x)g(x) = \\ f(x + dx) \cdot (g(x + dx) - g(x)) + g(x)(f(x + dx) - f(x)) &= f(x + dx) dg + g(x) df = \\ &= (f(x) + df) dg + g(x) df = f(x) dg + g(x) df + df dg \end{aligned}$$

Trascurando gli infinitesimi di second'ordine⁶ otteniamo:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{f(x) dg + g(x) df}{dx} = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

⁶per essere rigorosi, si mostra che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))(g(x+h) - g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} = 0 \cdot g'(x) = 0$$

Vogliamo ora calcolare la derivata di $\frac{1}{f}$:

$$d\frac{1}{f} = \frac{1}{f(x+dx)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x+dx)}{f(x)f(x+dx)} = \frac{-df}{(f(x))^2 - f(x)df}$$

Da cui, trascurando gli infinitesimi a denominatore:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f} \right) = -\frac{df}{(f(x))^2 dx} = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

A questo punto, se vogliamo calcolare la derivata di $\frac{f}{g}$, ci basta esprimere questa funzione come prodotto di f e $\frac{1}{g}$ e svolgere un paio di conti, ottenendo:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

4.3.5 Derivata della funzione inversa

Sia f una funzione invertibile di cui conosciamo la derivata e sia f^{-1} la sua inversa. Vogliamo calcolare la derivata di f^{-1} . Osserviamo che si ha:

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \left(\frac{dx}{df^{-1}(x)} \right)^{-1}$$

Da cui, detto $y = f^{-1}(x)$, si ha:

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \left(\frac{df(y)}{dy} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

4.3.6 Derivate di esponenziali e logaritmi

Dato $a > 0; a \neq 1$, sia $f(x) = a^x$. Osserviamo che si ha:

$$f(x) = \left(e^{\log a} \right)^x = (e^x)^{\log a}$$

Perciò, se sappiamo calcolare la derivata di e^x , allora sapendo come derivare le funzioni composte potremo calcolare la derivata di f . Ricordando l'Equazione 6, possiamo applicare la linearità della derivata⁷ per trovare la derivata di e^x :

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d}{dx} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{i!} x^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$

⁷scambiare la derivata con una sommatoria infinita non è sempre possibile; ma si può mostrare che in questo caso le ipotesi per farlo sono soddisfatte

A questo punto, possiamo scrivere:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} e^x \cdot (e^x)^{\log a - 1} \log a = e^x \cdot (e^x)^{\log a - 1} \log a = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$$

Ora, noi vogliamo calcolare la derivata di \log_a , che è l'inversa di f . Perciò si ha:

$$\frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{f'(\log_a x)} = \frac{1}{a^{\log_a x} \log a} = \frac{1}{x \log a}$$

In particolare, la derivata di $\log x$ è $\frac{1}{x}$.

4.3.7 Derivate di funzioni goniometriche

Calcoliamo la derivata del seno:

$$\begin{aligned} d \sin x &= \sin(x + dx) - \sin(x) = \sin x \cos(dx) + \cos x \sin(dx) - \sin x = \\ &= (\cos(dx) - 1) \sin x + \cos x \sin(dx) \end{aligned}$$

Ricordando l'Equazione 4, possiamo sostituire $\sin(dx)$ con dx :

$$d \sin x = (\cos(dx) - 1) \sin x + \cos x dx$$

Ricordando l'Equazione 5, sappiamo che $\cos(dx) - 1$ ha un ordine di infinitesimo superiore a dx , e può perciò essere trascurato. Abbiamo perciò:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{\cos x dx}{dx} = \cos x$$

Ricordando $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, otteniamo, con la regola per derivare le funzioni composte:

$$\frac{d \cos x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

Ricordando $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, otteniamo che:

$$\frac{d \tan x}{dx} = \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Analogamente troviamo la derivata della cotangente. Verificate per esercizio le seguenti derivate:

$$\begin{aligned} \frac{d \arcsin x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d \arccos x}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d \arctan x}{dx} &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d \operatorname{arccot} x}{dx} &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

4.4 Serie di Taylor

Supponiamo di conoscere il valore di f e di tutte le sue derivate calcolate in x_0 . Vogliamo studiare come si comporta f nei punti vicini ad x_0 . Con una rozza approssimazione, per x molto vicino ad x_0 possiamo dire:

$$f(x) \approx f(x_0)$$

Cerchiamo di fare un'approssimazione un pelo più fine. Approssimiamo f alla retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ con coefficiente angolare $f'(x_0)$. Otteniamo l'approssimazione al primo ordine:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Vogliamo migliorare ulteriormente la nostra approssimazione. Cerchiamo un polinomio p al più di secondo grado tale che valga $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$ e $p''(x_0) = f''(x_0)$. Otteniamo perciò l'approssimazione al secondo ordine:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2}{2}$$

Procedendo analogamente possiamo trovare, più in generale, l'approssimazione all' n -esimo ordine:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!}$$

A seconda della precisione di cui ho bisogno, posso scegliere il valore di n . Si tenga però sempre a mente che l'approssimazione migliore si ha sempre quando x è vicino ad x_0 .

Spesso conviene scegliere $x_0 = 0$, ma in alcuni casi non è possibile. Ad esempio, non posso scegliere $x_0 = 0$ per le funzioni $\log x$ e $\frac{1}{x}$. In questi casi, conviene scegliere $x_0 = 1$ o, per far venire meglio i conti, applicare Taylor con $x_0 = 0$ alle funzioni $\log(x + 1)$ e $\frac{1}{x+1}$.

Per alcune funzioni ed in alcuni intorno di x_0 , possiamo ottenere il valore esatto di $f(x)$, facendo tendere $n \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!}.$$

4.5 Cenni di Calcolo multivariabile

4.5.1 Scomposizione in Componenti

Quando si ha una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, per calcolarne la derivata è sufficiente scomporre la funzione nelle sue componenti e derivarle separatamente, ossia se $\vec{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ allora $\dot{\vec{f}}(t) = (\dot{f}_1(t), \dots, \dot{f}_n(t))$.

Ad esempio se $\vec{r}(t)$ è la posizione nello spazio di un punto materiale, scriveremo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e quindi velocità sarà $\frac{d\vec{r}}{dt} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$.

4.5.2 Derivate Parziali

Quando si ha una funzione che dipende da più parametri (ad esempio la pressione che dipende da volume e temperatura) potrebbe interessarci studiare come essa varia al variare di uno solo dei parametri da cui dipende. Per fare ciò usiamo lo strumento della *derivata parziale*. Se $f(x_1, \dots, x_n)$ è una funzione da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} allora la derivata parziale di f rispetto ad x_i è:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x}$$

Per calcolarla basta fare la derivata rispetto alla variabile interessata e trattare tutte le altre variabili come costanti.

Ad esempio dalla legge dei gas perfetti abbiamo $p = \frac{nRT}{V}$, quindi la derivata parziale della pressione rispetto alla temperatura è $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nR}{V}$, mentre la derivata parziale rispetto al volume è $\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$.

Chiaramente si possono fare anche le derivate parziali di ordini superiori al primo, che si denoteranno con $\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}$.

5 Complessi

L'insieme dei numeri complessi, indicato con \mathbb{C} , è un insieme con le operazioni di somma e prodotto definite come vedremo nei prossimi paragrafi. In questo insieme valgono tutte le proprietà delle operazioni come su \mathbb{R} , ovvero la somma e il prodotto sono commutative e associative, con elementi neutri rispettivamente 0 e 1, vale la proprietà distributiva ed esistono l'opposto di ogni elemento e il reciproco di ogni elemento diverso da 0.

Questo insieme nasce per risolvere il problema della fattorizzazione dei polinomi nei reali, dove, ad esempio, non si trovano soluzioni per $x^2 + 1 = 0$. Il problema di fondo è che una potenza pari di un reale è sempre non negativa.

Per ovviare a ciò è stata definita l'unità immaginaria⁸, i , tale che $i^2 = -1$. I numeri complessi sono della forma

$$a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

5.1 Somma di complessi

Diamo ora due definizioni: la parte reale di un complesso $z = a + ib$ è così definita:

$$\operatorname{Re}(z) = a$$

la parte immaginaria di un complesso $z = a + ib$ è così definita:

$$\operatorname{Im}(z) = b$$

quindi $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$.

Poiché, dato un complesso z , $\operatorname{Re}(z)$ e $i\operatorname{Im}(z)$ sono a loro volta numeri complessi, possiamo scrivere:

$$(a + ib) + (c + id) = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d)$$

$$\operatorname{Re}(w + z) = \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Re}(z)$$

$$\operatorname{Im}(w + z) = \operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(z)$$

Da ciò emerge che i complessi si sommano “componente per componente”, come se fossero vettori nel piano o polinomi nella variabile i . Questo ci consente di rappresentarli come vettori nel piano di Gauss, cioè il piano cartesiano con la parte reale sull'asse x e la parte immaginaria sull'asse y .

5.2 Prodotto di complessi

Il prodotto invece non assomiglia al prodotto scalare dei vettori, né a quello vettoriale. Poiché, se scriviamo $z = a + ib$, anche a e ib sono dei complessi, abbiamo che il prodotto di due complessi è

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc)$$

⁸Poiché quando si trattano i circuiti si usa la i per indicare l'intensità di corrente, capita che l'unità immaginaria si indichi con la j .

5.2.1 Notazione polare

Determinare un complesso z specificandone parte reale e parte immaginaria non è l'unica possibilità. Una notazione comoda per esprimere il prodotto è la notazione polare, che determina un complesso z specificando la lunghezza ρ (detta modulo) del segmento che unisce l'origine al punto di coordinate $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ e l'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ (detto argomento) che tale segmento forma col semiasse reale positivo. Le proiezioni di tale segmento sugli assi reale e immaginario avranno quindi lunghezza $\rho \sin \theta$ e $\rho \cos \theta$.

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = \rho \cos \theta + \rho i \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

A questo punto, vediamo come si comporta il prodotto usando le coordinate polari.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \\ &\quad i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)) = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

Quindi il prodotto di due complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come angolo la somma degli angoli.

5.2.2 Notazione esponenziale

La funzione esponenziale nei complessi è così definita: si prendano $a, b \in \mathbb{R}$, allora

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

Verifichiamo che questa definizione ci consente di espandere con Taylor e , seno e coseno nei complessi come se fossimo nei reali.

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

$$\frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x)$$

Per Taylor abbiamo che:

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{z^0 \sin(0)}{0!} + \frac{z \cos(0)}{1!} + \frac{z^2 (-\sin(0))}{2!} + \frac{z^3 (-\cos(0))}{3!} + \frac{z^4 (-(-\sin(0)))}{4!} + \dots \\ \cos(z) &= \frac{z^0 \cos(0)}{0!} + \frac{z (-\sin(0))}{1!} + \frac{z^2 (-\cos(0))}{2!} + \frac{z^3 (-(-\sin(0)))}{3!} + \frac{z^4 \cos(0)}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Cioè, in maniera più compatta:

$$\sin(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^n (-1)^h \frac{z^{2h+1}}{(2h+1)!}$$

$$\cos(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^n (-1)^h \frac{z^{2h}}{(2h)!}$$

Vogliamo verificare che la definizione di definizione di e^z è equivalente a

$$e^z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^n \frac{z^h}{h!}$$

Concentriamoci sul caso particolare $z = i\theta, \theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^n \frac{(i\theta)^h}{h!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^n i^h \frac{\theta^h}{h!}$$

Sia $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Cambiamo variabile e, notando che $n \rightarrow +\infty \Rightarrow k \rightarrow \lfloor \frac{+\infty}{2} \rfloor = +\infty$ scriviamo

$$e^{i\theta} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{h=0}^k \frac{(i\theta)^{2h}}{(2h)!} + \sum_{h=0}^k \frac{(i\theta)^{2h+1}}{(2h+1)!} \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{h=0}^k \frac{(i\theta)^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{h=0}^k \frac{i^{2h} \theta^{2h+1}}{(2h+1)!} \right)$$

Notiamo che i^n è reale per n pari. Inoltre, $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$

$$e^{i\theta} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{h=0}^k \frac{(-1)^h \theta^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{h=0}^k \frac{(-1)^h \theta^{2h+1}}{(2h+1)!} \right)$$

Dagli sviluppi in Taylor di seno e coseno otteniamo

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Che è quello che volevamo. Quindi, prendiamo u e z appartenenti a \mathbb{C} , li riscriviamo come

$$u = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

$$uz = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

che è il complesso che ha come modulo il prodotto dei moduli e come angolo la somma degli angoli, come già abbiamo visto usando la notazione polare.

5.2.3 Formula di De Moivre

Un'utile applicazione dell'esponenziale complesso alla trigonometria è la formula di De Moivre. Sia $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, allora

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

perché

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

5.3 Il coniugio

Sia $z = a + ib$ un complesso. Allora si definisce coniugato di z il complesso $\bar{z} = a - ib$. In particolare, notiamo che

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad \bar{z} = \rho e^{-i\theta}$$

perché un complesso e il suo coniugato sono simmetrici rispetto all'asse reale: pensate alla simmetria rispetto all'asse x nel piano cartesiano, definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

ed è la stessa trasformazione che stiamo applicando al complesso z .

Notiamo così un forte legame tra coniugio e simmetria, che approfondiremo nei prossimi paragrafi.

5.4 Trasformazioni nel piano di Gauss

I complessi si rivelano un potente strumento per descrivere le isometrie nel piano in modo elegante e compatto (più comodo della calcolosa e prolissa geometria analitica).

5.4.1 Traslazioni

Ricordando che i complessi si sommano allo stesso modo dei vettori di \mathbb{R}^2 , per descrivere una traslazione è sufficiente scrivere il vettore che rappresenta lo spostamento dei punti come numero complesso. Nel piano cartesiano, la traslazione di un vettore $\vec{v} = (x_v, y_v)$ è rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = x + x_v \\ y' = y + y_v \end{cases}$$

che, scritto nel linguaggio dei complessi, diventa

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(v) \\ \operatorname{Im}(z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(v) \end{cases}$$

cioè

$$z' = z + v$$

Notiamo che il coniugato è un comodo strumento per ottenere parte reale, parte immaginaria e modulo di un complesso $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = a + ib - a + ib = 2ib = 2i\text{Im}(z)$$

$$z\bar{z} = \rho e^{i\theta} \rho e^{-i\theta} = \rho^2 e^0 = \rho^2$$

5.4.2 Rotazioni

Per scrivere le rotazioni, facciamo alcune osservazioni usando la notazione esponenziale:

$$\rho e^{i\theta} e^{i\phi} = \rho e^{i(\theta+\phi)}$$

Questo descrive una rotazione di un angolo orientato ϕ con centro nell'origine perché conserva il modulo e aumenta l'argomento di un angolo orientato ϕ . Per scrivere una rotazione di un complesso z di un angolo ϕ con centro in c , consideriamo che

$$z = c + (z - c)$$

Ruotare intorno al centro c equivale a ruotare la componente $z - c$ di un angolo ϕ , quindi

$$z' = c + (z - c)e^{i\phi}$$

5.4.3 Simmetrie

Abbiamo visto che il coniugio rappresenta la simmetria rispetto all'asse reale. La simmetria rispetto a un generico asse si ottiene facendo coincidere tale asse con l'asse reale, applicando il coniugio e poi facendo coincidere l'asse reale con l'asse di simmetria. Il calcolo è volutamente omesso, in quanto oggetto di un esercizio.

La simmetria centrale è la rotazione di π intorno al centro c , già vista nel paragrafo precedente. Considerando che $e^{i\pi} = -1$, questa particolare rotazione si scrive come

$$z = c - (z - c)$$

6 Integrali

6.1 Integrale indefinito

Una funzione F si dice primitiva di f se vale $F' = f$. Si può dimostrare che ogni funzione continua ammette sempre una primitiva. Sebbene ogni funzione derivabile abbia una sola derivata, ogni funzione continua ha infinite primitive. Infatti, se F è una primitiva di f , allora $F + C$ è una primitiva di f per ogni costante C . Questo si può facilmente verificare sfruttando la linearità della derivata.

Se f è una funzione continua ed F una sua primitiva, definiamo l'integrale indefinito di f come la famiglia delle sue primitive:

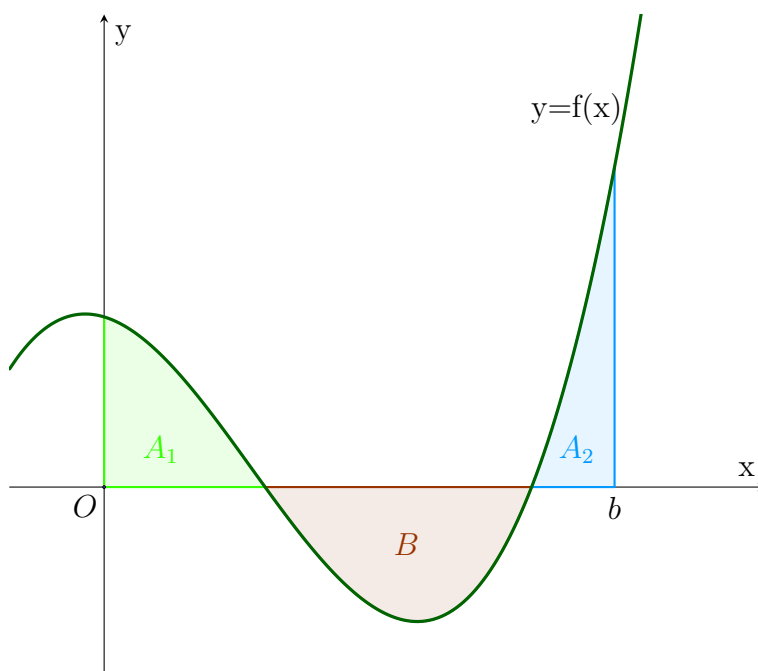
$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

6.2 Integrale definito

Sia f una funzione continua⁹ in $[a, b]$ con $a \leq b$. Consideriamo i tratti di $[a, b]$ in cui f è maggiore o uguale a 0. Sia A l'area sottesa da f , ovvero compresa tra f e l'asse x , in questi tratti. Analogamente, sia B l'area sottesa da f nei tratti di $[a, b]$ dove f è minore di 0. L'integrale definito di f da a a b è:

$$\int_a^b f(x) dx = A - B$$

I numeri a e b vengono detti *estremi di integrazione*. Ad esempio, per la funzione in figura, si ha $\int_0^b f(x) dx = A_1 + A_2 - B$.



Vediamo ora intuitivamente che senso ha questa bizzarra notazione. $f(x) dx$ può essere visto come l'area di un rettangolo di altezza $|f(x)|$ e base dx , con

⁹Ci sono anche casi in cui la funzione è integrabile anche se non è continua: è sufficiente che abbia un numero finito di salti. La trattazione della teoria delle funzioni integrabili esula dagli scopi di questa lezione e di queste dispense.

segno + se $f(x)$ è positiva e con segno - se è negativa. La S del simbolo di integrale sembra suggerirci che noi stiamo in un certo senso facendo la somma di tutte queste aree con segno al variare di x in $[a, b]$.

Valgono queste importanti proprietà:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- Sia $a < b$, allora si pone $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.
Questa proprietà ci dice che quando invertiamo gli estremi di integrazione va cambiato il segno dell'integrale. Tornando alla nostra visione intuitiva scritta sopra, questa proprietà si può capire pensando al fatto che partendo da $x = b$ e arrivando ad $x = a$ sommando le aree di tutti i rettangolini, le basi dx dei rettangolini sono tutte negative. Al contrario, partendo da $x = a$ e arrivando ad $x = b$, le basi dx sono tutte positive.
- $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

6.3 Calcolo degli integrali

6.3.1 Calcolo degli integrali definiti

Vi sarete certamente accorti che le notazioni dell'integrale indefinito e di quello definito sono quasi identiche. Questo è perché questi due oggetti sono molto legati tra loro.

Sia a un qualsiasi elemento del dominio di f . Definiamo la funzione integrale F in questo modo:

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

Calcoliamo la derivata di F :

$$dF = \int_a^{x+dx} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+dx} f(t) dt$$

Osserviamo che, moralmente, l'ultimo integrale scritto è la somma di un solo elemento, ovvero $f(x) dx$, da cui:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{f(x) dx}{dx} = f(x)$$

Abbiamo perciò scoperto che F è primitiva di f , quindi fare l'integrale di una funzione f significa farne l'“antiderivata”. Inoltre, osserviamo che si ha:

$$\int_x^y f(t) dt = \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = F(y) - F(x) = (F(y) + C) - (F(x) + C)$$

Da cui segue che, presa una qualsiasi funzione Φ primitiva di f , si ha:

$$\int_x^y f(t) dt = \Phi(y) - \Phi(x)$$

Questo, in pratica, ci dà il modo di calcolare gli integrali definiti se sappiamo calcolare quelli indefiniti. Purtroppo, non tutte le funzioni hanno un integrale indefinito che si può esprimere in termini di funzioni elementari, come ad esempio e^{-x^2} . Nelle prossime sezioni vedremo come integrare alcune funzioni per cui questo è possibile.

6.3.2 Linearità dell'integrale indefinito

Anche l'integrale indefinito è un operatore lineare. Infatti, comunque si prendano due funzioni f, g ed un reale λ si ha:

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \int \lambda f(x) dx &= \lambda \int f(x) dx \end{aligned}$$

Per verificare questo fatto, basta ricordarsi che anche la derivata è un operatore lineare. Quindi se F è primitiva di f e G è primitiva di g si ha:

$$\begin{aligned} (F + G)' &= F' + G' = f + g \\ (\lambda F)' &= \lambda F' = \lambda f \end{aligned}$$

6.3.3 Integrali di potenze ed esponenziali

Vogliamo integrare x^α , dove α è un numero reale diverso da -1. Osserviamo che si ha:

$$\int x^\alpha dx = \int \frac{1}{\alpha + 1} (\alpha + 1)x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} \int (\alpha + 1)x^\alpha dx$$

Ci accorgiamo però che la derivata di $x^{\alpha+1}$ è proprio $(\alpha + 1)x^\alpha$, da cui:

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C$$

Analogamente, dato $a > 0; a \neq 1$, si ottiene:¹⁰

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + C$$

¹⁰Anche se al liceo il logaritmo naturale viene spesso indicato con \ln mentre il logaritmo in base 10 con \log , in questa dispensa adotteremo il simbolo \log per il logaritmo naturale.

6.3.4 Integrale di $1/x$

Ricordandosi che la derivata di $\log x$ è $\frac{1}{x}$, verrebbe da scrivere:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$$

Tuttavia, c'è un problema: $\frac{1}{x}$ è definita anche sui negativi, mentre $\log x$ no, per cui questa formula funziona solo per $x > 0$. Proviamo a derivare $\log(-x)$:

$$\frac{d \log(-x)}{dx} = \frac{d(-x)}{dx} \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Sappiamo perciò che, per $x < 0$, vale:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + C$$

Perciò, più in generale, si ha:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

6.3.5 Integrali di funzioni trigonometriche

Ricordando come si derivano seno e coseno, è facile dedurre che:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

Proviamo ad integrare $\sin^2 x$. Dalla formula di duplicazione per il coseno otteniamo:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Da cui, sfruttando la linearità dell'integrale:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2} x^0 dx - \int \frac{1}{2} \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int 2 \cos(2x) dx$$

Ci accorgiamo però che la derivata di $\sin(2x)$ è proprio $2 \cos(2x)$, da cui:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

Analogamente, si può calcolare l'integrale di $\cos^2 x$ (esercizietto).

Calcoliamo ora l'integrale della tangente:

$$\int \tan x \, dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx$$

Ci accorgiamo però che $-\sin x$ è la derivata di $\cos x$, da cui segue che $\frac{-\sin x}{\cos x}$ è la derivata di $\log |\cos x|$. Si ha perciò:

$$\int \tan x \, dx = -\log |\cos x| + C$$

Analogamente, si può calcolare l'integrale di $\cot x$ (altro esercizietto).

6.3.6 Integrazione per parti

Supponiamo di dover calcolare l'integrale indefinito di un prodotto di due funzioni f, h e di accorgerci che h è la derivata di una certa funzione g . Possiamo perciò scrivere che:

$$\int f(x) \cdot h(x) \, dx = \int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

La tecnica di calcolare gli integrali usando questa relazione è detta integrazione per parti. Questa uguaglianza può essere facilmente dimostrata isolando $f(x) \cdot g(x)$ e sfruttando la linearità dell'integrale, ottenendo un'uguaglianza equivalente:

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x) \, dx + \int f'(x)g(x) \, dx = \int (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) \, dx$$

Ricordando la regola per derivare il prodotto di due funzioni, questa uguaglianza risulta ovvia. Vediamo un esempio.

$$\int xe^{2x} \, dx = \int x \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' \, dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \, dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Provate per esercizio ad integrare $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ per parti.

6.3.7 Integrali di logaritmi

Cominciamo col calcolare l'integrale di $\log x$. Dobbiamo utilizzare l'integrazione per parti:

$$\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - \int 1 \, dx$$

Da cui:

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + C = x (\log x - 1) + C$$

A questo punto, ricordandoci la formula del cambio di base dei logaritmi, possiamo tranquillamente integrare $\log_a x$ per ogni a positivo diverso da 1:

$$\int \log_a x \, dx = \int \frac{\log x}{\log a} \, dx = \frac{x}{\log a} (\log x - 1) + C$$

Provate per esercizio, con lo stesso procedimento, ad integrare l'arcoseno e l'arcocoseno.

6.3.8 Integrazione per sostituzione (a.k.a. cambio di variabile)

Talvolta conviene cambiare la variabile di integrazione per riuscire a fare i conti meglio. L'idea è la seguente:

$$\int f \, dx = \int f \frac{dx}{dt} \, dt$$

Per poter applicare questa idea c'è bisogno di poter scrivere x come $g(t)$, dove g è una funzione bigettiva. Scrivendo la formula sopra più esplicitamente, si ha:

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(t))g'(t) \, dt$$

Ossia, più formalmente e in termini di integrali definiti, date $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ C^1 (cioè derivabile con g' continua) e $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(g(t))g'(t) \, dt$$

Cominciamo a vedere un esempio. Vogliamo calcolare il seguente integrale:

$$\int \sqrt{1 - Rx^2} \, dx$$

Dove R è un reale positivo. In questo caso, definiamo t nel seguente modo:

$$t = \arccos(\sqrt{Rx})$$

Invertendo questa formula otteniamo x in funzione di t :

$$x = \frac{\cos t}{\sqrt{R}}$$

Da cui otteniamo:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sin t}{\sqrt{R}}$$

Il nostro integrale diventa perciò:

$$\int \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{R}}\right) dt = -\frac{1}{\sqrt{R}} \int \sin^2 t dt = \frac{1}{4\sqrt{R}} \sin(2t) - \frac{1}{2\sqrt{R}} t + C$$

In cui possiamo sostituire la definizione di t ottenendo:

$$\int \sqrt{1 - Rx^2} dx = \frac{x\sqrt{1 - Rx^2}}{2} - \frac{\arccos(\sqrt{Rx})}{2\sqrt{R}} + C$$

Se il nostro obiettivo era di calcolare un integrale definito, tuttavia, questo ultimo passaggio si poteva saltare. Infatti, volendo cambiare variabile passando dalla variabile x alla variabile t legate dalla relazione $x = g(t)$ con $g(t)$ bigettiva (e dunque $t = g^{-1}(x)$, dove g^{-1} è la funzione inversa di g), si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt$$

L'idea è che se x varia tra a e b , allora t varia tra $g^{-1}(a)$ e $g^{-1}(b)$.

Nell'esercizio precedente si ha $g(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{R}}$, mentre $g^{-1}(x) = \arccos(\sqrt{Rx})$.

Alla luce di quanto detto, potevamo infatti scrivere:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 - Rx^2} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{R}}\right) dt = \\ &= \left(\frac{1}{4\sqrt{R}} \sin(2\beta) - \frac{1}{2\sqrt{R}} \beta\right) - \left(\frac{1}{4\sqrt{R}} \sin(2\alpha) - \frac{1}{2\sqrt{R}} \alpha\right) \end{aligned}$$

dove $\alpha = \arccos(\sqrt{Ra})$ e $\beta = \arccos(\sqrt{Rb})$.

Abbiamo dunque capito che quando si cambia variabile, è necessario cambiare anche gli estremi di integrazione.

Vediamo ora alcuni casi semplici ma importanti della formula di sostituzione:

- Traslazione: $\int_a^b f(x - c) dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x) dx \quad f : [a - c, b - c] \rightarrow \mathbb{R}$
- $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x) dx = \lambda \int_a^b f(\lambda x) dx \quad \forall \lambda > 0$

- se f è pari, $\int_a^b f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$
- f dispari $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0$
- se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è T -periodica e integrabile su tutti gli intervalli, l'integrale di f su qualunque intervallo di lunghezza T è lo stesso.

Dimostrazione.

$$\int_a^{a+T} f dx = \int_0^{a+T} f dx - \int_0^a f dx = \int_0^T f dx + \int_T^{a+T} f dx - \int_0^a f dx$$

Operiamo una traslazione sul secondo integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^T f dx + \int_T^{a+T} f dx - \int_0^a f dx &= \int_0^T f dx + \int_0^a f(x+T)dx - \int_0^a f dx \\ &= \int_0^T f dx + \left(\int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(x)dx \right) \\ &= \int_0^T f dx \end{aligned}$$

□

6.3.9 Integrali impropri

Capita a volte che in un integrale definito la funzione non sia definita in uno degli estremi di integrazione. Ad esempio, può capitare di dover calcolare:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Come abbiamo già visto, l'integrale indefinito di questa funzione è:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

Da cui vorremmo poter scrivere:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2$$

Effettivamente, questa cosa la possiamo scrivere. Formalmente, quello che stiamo facendo è un passaggio al limite, ovvero stiamo calcolando:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Analogamente, possiamo procedere a calcoli di questo tipo quando uno degli estremi di integrazione (o entrambi) è infinito, come ad esempio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Sapendo che l'integrale indefinito di questa funzione è:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

Otteniamo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = 0 + 1 = 1$$

6.3.10 Altri integrali notevoli

Come già detto, non siamo in grado di esprimere bene alcuni integrali indefiniti. Esistono però delle formule che consentono di aggirare questo problema quando bisogna calcolare integrali definiti con certi estremi di integrazione. Di seguito, ad esempio, riportiamo l'integrale della gaussiana:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Dove $a > 0$ (di solito $a = 1/2$).

Esistono delle generalizzazioni di questa formula che talvolta servono, ma non dovete davvero ricordarvele. Per completezza, le riportiamo:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \prod_{k=1}^n (2k-1)$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

Dove $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$.

6.4 Moto unidimensionale

Le derivate (e quindi gli integrali) sono un concetto fondamentale in fisica: definiscono diverse grandezze e ne legano altre con delle relazioni, vedasi ad esempio le equazioni di Maxwell.

Vediamo l'esempio più semplice: il moto unidimensionale. Denotando con $x(t)$ la posizione del punto all'istante t , con $v(t)$ la sua velocità e con $a(t)$ la sua accelerazione, per definizione valgono le seguenti relazioni:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Supponiamo ora di trovarci nel caso del moto uniformemente accelerato, in cui $a(t) = a$ dove a è un valore costante nel tempo. Allora vale

$$v(t) = v(0) + \int_0^t v'(u) du = v(0) + \int_0^t a(u) du = v(0) + at$$

E quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t x'(u) du = x(0) + \int_0^t (v(0) + au) du = x(0) + v(0)t + a \int_0^t u du \\ &= x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

Abbiamo cioè dimostrato la legge oraria del moto uniformemente accelerato.

7 ODE

Le equazioni alle derivate ordinarie (ODE) sono delle equazioni in cui compaiono una variabile, una funzione e le sue derivate e in cui l'incognita è una funzione. L'ordine di un'ODE è il massimo tra gli ordini delle derivate che vi compaiono. Indicheremo con y la funzione e con x la variabile. Un esempio semplicissimo di ODE di primo ordine è il seguente:

$$y' = x$$

E ha per soluzione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Dove C è un parametro determinato dalle condizioni iniziali del problema. È importante ricordare che nessuna ODE ha un'unica soluzione, bensì esiste una famiglia di soluzioni. La soluzione generale di un'equazione di n -esimo ordine dipende da n parametri. Nel caso dell'esempio, l'equazione era di primo ordine e la soluzione dipendeva da un solo parametro, C .

Vediamo nelle sezioni seguenti come trovare le soluzioni delle ODE.

7.1 Classificazione

Un'ODE si dice *lineare* se y e le sue derivate compaiono sempre con esponente 1 e mai moltiplicate o divise tra loro. Ad esempio, queste ODE sono lineari:

$$y'' = -y; \quad x^3 y''' + x^2 y + 27 = 0$$

E queste non lo sono:

$$y' = y^2; \quad yy' = x$$

Un'ODE lineare si dice *omogenea* se ogni suo termine è moltiplicato per y o per una sua derivata. Le seguenti ODE sono lineari omogenee:

$$y'' + y' + y = 0; \quad (x^2 + 1)y'' + y \cdot \sin x = 0$$

E le seguenti non lo sono:

$$y' + y = \sqrt{x}; \quad y'' - 2y' + y = \cos x$$

7.2 Variabili separabili

Un'ODE a variabili separabili è un'ODE che può essere espressa nella seguente forma:

$$f(y) \cdot y' = g(x)$$

Dove f e g sono funzioni da un sottoinsieme di \mathbb{R} in \mathbb{R} . L'idea informale per risolvere questo tipo di ODE è pensare $y' = dy/dx$, e dunque moltiplicare i due membri per dx e poi integrare. In pratica, otteniamo:

$$f(y) dy = g(x) dx$$

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx$$

Risolvendo l'integrale e provando a esplicitare y in funzione di x si risolve l'ODE. Vediamo ad esempio come risolvere l'equazione mostrata nel paragrafo precedente:

$$y' = x$$

$$dy = x dx$$

$$\int dy = \int x dx$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Si noti come facendo l'integrale indefinito è saltato fuori il parametro. Proviamo ora a risolvere qualcosa di più complicato: dato un certo $k \in \mathbb{R}$, proviamo a risolvere:

$$y' - ky = 0$$

$$y' = ky$$

Per poter separare le variabili, vorremmo poter dividere i due membri per y . Possiamo farlo, ma dobbiamo stare attenti a verificare se $y = 0$ risolve l'ODE. È facile verificare che la risolve, perciò sappiamo che le funzioni che risolvono l'ODE sono $y = 0$ e quelle che risolvono:

$$\frac{1}{y}y' = k$$

$$\frac{1}{y}dy = k dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dx$$

$$\log |y| = kx + C$$

$$|y| = e^{kx+C}$$

$$y = \pm e^C e^{kx}$$

Osserviamo che e^C può assumere qualunque valore strettamente positivo, per cui $\pm e^C$ può assumere qualunque valore diverso da 0. Detto $A = \pm e^C$, le soluzioni dell'ODE sono quindi:

$$y = 0 \vee y = Ae^{kx} \text{ con } A \neq 0$$

Ovvero:

$$y = Ae^{kx} \text{ con } A \in \mathbb{R}$$

Anche qui, la soluzione dipende da un solo parametro, come ci aspettavamo.

7.3 Variabili inseparabili del primo ordine

Vediamo ora come risolvere le ODE a variabili inseparabili del primo ordine, ovvero le equazioni differenziali della forma

$$y' = ya(x) + b(x)$$

Quando abbiamo derivato e^x abbiamo visto che $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. Aver trovato una funzione che è anche la sua derivata è qualcosa che a noi fa estremamente comodo. In particolare, se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$, otteniamo che

$$\frac{d}{dx} \left(ye^{-A(x)} \right) = y'e^{-A(x)} - ya(x)e^{-A(x)}$$

Proviamo a rimaneggiare il testo per ottenere qualcosa del genere

$$y' = ya(x) + b(x)$$

$$y' - ya(x) = b(x)$$

$$e^{-A(x)}y' - e^{-A(x)}ya(x) = e^{-A(x)}b(x)$$

Allora possiamo riscrivere il primo membro

$$\frac{d}{dx} \left(ye^{-A(x)} \right) = e^{-A(x)}b(x)$$

Integrando rispetto a x da ambo le parti,

$$ye^{-A(x)} + c_1 = \int \left(e^{-A(x)}b(x) \right) dx$$

$$ye^{-A(x)} = \int \left(e^{-A(x)}b(x) \right) dx - c_1$$

Dove c_1 è una costante. Notiamo che l'integrale al secondo membro è un integrale indefinito, quindi è una qualunque primitiva dell'integrando. La famiglia delle primitive di una funzione rimane sé stessa se si aggiunge o toglie una costante. Quindi possiamo riscrivere la soluzione della nostra ODE come

$$ye^{-A(x)} = \int \left(e^{-A(x)}b(x) \right) dx$$

$$y = e^{A(x)} \int \left(e^{-A(x)}b(x) \right) dx$$

Osserviamo che questa relazione vale per *qualsunque* primitiva $A(x)$ di $a(x)$, quindi nello svolgimento dei calcoli non occorre preoccuparsi della costante da aggiungere ad $A(x)$, ma si può aggiungere quella che più fa comodo (che molto spesso è 0). Anche qui, come ci aspettavamo, abbiamo un solo parametro libero.

7.4 Oscillatore armonico

Concentriamoci ora su alcune equazioni differenziali omogenee di second'ordine ricorrenti in fisica. La più semplice e diffusa è l'equazione dell'oscillatore armonico (che, come suggerito dal nome, caratterizza il moto armonico semplice)

$$y'' = -ky$$

con $k > 0$. Definiamo $\omega = \sqrt{k}$ e dunque:

$$y'' = -\omega^2 y \quad (7)$$

La soluzione generale è:¹¹

$$y = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

perché soddisfa l'equazione (7) e ha due parametri reali liberi. Verifichiamo che soddisfa.

$$\begin{aligned} y' &= -A\omega \sin(\omega x) + B\omega \cos(\omega x) \\ y'' &= -A\omega^2 \cos(\omega x) - B\omega^2 \sin(\omega x) = -\omega^2 y \end{aligned}$$

Infine, osserviamo che la soluzione $y = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ si può riscrivere nella forma:

$$y = D \cos(\omega x + \varphi)$$

infatti:

$$D \cos(\omega x + \varphi) = D[(\cos \varphi)(\cos(\omega x)) + (-\sin \varphi)(\sin(\omega x))]$$

e notando che esistono φ e D tali che $A = D \cos \varphi$ e $B = -D \sin \varphi$, la soluzione dell'ODE diventa $y = D \cos(\omega x + \varphi)$.

7.4.1 Oscillatore armonico smorzato

Vediamo ora un'ODE più complicata, l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato:

$$y'' = -k_1 y - k_2 y'$$

che, per come comparirà nei problemi di fisica, riscriviamo nella forma

$$y'' + \omega^2 y + 2\gamma y' = 0$$

¹¹In generale, combinazioni lineari di $e^{i\omega x}$ ed $e^{-i\omega x}$ soddisfano, ma imponendo che la soluzione sia reale si ottiene questa formula. A tal proposito, proponiamo lo svolgimento dell'esercizio 9, sezione 9.2.

Provando una soluzione del tipo $y = (a + bx)e^{-\alpha x}$ ci accorgiamo che possiamo determinare i parametri a, b, α in modo che soddisfi l'ODE di partenza.

$$y' = be^{-\alpha x} - (a + bx)\alpha e^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}(b - \alpha(a + bx))$$

$$y'' = -\alpha be^{-\alpha x} + \alpha^2(a + bx)e^{-\alpha x} - b\alpha e^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}(-2\alpha b + \alpha^2(a + bx))$$

Sostituendo nell'ODE iniziale,

$$e^{-\alpha x}[-2\alpha b + \alpha^2(a + bx) + 2\gamma b - 2\gamma\alpha(a + bx) + \omega^2(a + bx)] = 0$$

Poiché $e^{-\alpha x} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(a + bx)(\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega^2) + 2b(\gamma - \alpha) = 0$$

- Se $\alpha \neq \gamma$, deve essere $b = 0$, altrimenti nel caso $x = -\frac{a}{b}$ non ottengo 0. Quindi

$$a(\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega^2) = 0$$

$$\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Poiché sono nel caso $\alpha \neq \gamma$, so che le due soluzioni α_1 e α_2 sono distinte. Ma allora soluzioni del tipo

$$y = ae^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})x}, \quad y = ae^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})x}$$

soddisfano. Quindi, dato che stiamo trattando un'ODE omogenea e la derivata è un operatore lineare, anche una combinazione lineare di queste soluzioni è soluzione. Ottengo così soluzioni del tipo

$$y = e^{-\gamma x} \left(a_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}x} + a_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}x} \right)$$

che, come ci aspettavamo, hanno due parametri liberi. Notare che se $\gamma^2 - \omega^2 > 0$ nella soluzione abbiamo degli esponenziali reali, mentre se $\gamma^2 - \omega^2 < 0$ abbiamo degli esponenziali complessi e in tal caso la soluzione si può riscrivere come:

$$y = e^{-\gamma x} \left(A \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}x) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}x) \right).$$

- Se $\alpha = \gamma$, allora $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = \gamma$, e dunque quelle che prima erano soluzioni distinte ora coincidono. Sembrerebbe che si sia perso un parametro libero, ma all'inizio non sarebbe stato necessario porre $b=0$, quindi otteniamo soluzioni della forma

$$y = (a + bx)e^{-\gamma x}$$

che, come ci aspettavamo, hanno due parametri liberi.

7.5 ODE lineari non omogenee

Spendiamo infine qualche riga sulle ODE lineari non omogenee. Esse sono equazioni differenziali della forma

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}f_{n-1}(x) + \cdots + yf_0(x) = h(x). \quad (8)$$

In questi casi, per la linearità della derivata, al fine di trovare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea è sufficiente trovare una soluzione particolare $y = p(x)$ dell'equazione non omogenea e sommarvi la soluzione generale $y = g(x)$ dell'equazione omogenea associata.

Infatti se dall'equazione (8) sottraiamo una sottrazione particolare otteniamo:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \cdots + yf_0(x) - [p^{(n)}(x) + \cdots + p(x)f_0(x)] &= h(x) - h(x) = 0 \\ (y - p(x))^{(n)} + (y - p(x))^{(n-1)}f_{n-1}(x) + \cdots + (y - p(x))f_0(x) &= 0 \end{aligned}$$

e questa è l'omogenea associata, risolta da $y - p(x) = g(x)$, quindi otteniamo la soluzione

$$y = p(x) + g(x).$$

7.6 Problemi di Cauchy

Per problema di Cauchy si intende un'ODE messa a sistema con delle condizioni iniziali riguardanti la funzione e le sue derivate¹². Se per esempio l'ODE è del second'ordine, le condizioni iniziali riguarderanno la funzione e la derivata prima. Un esempio di problema di Cauchy è il seguente:

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Come abbiamo già visto, la soluzione generale dell'ODE riportata è:

$$y = A \cos x + B \sin x$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo i valori di A e B che ci danno la soluzione particolare che cerchiamo:

$$\begin{aligned} y(0) &= A \cos 0 + B \sin 0 = A = 1 \\ y'(x) &= -\sin x + B \cos x \Rightarrow y'(0) = B = 0 \end{aligned}$$

La soluzione particolare è perciò:

$$y(x) = \cos x.$$

¹²In fisica, spesso ci troviamo a risolvere ODE in cui x gioca il ruolo del tempo, la funzione y è la posizione di una particella, y' è la sua velocità e y'' è la sua accelerazione.

7.7 Conservazione dell'energia

Sia data una particella di massa m che si muove, per semplicità, in una dimensione. Supponiamo che se la particella si trova nella posizione x , allora su di essa agisce una forza $f(x)$. Sia $x(t)$ la posizione della particella in funzione del tempo. Ricordando che l'accelerazione è la derivata temporale seconda e applicando il secondo principio della dinamica si ha:

$$m\ddot{x}(t) = f(x(t))$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per la velocità:

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = f(x(t))\dot{x}(t)$$

Notando ora che $m\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right]$ e che $f(x(t))\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} f(y) dy$, si ha:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right] = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} f(y) dy$$

Cioè:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x(t)} f(y) dy \right] = 0$$

Dato che la derivata si annulla per ogni t , allora la funzione tra parentesi quadre deve essere uguale ad una costante. Chiamiamo *energia* tale costante, che indichiamo con E . Dunque per ogni t si ha:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - \int_{x_0}^{x(t)} f(y) dy = E$$

Il termine $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$ è detto *energia cinetica*, mentre il termine $-\int_{x_0}^{x(t)} f(y) dy$ è detto *energia potenziale* e si indica usualmente con $U(x)$. L'equazione diventa dunque:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + U(x(t)) = E.$$

Il punto x_0 nella definizione di energia potenziale può essere scelto in modo arbitrario. L'energia potenziale è dunque definita a meno di una costante additiva.

Osserviamo che se sappiamo calcolare $U(x)$ (cioè la primitiva della forza $f(x)$), allora dall'equazione precedente possiamo calcolare la velocità della particella in funzione della sua posizione, senza necessariamente conoscere l'espressione esplicita della posizione in funzione del tempo.

Osserviamo che questo è anche un metodo per risolvere equazioni differenziali, infatti l'equazione precedente è a variabili separabili. Dunque se si sanno calcolare le primitive, si può trovare esplicitamente $x(t)$.

7.7.1 Esempio: forza elastica

Supponiamo che la nostra particella è soggetta ad una forza elastica del tipo $f(x) = -k(x - x_c)$, cioè si ha una molla ideale con lunghezza a riposo nulla, incernierata in $x = x_c$ e con costante elastica k .

L'energia potenziale elastica è dunque: (scelgo $x_0 = x_c$)

$$U(x) = - \int_{x_c}^x f(y) dy = \int_{x_c}^x k(y - x_c) dy = \int_0^{x-x_c} kz dz = \frac{1}{2}k(x - x_c)^2$$

Perciò la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_c)^2 = E.$$

7.7.2 Esempio: forza gravitazionale

Supponiamo di avere una massa M incollata nell'origine $x = 0$ e una massa m vincolata a muoversi nella semiretta $x > 0$. La forza agente sulla massa m è allora $f(x) = -\frac{GmM}{x^2}$.

L'energia potenziale gravitazionale è dunque (scegliendo $x_0 = +\infty$):

$$U(x) = - \int_{+\infty}^x f(y) dy = \int_{+\infty}^x \frac{GmM}{y^2} dy = -\frac{GmM}{x}$$

Perciò la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{GmM}{x} = E$$

Un analogo calcolo si può fare nel caso in cui le particelle sono elettricamente cariche.

7.7.3 Esempio: gravità costante

Supponiamo di avere una massa m vincolata a muoversi sull'asse z . Sulla massa m agisce una forza costante $f(z) = -mg$ opposta all'asse z .¹³ L'energia potenziale gravitazionale è dunque (scegliendo $x_0 = 0$):

$$U(x) = - \int_0^z f(y) dy = \int_0^z mg dy = mgz.$$

Perciò la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = E.$$

¹³Si può immaginare, ad esempio, una situazione fisica in cui c'è una pallina soggetta alla gravità terrestre vincolata a muoversi su un'asta verticale incernierata al pavimento.

7.8 Non conservazione dell'energia

Abbiamo fatto un'ipotesi fondamentale sulla forza: cioè che abbia una forma del tipo $f(x)$, ovvero che non sia funzione esplicita del tempo. Ad esempio, la forza $f(x) = -kx$ non ha dipendenza esplicita dal tempo, ma dipende implicitamente dal tempo perchè la posizione x della particella dipende dal tempo.

Poniamoci ora in un caso particolare. Supponiamo di avere due forze che agiscono sulla particella: una forza che è funzione solo della posizione e un'altra che è funzione solo del tempo. Dunque la forza totale agente sulla massa m , che si trova al tempo t nella posizione x , è del tipo $f(x, t) = F(x) + G(t)$: questa è una forza che dipende esplicitamente dal tempo (a causa della funzione $G(t)$). L'energia si conserva o no?

La seconda legge di Newton dice:

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)) + G(t)$$

Moltiplicando per la velocità e osservando che $m\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right]$ e che $F(x(t))\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} F(y) dy$, si ha:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x(t)} F(y) dy \right] = G(t)\dot{x}(t).$$

Nelle parentesi quadre appare la funzione che prima abbiamo chiamato *energia*. Ora però non è costante: la indichiamo dunque con $E(t)$. Siamo arrivati all'equazione:

$$\frac{d}{dt}E(t) = G(t)\dot{x}(t)$$

Se la forza $G(t)$ è tale che $G(t) = 0$ sempre, allora ci riconduciamo al caso precedente in cui $E(t) = E = \text{costante}$. Dunque diciamo che $G(t)$ è una *forza non conservativa* (perché è sua la colpa della non conservazione dell'energia!). Il termine $G(t)\dot{x}(t)$ si dice *potenza della forza G* e si indica usualmente con $P(t)$. Abbiamo dunque dimostrato che:

$$\frac{d}{dt}E(t) = P(t),$$

cioè che la derivata temporale dell'energia è uguale alla potenza fatta dalle forze non conservative.¹⁴

¹⁴Ricordiamo che ci siamo posti nel caso particolare $f(x, t) = F(x) + G(t)$. In generale possiamo avere anche forze che mischiano la posizione e il tempo, ad esempio forze del tipo $f(x, t) = k \cdot tx$ con k costante.

8 Esercizi proposti all'esercitazione

1. Calcola $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
2. Calcola la derivata della funzione x^x .
3. Verificare che per $x \ll 1$ valgono le seguenti approssimazioni:
 - (i) $\tan x \simeq \sin x \simeq x$
 - (ii) $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$
 - (iii) $\log(1 + x) \simeq x$
 - (iv) $e^x \simeq 1 + x$
4. Calcolare al sesto ordine in x la funzione $e^{x^2 + \alpha x}$ attorno ad $x_0 = 0$.
Hint: Se x è piccolo, allora anche $(x^2 + \alpha x)$ è piccolo.
5. Trovare l'espansione in serie di Taylor dell'arcoseno in un intorno di 0.
(Hint: Partire dall'espansione in serie della derivata dell'arcoseno)
6. La funzione $y(x)$ soddisfa il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^2 y'' = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Ricavare $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x)$.

7. Dire esplicitamente quali integrali bisogna fare per risolvere l'equazione $F = ma$ nei tre casi in cui F dipende solo da: (i) v , (ii) t , (iii) x .
8. Considerare una fune lunga L e densità di massa lineare $\rho(x) = \rho_0 + \rho_1 \left(\frac{x}{L}\right)^2$.
 - a) Calcolare la massa della fune.
 - b) Supporre che la fune è sospesa al soffitto dall'estremità più leggera in presenza di gravità. Fissando la costante arbitraria dell'energia potenziale tale che essa valga 0 al soffitto, calcolare l'energia potenziale totale della fune.
9. **Le funzioni iperboliche:** definiamo le funzioni seno iperbolico, coseno iperbolico e tangente iperbolica rispettivamente come:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- (i) Calcolare le derivate di ogni ordine delle funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico.
- (ii) Studiare le simmetrie e gli insiemi immagine delle funzioni \sinh e \cosh .
- (iii) Dimostrare le seguenti formule, analoghe a quelle per le funzioni trigonometriche:
 - $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \sinh(y) \cosh(x)$
 - $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$
 - $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
 - $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x + y}{2} \cosh \frac{x - y}{2}$
- (iv) Trovare la funzione inversa di $\sinh x$.
- (v) Espandere in serie di Taylor attorno ad $x = 0$ le funzioni \sinh e \cosh .

10. Una palla viene lanciata in aria in verticale. L'attrito è $F = -\gamma v$. Trovare velocità e altezza in funzione del tempo.

11. Usare l'integrazione per parti per dimostrare la formula

$$x! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$$

Tale espressione è la *funzione Gamma di Eulero*.

12. a) Calcolare $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$.
 (*Suggerimento*: dove avete già visto questa espressione?)
 b) Calcolare $\int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2}$. Il risultato varia al variare di α ?

13. *Oscillatore armonico con forzante sinusoidale*
 Considerare la seguente ODE:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) + f \cos(\omega t).$$

dove ω , ω_0 e f sono delle costanti.

a) Supponendo $|\omega| \neq |\omega_0|$, trovare tutte le soluzioni.

b) Supponendo $\omega = \omega_0$, trovare tutte le soluzioni.

Hint per la domanda b): Provare come soluzione particolare un qualche polinomio di grado basso moltiplicato per coseno e seno della frequenza che vi aspettate e vedere se funziona.

9 Esercizi extra

Il simbolo ★ indica il livello di difficoltà.

Il simbolo ☆ indica quanto ci sembra utile il problema.

9.1 Basic

14. ☆ Considerare la sequenza dei poligoni a 4, 8, 16, 32, ... lati, e usando la trigonometria, dimostrare che $\pi = 2 \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$
15. ☆☆☆ La derivata logaritmica di $f(x)$ è definita come $\frac{d}{dx} \ln(f(x))$. Trovare la derivata logaritmica di x^n e di e^x (spesso è più facile calcolare la derivata logaritmica invece che la derivata classica). Calcolare la derivata logaritmica di $\frac{e^x \arctan(x) \sin(x)}{x^4 \ln(x)}$. Da essa ricavare la derivata classica.
16. ☆☆☆ Sia dato un tronco di cono di un materiale di resistività ρ . I raggi sono rispettivamente a e b con $a \geq b$ e l'altezza è h . Qual è la resistenza ai capi dell'oggetto? (Nota importante: la soluzione richiesta deve essere valida per $b \approx a$. Discutere sul perché quando a è sensibilmente più grande di b , la soluzione data in precedenza non funziona.)
17. ☆☆☆ Calcolate la derivata di $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e di $\vec{a} \times \vec{b}$.
18. ☆☆☆★ Usare la formula di De Moivre, e in generale i numeri complessi, per dimostrare le seguenti formule trigonometriche. *Consigliamo di svolgere quest'esercizio dopo aver visto l'esercizio 21.*
- (i) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$
 - (ii) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$
 - (iii) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$
 - (iv) $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot(\alpha) \cot(\beta) - 1}{\cot(\beta) + \cot(\alpha)}$
 - (v) $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
 - (vi) $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
 - (vii) $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$
 - (viii) $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$
 - (ix) $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

$$(x) \quad 1 + 2 \cos(x) + 2 \cos(2x) + 2 \cos(3x) + \dots + 2 \cos(nx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

$$(xi) \quad \sin^3(\alpha) \text{ in funzione di } \sin(\alpha), \sin(2\alpha), \sin(3\alpha), \dots$$

19. Siano f_1, \dots, f_n funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} derivabili. Qual è la derivata di $\prod_{i=1}^n f_i = f_1 \cdots f_n$?

9.2 ODE

20. ☆ Verificare che, detta x un'incognita reale, $\forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall w, z \in \mathbb{C}$, $w e^{i\omega x} + z e^{-i\omega x}$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' = -\omega^2 y$$

21. ☆ Dimostrate, usando quanto ricavato nel paragrafo 5.2.2 della lezione, che

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Queste definizioni di seno e coseno potranno poi esservi utili per dimostrare in maniera più semplice alcune identità goniometriche... e non solo! Qual è la relazione tra $\sin x$ e $\sinh x$?

22. Risolvi con una serie di potenze attorno a $x = 0$ l'ODE

$$y'' + xy = 0.$$

23. ☆☆☆ Risolvere l'ODE

$$yy' = x(4 - y^2)$$

(Suggerimento: usare la separazione delle variabili)

24. ☆☆☆★ Che equazione ha una *Cicloide*? (traiettoria di un punto sul cerchione di una ruota di raggio R) Quale ODE risolve la Cicloide (Soluzione: $y' = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}$)?

9.3 Volumetti Infinitesimi

25. ☆☆☆ *Formule di Pappo* Vediamo i Teoremi di Pappo. Il primo afferma che la superficie di una superficie di rotazione (ottenuta ruotando la figura bidimensionale di contorno lungo L intorno ad un asse che non interseca la figura) è uguale alla lunghezza L per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè $2\pi R$, con R distanza del baricentro del contorno dall'asse di rotazione. Il secondo afferma che il volume di un volume di rotazione (ottenuto ruotando la figura bidimensionale di area S intorno ad un asse che non interseca la figura) è uguale all'area S per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè $2\pi R$, con R raggio del baricentro della superficie dall'asse di rotazione.
- (i) Dire perché i due teoremi sono veri, pensando a quale superficie è generata dalla rotazione di un segmento $d\ell$ e a quale volume è generato dalla rotazione di una superficie ds
 - (ii) Trovare superficie e volume di un toro
 - (iii) Trovare il volume di un toro a sezione rettangolare.
26. ☆☆☆★★ Trova la formula del raggio di curvatura nel punto (x_0, y_0) della funzione $y = f(x)$ in funzione di y, y', y'' .
27. ☆☆☆★ Il *momento d'inerzia* è definito come $I_0 = \int \rho(\vec{r})r^2 dV$ dove \vec{r} è il vettore che punta il volumetto dV , ρ è la densità e r^2 è la distanza dall'asse attorno a cui avviene la rotazione. Calcolare il momento d'inerzia di qualunque cosa. Esempi: sfera, guscio sferico, lastra rettangolare di spessore trascurabile, parallelepipedo a basi rettangolari, asta sottile rispetto al centro, asta sottile rispetto a un estremo, cono rispetto all'asse.

9.4 Ordini e Limiti

28. ☆☆☆ Data $y^5 - y = x$ calcolare fino al quart'ordine non banale $y(x)$.
(Soluzione: $y \approx -x - x^5 - 5x^9 - 35x^{13}$)
29. ☆☆☆ Calcolare al sesto ordine $e^{x^2+\alpha x}$ in α .
30. ☆☆☆ Calcolare al second'ordine $\frac{1}{\sqrt{1-2x \cos \theta + x^2}}$ in x .
31. ☆☆☆ Calcolare se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \log(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}}$$

32. ☆☆☆ Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$
33. ☆☆☆ Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1 - \sqrt{1+x}} \right)$
34. ☆☆☆ Trovare l'espansione in Taylor dell'arcoseno, sapendo la sua derivata.
35. ☆☆☆ Se $1 \gg \alpha \gg \beta$, ha più senso approssimare $1 + \alpha + \beta$ al primo ordine in α o al primo ordine in β ?

9.5 Fisica

36. ☆☆☆ Nello spazio sono poste una carica $-q$ nell'origine e una carica $+q$ nel punto di coordinate $(0, 0, d) = \vec{d}$. Trovare il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ in un punto \vec{r} con $d \ll r$, al prim'ordine in \vec{d} .
37. ☆☆☆ Ad una certa ora del mattino inizia a nevicare, e a mezzogiorno uno spalaneve parte per pulire le strade. La neve continua a cadere con intensità costante. Si sa che la velocità con cui procede lo spazzaneve è inversamente proporzionale all'altezza della neve. Nelle prime due ore di lavoro lo spazzaneve riesce a pulire 4 km di strada. Nelle due ore successive invece se ne liberano solo 2 km. A che ora ha iniziato a nevicare?
38. In presenza di gravità e di una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, una particella di massa m viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale di modulo v_0 . Determinare la massima altezza raggiunta rispetto al punto di partenza.
39. ★★★ Ho un campo elettrico \vec{E} e un campo magnetico \vec{B} ortogonali. Una particella di carica q parte da ferma e su di essa agisce la forza elettrica $\vec{F}_E = q\vec{E}$ e la forza di Lorentz $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$. Che forma assume la traiettoria? (*Soluzione*: è una Cicloide, basta saper risolvere la ODE $y'' = -y + c$)
40. ☆☆☆ Una corda lunga l di massa m è distesa orizzontalmente su un tavolo eccetto per l'estremità che pende verticalmente per una lunghezza x_0 . In presenza di gravità, come evolve il sistema?
41. Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica k) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = at$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0$ s in modo tale che la massa si

muova di moto uniforme? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto.

42. Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica k) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t^2$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0$ s in modo tale che la massa si muova di moto uniformemente accelerato? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto.
43. ★ Un punto materiale si muove su una guida parabolica di equazione $y = -ax^2$. È possibile che il punto si stacchi dalla guida? (*Suggerimento*: usare la formula per il raggio di curvatura e la conservazione dell'energia).
44. ☆☆☆★ Una scodella a forma di parallelepipedo di massa M e sezione S può muoversi liberamente su un piano orizzontale senza attrito. Su di essa cade della pioggia: ciascuna goccia all'arrivo sulla scodella ha una velocità orizzontale $V_x > 0$ e una verticale $V_z < 0$. Inoltre la massa di acqua per unità di tempo che arriva su una superficie S fissa sul terreno è costante e vale Γ . Supponendo che la pioggia raccolta dalla scodella rimanga in quiete rispetto ad essa, studiarne il moto. Trascurare l'effetto dell'urto della pioggia sulle superfici laterali della scodella. Trovare la traiettoria descritta dalla scodella in funzione di costanti che dipendono dalle condizioni iniziali.
45. Un proiettile di massa m viene lanciato da terra con una velocità iniziale di modulo v_0 che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. Oltre a un campo di gravità costante è presente una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$. Trovare l'equazione esplicita della traiettoria, e discutere il limite nel quale si può considerare "piccolo" l'attrito, dicendo in modo preciso che cosa si intende con questo.
46. ☆★ L'equipaggio di un razzo inizialmente fermo vuole aumentare la propria velocità espellendo una massa ηm di gas. La velocità del gas al momento dell'emissione relativa al razzo è sempre $-v_0$. La massa iniziale di quest'ultimo è m e chiaramente $0 \leq \eta < 1$. Indicheremo con $\mu(t)$ la massa espulsa al tempo t . Calcolare la velocità finale del razzo nei due casi seguenti:
- (i) tutta la massa viene espulsa istantaneamente a $t = 0$ s;
 - (ii) la massa espulsa per unità di tempo è costante, e viene espulsa tutta in un tempo τ .

Dette $v_f^{(1)}$ e $v_f^{(2)}$ le velocità finali del razzo nel primo e nel secondo caso, stabilire se è vero che $\lim_{\tau \rightarrow 0} v_f^{(2)} = v_f^{(1)}$.

47. ☆☆☆★ Consideriamo un oscillatore armonico forzato, senza attrito, con una forzante $F = F_0 \cos \omega t$, e sia ω_0 la frequenza naturale dell'oscillatore. Come ci si aspetta che sia la soluzione, qualitativamente? Claimare la soluzione e verificare che soddisfa l'equazione differenziale.
48. ☆ Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(v) = -bv^2$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è $v_0 > 0$. Trovare $x(t)$.
49. ☆ Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(x) = -kx$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è v_0 . Trovare $x(t)$.
50. ☆ Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(x) = +kx$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è v_0 . Trovare $x(t)$.
51. ☆ Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(t) = F_0 e^{-bt}$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è 0 m s^{-1} . Trovare $x(t)$.
52. ☆☆☆ Un razzo di massa m e a velocità v ha ugelli con velocità di scarico pari a u . Trovare l'equazione del razzo che mette in relazione la massa di carburante consumata e il Δv . Trovare la massa corrispondente a $\Delta v = 3u$.
53. ☆☆☆★ *Strato di ghiaccio su un lago* Supponendo che la temperatura dell'aria sulla superficie di un lago ghiacciato rimanga costantemente pari a $-5,2$ gradi centigradi per 60 giorni, si formuli un modello per descrivere la rapidità con cui cresce lo spessore del ghiaccio a partire dal suo valore iniziale $h_0 = 25 \text{ cm}$. Sapendo, in particolare, che dopo 12 giorni si misura uno spessore di 37 cm e dopo 21 giorni uno spessore di 44 cm , si stimi lo spessore h_f raggiunto dal ghiaccio dopo 60 giorni. (SNS 2015 1).

9.6 Derivate e Integrali

54. ☆☆☆★ Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che è continua su tutto \mathbb{R} e trovare il sottoinsieme di \mathbb{R} su cui è derivabile. Ripetere con

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

55. a) Calcolare $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$.
(Suggerimento: dove avete già visto questa espressione?)
 b) Calcolare $\int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dx}{1+x^2}$. Il risultato varia al variare di α ?

56. ☆☆☆ Usare l'integrazione per parti per dimostrare l'utile formula ricorsiva

$$f(n) := \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} \theta \, d\theta.$$

Dimostrare che funziona anche con i seni al posto dei coseni e anche integrando da 0 a π anziché da 0 a $\pi/2$. Calcolare $f(8)$. Calcolare poi $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta \, d\theta$. *(Suggerimento: usare de Moivre)*

57. ☆☆☆ Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$.
(Suggerimento: ricondursi a $(-1/2)!$ con un cambio di variabili)
58. ☆☆☆ Scrivere $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ in funzione di $t = \tan(\frac{\alpha}{2})$. Questa è la sostituzione che permette di risolvere molti integrali trigonometrici.
59. ☆☆☆★★ A volte, invece, serve trasformare integrali polinomiali o con radici quadrate in integrali trigonometrici in seni e coseni (o seni e coseni iperbolici). Ad esempio, cosa vi ricordano i seguenti integrali?, quanto valgono?

(i) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$

(ii) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}$

(iii) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$

(iv) $\int \frac{du}{\sqrt{-u^2-a^2}}$

(v) $\int \frac{du}{a^2+u^2}$

(vi) $\int \frac{du}{a^2-u^2}$

10 Ringraziamenti

Ringraziamo tutti quelli che hanno contribuito alla stesura delle dispense degli anni scorsi, su cui questa si basa.