

Modulo di Analisi avanzato

Luca Vantaggio *

5 febbraio 2024

Sommario

La lezione del secondo livello si prefigge i seguenti due obiettivi: far acquisire familiarità con il calcolo in più variabili e rivedere e approfondire le equazioni differenziali ordinarie.

Nello specifico, nella prima parte della lezione verranno introdotte le nozioni di gradiente di una funzione scalare e di derivata di una curva. Se ne descriveranno l'intuizione e le proprietà attraverso immagini ed esempi tratti dalla fisica. Successivamente verranno introdotte le nozioni di integrale di linea, di superficie e di volume.

Nella seconda parte della lezione si parlerà di equazioni differenziali ordinarie. In primis si vedranno delle tecniche standard per risolverle esattamente ove possibile. Secondariamente ci si soffermerà su aspetti di carattere qualitativo utili per la comprensione della fisica.

*luca.vantaggio@sns.it

Indice

1	Calcolo Differenziale	3
1.1	Gradiente di una funzione scalare	3
1.2	Derivata di una curva	7
1.2.1	Il vettore velocità	9
1.2.2	La velocità scalare	9
1.2.3	Guardare componente per componente	9
1.2.4	Risultati	9
1.3	Chain Rule	10
1.4	Caso generale	12
2	Calcolo Integrale	12
2.1	Integrali di linea	12
2.2	Integrali di superficie	13
2.3	Integrali di volume	17
3	Equazioni differenziali ordinarie	17
3.1	Equazioni differenziali alle variabili separabili	17
3.1.1	Metodo classico	18
3.1.2	Con la chain rule	18
3.1.3	Con i campi conservativi	18
3.1.4	Conclusioni	19
3.2	Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti	20
3.3	Applicazione: sistemi meccanici con potenziali omogenei	22
4	Appendice: connessioni fra calcolo differenziale e calcolo integrale	27
4.1	Teorema della divergenza	27
4.2	Teorema di Stokes	30
5	Esercizi	33

1 Calcolo Differenziale

1.1 Gradiente di una funzione scalare

In questa sezione ci occuperemo di generalizzare la nozione di *derivata* al caso di funzioni $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Per semplicità considereremo solo le funzioni $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Queste hanno infatti il pregio di poter essere rappresentate con il disegno del loro *grafico*, ovvero l'insieme delle terne $(x, y, V(x, y))$ al variare di $x, y \in \mathbb{R}$. Rappresentiamone qualcuna. Procedendo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso troviamo $z = x + y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \cos x$, $z = xe^{-y^2}$.

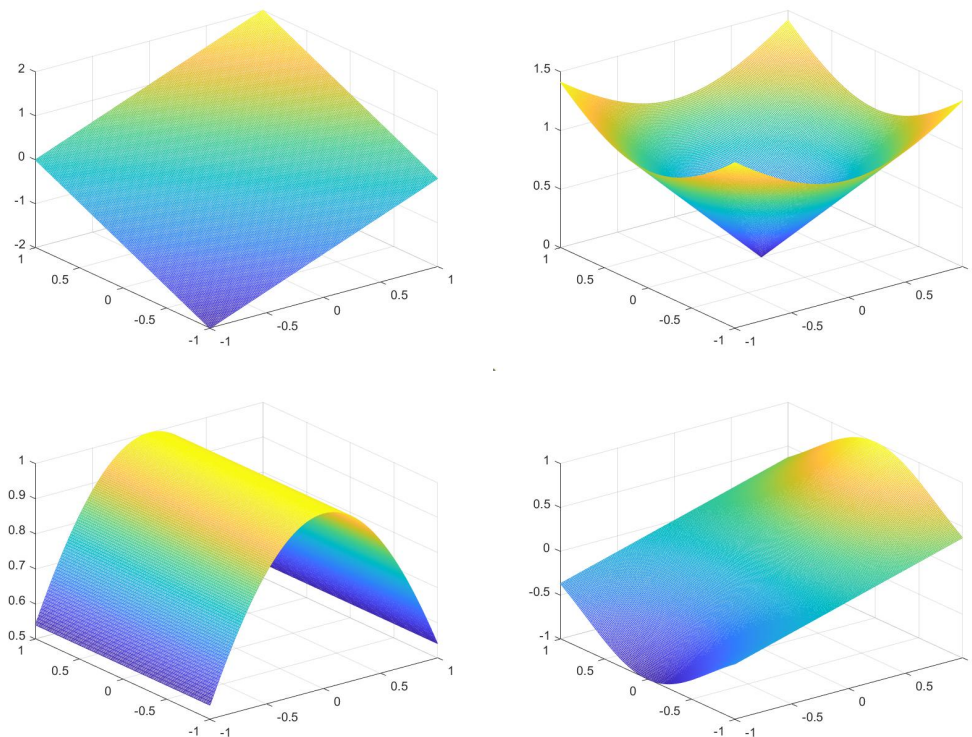


Figura 1: Esempi di grafici di funzioni.

Come per il calcolo in una variabile, vediamo cosa si ottiene se proviamo a calcolare il primo ordine di $dV = dV(x, y) = V(x + dx, y + dy) - V(x, y)$:

- per $V(x, y) = x + y$ abbiamo $dV = dx + dy$.

- per $V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ abbiamo

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{(x + dx)^2 + (y + dy)^2} - \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2x dx + 2y dy} - \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \end{aligned}$$

dove evidentemente ci sono dei problemi se $(x, y) = (0, 0)$. Ci torneremo in seguito.

- per $V(x, y) = \cos x$ abbiamo $dV = -\sin x dx$.
- per $V(x, y) = xe^{-y^2}$ abbiamo

$$\begin{aligned} dV &= (x + dx)e^{-(y+dy)^2} - xe^{-y^2} = (x + dx)e^{-y^2-2y dy} - xe^{-y^2} = \\ &= (x+dx)e^{-y^2}(1-2y dy) - xe^{-y^2} = xe^{-y^2} + e^{-y^2} dx - 2xye^{-y^2} dy - xe^{-y^2} = \\ &= e^{-y^2} dx - 2xye^{-y^2} dy \end{aligned}$$

Cosa abbiamo imparato da questi esempi? Abbiamo scoperto che generalmente una funzione $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ammette *un'espansione al primo ordine* attorno al punto (x, y) del tipo

$$dV = a(x, y) dx + b(x, y) dy \quad (1)$$

dove $a(x, y), b(x, y)$ sono dei numeri che in generale dipendono dal punto (x, y) . Come abbiamo ricavato in generale questi numeri $a(x, y)$ e $b(x, y)$? Essenzialmente abbiamo usato tutte le espansioni al primo ordine in una variabile che conoscevamo e lì dove le operazioni ci generavano dei termini $(dx)^2$ o $(dy)^2$ o ancora $dx dy$ li abbiamo buttati via. In effetti se avessimo considerato l'espressione $V(x + dx, y) - V(x, y)$ avremmo ottenuto

$$V(x + dx, y) - V(x, y) = a(x, y) dx \quad (2)$$

che a posteriori torna perché corrisponde a considerare $dy = 0$ in (1). Di conseguenza sappiamo calcolare $a(x, y)$, visto che

$$V(x + dx, y) - V(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad (3)$$

dove $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y)$ è la derivata di V rispetto a x *tenendo fissata* y , altresì detta *derivata parziale di V rispetto a x* . Eguagliando (2) e (3) si ottiene $a(x, y) dx = \frac{\partial V}{\partial x} dx$ e di conseguenza $a(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}$.

Teorema 1.1. *Sia $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare. Allora attorno ad ogni suo punto (x_1, x_2, \dots, x_n) ammette un'espansione al primo ordine del tipo*

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n \quad (4)$$

dove $\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ denota la derivata parziale i -esima, ovvero la derivata di V nella variabile x_i a fisse le altre.

L'interpretazione grafica dell'espansione (1) è che in un intorno del punto (x, y) la funzione V è ben approssimata da un piano, detto *piano tangente* al grafico. Il problema che avevamo riscontrato con la funzione $V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $(0, 0)$ si spiega geometricamente con l'assenza di un piano tangente, matematicamente con la non esistenza delle derivate parziali nell'origine.

Osserviamo ora che la relazione (4) si può riscrivere in termini di un *prodotto scalare* come

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \cdot ds = \nabla V \cdot ds \quad (5)$$

dove abbiamo posto $ds = (dx, dy)$ lo spostamento vettoriale infinitesimo, $\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)$ e per semplicità ci siamo ristretti al caso $n = 2$. Il vettore $\nabla V = \nabla V(x, y)$ è detto *gradiente* della funzione V in (x, y) . Dalla relazione (5) si ricava equivalentemente che

$$dV = |\nabla V| ds \cos \theta$$

dove θ è l'angolo formato da ∇V e ds . Una conseguenza di questo fatto è che ∇V punta nella direzione di massima crescita della funzione V . Un'altra conseguenza è che il primo ordine di espansione di V si annulla solo per $\theta = 90^\circ$, ovvero il gradiente è *ortogonale* alle direzioni lungo cui V è stabile al primo ordine.

Quanto visto è sufficiente per giustificare molti risultati matematici elementari utili per la fisica. Vediamone uno per esempio.

Esempio 1.1 (Campi conservativi). Sia \mathbf{F} un campo di forze conservativo. Sappiamo che per un tale campo di forze è possibile parlare di un *potenziale*, ossia una funzione $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni percorso γ

$$L = -\Delta V \quad (6)$$

dove L è il lavoro fatto dal campo \mathbf{F} lungo il percorso γ . Per percorsi infinitesimali la precedente relazione diventa

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = dL = -dV = -\nabla V \cdot d\mathbf{s}$$

ricavando così l'identità $\mathbf{F} = -\nabla V$. Abbiamo quindi verificato che un campo conservativo è sempre il gradiente di una funzione scalare. E proprio poiché il gradiente di una funzione è ortogonale alle direzioni di stabilità al primo ordine, le superfici equipotenziali devono risultare ortogonali a \mathbf{F} in ogni loro punto.

Con un minimo di conoscenza del calcolo integrale, sarebbe immediato verificare che

- un campo è conservativo *se e solo se* è il gradiente di una funzione scalare;
- una superficie connessa è equipotenziale *se e solo se* è in ogni punto ortogonale al campo gradiente.

Come per le funzioni in una variabile, ha senso parlare di *punti critici* per una funzione $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Questi sono i punti (x, y) per cui $\nabla V(x, y) = 0$, ovvero quei punti per cui il corrispondente piano tangente è parallelo al piano xy . Sono questi i punti in cui possiamo avere una qualche speranza di trovare dei massimi e minimi locali per la funzione V . Come al solito un punto critico può non essere né di massimo né di minimo. Come per le funzioni in una variabile, per discriminare fra i vari scenari possibili, è spesso sufficiente espandere al secondo ordine e studiare il segno dello scarto. Espandiamo

dunque dV al secondo ordine nelle variabili x, y .

$$\begin{aligned}
& V(x + dx, y + dy) - V(x, y) \\
&= V(x + dx, y + dy) - V(x + dx, y) + V(x + dx, y) - V(x, y) \\
&= \frac{\partial V}{\partial y}(x + dx, y) dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x, y) dy^2 + \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, y) dx^2 \\
&= \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) dy + \frac{\partial \partial V}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x, y) dy^2 + \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, y) dx^2 \\
&= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial \partial V}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy^2 \right)
\end{aligned}$$

Poiché un'espansione analoga deve valere scambiando il ruolo delle variabili x, y , abbiamo verificato che $\frac{\partial \partial V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \partial V}{\partial y \partial x}$.

Per discriminare se un punto critico è di massimo, di minimo o nessuno dei precedenti, come nel caso unidimensionale bisogna studiare il segno del primo ordine non nullo. Cominciando studiando il segno del secondo ordine. Questo dipende dal segno del seguente polinomio di secondo grado:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} t^2 + 2 \frac{\partial \partial V}{\partial x \partial y} t + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

In particolare avremo un punto di minimo se $\Delta < 0$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$, un punto di massimo se $\Delta < 0$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0$, i cosiddetti punti di sella se $\Delta > 0$. Se $\Delta = 0$ o se $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$ è necessario uno studio più approfondito, guardando anche gli ordini successivi.

Nelle figura 2 troviamo riassunti i quattro casi. Le funzioni rappresentate sono nell'ordine $z = -x^2 - 2y^2, z = x^2 + 2y^2, z = x^2 - 2y^2, z = x^3 - 2y^3$.

1.2 Derivata di una curva

In questa sezione ci occuperemo di generalizzare la nozione di derivata al caso di funzioni $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ovvero le cosiddette curve. Supporremo per semplicità che $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Potremmo immaginare che γ descriva la legge oraria di una particella newtoniana: in quest'ottica la rappresentazione di γ come una traiettoria con delle frecce che ne indichino il verso di percorrenza è più che sufficiente. Proprio alla luce di questa interpretazione meccanica diremo che γ è funzione della variabile indipendente t che evochi la nozione di *tempo*.

Come nel caso in una variabile, siamo interessati ad espandere la funzione γ al primo ordine di dt . Ci sono più modi matematicamente equivalenti di arrivare alle medesime conclusioni.

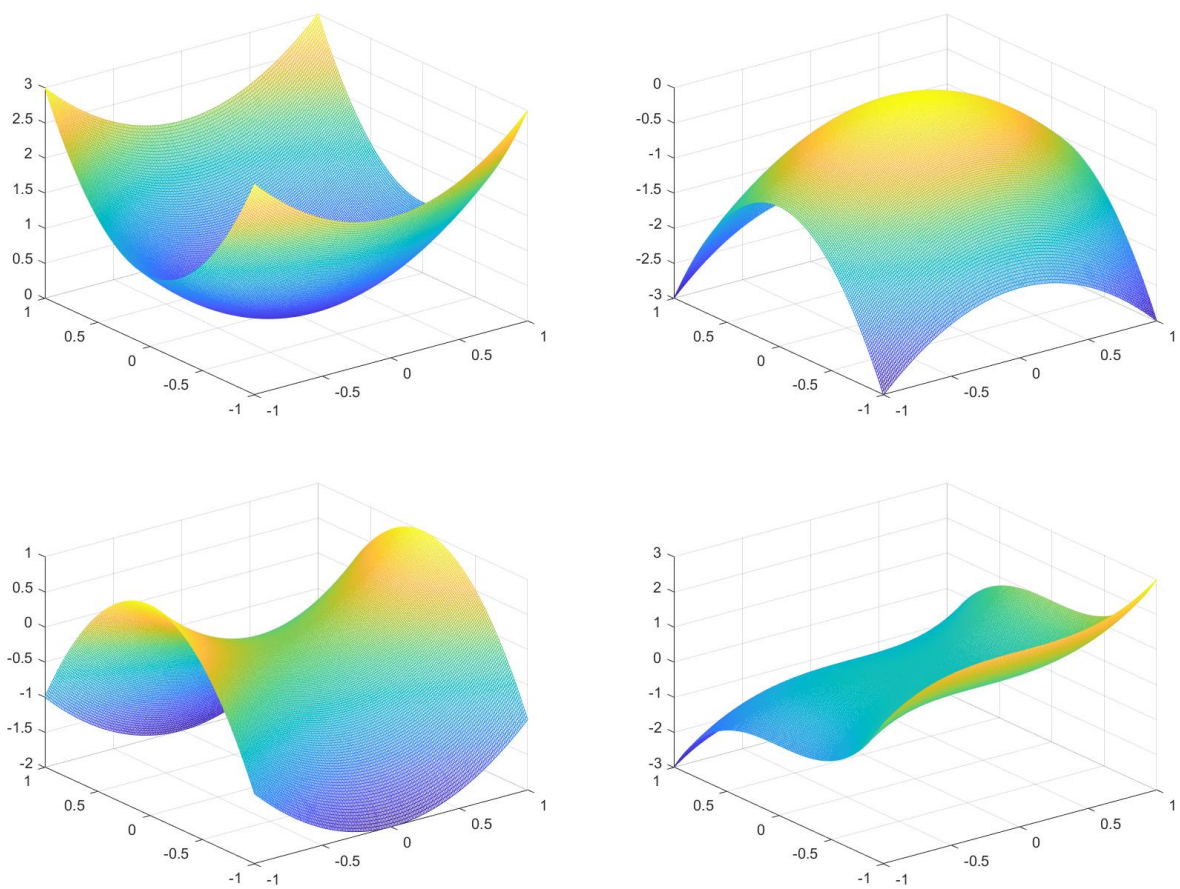


Figura 2: Procedendo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso, troviamo delle funzioni con punto critico nell'origine di tipo minimo, massimo, sella e nessuno dei precedenti.

1.2.1 Il vettore velocità

Un primo modo consiste nel farsi guidare dall'intuizione fisica: se γ descrive la legge oraria di una particella, può risultare abbastanza chiaro che

$$d\gamma = \mathbf{v} dt$$

dove $d\gamma = d\gamma(t) = \gamma(t + dt) - \gamma(t)$ è lo spostamento vettoriale infinitesimo lungo la curva e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ è la velocità istantanea della particella all'istante t .

1.2.2 La velocità scalare

Un secondo modo per arrivare allo stesso tipo di espansione è osservare che in ogni punto t una curva civile ammette un versore tangente $\hat{\mathbf{u}}$ che punta nella direzione del moto e che

$$d\gamma = \frac{d\ell}{dt} \hat{\mathbf{u}} dt$$

dove $\frac{d\ell}{dt} = \frac{d\ell}{dt}(t)$ è la velocità scalare della particella nell'istante t .

1.2.3 Guardare componente per componente

L'ultimo modo che presentiamo per ottenere un'espansione al primo ordine della funzione γ è vederla come una terna di funzioni $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di una variabile a valori reali, ovvero scriveremo che

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

e quindi

$$d\gamma = (d\gamma_1, d\gamma_2, d\gamma_3) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right) dt$$

1.2.4 Risultati

L'equivalenza dei metodi presentati ci conduce alle seguenti identità:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\ell}{dt} \hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right)$$

Per comodità di notazione si suole scrivere $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$. L'ultimo dei tre metodi si basa sul fatto che la variazione infinitesima di γ si esprime in termini delle variazioni di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Di conseguenza è abbastanza chiaro che per le curve vale Taylor all'ordine n nella sua forma usuale, ovvero

$$d\gamma = \dot{\gamma} dt + \frac{1}{2} \ddot{\gamma} (dt)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n \gamma}{dt^n} (dt)^n$$

Vediamo ora un esempio molto semplice dove intervengono tutti i concetti appena visti.

Esempio 1.2 (Moto circolare uniforme). Sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$\gamma(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t))$$

la legge oraria di un moto circolare uniforme di frequenza ω e raggio r . Determiniamo con considerazioni geometriche il vettore velocità. A meno di rotazione possiamo supporre che $t = 0$. In questo caso

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &= (r \cos(\omega dt), r \sin(\omega dt)) - (r, 0) = (r (\cos(\omega dt) - 1), r \sin(\omega dt)) = \\ &= (0, r\omega dt) = r\omega(0, 1) dt \end{aligned}$$

Nel caso generale avremo che $\mathbf{v}(t) = r\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$, in quanto $\|v(t)\| = r\omega$ e $\hat{\mathbf{v}}(t)$ deve essere un versore ortogonale a $\gamma(t)$ e $\hat{\gamma}(t) \times \hat{\mathbf{v}}(t) = \hat{\mathbf{z}}$ (se li vediamo come vettori sul piano xy in \mathbb{R}^3). Chiaramente la velocità scalare è la stessa in ogni istante di tempo t . Se la denotiamo con \dot{s} , risulta che

$$\dot{s} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \dot{s}T = 2\pi r$$

da cui segue che $\dot{s} = r\omega$. Inoltre $\hat{\mathbf{v}}(t)$ è in ogni istante tangente alla traiettoria. Notiamo infine che le componenti del vettore $\mathbf{v}(t)$ sono le derivate delle rispettive componenti $\gamma(t)$.

1.3 Chain Rule

In questa sezione ci occupiamo di generalizzare la regola della derivata composta nel suo caso più semplice. Sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare. A titolo di esempio possiamo pensare che γ sia la legge oraria di una particella e V l'energia potenziale gravitazionale. Ci chiediamo quale sia la derivata di $V(\gamma(t))$. Analogamente a quanto fatto nelle sezioni precedenti, interpretiamo questo problema come *determiniamo l'espansione al primo ordine di $V(\gamma(t))$* . La risposta è un facile conto:

$$dV(t) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot d\mathbf{s}(t) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt} dt = \nabla V \cdot \dot{\gamma} dt$$

da cui otteniamo $\frac{dV(\gamma(t))}{dt} = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}$, la cosiddetta chain rule. Quanto appena trovato ha una semplice interpretazione fisica. Infatti sappiamo che

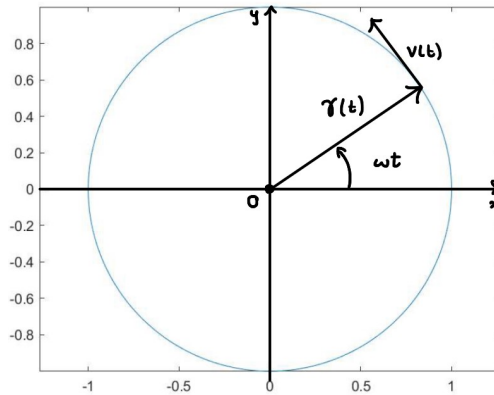


Figura 3: Moto circolare uniforme.

$dV = -dL = -\mathbf{F} \cdot d\gamma = \nabla V \cdot \dot{\gamma} dt$ dove dL è il lavoro infinitesimo fatto dalla forza di gravità \mathbf{F} . In definitiva abbiamo scoperto che

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (7)$$

Perché abbiamo scritto $dV(t)$ e non $dV(\gamma(t))$? Da un punto di vista matematico la notazione usata è impropria e sarebbe più corretto scrivere $dV(\gamma(t))$. Da un punto di vista fisico invece ha un significato ben preciso. Noi ci stiamo ponendo il problema di capire come varia l'energia potenziale della nostra particella al variare del tempo t . Chiaramente quello che vorremmo chiamare $V(t)$ corrisponde formalmente alla funzione V valutata nel punto $\gamma(t)$, però questa precisione formale non deve sviarci dalla comprensione della chain rule. Del resto, la filosofia è la stessa di quando scriviamo

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (8)$$

per funzioni di una variabile. Siamo ben consapevoli che la funzione che noi deriviamo rispetto alla y è *matematicamente* diversa da quella che deriviamo per la x . Il senso è che però leggiamo la y come un'altra variabile naturale in cui una stessa quantità fisica z (quale un'energia, una distanza, ecc.) può essere espressa, e con quest'ottica diamo il giusto significato alle derivate al membro di destra della (8).

1.4 Caso generale

In questa sezione discutiamo il caso generale di funzioni $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Il problema è sempre quello di determinare un'espansione al primo ordine della funzione F rispetto alle variabili x_1, x_2, \dots, x_n . Come nel caso delle curve, un'idea che funziona è quella di scrivere

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$$

e di conseguenza

$$dF = (dF_1, dF_2, \dots, dF_m)$$

Se denotiamo con $ds = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, per quanto visto sulle funzioni scalari possiamo scrivere

$$dF = (\nabla F_1 \cdot ds, \nabla F_2 \cdot ds, \dots, \nabla F_m \cdot ds)$$

Ricaviamo ora la chain rule in generale: sia $G: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$, con variabili indipendenti y_1, y_2, \dots, y_l . Se lavoriamo sulle componenti del campo F otteniamo

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_k}$$

dove abbiamo usato l'espressione (7).

2 Calcolo Integrale

2.1 Integrali di linea

In questa sezione ci occupiamo di generalizzare la nozione di integrale al caso di curve. Siamo interessati a calcolare l'integrale di una funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ lungo una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, mantenendo inalterata l'intuizione di passaggio al continuo dell'operazione di somma. L'operazione matematica a cui siamo interessati è

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

Non abbiamo fatto altro che scrivere $ds = \frac{ds}{dt} dt = \|\dot{\gamma}(t)\| dt$. In maniera analoga si definisce il lavoro di un campo vettoriale $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lungo la curva γ : esso corrisponde a

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt$$

Semplicemente abbiamo scritto $ds = \frac{ds}{dt} dt = \dot{\gamma} dt$. Vediamo degli esempi.

Esempio 2.1 (Lunghezza di una curva). Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva e supponiamo di volerne calcolare la lunghezza. Questa non sarà altro che

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

ovvero l'integrale di linea della funzione identicamente 1. Ad esempio se $\gamma(t) = (t, f(t), 0)$ è un grafico di una funzione f , abbiamo trovato che la lunghezza di γ è $\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$.

Esempio 2.2 (Teorema della forze vive). Sia $\mathbf{r}: [t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la legge oraria di un corpo di massa m per i tempi $t_0 \leq t' \leq t$. Da $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ si deduce che

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\gamma(t')) \cdot \dot{\gamma}(t') dt' = \int_{t_0}^t m\ddot{\gamma}(t') \cdot \dot{\gamma}(t') dt'$$

Poiché $\frac{d}{dt'} \|\dot{\gamma}(t')\|^2 = \frac{d}{dt'} (\dot{\gamma}(t') \cdot \dot{\gamma}(t')) = 2\ddot{\gamma}(t') \cdot \dot{\gamma}(t')$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la regola della derivata del prodotto, ne segue che

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} \|\dot{\gamma}(t')\|^2 dt' = \frac{1}{2} m \|\dot{\gamma}(t)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\dot{\gamma}(t_0)\|^2$$

Se scriviamo $v = \|\dot{\gamma}(t)\|$ e $v_0 = \|\dot{\gamma}(t_0)\|$ otteniamo la più caratteristica

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

ovvero il teorema delle forze vive.

2.2 Integrali di superficie

In questa sezione ci occupiamo di generalizzare la nozione di integrale al caso di superfici. Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie e supponiamo di voler integrare una funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, nuovamente mantenendo intatta l'intuizione di passaggio al continuo dell'operazione di somma. L'operazione matematica a

cui siamo interessati è

$$\int_{\Sigma} f \, dS$$

dove dS è l'elemento infinitesimo di area della superficie Σ . Purtroppo per dare un'espressione esplicita e calcolabile dobbiamo fare qualche step in più rispetto al caso degli integrali di linea.

Supponiamo preliminarmente che la nostra superficie sia un certo sottoinsieme D del piano xy . In questo caso l'elemento infinitesimo di area è $dx \, dy$, e quindi l'integrale cercato diventa

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy$$

Immaginiamo ora di quadrettare l'insieme D con una griglia di rettangoli di centro (x_i, y_j) , con lati paralleli ai due assi e di lunghezza Δx_i e Δy_j . Supponiamo che la quadrettatura sia sufficientemente fine da poterci permettere di pensare che la funzione f sia circa costante su ogni quadretto. Allora

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy \approx \sum_{\text{quadretti}} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Per calcolare la somma al membro di destra possiamo prima fare la somma sulle righe e infine sommare i risultati sulle colonne o viceversa. Passando al limite ne deduciamo che

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\int_{D \cap \{x\} \times \mathbb{R}} dy f(x, y) \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\int_{D \cap \mathbb{R} \times \{y\}} dx f(x, y) \right) \end{aligned}$$

Prima di passare al caso generale, vediamo prima un esempio di calcolo di questi integrali, detti anche *integrali doppi*.

Esempio 2.3 (Area del cerchio unitario). Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e calcoliamo $\int_D dS$. Abbiamo essenzialmente due modi per procedere:

- *metodo furbo*: usiamo l'elemento d'area infinitesimo in coordinate polari, ovvero $r \, dr \, d\theta$. Intuitivamente stiamo tassellando il cerchio con tanti "archi" di corone circolari a distanza r e spessore dr . Quindi

$$\int_D dS = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \cdot r = \int_0^1 r \, dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

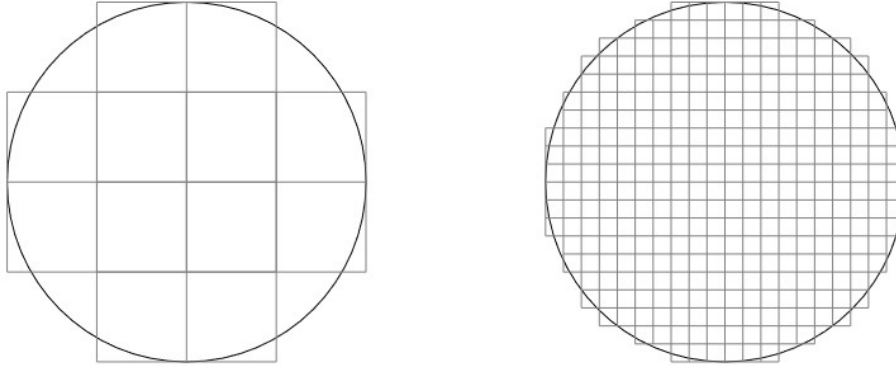


Figura 4: Esempi di quadrettature che ricoprono (parte di) un cerchio.

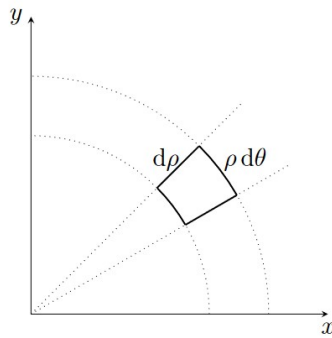


Figura 5: Elemento infinitesimo di area in coordinate polari.

- *metodo non così furbo*: per quanto visto sappiamo che

$$\begin{aligned}
 \int_D dS &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \\
 \int_0^\pi 2\sqrt{1-\sin^2\theta} \cos\theta d\theta &= \int_0^\pi 2\cos^2\theta d\theta = \int_0^\pi 1 + \cos(2\theta) d\theta = \\
 &= \pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = \pi
 \end{aligned}$$

Per calcolare gli integrali di superficie nel caso generale quello che si fa

è ricondursi al calcolo di integrali doppi. Anche se è possibile arrivare alla "ricetta" generale con non troppo sforzo, ci limiteremo a vedere degli esempi dove questa non è necessaria per brevità.

Esempio 2.4 (Calcolo dell'area della superficie laterale di un cilindro). Consideriamo il cilindro C con asse z , altezza h e raggio di base r . Per farlo vengono comode le variabili naturali delle coordinate cilindriche, ovvero ρ, θ, z (in questo caso ρ è costante). L'area della sua superficie laterale sarà

$$\int_{\text{Sup.lat}} dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dz = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \cdot r = 2\pi r h$$

dove abbiamo usato che $dS = r \, d\theta \, dz$.

Esempio 2.5 (Area di una superficie sferica). Calcoliamo l'area di una superficie sferica Σ_r di raggio r . Per farlo vengono comode le variabili naturali delle coordinate sferiche, ovvero r, θ, ϕ (in questo caso r è costante). Questa è

$$\int_{\Sigma_r} dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, r^2 \sin \theta = 4\pi r^2$$

dove abbiamo usato che $dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = r^2 \, d\Omega$. L'elemento infinitesimo di area della sfera unitaria $d\Omega$ è detto *angolo solido*.

Un'altra nozione importante di integrale di superficie è quella di flusso di un campo di vettori \mathbf{F} lungo una superficie Σ . Questo corrisponde a calcolare

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

dove $d\mathbf{S}$ è il vettore di area dS e puntualmente ortogonale alla superficie. Questo è determinato a meno del segno, e quindi il segno dell'integrale dipende dall'orientazione di $d\mathbf{S}$. Convenzionalmente se Σ è una superficie chiusa il vettore $d\mathbf{S}$ è orientato esternamente rispetto al volume racchiuso dalla superficie. Vediamo un esempio.

Esempio 2.6 (Conservazione della carica in forma globale). Sia V una regione di \mathbb{R}^3 racchiusa dalla superficie Σ . Sia $Q(t)$ la quantità di carica racchiusa nel volume V e sia \mathbf{J} la densità di corrente per unità di superficie. Allora la conservazione della carica si esprime dicendo che

$$\dot{Q} + \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ovvero le variazioni di Q sono dovute *sempre e solo* da un flusso netto di cariche attraverso la superficie Σ .

2.3 Integrali di volume

Trattiamo molto brevemente il caso degli integrali di volume. Sia V una porzione di volume in \mathbb{R}^3 e $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Allora l'operazione matematica che stiamo cercando è

$$\int_V f dV$$

dove dV rappresenta l'elemento infinitesimo di volume. In cartesiane si scrive come $dx dy dz$, in cilindriche è $\rho d\rho d\theta dz$ e infine in sferiche è $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. Come nel caso degli integrali doppi gli integrali di volume (detti anche integrali tripli) si possono ricondurre al calcolo di tre integrali innestati in una variabile.

3 Equazioni differenziali ordinarie

3.1 Equazioni differenziali alle variabili separabili

In questa sezione analizziamo in dettaglio un primo caso di equazioni differenziali, le cosiddette *equazioni differenziali alle variabili separabili*. Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e ci poniamo il problema di determinare una funzione $x: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (9)$$

Osserviamo preliminarmente che se $g(x_0) = 0$ allora la funzione $x(t) \equiv x_0$ è soluzione. Di conseguenza ci restringeremo al caso in cui $g(x_0) \neq 0$. Ci sono più modi per procedere.

3.1.1 Metodo classico

Un primo modo consiste nello scrivere

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t) dt$$

Integrando si ottiene

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{g(x')} = \int_{t_0}^t f(t') dt'$$

3.1.2 Con la chain rule

Un secondo modo consiste nel riscrivere l'equazione differenziale come

$$\frac{1}{f(t)g(x)} \cdot \frac{dx}{dt} = 1$$

Adesso facciamo un lavoro di interpretazione. Siano $G(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{g(x')}$ e $\tau(t) = \int_{t_0}^t f(t') dt'$: queste due funzioni ci permettono di vedere il membro di sinistra della precedente equazione come

$$\frac{dG}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = 1$$

ovvero se consideriamo la funzione $h(\tau) = G(x(t(\tau)))$ si ha

$$\frac{dh}{d\tau} = 1$$

cioè $h(\tau) = \tau + h(0) = \tau$, da cui

$$G(x(t)) = \tau(t)$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{g(x')} = \int_{t_0}^t f(t') dt'$$

3.1.3 Con i campi conservativi

Un ultimo modo per dedurre il risultato precedente è scrivere

$$\frac{dx'}{g(x')} - f(t) dt = 0$$

Sia γ il grafico della soluzione dell'equazione differenziale tra t_0 e t . Sappiamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \frac{dx'}{g(x')} - f(t') dt' = \int_{\gamma} \nabla(G(x') - F(t')) \cdot ds = \\ &= G(x(t)) - F(t) - G(x(t_0)) + F(t_0) = G(x(t)) - F(t) \end{aligned}$$

ovvero

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{g(x')} = \int_{t_0}^t f(t') dt'$$

3.1.4 Conclusioni

La relazione che in alcuni casi ci permette di risolvere l'equazione differenziale è

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{g(x')} = \int_{t_0}^t f(t') dt'$$

Vediamo un esempio di equazione differenziale alle variabili separabili.

Esempio 3.1. Consideriamo un oscillatore armonico: l'equazione della conservazione dell'energia si scrive come

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

Restringiamo la ricerca di una soluzione a un intervallo di tempo $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ in cui $\dot{x} \geq 0$. Allora la precedente equazione si riscrive come

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}E - \frac{k}{m}x^2}$$

che è alle variabili separabili. Osserviamo che se il radicando è nullo allora la costante x_0 è soluzione. Tuttavia sappiamo che non è quella che stiamo cercando. Dunque

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}E - \frac{k}{m}x'^2}} = t - t_0$$

Rimane da computare l'integrale al membro di sinistra. Procediamo al calcolo:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}E - \frac{k}{m}x'^2}} &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x'^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \cdot \sqrt{\frac{2E}{k}} \int_{\sqrt{\frac{k}{2E}x_0}}^{\sqrt{\frac{k}{2E}x(t)}} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{k}{2E}x(t)} \right) - \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{k}{2E}x_0} \right) \right) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \left(\cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{k}{2E}x(t)} \right) - \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{k}{2E}x_0} \right) \right) = t - t_0$$

ovvero

$$\sqrt{\frac{k}{2E}x(t)} = \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{k}{2E}x_0} \right) \right)$$

e quindi

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{k}{2E}x_0} \right) \right)$$

A questo punto si potrebbe verificare che la funzione ottenuta è soluzione per ogni istante di tempo t , il che risolve il problema.

3.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

In questa sezione tratteremo brevemente le equazioni differenziali lineari costanti, perlopiù con degli esempi esplicativi.

Un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è un'equazione del tipo

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = f(t)$$

dove gli a_i sono delle costanti e $x^{(i)}$ denota la derivata i -esima rispetto alla variabile temporale t . Essendo un'equazione dell' n -esimo ordine (di derivazione), dobbiamo aspettarci che la soluzione sia unica a patto di specificare i valori di x e delle sue derivate fino alle $(n - 1)$ -esima nell'istante iniziale t_0 .

Se $f(t) \equiv 0$ l'equazione differenziale si dice *omogenea*. Questa ha la proprietà che se x_1, x_2 sono soluzioni allora anche $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ è una soluzione. L'idea vincente è saper fare dei claim sulle soluzioni. Un metodo standard è quello di *guessare* soluzioni esponenziali, ovvero funzioni del tipo $e^{\lambda t}$ con λ possibilmente anche un numero complesso. Troveremo che x risolve l'omogenea se e solo se λ è una radice del polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

Se questo polinomio ha radici *distinte* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ allora tutte le soluzioni si scriveranno come

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

Se invece una radice λ compare in $p(x)$ con molteplicità k avremo le soluzioni $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$. Con questo abbiamo risolto il caso generale per le equazioni differenziali omogenee.

Per le equazioni differenziali non omogenee possiamo notare che è sufficiente conoscere *una* soluzione particolare x_{part} per ricavare tutte le altre. Infatti ogni soluzione si scriverà come $x_{\text{part}} + x_{\text{omog}}$ dove x_{omog} è una qualsiasi soluzione dell'omogenea. A questo punto si tratta di capire come trovare una soluzione particolare. Per far ciò esiste il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, che vedremo con un esempio perché formalizzarlo per bene richiederebbe del lavoro.

Esempio 3.2 (Oscillatore armonico forzato). Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \cos(\alpha t)$$

L'equazione omogenea associata è quella dell'oscillatore armonico, di cui due soluzioni indipendenti sappiamo essere $e^{i\omega t}$ e $e^{-i\omega t}$. Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $x(t) = A(t)e^{i\omega t} + B(t)e^{-i\omega t}$. Chiaramente $A(t)$ e $B(t)$ non possono essere costanti perché altrimenti la funzione scritta sarebbe soluzione dell'omogenea. Deriviamo $x(t)$.

$$\dot{x}(t) = \dot{A}e^{i\omega t} + i\omega A e^{i\omega t} + \dot{B}e^{-i\omega t} - i\omega B e^{-i\omega t}$$

Imponiamo che $\dot{A}e^{i\omega t} + \dot{B}e^{-i\omega t} \equiv 0$, ovvero che anche se A, B non sono costanti si comportino come delle costanti quando deriviamo una volta la funzione $x(t)$. Se deriviamo ulteriormente otteniamo

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= i\omega\dot{A}e^{i\omega t} - \omega^2 A e^{i\omega t} - i\omega\dot{B}e^{-i\omega t} - \omega^2 B e^{-i\omega t} = \\ &= i\omega\dot{A}e^{i\omega t} - i\omega\dot{B}e^{-i\omega t} - \omega^2 x\end{aligned}$$

da cui x sarà soluzione se e solo se vale la condizione ulteriore

$$i\omega\dot{A}e^{i\omega t} - i\omega\dot{B}e^{-i\omega t} = \cos(\alpha t)$$

Abbiamo trovato così le condizioni

$$\begin{cases} \dot{A}e^{i\omega t} + \dot{B}e^{-i\omega t} = 0 \\ i\omega\dot{A}e^{i\omega t} - i\omega\dot{B}e^{-i\omega t} = \cos(\alpha t) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\cos(\alpha t)e^{-i\omega t}}{2i\omega} \\ \dot{B} = \frac{\cos(\alpha t)e^{i\omega t}}{-2i\omega} \end{cases}$$

Determiniamo A e B che risolvano il precedente sistema.

$$A = \int_0^t \frac{\cos(\alpha t')e^{-i\omega t'}}{2i\omega} dt' = \int_0^t \frac{e^{i(\alpha-\omega)t'}}{4i\omega} dt' + \int_0^t \frac{e^{-i(\alpha+\omega)t'}}{4i\omega} dt'$$

e similmente per B . Ora andrebbero distinti i casi in cui $\alpha = \pm\omega$ e $\alpha \neq \pm\omega$, che conducono a risultati diversi negli integrali. Lasciamo al lettore l'onere di portare a termine i conti rimasti.

3.3 Applicazione: sistemi meccanici con potenziali omogenei

In questa sezione ci proponiamo di indagare le proprietà di un sistema meccanico in cui agiscono solo forze di interazione conservative con potenziali omogenei e dello stesso grado di omogeneità. Per semplicità tratteremo solo il caso del moto unidimensionale di una particella, ma tutte le relazioni che scriveremo varranno per moti con un numero arbitrario di gradi di libertà. La nostra semplificazione ci permette di dire che l'intera dinamica può essere

descritta da una sola equazione, ovvero la *conservazione dell'energia*

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + V(x_0) = E \quad (10)$$

a cui andrebbe aggiunta la condizione iniziale sul *segno* di \dot{x}_0 , che non è deducibile dalla precedente equazione. Denotiamo con k il grado di omogeneità del potenziale, ovvero $V(\alpha x) = \alpha^k V(x)$ per $\alpha > 0$. Vista l'omogeneità del potenziale, possiamo chiederci cosa succede se consideriamo il moto di una particella di massa m , posizione iniziale αx_0 e energia meccanica $\alpha^k E$. Denoteremo con $y(t)$ la legge oraria della suddetta particella. Supponiamo inoltre che \dot{x}_0 e \dot{y}_0 abbiano lo stesso segno. L'equazione che dovremo risolvere è

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + V(y) = \alpha^k E$$

Sia $y(t) = \alpha z(t)$ e determiniamo la corrispondente equazione differenziale per la z . Sostituendo nella precedente si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\alpha^2\dot{z}^2 + \alpha^k V(z) &= \alpha^k E \\ \frac{1}{2}m\alpha^{2-k}\dot{z}^2 + V(z) &= E \end{aligned} \quad (11)$$

che somiglia molto alla (10). Osserviamo che se non ci fosse α^{2-k} , visto che $z_0 = x_0$ e \dot{z}_0, \dot{x}_0 hanno lo stesso segno, sapremmo che $z(t) = x(t)$ per ogni istante di tempo t . Quanto fatto basterebbe a dire che se V è un potenziale quadratico allora tutte le orbite sono fra loro omotetiche e hanno lo stesso periodo. Tuttavia possiamo dire molto anche nel caso in cui $k \neq 2$. Infatti per trasformare la (11) nella (10) è sufficiente *manipolare il tempo*. Se poniamo $t = \beta(t' - t_0) + t_0$ otteniamo

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^{2-k}}{\beta^2} \left(\frac{dz}{dt'} \right)^2 + V(z) = E$$

Se poniamo $\beta = \alpha^{1-\frac{1}{2}k}$ otteniamo proprio l'equazione (10) con le medesime condizioni iniziali. Questo significa che

$$y(t) = \alpha x(t') = \alpha x \left(t_0 + \frac{t - t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right)$$

Facciamo una verifica a posteriori di quanto ottenuto.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + V(y) &= \frac{1}{2}m\alpha^2\dot{x}^2 \left(t_0 + \frac{t-t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right) \cdot \frac{1}{\alpha^{2-k}} + \alpha^k V \left(x \left(t_0 + \frac{t-t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right) \right) = \\ &= \alpha^k \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \left(t_0 + \frac{t-t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right) + V \left(x \left(t_0 + \frac{t-t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right) \right) \right] = \alpha^k E \end{aligned}$$

$$y(t_0) = \alpha x_0 = y_0$$

$$\dot{y}(t_0) = \alpha \dot{x} \left(t_0 + \frac{t-t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right) \Big|_{t=t_0} \cdot \frac{1}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} = \alpha^{\frac{1}{2}k} \dot{x}_0 = \dot{y}_0$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che $\dot{y}(t_0)$ e \dot{x}_0 hanno lo stesso segno.

Quanto ottenuto ci dice che le traiettorie $x(t)$ e $y(t)$ sono omotetiche, anche se abbiamo visto che per $k \neq 2$ non è vero che $y(t) = \alpha x(t)$. Possiamo dire di più. Siano L_x, L_y, T_x, T_y delle lunghezze e dei tempi caratteristici dei due moti. Nel caso di una massa m attaccata a una molla possono essere le ampiezze e i periodi. Le relazioni

$$\begin{cases} y(t_0 + \beta \Delta t) = \alpha x(t_0 + \Delta t) \\ \beta = \alpha^{1-\frac{1}{2}k} \end{cases}$$

ci permettono di dedurre le seguenti relazioni

$$\begin{cases} L_y = \alpha L_x \\ T_y = \beta T_x \\ \beta = \alpha^{1-\frac{1}{2}k} \end{cases}$$

e quindi

$$T_y = \beta T_x = \alpha^{1-\frac{1}{2}k} T_x = \left(\frac{L_y}{L_x} \right)^{1-\frac{1}{2}k} T_x$$

$$\frac{T_y}{T_x} = \left(\frac{L_y}{L_x} \right)^{1-\frac{1}{2}k}$$

ovvero possiamo mettere in relazione il *rapporto di similitudine* delle orbite con il rapporto dei periodi (se sono periodiche: in generale dei loro tempi caratteristici). Ad esempio per $k = 2$ si ottiene che i periodi sono uguali, in accordo con l'osservazione che l'ampiezza e la frequenza di oscillazione di

un oscillatore armonico sono meccanicamente indipendenti. Nel caso di un potenziale Newtoniano si ha $k = -1$, ovvero

$$\frac{T_y}{T_x} = \left(\frac{L_y}{L_x} \right)^{\frac{3}{2}}$$

che è un corollario della terza legge di Keplero. Nel caso del moto di un pendolo siamo in presenza di un potenziale con $k = 1$. In tal caso

$$\frac{T_y}{T_x} = \left(\frac{L_y}{L_x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

che è una conseguenza di $\omega = C(\theta_0)\sqrt{\frac{g}{l}}$, dove $C(\theta_0)$ è un'opportuna costante dipendente dalla massima ampiezza angolare θ_0 .

Concludiamo il nostro studio dei potenziali omogenei con il *teorema del viriale*.

Teorema 3.1 (Teorema del viriale). *Nelle ipotesi di omogeneità dei potenziali, se inoltre l'orbita del sistema è limitata nello spazio e le velocità sono limitate, denotati con \bar{V} e \bar{K} le medie dell'energia potenziale e cinetica del sistema, si ha*

$$\bar{V} = \frac{2}{k+2}E \quad \bar{K} = \frac{k}{k+2}E$$

dove E è l'energia meccanica del sistema e k è il grado di omogeneità del potenziale.

Dimostrazione. Come sempre dimostriamo il teorema solo nel caso di un moto unidimensionale. Supporremo inoltre che $V(x) = V_0|x|^k$, per non dover complicare matematicamente la dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità che $t_0 = 0$. Sia $t > 0$ un istante di tempo. Notiamo che

$$\int_0^t \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t') dt' = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)x(t)\Big|_{t'=0}^{t'=t} - \int_0^t \frac{1}{2}m\ddot{x}(t')x(t') dt' \quad (12)$$

La seconda legge di Newton ci dice che $m\ddot{x}(t') = -kV_0|x(t')|^{k-1} \text{sgn}(x(t')) = -kV_0 \frac{|x(t')|^k}{x(t')}$, da cui il secondo integrale nella precedente è

$$\int_0^t \frac{1}{2}m\ddot{x}(t')x(t') dt' = -\frac{k}{2} \int_0^t V_0|x(t')|^k dt' = -\frac{k}{2} \int_0^t V(x(t')) dt' \quad (13)$$

Sostituendo l'espressione ottenuta nell'equazione (13) nell'equazione (12) si ottiene

$$\int_0^t \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t') dt' = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)x(t) \Big|_{t'=0}^{t'=t} + \frac{k}{2} \int_0^t V(x(t')) dt'$$

Di conseguenza dividendo per t ambo i membri e prendendo il limite per $t \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\overline{K} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} m \dot{x}(t)x(t) \Big|_{t'=0}^{t'=t}}{t} + \frac{k}{2} \overline{V}$$

Ma il limite al secondo membro è nullo, visto che le posizioni e le velocità hanno modulo limitato. Abbiamo dunque

$$\overline{K} = \frac{k}{2} \overline{V}$$

Combinando il risultato ottenuto con la conservazione nell'energia si deduce che

$$\overline{V} = \frac{2}{k+2} E \quad \overline{E} = \frac{k}{k+2} E$$

che era quello che si doveva dimostrare. □

4 Appendice: connessioni fra calcolo differenziale e calcolo integrale

4.1 Teorema della divergenza

In questa sezione ci occupiamo di offrire una prima generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori e siano F_x, F_y, F_z le sue componenti, ovvero $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Definiamo la *divergenza* di \mathbf{F} come

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

La notazione sottointende che la divergenza è funzione del punto (x, y, z) in cui la calcoliamo. Il senso della seconda notazione è che pensiamo la divergenza come prodotto scalare tra l'operatore $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ e \mathbf{F} .

Vediamo subito il teorema della divergenza.

Teorema 4.1 (Teorema della divergenza). *Sia \mathbf{F} un campo di vettori e sia V un volume in \mathbb{R}^3 che ha per bordo la superficie chiusa Σ . Risulta che*

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

dove $d\mathbf{S}$ è orientato esternamente rispetto al volume V . Il cerchietto attorno all'integrale sta a ricordare che la superficie Σ su cui integriamo è chiusa.

Dimostrazione. Immaginiamo di tagliare internamente la regione V con una parete Π . Allora V si spezza in due regioni V_1, V_2 con bordi Σ_1, Σ_2 . Verifichiamo che

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (14)$$

Questo segue dal fatto che

$$\oint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma \cap \Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Pi,1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (15)$$

$$\oint_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma \cap \Sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Pi,2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (16)$$

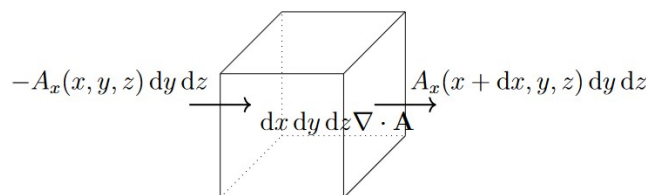


Figura 6: Rappresentazione grafica del conto per un parallelepipedo (in figura il campo di vettori si chiama \mathbf{A})

dove i pedici 1, 2 si riferiscono al fatto che le orientazioni sono diverse. In particolare abbiamo $\int_{\Pi,1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{\Pi,2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Quindi sommando (15) e (16) otteniamo la (14). Alla luce di quanto dimostrato possiamo pensare di tagliare il volume V con tanti piani paralleli ai piani coordinati xy, xz, yz e di sommare gli integrali di flusso lungo i parallelepipedotti ottenuti. Calcoliamo ora il flusso uscente da un parallelepipedo di lati $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ e vertice con componenti minime (x_0, y_0, z_0) . Siano $F_{x,y,\text{inferiore}}, F_{x,y,\text{superiore}}$ le due facce parallele ai piani xy . Il flusso uscente da queste due facce è

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} F_z(x, y, z_0+\Delta z) - F_z(x, y, z_0) &\approx \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta z \approx \\ &\approx \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

dove le approssimazioni sono giustificate dall'assunzione che il parallelepipedo sia sufficientemente piccolo. Infatti in tal caso possiamo sia approssimare le variazioni di F_z con una semplice espansione al primo ordine, sia supporre che $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ sia circa costante nella regione di interesse.

Conti analoghi per le altre facce mostrano che

$$\int_{\text{bordo parallelepipedo}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \approx \nabla \cdot \mathbf{F} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Sommando i contributi ottenuti e passando al limite per partizioni di V sempre più fini si ottiene l'uguaglianza cercata. \square

Vediamo qualche esempio di applicazione del teorema della divergenza.

Esempio 4.1 (Conservazione della carica in forma locale). Sia V un volume in \mathbb{R}^3 e sia Σ il suo bordo. Se denotiamo con \mathbf{J} il vettore densità di corrente per unità di area e con Q la carica totale racchiusa in V , abbiamo visto che

$$\dot{Q} + \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Grazie al teorema della divergenza possiamo riscrivere questa relazione come

$$\dot{Q} + \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = 0$$

Sia $\rho = \rho(x, y, z, t)$ la densità di carica. Allora

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Abbiamo scoperto che per ogni volume V risulta che

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} dV = 0$$

Ne deduciamo l'equazione di continuità, ovvero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Esempio 4.2 (1^a equazione di Maxwell). Sia \mathbf{E} il campo elettrico, V un volume in \mathbb{R}^3 e Σ il suo bordo. Se denotiamo con Q la quantità di carica racchiusa nel volume V , per il teorema di Gauss sappiamo che

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Con conti analoghi ai precedenti deduciamo che per ogni volume V risulta

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = 0$$

Ne deduciamo la 1^a equazione di Maxwell, ovvero

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esempio 4.3 (3^a equazione di Maxwell). La non esistenza di monopoli magnetici si esprime come

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

per ogni superficie chiusa Σ . Usando il teorema della divergenza ne deduciamo in maniera analoga a prima la 3^a equazione di Maxwell, ovvero

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

4.2 Teorema di Stokes

In questa sezione ci occupiamo di dare brevemente una seconda generalizzazione al teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori e siano F_x, F_y, F_z le sue componenti, ovvero $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Definiamo il *rotore* di \mathbf{F} come

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Anche in questo caso la notazione sottintende che il rotore è funzione del punto (x, y, z) in cui lo calcoliamo. Il senso della seconda notazione è che pensiamo il rotore come il prodotto vettoriale tra l'operatore $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ e \mathbf{F} .

Vediamo subito il teorema di Stokes o teorema del rotore.

Teorema 4.2 (Teorema di Stokes). *Sia \mathbf{F} un campo di vettori e sia Σ una superficie che ha per bordo la curva chiusa γ . Risulta che*

$$\int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

dove il vettore infinitesimo $d\mathbf{S}$ deve essere orientato in maniera da rispettare la regola della mano destra con l'orientazione del bordo γ . Anche in

questo caso il cerchietto sull'integrale sta a significare che al membro di destra è presente una circuitazione, ovvero un integrale lungo una curva chiusa.

La dimostrazione di questo fatto è del tutto analoga a quella fatta per il teorema della divergenza. Vediamo qualche esempio di applicazione del teorema di Stokes.

Esempio 4.4 (Campo conservativo se e solo se chiuso). Sappiamo che un campo \mathbf{F} è conservativo se e solo se per ogni curva chiusa γ il campo \mathbf{F} ha circuitazione nulla su γ , ovvero

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Grazie al teorema di Stokes sappiamo che se un campo \mathbf{F} è chiuso (o irrotazionale), ovvero verifica che $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, allora è anche conservativo. Infatti se prendiamo una qualsiasi superficie Σ che ha per bordo γ si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Se invece \mathbf{F} è un campo conservativo allora $\mathbf{F} = -\nabla V$ dove V è il suo potenziale. Quindi

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} = \\ &= - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \hat{\mathbf{z}} = 0 \end{aligned}$$

in quanto abbiamo visto che le derivate parziali commutano. Quindi un campo \mathbf{F} è conservativo se e solo se è irrotazionale.

Osservazione: l'equivalenza è vera per campi definiti ovunque. La freccia vera in generale è che conservativo implica irrotazionale. Per dire che anche l'altra freccia è vera è sufficiente che presa una qualsiasi curva chiusa γ in cui \mathbf{F} è definito esista almeno una superficie Σ che ha per bordo Γ e in cui \mathbf{F} sia definito. Questa proprietà così semplice può non essere vera: ad esempio se \mathbf{F} è definito solo nell'insieme dei punti (x, y, z)

tali che $x^2 + y^2 > 1$. Seguendo la logica esposta vale ancora l'equivalenza se consideriamo un campo irrotazionale \mathbf{F} definito su tutto \mathbb{R}^3 eccetto che al più in un punto.

Esempio 4.5 (2^a equazione di Maxwell per l'elettrostatica). Sappiamo che il campo elettrostatico è conservativo. Per quanto appena visto si esprime dicendo che è irrotazionale, ovvero

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Abbiamo così ottenuto la 2^a equazione di Maxwell per l'elettrostatica.

Esempio 4.6 (4^a equazione di Maxwell per la magnetostatica). La legge di Ampère ci dice che se \mathbf{B} è il campo magnetostatico e Σ è una superficie che ha per bordo γ allora

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

con le orientazioni in accordo alla regola della mano destra. Usando il teorema di Stokes ne deduciamo che per ogni superficie Σ si ha

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Ne deduciamo la 4^a equazione di Maxwell per la magnetostatica, ovvero

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

5 Esercizi

1. Considera la funzione $f(x, y) = \frac{xe^{y^2} + ye^{x^2}}{x+y}$.
 - Calcola $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, se esiste.
 - Sapendo che in effetti $f(x, y)$ si può espandere al primo ordine nell'origine, quale ti aspetti che sia l'espansione?
 - Secondo te è vero che esistono dei coefficienti $a_{n,m} \in \mathbb{R}$ tali che $f(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} x^n y^m$? Se sì calcolali e chiediti se potevi dedurre a priori che alcuni di questi erano nulli.
 - Disegna un grafico qualitativo della funzione in un intorno dell'origine.
2. Scrivi un integrale che permetta di calcolare esattamente il perimetro di un'ellisse di assi $a, b > 0$. Stima il perimetro di un'ellisse di assi $1, 1 + \epsilon$ al primo ordine non nullo in ϵ , con $\epsilon \ll 1$.
3. Stima l'area della superficie di un ellissoide con assi di lunghezza $1, 1, 1 + \epsilon$ al primo ordine non nullo in ϵ , con $\epsilon \ll 1$.
4. Considera un pendolo semplice nel regime di piccole oscillazioni ($\theta_0 \ll 1$). Determina il primo ordine non nullo nell'espansione del periodo di oscillazione.
5. Calcola $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ (Hint: scrivi I^2 come un integrale doppio e risolvillo in polari).

6. Risolvi l'equazione differenziale

$$y'' = -yy'$$

7. Risolvi l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha t^5$$

8. Risolvi l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \sin(\omega t)$$

9. Risolvi l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha t^5$$

10. Risolvi l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \sin(\omega t)$$