Fisica Moderna

Bruno Bucciotti[*], Tommaso Marini[†]

9 febbraio 2023

Sommario

Nella lezione affronteremo alcuni aspetti di Relatività Ristretta e di Meccanica Quantistica. Nello spirito di introdurre la meccanica quantistica in modo informale, procederemo essenzialmente per esempi e analisi dimensionale. Discuteremo l'atomo d'idrogeno e l'oscillatore armonico, proponendo vari esercizi. Per la parte di relatività ci concentreremo sui quadrivettori e il loro significato geometrico. Deriveremo le trasformazioni di Lorentz nello spazio di Minkowsky e studieremo la conservazione della norma di Minkowsky. Introdurremo i quadrivettori velocità e impulso e analizzeremo alcuni urti relativistici. Infine vedremo come trattare alcuni concetti di elettromagnetismo, in particolare la quadricorrente e la forza di Lorentz.

Parte I
Meccanica Quantistica

1 Atomo d'idrogeno

Nonostante l'uso della parola 'atomo' risalga all'antica grecia (Democrito, successivamente Lucrezio nel mondo latino), il primo modello scientifico che fa uso dell'ipotesi atomica è attribuibile a Dalton (1803). Sempre per sommi capi, successivamente Thomson teorizza la struttura interna dell'atomo, formulando il modello a panettone, e poi Rutherford mediante il famoso esperimento di scattering di raggi alpha su una lamina d'oro determina che l'atomo è in gran

[*]bruno.bucciotti@sns.it
[†]tommaso.marini@sns.it

parte vuoto, con un nucleo centrale positivo e gli elettroni in orbita intorno (modello planetario).

Ricordiamo che una carica accelerata, per esempio che segue un'orbita circolare, irradia onde elettromagnetiche e perde energia. La potenza irraggiata è data dalla formula di Larmor

$$P = \frac{2}{3c^3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} a^2 \tag{1}$$

e il primo esercizio chiede proprio di stimare il tempo in cui l'elettrone cade sul nucleo per via di questo effetto.

L'ipotesi che fa Niels Bohr è che solo alcune orbite siano permesse, da cui le orbite troppo vicine al nucleo semplicemente non sono permesse. Questa è l'idea chiave che stabilizza la materia.

1.1 Stabilità della materia

Il problema si può porre in questi termini: un'orbita di raggio r (per semplicità circolare) di un elettrone intorno a un nucleo ha energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{2}$$

e bilanciare le forze radiali (centrifuga e di Coulomb) porta alla condizione

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{3}$$

da cui infine

$$E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{4}$$

Non esistendo lunghezze preferenziali nel problema classico, ogni r è ammesso fino a quelli arbitrariamente piccoli. Invece nella teoria quantistica *esiste* una lunghezza costruibile,

$$m, \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sim E \cdot L, \quad \hbar \sim E \cdot T \to \frac{\hbar^2}{m} \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \sim L \tag{5}$$

Se la inseriamo al posto di r nella formula dell'energia, otteniamo

$$E_1 = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} \tag{6}$$

che è proprio l'energia dello stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno.

Questa parte è analisi dimensionale. Uno studio delle simmetrie del problema (rotazioni+esistenza del vettore di Lenz) porta all'identificare tutti gli stati mediante i numeri quantici n, l, m. n etichetta il livello e l'energia dipende solo da lui; $l = 0, \dots n-1$ è il momento angolare totale dello stato e $m = -l, \dots, l$ è il momento angolare lungo z. Non abbiamo gli strumento per discutere il problema in dettaglio, ma alla fine il risultato è che se lo stato è al livello n, allora la sua energia è

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{1}{n^2} \tag{7}$$

Aver centrato il fattore $\frac{1}{2}$ è una coincidenza, mentre che l'energia di uno stato legato sia negativa è fisicamente obbligatorio. L'esercizio 2 discute importanti conseguenze sperimentali di questo modello atomico.

2 Oscillatore Armonico

Un altro sistema ubiquo in fisica è l'oscillatore armonico. Vorrei che oltre alla massa attaccata alla molla voi pensaste a qualunque sistema che fa piccole oscillazioni, difatti detto x lo spostamento dalla posizione di equilibrio del sistema, la forza di reazione sul sistema sarà

$$F(x) \simeq F(0) + xF'(0) + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \dots \tag{8}$$

Per ipotesi di equilibro in $x = 0$ si deve imporre $F(0) = 0$, mentre per ipotesi di stabilità del sistema sotto piccole oscillazioni si deve imporre che la forza sia di richiamo, ovvero $F'(0) < 0$. Normalmente chiamiamo $k \stackrel{\text{def}}{=} -F'(0)$. Tutte le correzioni successive $\sim x^2, x^3, \dots$ sono trascurabili per oscillazioni piccole.

Per la lezione ci accontentiamo invece di ripetere lo studio fatto per l'atomo d'idrogeno, ovvero troveremo l'energia dello stato fondamentale per analisi dimensionale e poi affermeremo l'espressione per l'energia del livello energetico n.

L'energia di una traiettoria in un potenziale 1-dimensionale $V = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ è

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{9}$$

e le traiettorie sono, a meno di scegliere il tempo iniziale opportunamente,

$$x(t) = A\cos(\omega t) \to E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \tag{10}$$

Come prima con il raggio r dell'orbita circolare, anche qui la traiettoria può essere caratterizzata da un qualsiasi valore di A. L'ipotesi quantistica è che invece A sia data dall'unica scala di lunghezza costruibile una volta introdotto $\hbar$ nel problema.

La lunghezza in questione è

$$L \sim \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \tag{11}$$

e porta a un'energia

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{12}$$

Anche questa volta abbiamo indovinato l'energia dello stato fondamentale del sistema. Gli altri stati sono etichettati da un intero n, che stavolta parte da zero. Le loro energie crescono linearmente con n, e sono

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{13}$$

Una osservazione interessante è che l'energia minima di un potenziale $-\frac{1}{r}$ non è $-\infty$, e l'energia minima per un potenziale che ha minimo $V_{min} = 0$ è in realtà $E_0 > 0$. Questi fatti non hanno alcun analogo classico.

Per dare qualche esempio, possiamo pensare al caso dell'argon (potete vedere l'articolo [**?**]) per i quali si può applicare il potenziale di Lennard-Jones

$$V(r) = \epsilon\left(-2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 + \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}\right) \tag{14}$$

che ha profondità ϵ e sviluppo nel minimo $r = \sigma$ $V \simeq -\epsilon + \frac{1}{2}\left(72\frac{\epsilon}{\sigma^2}\right)(r-\sigma)^2$.

Attenzione: stiamo dicendo che il moto si scompone nella parte di centro di massa $\vec{R} = \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1+m_2}$, che si comporta come un corpo di massa $M = m_1 + m_2$ non soggetto a forze, e nel moto della distanza $\vec{r} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$, che si comporta come un corpo di massa $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. μ si dice massa ridotta, e intuitivamente è la massa più semplice possibile che sia a) simmetrica in m_1, m_2, e b) tenda alla massa più piccola quando l'altra va a infinito.

Commento su μ Visto che la stessa divisione fra $\vec{R}$ e $\vec{r}$ si ha nei problemi delle orbite sole-pianeta, facciamo notare che (b) è necessaria per poter trattare il sole come fermo (mentre in realtà orbita attorno al centro di massa comune); la (a) invece è una proprietà chiaramente desiderabile perché se cambiamo le masse dei due corpi fino a invertirne la gerarchia, vogliamo che la situazione sia simmetrica.

Finita questa parentesi, possiamo tornare all'argon. Due molecole di argon a distanza r interagiscono con il potenziale $V(r)$, ma la massa da usare è $\mu = m/2$ dove m è la massa dell'argon. Il k della molla e la massa sono quindi

$$k = \frac{72\epsilon}{\sigma^2}, \qquad \mu = m/2 \tag{15}$$

dove $m = 40\,\text{uma}$, e

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \tag{16}$$

I dati che riporta il paper per l'argon sono

$$\epsilon = 83.2\text{cm}^{-1}, \qquad \sigma = 0.382\text{nm} \tag{17}$$

dove per esprimere l'energia ϵ come una lunghezza inversa abbiamo scelto di porre $h, c = 1$ (nota, non $\hbar$!). Una rapida sostituzione conferma il risultato riportato, ovvero

$$\lambda = \frac{c}{\omega/2\pi} = 380\,\mu\text{m} \tag{18}$$

che è nel ballpark dello spessore di capello, ovvero l'infrarosso. Il punto fisico che vorrei trasmettere è il seguente: la fisica atomica è sulle scale dei 10 eV (o poco meno), ovvero luce di circa $\sim 100\,\text{nm}$ (o poco più), quindi ultravioletta o blu. Il visibile sta fra circa 430 e 770 nm. Al contrario, la fisica delle molecole vive essenzialmente nell'infrarosso, ovvero a scale di lunghezza estremamente maggiori.

Nel nostro caso è particolarmente evidente, poiché abbiamo preso un gas nobile. Questi hanno forze di interazione estremamente deboli, dunque k piccolo. La corrispondente domanda per la molecola di monossido di carbonio CO porta a $\lambda \simeq 5\,\mu\text{m}$, che è comunque infrarosso ma molto meno profondo.

A che scala di energia vive la fisica di un nucleo? La massa di un nucleo è circa la massa di un protone/neutrone, ovvero $\sim 1\,\text{GeV}$. La massa dei costituenti è dell'ordine di 10 MeV, del tutto trascurabile. In pratica le interazioni fra i costituenti sono fortissime. Se immaginiamo un oscillatore armonico con frequenza ω, stiamo dicendo che l'energia dello stato fondamentale $\sim \hbar\omega$ deve essere dell'ordine di 1 GeV. Questa sarà anche la scala di energia della luce che devo usare per risolvere il sistema (ovvero esplorare gli stati eccitati). La corrispondente lunghezza d'onda è $\lambda \simeq 10^{-15}\,\text{m}$, ovvero 1 fm, che è poi la dimensione efficace di un nucleo atomico.

3 Esercizi

3.1 Vita di un atomo

Supponiamo un modello orbitale puramente classico per l'atomo d'idrogeno. Ricordando la formula di Larmor per la perdita di energia nel tempo che si ha per una carica accelerata, derivare il tempo scala in cui un atomo collassa perché l'elettrone raggiunge il nucleo. É molto maggiore della vita dell'universo?

3.2 Laser su un atomo d'H

Abbiamo "trovato" in classe lo spettro dell'atomo d'idrogeno, dove con 'spettro' intendiamo i livelli energetici.

Questo tuttavia non è esattamente ciò che si osserva in un laboratorio. Un bolometro è uno strumento in grado di misurare la potenza della radiazione che riceve. Filtrando opportunamente la radiazione si può isolare un ristretto intervallo di frequenze, e domandarsi quanta energia sia presente nella radiazione in tale intervallo. Anche questo si chiama 'spettro'.

Sperimentalmente si osservano picchi di emissione/assorbimento per lo spettro dell'idrogeno come in figura 1. Spiegare cosa sta succedendo dal punto di vista del modello atomico di Bohr presentato a lezione, in particolare capendo come mai lo spettro di emissione e di assorbimento siano complementari. Predire poi lo spettro in figura 1

3.3 Effetto Schwinger in campi elettrici e magnetici

In questo problema ci domandiamo cosa accade a una carica in un campo elettrico o magnetico molto forte.

Il primo esercizio è trovare la versione relativistica della formula di Larmor, che vi invito ad indovinare assumendo che la potenza sia uno scalare di Lorentz (la definiamo nel sistema di riferimento localmente comovente e la estendiamo in modo covariante a tutti gli altri).

A questo punto facciamo una osservazione fisica profonda. Già nell'esempio dell'elettrone che cade sul nucleo abbiamo visto che la potenza persa per Larmor non è data da una forza che entra direttamente nelle equazioni del moto: abbiamo assunto le traiettorie senza perdita di energia, calcolato la perdita di energia per Larmor e (assumendo che questa sia piccola) fatto lentamente variare un parametro della traiettoria (e.g. il raggio dell'orbita circolare) in accordo con l'energia che decresce.

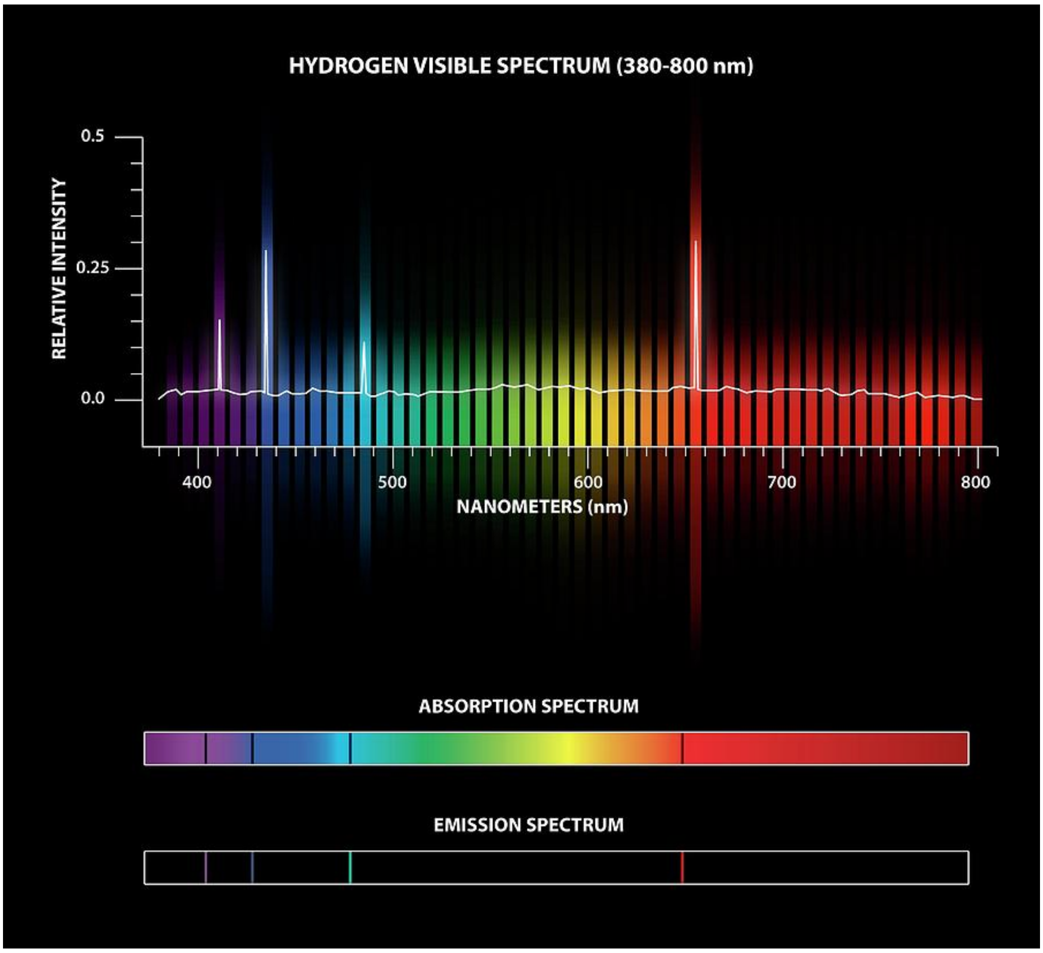

Figura 1: Spettro visibile dell'atomo d'idrogeno.

Tutto salta se però le perdite di energia sono grandi, situazione nella quale non sappiamo quindi fare i calcoli. La buona notizia è che fisicamente queste situazioni corrispondono all'emergere di nuova sorprendente fisica, talvolta a scale leggermente più basse. Il resto del problema indaga appunto quando le perdite di energia sono grandi per una particella in un campo elettrico o magnetico uniformi.

Campo elettrico

- Trovare la potenza acquisita da una particella di carica e che si muove in un campo elettrico uniforme $\vec{E}$.
- Trovare poi la potenza emessa per Larmor e, usando le equazioni del moto, esprimerla in termini di E.
- Determinare in unità V/m il campo elettrico per cui le due potenze sono comparabili.

Similmente per un campo B uniforme si determini

- Il periodo T dell'orbita.
- La potenza irraggiata in funzione di B (sempre facendo uso delle equazioni del moto).

In questo caso, poiché il campo magnetico non fa lavoro, possiamo confrontare la potenza emessa durante un periodo T con l'energia della particella. Per quali B diventano comparabili?

Parte II
Relatività

4 Introduzione

Ogni teoria fisica descrive qualche aspetto della Natura, dal movimento dei pianeti alle interazioni tra particelle subatomiche. La relatività ristretta è una teoria particolare, che ci insegna qual è il modo giusto (e quello sbagliato!) di descrivere questi fenomeni. Chiamiamo **evento** qualcosa che accade: stamani vi siete svegliati (presto?) nel vostro letto, avete fatto colazione (un po' dopo) in hotel e siete entrati in aula (ancora dopo!) nel Palazzo della Carovana. Possiamo pensare ad ognuno di questi eventi come un punto, e chiamiamo **spazio-tempo** l'insieme di questi punti. Notate che ogni evento succede in un luogo (il letto, la mensa, Palazzo della Carovana) e in un momento (presto, dopo, ancora dopo...) ma non ha attaccato nessun numero che ci permetta di identificare questi luoghi e questi tempi: nello spazio-tempo non ci sono numeri, solo eventi!

Per fare fisica, tuttavia, abbiamo bisogno di numeri da inserire nelle equazioni per fare previsioni sul futuro; vogliamo dare un nome (spoiler: 4 numeri) ad ogni evento. Possiamo allora immaginare di avere a disposizione una grande foglio di carta millimetrata, su cui segnamo un punto particolare detto **origine**. Allora possiamo sovrapporre il foglio (che deve essere abbastanza grande) all'insieme di punti che chiamiamo spazio-tempo[1], segnare la posizione sul foglio di ogni evento che ci interessa e infine misurare quanto questa disti dall'origine lungo tutti i lati del foglio. In questo modo possiamo chiamare quel particolare evento con le distanze che abbiamo misurato, ovvero con 4 numeri: 1 per ognuna delle direzioni "spaziali" del foglio (*dove* è successo) e 1 per la direzione temporale (*quando* è successo). Questi 4 numeri sono le **coordinate** dell'evento. Questa procedura è semplice, anche se un foglio a 4 dimensioni è piuttosto raro.

Il problema è come appoggiare il foglio sullo spazio tempo: persone diverse (li chiameremo **osservatori**) potrebbero metterlo in modo diverso (spostato, ruotato, uno che scivola in movimento rispetto all'altro) e dunque misurerebbero coordinate diverse per lo stesso evento. Allora metterebbero numeri diversi dentro le equazioni della fisica, e otterrebbero risultati diversi

[1]Chiunque abbia provato a incartare un regalo sferico sa che possiamo sovrappore senza fare pieghe un foglio su qualcosa solo se questo qualcosa è piatto. In relatività ristretta, allora, assumiamo che lo spazio sia piatto.

per lo stesso fenomeno, che è assurdo. Nessun problema! La relatività ci dà tutte le regole per tradurre le coordinate di un osservatore in quelle degli altri.

5 Dove succedono le cose

Formalizziamo adesso il discorso precedente. Il foglio è quello che chiamiamo **sistema di riferimento** e le direzioni nelle quali si misurano le coordinate sono gli assi, che si incrociano nell'origine. Indichiamo gli assi con un cappuccio: $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ sono quelli spaziali. Le coordinate di un evento, come detto, sono 4 numeri, e si indicano con:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{19}$$

L'indice greco μ può assumere 4 valori (0,1,2,3) cioè x^μ indica la μ-esima coordinata. La convenzione è di usare una lettera greca come indice (μ ν ρ ...). La prima è la coordinata temporale (Il *quando* è successo l'evento, misurato nel sistema di riferimento scelto); il c che moltiplica il tempo è la velocità della luce, e si è messo per avere tutte le coordinate con le stesse dimensioni fisiche (una lunghezza)[2]. Le altre tre coordinate indicano la posizione spaziale dell'evento nel sistema di riferimento scelto. Questo vettore[3] con 4 componenti che indica la posizione di un oggetto si chiama, senza molta fantasia, **quadrivettore posizione**.

5.1 Relatività Galileiana

Come abbiamo detto il problema sorge quando vogliamo confrontare coordinate di sistemi di riferimento diversi. Chiamiamo allora x^μ le coordinate del sistema **S** e x'^μ le coordinate del sistema **S'**. Ciò che vogliamo è una relazione tra i due:

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\rho) \tag{20}$$

Ci sono molti modi in cui due sistemi di riferimento possono essere orinetati diversamente tra loro: gli assi possono essere ruotati, l'origine può essere traslata, oppure un'origine può muoversi rispetto all'altra a velocità costante. Definiamo sistema di riferimento **inerziale** uno in cui vale il primo principio della dinamica. Tutti i sistemi orientati diversamente da uno inerziale nel

[2]Notiamo che non c'è nessuna assunzione fisica nel moltiplicare per la velocità della luce, se tutti gli osservatori usano lo stesso valore per questa: dire che qualcosa è successo 1 secondo fa, o 299 792 458 metri fa è lo stesso se sappiamo il fattore di conversione.

[3]Non preoccupatevi troppo di definire cosa è un vettore esattamente, lo vedremo più avanti. Vi avverto però che i nostri colleghi matematici non sono troppo d'accordo con quello che diremo.

modo descritto sopra sono anch'essi inerziali, ovvero le trasformazioni elencate individuano una classe di sistemi in cui un corpo libero si muove di moto rettilineo uniforme. La relatività ristretta ci dice come trasformare le coordinate tra sistemi inerziali[4]. In particolare siamo interessati alla trasformazione di coordinate tra due sistemi che hanno gli assi paralleli e una velocità relativa v lungo uno di questi assi (che sceglieremo x). Questa trasformazione è detta **boost**. In relatività galieliana allora l'equazione 20 per un boost è quella più ingenua possibile:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x - \frac{v}{c}ct \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{21}$$

Questa è la trasformazione più *naïf* che potremmo scrivere (detta **trasformazione di Galileo**). L'origine del sistema S, al tempo t si trova in $-vt$ nel sistema S', quindi la posizione di un evento nel nuovo sistema si trova semplicemente traslando di questa quantità. Abbiamo moltiplicato e diviso per c per lo stesso motivo visto prima. Notiamo che $t' = t$ implica che tutti gli osservatori misurino lo stesso tempo, che dunque possiamo considerare un **tempo universale**. Anche questa è un assunzione *naïf* o, se volete, filosofica.

Dalle trasformazioni possiamo calcolare come trasforma la velocità di un oggetto:

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad u' = \frac{dx'}{dt'} \tag{22}$$

Ovvero:

$$u' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - vy)}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = u - v \tag{23}$$

Anche questo risultato sembra ovvio, ed è esperienza quotidiana: in treno, ad esempio, se guardo fuori dal finestrino, vedo oggetti fermi rispetto alle rotaie ($u = 0$) muoversi con velocità opposta a quella del treno.

5.2 Trasformazioni di Lorentz

Tutto ciò che abbiamo visto finora sembra ovvio, quasi noioso, e per fortuna la Natura è un po' più interessante. La prima indicazioni che le trasformazioni 5.1 non fossero corrette si trova nelle equazioni di Maxwell.

[4]Ci sono molte trasformazioni che ci portano da un sistema inerziale a uno non inerziale. Ad esempio se l'origine di uno è accelerata rispetto a quella dell'altro compariranno forze apparenti e non varrà la prima lagge della dinamica.

Da queste si ricava (nel vuoto) l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{24}$$

Non importa saper risolvere queste equazioni (o anche solo conoscere ogni simbolo) per capire il problema: contengono esplicitamente una velocita c, la velocità della luce, e dunque non sono invarianti per trasformazioni di Galileo. Infatti se assumiamo che queste equazioni valgano nel sistema di riferimento S, in S' dovrebbero assumere la forma:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{(c-v)^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{25}$$

perchè c è una velocità e dunque trasforma con la 23. Ma nell'elettromagnetismo non c'è niente che ci dica quale sia il sistema S privilegiato in cui le equazioni hanno la forma 24 e quello in cui hanno la forma 25. Anzi, possiamo enunciare un principio che ci dice il contrario:

Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Questo è noto come **Principio di Relatività** e fu formulato per la prima volta da Galileo. Il suo significato è molto profondo e ci dice che le leggi della fisica sono qualcosa che appartiene allo spazio-tempo (l'insieme di eventi) e non al modo in cui noi "ci appoggiamo un foglio sopra"[5].

Se crediamo al Principio di Relatività e alle equazioni di Maxwell concludiamo che la velocità della luce è la stessa in ogni sistema di riferimento. Allora ci dobbiamo impegnare per trovare una trasformazione 20 per cui c rimanga costante. La cosa più facile che possiamo fare è partire dalla 5.1 e provare a modificarla: d'altronde le trasformazioni di Galileo valgono per la maggior parte di ciò che vediamo tutti i giorni (Galileo non era stupido!) e quindi deve esistere un limite in cui le nuove equazioni si riducono alle vecchie. Possiamo pensare di lasciare intatta la struttura di x' a meno di moltiplicarla per una funzione. Questa funzione può dipendere dall'unico parametro della trasformazione, la velocità relativa.

$$x' = \gamma(v)(x - \beta ct) \tag{26}$$

dove si è scritto β al posto di v/c per semplicità. Per quanto riguarda il tempo possiamo scrivere una cosa generale:

$$ct' = \tilde{\gamma}(v)(ct + ax) \tag{27}$$

[5] Il principio si limita a sistemi inerziali perchè sappiamo che in un sistema accelerato già il primo principio della dinamica non vale. Tuttavia i sistemi accelerati non sono da buttare; sono alla base, ad esempio, della costruzione della Relatività Generale.

dove $\tilde{\gamma}(v)$ è un'altra funzione di v, diversa, per adesso da $\gamma(v)$. Non fatevi confondere, non abbiamo fatto nessuna assunzione fisica strana sul tempo. Potremmo ottenere $\tilde{\gamma} = 1$ e $a = 0$ e recuperare il tempo universale: abbiamo solo preso più libertà per fare i conti e vedere cosa succede[6]. Vogliamo adesso determinare γ, $\tilde{\gamma}$ e a. Per farlo imponiamo che:

1. l'origine del sistema S' sia in posizione $x' \stackrel{!}{=} vt'$. Questa condizione si può vedere come definizione di due sistemi che si muovono con velocità relativa v lungo x;
2. se passo da S a S' e poi da S' a S devo ottenere le stesse coordinate di partenza. Ovvero $x^\mu(x'^\nu(x^\rho)) \stackrel{!}{=} x^\mu$;
3. la velocità della luce è costante, e pari a c, in entrambi i sistemi di riferimento.

Il simbolo $\stackrel{!}{=}$ significa che è una condizione che imponiamo. Pronti? Iniziamo con la condizione 1. Ricordando che l'origine (spaziale) di S ha posizione $x = 0$:

$$x' = x' = \gamma(v)(x - \beta ct) = -\gamma(v)vt \stackrel{!}{=} -vt' = -v\tilde{\gamma}(v)t$$

ovvero confrontando i termini:

$$\tilde{\gamma} = \gamma(v) \tag{28}$$

D'ora in poi, allora, usiamo $\gamma(v)$ sia per x' che per ct'. Imponiamo adesso la condizione che la velocità della luce sia costante. Per farlo abbiamo bisogno di calcolare la velocità nei due sistemi di riferimento: dx/dt e dx'/dt'. Ma dx, dt ... sono differenze (infinitesime) e dunque valgono le stesse regole di trasformazione di x', t'[7]:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(v)(dx - \beta c dt) \\ cdt' = \gamma(v)(cdt + adx) \end{cases} \tag{29}$$

Vogliamo $dx/dt = c \implies dx'/dt' = c$:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \beta c dt}{dt + \frac{a}{c}dx} = \frac{dx/dt - \beta c}{c + \frac{a}{c}dx/dt} = \frac{c - \beta c}{1 + a} = c\frac{1 - \beta}{1 + a} \stackrel{!}{=} c$$

[6] L'unica assunzione che abbiamo fatto è che la trasformazione sia lineare e che le origini coincidano ($ct = 0 = x = 0 \implies ct' = x' = 0$). Per il resto la trasformazione è la più generale possibile, un eventuale coefficiente davanti a ct' si può riassorbire nella funzione incognita $\tilde{\gamma}(v)$.

[7] Se non ci credete provate a calcolare come trasforma $\Delta x = x_1 - x_2$ e $\Delta t = t_1 - t_2$ a partire dall'equazioni 26 e 27.

allora deve essere:

$$a = -\beta \tag{30}$$

con buona pace del tempo universale: anche il tempo è una coordinata che scegliamo noi, non un qualcosa di intrinseco allo spazio-tempo, quindi può avere valori diversi in sistemi di riferimento diversi. Imponiamo infine la seconda condizione, facendo attenzione che quando torno da S' a S la velocità è invertita, cioè $-\beta \to \beta$:

$$x = \gamma(x' + \beta ct') = \gamma(\gamma(x - \beta ct) + \beta\gamma(ct - \beta x)) = \gamma^2(1 - \beta^2)x \overset{!}{=} x$$

e ciò è possibile solo se:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{31}$$

Abbiamo quindi le trasformazioni complete, note come **trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c} \tag{32}$$

dove si è assunto non succedesse niente di strano nelle direzioni perpendicolari al moto[8]. Si mostra facilmente che per un boost in direzione $\vec{\beta}$ arbitraria inoltre vale:

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \tag{33}$$

con $\vec{\beta} \cdot \vec{x}$ prodotto scalare tra i due vettori.

Per apprezzare a fondo la bellezza di queste trasformazioni dovete vederle in questa forma:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{34}$$

Non vi preoccupate se non capite cosa significa[9], è solo un modo più veloce (e bello) di scrivere le equazioni 32.

Prima di procedere guardiamo ancora un po' le equazioni che abbiamo trovato. In particolare potete calcolare cosa succede se $c \to \infty$. Prima di

[8] Questo si può dimostrare a partire da dalla simmetria per rotazione nel piano y z del problema: se i due sistemi hanno moto relativo lungo $\hat{x}$ non ci sono direzioni privilegiate nel piano yz.

[9] Per chi conosce il prodotto tra matrici e vettori colonna è chiaro che la scrittura è equivalente alle equazioni 32, per chi non lo conosce ma è curioso può guardare questo video.

fare l'esercizio, però pensate a cosa vi aspettate che succeda. Inoltre vedremo che queste trasformazioni ci danno dei risultati molto controintuitivi, quindi dobbiamo essere convinti delle ipotesi che abbiamo fatto. La 1 e la 3 sono ipotesi molto deboli e intuitive, tutta la stranezza viene dall'ipotesi 2: la luce è costante in ogni sistema di riferimento. Per quanto strano sembri questo è quello che osserviamo in Natura.

6 La geometria dello spazio-tempo (o quasi)

Lo spazio-tempo della relatività ristretta è detto **spazio di Minkowski**, e adesso studiamo le proprietà degli abitanti di questo spazio, i quadrivettori.

Anzitutto vediamo adesso un utile modo di rappresentare le trasformazioni trovate. Risulta difficile disegnare in quattro dimensioni, quindi facciamo finta che l'osservatore O viva nel piano xy e disegniamo gli assi $\hat{x}, \hat{y}, \hat{ct}$ per segnare le coordinate misurate da O. Fissiamo adesso un certo evento, ad esempio quando il gatto (bidimensionale) di O si sveglia dal riposino pomeridiano. Se O è fermo rispetto al suo gatto segnerà questo evento come un certo punto $G = (ct, x)$. Se però O inizia a muoversi, la posizione di G cambierà[10] Vogliamo studiare come si sposta G. Consideriamo inizialmente cosa succede in un caso più semplice, ovvero se O inizia a ruotare nel piano xy. Se fosse abbstanza atletico, ad esempio, potrebbe fare una capriola sul posto. Dal punto di vista di O sarebbe il gatto a ruotare, e quindi il punto G descriverebbe una circonferenza nel piano xy[11]. Infatti la distanza tra O e il gatto non cambia, qualunque sia l'orientazione di O, e il luogo dei punti a distanza costante è proprio una circonferenza:

$$x^2 + y^2 = cost \implies P = (ct, x, y) descrive\ una\ circonferenza\ nel\ piano\ xy$$

Passiamo adesso al caso interessante, ovvero O inizia a muoversi a velocità relativistiche lungo $\hat{x}$ rispetto al suo (spaventato!) gatto. Nella sezione precedente abbiamo trovato come trasformano le coordinate del punto G (equazioni 32). Possiamo allora controllare se, come per la rotazione, è vero

[10] Per non confondersi: finora quando abbiamo fatto un boost abbiamo cambiato gli assi per rappresentare sistemi di riferimento diversi. Adesso gli assi servono solo per segnare le coordinate misurate da O in qualunque sistema lui sia. La conseguenza è che gli assi rimangono fermi e si spostano i punti (gli eventi). In generale il primo tipo di trasformazione (cambiano gli assi) si chiama *passiva*, quello che consideriamo adesso (cambiano i punti) si chiama *attiva*.

[11] Se consideriamo anche il tempo G descriverebbe una spirale che, vista dall'alto è una circonferenza. Questa però è una complicazione inutile e facciamo finta O sia così atletico da fare una capriola istantanea.

che il gatto rimane a una distanza costante da O, cioè se $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. Purtroppo questo non è vero:

$$x'^2 + y'^2 = \gamma^2(x - \beta ct)^2 + y^2 \neq x^2 + y^2$$

D'altronde la trasformazione mescola la coordinata t e la coordinata x, dunque se qualcosa deve rimanere costante, dovrà essere una combinazione di entrambi. Potremmo allora provare (Provatelo come esercizio!) con la "distanza" $(ct)^2 + x^2 + y^2$ ma anche questa non funziona. Dobbiamo prendere una distanza ancora più strana: $(ct)^2 - x^2 - y^2$. Poiché y è costante basta verificarlo per i primi due termini:

$$\begin{aligned}(ct')^2 - x'^2 &= \gamma^2\big((ct - \beta x)^2 - (x - \beta ct)^2\big) = \\ &= \frac{1}{1-\beta^2}\big((ct)^2(1-\beta^2) - x^2(1-\beta^2) - 2\beta ctx + 2\beta ctx\big) = \\ &= (ct)^2 - x^2\end{aligned} \tag{35}$$

come volevamo. Il luogo dei punti in cui $(ct)^2 - x^2$ è costante è un'iperbole, allora:

$$(ct)^2 - x^2 = cost \implies P = (ct, x, y) \textit{ descrive un'iperbole nel piano ctx}$$

Possiamo però dire di più. Anzitutto ricordiamoci della terza coordinata spaziale. Poichè che $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ è costante per rotazioni e $(ct)^2 - r^2$ è costante per boost, abbiamo che:

$$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = cost \tag{36}$$

sia per boost che per rotazioni. Questa combinazione, proprio come la lunghezza in relatività galileiana, ha lo stesso valore indipendentemente dal sistema di riferimento in cui la calcoliamo. In relatività questo si chiama **modulo** (quadro) del quadrivettore e si indica con $x^\mu x_\mu$. Notate che gli indici del primo sono in alto e quelli del secondo sono in basso[12]: la differenza è un segno meno nella parte spaziale.

$$x^\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \implies x_\mu = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) \tag{37}$$

così che calcolare il modulo corrisponde a fare il normale prodotto scalare componente per componente tra x^μ e x_μ[13], ovvero moltiplicare componente

[12] Il quadrivettore con gli indici in basso è detto anche covariante, quello con gli indici in alto controvariante. Geometricamente uno appartiene allo spazio duale dell'altro.

[13] Si può anche definire un prodotto scalare "particolare" per cui il modulo è proprio il prodotto tra due x^μ. Questo si fa definendo una matrice detta **metrica** $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ per cui $(x^\mu, y^\mu) = x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu$.

per componente i vettori e sommare i prodotti. La somma nell'espressione $x^\mu x_\mu$ corre sull'indice μ (sommo per $\mu = 0, 1, 2, 3$, cioè $x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3$) ed è sottointesa: si assume sempre che indici ripetuti (μ in questo caso) siano sommati. Possiamo mostrare allo stesso modo che vale un risultato più forte: dati due quadrivettori qualsiasi x^μ, y^μ il loro prodotto di Minkowski (ovvero il prodotto tra uno con gli indici in alto e uno con gli indici in basso) è costante in tutti i sistemi di riferimento:

$$x^\mu y_\mu = cost \tag{38}$$

Abbiamo trovato quindi una quantità costante: questo è sempre importante in fisica[14], quindi non sottovalutate questo risultato.

6.1 Intervallo invariante

Abbiamo visto che le trasformazioni di Lorentz hanno la stessa forma per le coordinate e per gli intervalli, una differenza di quadrivettori è ancora un quadrivettore. Allora deve valere:

$$\Delta s^2 \equiv (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2 = cost \tag{39}$$

(con $(\Delta\vec{x})^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ per tre dimensioni spaziali). Si definisce Δs^2 **intervallo invariante**. Non vi fate confondere dal quadrato: dalla definizione è chiaro che presi due punti qualsiasi nel diagramma di Minkowsky Δs^2 può essere maggiore minore o uguale a zero. Definiamo allora:

- $\Delta s^2 > 0$ intervallo di tipo **tempo**
- $\Delta s^2 = 0$ intervallo di tipo **luce**
- $\Delta s^2 < 0$ intervallo di tipo **spazio**

Consideriamo allora un evento nell'origine di un certo sistema di riferimento. I punti che hanno una distanza di tipo luce con questo individuano il **cono luce** e corrispondono a raggi di luce mandati dall'origine al tempo $t = 0$. In un diagramma di Minkowsky in due dimensioni spaziali e una temporale questi individuano proprio due coni, il cono luce passato e futuro. Eventi di tipo tempo sono dentro il cono luce (futuro se $\Delta t > 0$, passato se $\Delta t < 0$); eventi di tipo spazio sono fuori dal cono luce. Possiamo vedere che è possibile raggiungere gli eventi nel cono luce futuro dall'origine con un segnale a velocità $v < c$, allo stesso modo quelli del cono luce passato possono

[14] Pensate ad esempio quanto è comodo risolvere i problemi di meccanica con la conservazione dell'energia.

aver raggiunto l'origine con un segnale con $v < c$. Infine notiamo che il tipo di distanza tra due eventi non dipende dal sistema di riferimento: l'intervallo invariante è, in effetti, invariante!

6.2 Causalità

Avrete sicuramente sentito dire chè la relatività rende impossibile muoversi a velocità maggiori della velocità della luce. In realtà questo non è un postulato della teoria (l'unico postulato è che la velocità della luce sia uguale per tutti, non che sia una velocità limite). Tuttavia si può mostrare che anche applicando una forza costante ad un corpo, questo non supererà mai la velocità della luce; inoltre vedremo che qualsiasi particella massiva deve muoversi con $v < c$[15]. Adesso, invece, mostriamo che se fosse possibile mandare un segnale (un qualsiasi modo di trasmettere informazioni) a velocità maggiori della luce non potremmo stabilire una relazione di causa effetto tra nessun evento, ovvero non potremmo mai dire:

L'evento A ha causato l'evento B

per nessuna coppia di eventi A e B. Fare fisica in un universo del genere sarebbe sicuramente più complicato[16]. In particolare mostriamo che è possibile definire un rapporto di causa effetto solo tra eventi separati da una distanza di tipo tempo: io posso influenzare eventi nel mio cono luce futuro e posso essere influenzato da eventi nel mio cono luce passato. Supponiamo infatti che un certo evento sia nel mio futuro ($\Delta t > 0$, $\Delta s^2 > 0$). Per un osservatore in movimento rispetto a me, usando le equazioni 32:

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \tag{40}$$

ma:

$$\Delta s^2 > 0 \implies c\Delta t > |\Delta\vec{x}| \quad \text{o} \quad c\Delta t < -|\Delta\vec{x}| \tag{41}$$

Scegliendo la prima per $\Delta t > 0$ e sostituendo in equazione 40 si trova, se $\beta < 1 \implies v < c$:

$$\Delta t' > 0 \tag{42}$$

ovvero un evento che è nel mio futuro rispetto a me, lo è anche rispetto a un osservatore in movimento. Se calcio un pallone e rompo un vetro, sia chi è fermo rispetto a me che chi è in movimento può dire che la colpa è mia.

[15] La relatività non vieta che esistano particelle che si muovono a $v > c$, il costo per farlo però è che la loro massa quadra sia minore di 0: $m^2 < 0$! Queste ipotetiche particelle sono dette *tachioni* e non sono mai state rilevate sperimentalmente.

[16] Pensate per esempio che gli eventi A e B siano: A="faccio cadere un bicchiere" e B="il bicchiere si rompe": non potremmo dire che il bicchiere si rompe *perchè* l'ho fatto cadere: sicuramente ci sarebbe molta meno responsabilità!

Vediamo perchè questo non è possibile per eventi di tipo spazio.Anzitutto la dimostrazione sopra non vale più ($\Delta s^2 < 0$), anzi si puo mostrare (provate) che esiste sempre un sistema di riferimento in cui $\Delta t'$ cambia segno. Possiamo intuirlo geometricamente dal diagramma di Minkowski. L'asse x' di un osservatore O' con velocità $v = \beta c$ è il luogo dei punti a $t' = 0$, ovvero la retta $ct = \beta x$. Al variare di $v < c$ questa retta varia dall'asse $\hat{x}$ alla bisettrice, ovvero spazia tutti gli eventi di tipo spazio. Gli eventi nel futuro dell'osservatore O' sono quelli sopra questa retta. Si vede subito allora che posso sempre trovare una retta (una velocità) rispetto alla quale un punto di tipo spazio sta sotto e quindi è nel passato.

Concludiamo allora che se potessimo inviare segnali più veloci della luce, violeremmo la causalità. Infatti con un segnale a $v > c$ partito dall'origine del nostro sistema di riferimento potremmo influenzare un evento di tipo spazio. In un certo sistema di riferimento, però, questo evento è successo prima che il segnale partisse e quindi non ne può essere influenzato.

6.3 Dilatazione dei tempi

Vediamo alcune conseguenze fisiche del cambio di coordinate 32. Supponiamo abbiate un orologio al vostro polso e consideriamo i due eventi:

1. La lancetta dei secondi punta verso l'alto

2. La lancetta dei secondi punta nuovamente verso l'alto

Nel vostro sistema di riferimento la differenza tra questi due eventi ha coordinate:

$$c\Delta t = c * 60\text{secondi} \qquad \Delta x = 0 \tag{43}$$

in quanto i due eventi avvengono nella stessa posizione (il vostro polso) a un minuto di distanza. Per un osservatore che si muove con velocità v rispetto a voi però i due eventi avvengono in posizioni diverse, in particolare:

$$\Delta x' = v\Delta t' \tag{44}$$

ma abbiamo visto che c'è una quantità che deve essere uguale per entrambi: l'intervallo invariante. Ovvero:

$$\begin{aligned}
&(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 \\
&(c\Delta t)^2 = (c\Delta t')^2 - v^2(\Delta t')^2 \\
&\Delta t' = \gamma\Delta t
\end{aligned} \tag{45}$$

Se adesso ricordate la definizione di γ si vede $\gamma > 1$: per un osservatore in movimento rispetto a voi le lancette del vostro orologio ci mettono un po' più di un minuto a fare un giro, come se il vostro tempo fosse rallentato e il loro dilatato! Se questo concetto non vi risulta intuitivo non preoccupatevi, non lo è. State attenti, è facile cadere in apparenti paradossi: ad esempio la situazione sembrerebbe perfettamente simmetrica tra voi e l'osservatore in movimento, alla fine rispetto a lui siete voi a muovervi. Notate però che l'evento che abbiamo considerato era speciale, un evento "fermo" ($\Delta x = 0$) *rispetto a voi*. Inoltre non potrete mai sapere quale dei due tempi vada "realmente" più lento, perchè l'altro osservatore continuerà a muoversi a velocità v costante e non potrete mai trovarvi nello stesso luogo nuovamente[17].

6.4 Contrazione delle lunghezze

Approfittiamo del risultato ottenuto sopra per derivarne uno altrettanto importante. Supponiamo che una particella con velocità $\vec{v}$ percorra un tratto L in un certo sistema di riferimento. Un fisico sperimentale potrebbe prendere un'asta di lunghezza L, ferma rispetto a lui, e misurare il tempo trascorso tra il passaggio della particella sul primo estremo e il secondo; chiamiamo questo tempo Δt. Ovviamente vale:

$$v = \frac{L}{\Delta t} \tag{46}$$

Dal punto di vista della particella l'asta del fisico sperimentale si muove con velocità $-\vec{v}$ e i due eventi "passo il primo estremo" e "passo il secondo estremo" avvengono nello stesso punto. Utilizzando allora il ragionamento della sezione precedente il tempo Δt misurato dal fisico è dilatato rispetto al tempo misurato dalla particella Δt_P (se avesse un polso per portare l'orologio):

$$\Delta t = \gamma \Delta t_P \tag{47}$$

Quindi la particella vede un'asta che si muove a velocità (in modulo) $v = L/\Delta t$ superarla in un tempo Δt_P. Conclude che la lunghezza dell'asta è:

$$L_P = \Delta t_P v = \Delta t_P \frac{L}{\Delta t} = \frac{L}{\gamma} \tag{48}$$

Un'asta in movimento con velocità v appare contratta di un fattore γ nella direzione del moto! Fate attenzione a questa precisazione: le direzioni perpendicolari al moto non sono contratte (una sferetta, ad esempio, diventa un ellissoide). Avremmo potuto trovare lo stesso risultato direttamente

[17]Se ancora vi risulta difficile digerire questo concetto potete consolarvi con il fatto che per molti intellettuali del '900 è stato difficile accettarlo; ad esempio il filosofo francese Bergson è autore di un libro molto interessante (ma con molta poca fisica) sull'argomento, dal titolo "Durata e Simultaneità".

dalle trasformazioni di Lorentz, ma avremmo dovuto definire il procedimento corretto per misurare la lunghezza di un'asta in movimento.

Vediamo una conseguenza immediata della contrazione delle lunghezze. L'asta dell'esempio precedente avrà una certa massa M, che supponiamo essere distribuita uniformemente. Si può definire nel sistema di riposo una densità $\rho_0 = M/L$. Il pedice $_0$ indica che questa densità è calcolata nel sistema dove l'asta è ferma. Ma la sua massa, che è data dal numero di atomi che la costituiscono, non cambia nel sistema dove si muove, mentre la sua lunghezza è contratta. Allora la densità aumenta:

$$\rho = \gamma \rho_0 \tag{49}$$

Questo risultato vale per ogni tipo di densità, ad esempio per la densità di carica, dove è ancora più chiaro che la carica elettrica, la differenza tra il numero di cariche positive e negative, non cambia da un sistema di riferimento all'altro.

Ripetiamo i risultati di queste ultime due sezioni: un orologio in movimento appare rallentato, un oggetto in movimento appare più corto (nella direzione del moto).

7 Mettiamoci in movimento

Finora abbiamo detto che un quadrivettore è una quaterna di numeri (x_0, x_1, x_2, x_3) con alcune proprietà. Queste in particolare sono le leggi di trasformazione 32 e il modo in cui si costruiscono quantità costanti rispetto a queste trasformazioni. In modo compatto possiamo indicare:

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} x_{\nu} \\ x'^{\mu} y'_{\mu} &= x^{\mu} y_{\mu} \end{aligned} \tag{50}$$

Queste proprietà sono così importanti che si prendono come *definizione* di un quadrivettore: qualsiasi oggetto con quattro componenti con queste proprietà è un quadrivettore[18]. Vorremmo adesso costruire altri quadrivettori "fisici" partendo da quello che abbiamo a disposizione, il quadrivettore posizione. Ci possiamo chiedere quali operazioni possiamo fare su un quadrivettore che non modifichi la legge di traformazione. Abbiamo già visto che la differenza di un quadrivettore trasforma come un quadrivettore (quindi *è* un quadrivettore);

[18]Notiamo per completezza che la seconda proprietà segue dalla prima, ma è così importante che valeva la pena ripeterla. Poichè basta che la trasformazione sia quella giusta si dice spesso la famosa frase "Un quadrivettore è qualcosa che trasforma come un quadrivettore".

guardando le trasformazioni esplicite ci convinciamo che queste non sono cambiate neanche se moltiplichiamo il quadrivettore per una costante. Quindi per costruire nuovi quadrivettori possiamo:

- Fare la differenza tra quadrivettori
- Moltiplicare un quadrivettore per una costante

Con questi due strumenti a disposizione possiamo costruire tuti gli oggetti fisici che ci servono. Fermiamoci un secondo a pensare cosa significa *costante* in relatività. D'altronde anche la cosa che sembrerebbe costante più di tutte, il tempo, non lo è. Anzitutto costante significa che assume lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. Un modo per costruire una costante l'abbiamo già visto: prendere il modulo di due quadrivettori. Un'altra strada che ci sarà utile ora è scegliere un sistema di riferimento privilegiato e mettersi d'accordo: ognuno utilizza il valore che ha l'oggetto nel sistema considerato. Questo è sicuramente una costante, ma sembrerebbe violare il principio di relatività; abbiamo insistito tanto per dire che non esistono sistemi di riferimento privilegiati, e adesso abbiamo bisogno proprio di questo. In realtà quando descriviamo il moto di un oggetto fisico, un punto materiale, c'è un sistema diverso dagli altri, "speciale": quello dove il corpo è fermo. Questo sistema è detto **sistema istantaneamente solidale** e di solito i valori in questo sistema hanno l'aggettivo **proprio**. Fate attenzione però: se il corpo accelera il sistema istantaneamente solidale avrà sempre una velocità diversa (da cui *istantaneamente*); in ogni punto il sistema istantamente solidale è il sistema inerziale con l'origine nel punto dove si trova il corpo e che si muove con velocità uguale a quella del corpo. Per capire come utilizzare quest'idea per costruire una costante consideriamo il **tempo proprio** τ di un corpo in movimento. Nel sistema di riferimento del laboratorio in un intervallo di tempo dt il corpo avrà percorso una distanza dx, ma nel sistema istantaneamente solidale lui è fermo, quindi ($dx' = 0$) Allora utilizzando la costanza dell'intervallo invariante:

$$\begin{aligned} (cd\tau)^2 &= (cdt)^2 - dx^2 \\ d\tau &= dt\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{cdt}\right)^2} \end{aligned} \tag{51}$$

cioè:

$$d\tau = \frac{1}{\gamma}dt \tag{52}$$

con γ calcolato con la velocità istantanea del corpo in movimento. Se vogliamo l'intervallo di tempo proprio per un osservatore in movimento con velocita

$v = v(t)$ dobbiamo integrare la relazione precedente:

$$\Delta\tau = \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \tag{53}$$

Dopo questa parentesi possiamo finalmente costruire i quadrivettori che ci interessano. In cinematica si costruisce la velocità, in relatività la **quadrivelocità**. D'altronde la velocità è la differenza di spazio diviso la differenza di tempo, quindi è facile utilizzare le regole che ci siamo dati: facciamo la differenza (infinitesima) tra il quadrivettore posizione del corpo in movimento tra due istanti successivi e dividiamo per una costante: l'intervallo infitesimo di tempo proprio:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{54}$$

Possiamo subito costruire il quadrivettore impulso moltiplicando per la massa propria[19]

$$p^\mu = mu^\mu \tag{55}$$

Dall'equazione 52 e dalla definizione del quadrivettore posizione si trova:

$$u^\mu = \gamma(c, \vec{v}) \quad p^\mu = m\gamma(c, \vec{v}) \tag{56}$$

dove $\vec{v}$ è la velocità spaziale del corpo nel sistema dove calcoliamo u^μ ($d\vec{x}/dt$). Con un semplice calcolo si trova il modulo quadro di questi quadrivettori (provate):

$$u^\mu u_\mu = c^2 \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \tag{57}$$

che conferma che il modulo quadro di un quadrivettore è una costante (la velocità della luce per u^μ). Il secondo risultato è molto importante: il modulo quadro del quadrimpulso di una particella ci dà la sua massa!

Prima di continuare a studiare i quadrivettori ottenuti possiamo dare una riformulazione del principio di relatività. Abbiamo visto che un quadrivettore è definito per come trasforma sotto cambio di sistema di riferimento, allora se scriviamo un'uguaglianza tra quadrivettori, ad esempio:

$$p^\mu = mu^\mu \tag{58}$$

se questa vale in un sistema di riferimento allora vale, *nella stessa forma* ($p'^\mu = mu'^\mu$) in ogni sistema di riferimento, semplicemente perchè il lato destro

[19] A volte si definisce una massa a riposo e una massa in movimento, ma quest'ultima è un po' fuorviante. D'altronde la massa è definita dal secondo principio di Newton e questo non vale in relatività. Comunque se sentite parlare di massa a riposo è quello che abbiamo chiamato massa propria.

e sinistro dell'equazione trasformano nello stesso modo. Questo è proprio il principio di relatività: le equazioni della fisica devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento. Possiamo anche dare una generalizzazione dei quadrivettori e definire oggetti con più indici detti **tensori**. Ad esempio un tensore a due indici si scrive $T^{\mu\nu}$. Come per i quadrivettori c'è una differenza tra indici in alto e indici in basso. Probabilmente vi immaginate la definizione: "Un tensore è un oggetto che trasforma come un tensore"[20]. Allora un'equazione, per rispettare il principio di relatività deve deve essere una relazione tra gli stessi tipi di oggetti (tensori con indici nella stessa posizione). Ad esempio:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{59}$$

è una buona equazione, mentre:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} + 42u_{\mu} \tag{60}$$

non lo è. Concludiamo questa digressione guardando gli oggetti senza nessun indice. Come ad esempio la massa ("a riposo") di una particella. Questi oggetti sono detti **scalari** e non trasformano quando cambiamo sistema di riferimento. Un'altro esempio di scalare è il modulo di un vettore $x^\mu x_\mu$. L'operazione di somma sull'indice ripetuto si chiama **contrazione**, ed è come se "cancellasse" quell'indice, così che il modulo di un quadrivettore è un oggetto senza indici liberi, cioè uno scalare. L'operazione di contrazione si può fare anche tra tensori con più indici, ad esempio $T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ è uno scalare. L'importante è contrarre sempre un indice in alto con uno in basso[21].

7.1 Impulso ed energia

Torniamo adesso alla discussione del quadrivettore p^μ. Nella discussione precedente l'abbiamo chiamato quadrimpulso, e ciò era giustificato dalla somiglianza con l'impulso a cui siete abituati in meccanica Newtoniana. D'altronde per velocità $v \ll c \implies \gamma \sim 1$ e la componente spaziale di p^μ è proprio $\vec{p} = m\vec{v}$. Tuttavia l'impulso "Newtoniano" ha una proprietà fondamentale: la somma degli impulsi di tutte le particelle in un sistema isolato si conserva. Questa proprietà è così importante che qualsiasi cosa

[20] In generale ogni indice in alto trasforma con la stessa matrice con cui trasformano i quadrivettori con indice in alto, ogni indice in basso con quella con cui trasformano i quadrivettori con indice in basso.

[21] Era proprio il meno nella parte spaziale del quadrivettore con l'indice in basso infatti che faceva si che la combinazione $x^m u x_\mu$ fosse invariante, come abbiamo visto nella sezione 3. Per tensori con più indici succede la stessa cosa.

vogliate chiamare impulso in fisica deve possederla. C'è un'altra quantità fisica che si conserva in sistemi isolati: l'energia. Per fortuna nel quadrimpulso c'è ancora un posto libero, la componente temporale p^0. Se per un attimo vi fidate, si ha:

$$p^\mu = (E/c, \vec{p}) \tag{61}$$

dove E e $\vec{p}$ sono le corrette definizioni di impulso e energia relativistici. Confrontando cioè con la precedente definizione di p^μ:

$$E = m\gamma c^2 \quad \vec{p} = m\gamma\vec{v} \tag{62}$$

Nell'esercizio 3 capiremo il significato fisico di queste formule. Una conseguenza immediata è la relazione:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E} \tag{63}$$

che ci dà la velocità di una particella se conosciamo il suo impulso e la sua energia. Prima di andare avanti concludiamo il discorso sulle particelle che viaggiano più veloci della luce che avevamo lasciato in sospeso qualche sezione fa. Dalla relazione sopra vediamo che:

$$v > c \implies E < pc \tag{64}$$

ovvero sostituendo in equazione 57:

$$m^2 = \frac{p^\mu p_\mu}{c^2} \propto E^2 - p^2c^2 < 0 \tag{65}$$

Come promesso per poter viaggiare più veloce della luce una particella deve avere massa immaginaria![22]. Questo stesso ragionamento dimostra che particelle massive hanno sempre $v < c$.

Voglio adesso convincervi che l'equazione 61 è corretta. La dimostrazione completa utilizza strumenti troppo avanzati, però possiamo cercare di capire l'idea alla base. Anzitutto abbiamo bisogno di una definizione generale di impulso e energia. Per farlo generalizziamo quello che succede in meccanica Newtoniana. In assenza di forze esterne l'impulso di una particella si conserva. Ricordando la relazione che lega la forza nella direzione i-esima e il potenziale:

$$F_i = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} \tag{66}$$

abbiamo $\vec{F} = 0 \iff U(\vec{x})$ non dipende da $\vec{x}$. Ovvero l'impulso si conserva se il potenziale è uguale in tutto lo spazio, cioè se il sistema è *simmetrico* nello

[22]Ricordiamo che l'unità immaginaria i ha la proprietà $i^2 = -1$. Possiamo allora esprimere la massa di un tachione come $m_T = iM$.

spazio. Per l'energia il ragionamento è simile. Se non perturbiamo un sistema la sua energia rimane costante nel tempo, viceversa se a un certo istante facciamo lavoro sul sistema (ad esempio scuotendo una scatola piena di gas) l'energia cambia. Cosa è cambiato tra la prima situazione e la seconda? Nella prima ogni istante di tempo era uguale agli altri e l'energia si conservava. Nella seconda c'è un istante speciale, quando facciamo lavoro sul sistema, che cambia l'energia. Possiamo dire allora che l'energia si conserva se un sistema è *simmetrico* nel tempo. Rovesciamo adesso il ragionamento e *definiamo* l'impulso come la quantità che si conserva per simmetrie spaziali e l'energia come la quantità che si conserva per simmetrie temporali. Per concludere la dimostrazione avremmo bisogno di uno strumento che collega simmetrie e quantità conservate[23]. Questo strumento esiste e ci dà proprio la risposta in equazione 62 .

Vediamo adesso le conseguenze dell'equazione 61. Se facciamo il modulo quadro:

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - |\vec{p}|^2 \tag{67}$$

D'altra parte nella sezione precedente avevamo trovato $p^\mu p_\mu = m^2c^2$. Eguagliando le due espressioni allora otteniamo:

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \quad E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \tag{68}$$

con $p^2 = |\vec{p}|^2$. Questa relazione tra energia impulso, detta **relazione di dispersione** è importantissima. Anzitutto per particelle ferme otteniamo la famosa $E = mc^2$: il solo fatto di avere una massa dà un'energia, o meglio, la massa è una forma di energia. Inoltre poichè la quantità conservata è una combinazione di massa e impulso scopriamo una cosa nuova rispetto alla fisica Newtoniana: in un urto le particelle si possono scambiare non solo quantità di moto, ma anche massa. Tuttavia avere una certa massa è quello che distingue una particella da un'altra (insieme ad esempio, alla carica elettrica, lo spin...) quindi se in un urto le particelle finali hanno massa diverse da quelle iniziali, vuol dire che si sono create particelle diverse! Questo tuttavia non avviene negli urti tra palle da biliardo a cui siamo abituati. Infatti si vede che per "creare" una particella di massa m, serve un'energia minima molto grande (mc^2). Allora per velocità piccole rispetto a quelle della luce possiamo stare tranquilli, le palle da biliardo rimangono tali[24].

[23] In meccanica lagrangiana una particella è descritto da un funzionale ($\sim$ una funzione) della traiettoria detta lagrangiana. Le traiettorie fisiche da un punto A a un punto B sono quelle per cui l'integrale nel tempo della lagrangiana (detto azione) è minimo. Il Teorema di Noether lega una simmetria continua della lagrangiana a una quantità conservata.

[24] In realtà anche un corpo fermo può "trasfromarsi" in più particelle diverse, con un processo noto come **decadimento**, che studieremo più avanti. D'altronde ogni oggetto

7.2 Fotoni e effetto Doppler

L'equazione 68 ci dice un'altra cosa sorprendente, possiamo associare un'energia anche a particelle a massa zero. In particolare si ha la relazione:

$$m = 0 \implies E = pc \tag{69}$$

Allora dall'equazione 63 troviamo:

$$m = 0 \implies v = c \tag{70}$$

Particelle di massa nulla sono "costrette" a muoversi alla velocità della luce. Questo ci fa intuire che sia possibile descrivere la luce stessa come un flusso di particelle a massa nulla. In effetti questo si rivela ben più di una semplice descrizione; le particelle di luce sono dette fotoni. Concludiamo questa linea di ragionamento prendendo in prestito qualche idea dalla Meccanica Quantistica. In elettromagnetismo classico descriviamo la luce come un'onda, ad esempio per il campo elettrico:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(wt - \vec{k} \cdot \vec{x}) \tag{71}$$

Il vettore $\vec{k}$ è detto **vettore d'onda**, ha modulo $|\vec{k}| = w/c$ e verso nella direzione di propagazione dell'onda. La formula di Planck ci dà l'energia di un'onda di frequenza w:

$$E = \hbar w \tag{72}$$

dove $\hbar$ è la costante di Planck (ridotta). Se vogliamo descrivere un'onda come un insieme di particelle a massa nulla, che si propaga nella direzione del vettore d'onda, dobbiamo identificare:

$$\begin{aligned} pc &= \hbar w \\ p &= \frac{\hbar w}{c} = \hbar k \implies \vec{p} = \hbar \vec{k} \end{aligned} \tag{73}$$

Si mostra allora che frequenza e vettore d'onda sono le componenti di un quadrivettore, detto senza molta fantasia quadrivettore d'onda, proporzionale al quadrimpulso di una particella a massa nulla:

$$k^\mu = (w/c, \vec{k}) = \frac{1}{\hbar} p^\mu \tag{74}$$

---

massivo ha un'energia molto alta a disposizione, la sua energia di riposo. Questo non avviene per oggetti "classici" per vari motivi. Un decadimento può essere vietato dalla conservazione di qualche numero quantico (come la carica elettrica), oppure potrebbe avvenire per particelle libere ma essere svantaggiato energicamente dalla presenza di un potenziale esterno, come è il caso dei neutroni nei nuclei (per nostra fortuna).

Siamo sicuri che k^μ abbia tutte le proprietà dei quadrivettori perchè l'abbiamo scritto come un buon quadrivettore (p^μ) per una costante. Vediamo allora che la frequenza di un'onda elettromagnetica non è costante ma dipende dal sistema di riferimento, in particolare usando la formula 33:

$$\begin{aligned} w'/c &= \gamma(w/c - \vec{\beta} \cdot \vec{k}) = \gamma(w/c - \beta k cos\theta) \\ w' &= w\frac{1-\beta cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{75}$$

dove k e β indicano i moduli dei vettori $\vec{k}$ e $\vec{\beta}$, e si è usato la relazione $k = w/c$. Notiamo che l'angolo θ viene dal prodotto scalare tra la velocità β e k, ovvero è l'angolo tra questi due vettori nel sistema non primato, cioè dove la frequenza dell'onda è w. Questo fenomeno per il quale la frequenza di un segnale cambia a seconda del sistema di riferimento in cui la si osserva è noto come **effetto Doppler**. Alcuni casi particolari sono l'effetto Doppler **longitudinale**:

$$\theta = 0 \implies w' = w\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{76}$$

e l'effetto Doppler **trasverso**:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \implies w' = \gamma w \tag{77}$$

7.3 Sistema del centro di massa e urti

Torniamo adesso alla discussione sul quadrimpulso in relatività, e consideriamo sistemi di più particelle. Come in meccanica Newtoniana la quantità conservata è il quadrimpulso totale:

$$P^\mu_{tot} = (E_{tot}/c, \vec{P_{tot}}) = \sum_{i=1}^{N} p^\mu_i \tag{78}$$

dove p^μ_i è il quadrimpulso dell'i-esima particella, che abbiamo visto:

$$p^\mu_i = (m\gamma c, m\gamma\vec{v}) = (\sqrt{m^2c^2 + p^2}, \vec{p}) \tag{79}$$

La forma più utile da utilizzare dipende dal problema che volete risolvere. Il modulo quadro del quadrimpulso totale è detto **massa invariante** (quadra) e si calcola come sempre:

$$M^2_{inv} = \big(\sum_{i=1}^{N} E_i\big)^2 - \big(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\big)^2 \tag{80}$$

Può essere utile ricordare:

$$(\vec{p} + \vec{q})^2 = p^2 + q^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{q} = p^2 + q^2 + 2pqcos\theta \tag{81}$$

La conservazione del quadrimpulso totale è lo strumento più utile per risolvere degli urti relativistici, ovvero urti tra particelle dove l'energia "cinetica" è dell'ordine di $\sim mc^2$. Potreste pensare che per descrivere gli urti tra particelle dovremmo conoscere qualcosa sul modo in cui queste interagiscono tra di loro. D'altronde anche in meccanica classica quando due particelle cariche interagiscono l'energia si conserva solo se consideriamo anche il termine potenziale. Supponiamo però di avere un certo numero di particelle, ognuna con un certo impulso, inizialmente molto distanti tra loro Queste particelle collidono e si allontanano nuovamente. Qualunque sia stata l'interazione tra di loro durante l'urto, quando sono abbastanza lontane l'unico contributo all'energia è proprio il quadrimpulso che abbiamo visto. La conservazione di questo ci dà una relazione tra la situazione iniziale e quella finale (quando utilizziamo una P maiuscola intendamo sempre il quadrimpulso totale):

$$P^\mu_{in} = P^\mu_{fin} \qquad \sum_{i=1}^{N} p^\mu_{i,in} = \sum_{i=1}^{N} p^\mu_{i,fin} \tag{82}$$

Queste 4 equazioni mettono dei vincoli sul valore finale degli impulsi delle particelle. Ad esempio per due particelle nello stato finale di cui conosciamo la massa, dobbiamo determinare 6 componenti (i due impulsi spaziali, che determinano anche l'energia); si vede allora che rimangono 2 gradi di liberta, corrispondenti agli angoli in cui vanno le particelle. Se nel processo non ci sono direzioni privilegiate, possiamo suppore che questi angoli siano distribuiti uniformemente.

Come tutti i quadrivettori anche l'impulso totale trasforma da un sistema di riferimento all'altro con le equazioni 32. Per un insieme di particelle esiste un sistema di riferimento particolare, detto sistema del **centro di massa** dove la componente totale del quadrimpulso è nulla. Nel sistema del centro di massa di due particelle, ad esempio, queste hanno impulso uguale e opposto. Per trovare la velocità del sistema del centro di massa vale una formula simile a 63:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\vec{P}_{tot} c^2}{E_{tot}} \tag{83}$$

Potete verificare, trasformando il quadrivettore P^μ_{tot} con $\beta_{CM} = V_{CM}/c$ che l'impulso spaziale nel sistema di arrivo è effettivamente nullo. Nel sistema del centro di massa il modulo quadro della massa di P^μ, la massa invariante, assume un significato fisico chiaro:

$$M_{inv} = \sqrt{(P^\mu P_\mu)_{CM}} = \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{N} E_{i,CM}\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{i,CM}\Big)^2} = \sum_{i=1}^{N} E_{i,CM} \tag{84}$$

ovvero è l'energia totale nel centro di massa. Grazie all'invarianza del modulo di un quadrivettore, possiamo calcolarla conoscendo P^μ in un qualsiasi sistema di riferimento. Adesso abbiamo gli strumenti per studiare nel dettaglio una caratteristica molto importante degli urti: se possono avvenire. O meglio, siamo in grado di trovare l'energia minima necessaria a far avvenire un certo processo. Questa è detta **energia di soglia**. Studiamo un processo in cui per semplicità due particelle A e B si scontrano e creano una particella C, con $m_A + m_B < m_C$.

$$A + B \to C \tag{85}$$

Possiamo pensare che una parte dell'energia di A e B vada nella massa di C e una parte nel suo impulso. Allora l'energia minima sarà quella necessaria per creare solo la massa, ovvero se la particella C è ferma. Tuttavia per la conservazione dell'impulso spaziale, se la somma $\vec{p}_A + \vec{p}_B \neq 0$ la particella C non può essere creata ferma. C'è però un sistema in cui $\vec{p}_A + \vec{p}_B = 0$, il sistema del centro di massa. Allora nel centro di massa la condizione minima per creare la particella C è data dalla conservazione dell'energia:

$$E_{CM} = m_C c^2 \tag{86}$$

Noi sappiamo come legare l'energia del centro di massa al quadrimpulso in un qualsiasi sistema di riferimento: grazie alla massa invariante! Allora la condizione di soglia diventa:

$$M_{inv} c = \sqrt{(p_A + p_B)^\mu (p_A + p_B)_\mu} \geq m_A c \tag{87}$$

Negli esercizi completeremo questo problema per due casi specifici.

7.4 Quadriforza

Finora abbiamo considerato solo particelle relativistiche libere; anche per trattare gli urti abbiamo considerato lo stato delle particelle quando erano molto lontane tra di loro. Tuttavia vorremmo un analogo del secondo principio della dinamica per particelle relativistiche, che ci dica come cambia la loro posizione quando sono soggette a interazioni esterne. Vi ricordo che in meccanica Newtoniana vale:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{88}$$

dove il vettore accelerazione contiene l'informazione per ricostruire il moto della particella e il vettore forza contiene l'informazione sulle interazioni (con un campo gravitazionale, elettrico, con una molla ...). Anzitutto possiamo riscrivere l'equazione sopra come:

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_N \tag{89}$$

dove $\vec{p}_N$ è l'impulso "Newtoniano": $\vec{p}_N = m\vec{v}$. e $\vec{F}_N$ la forza che conosciamo dalla fisica non relativistica. Sembra naturale allora generalizzare all'impulso relativistico:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{90}$$

ed effettivamente questo è il modo corretto di descrivere come cambia il moto di una particella. Per ricavare questo risultato si utilizzano gli stessi strumenti necessari per mostrare che $\vec{p}$ è la quantità che si conserva se si hanno simmetrie per traslazioni spaziali[25]. Notiamo due cose importanti. Anzitutto nessuno ci garantisce che $\vec{F}$ abbia la stessa forma delle forze a cui siamo abituati ("$\vec{F}_N$"). Sicuramente per particelle che si muovono a velocità molto minori di c deve valere $\vec{F} \to \vec{F}_N$, ma potrebbero esserci correzioni relativistiche. In un certo senso siamo liberi di scegliere $\vec{F}$ come vogliamo, per trovare la migliore descrizione di ciò che osserviamo; anzi il lavoro dei fisici è proprio trovare la $\vec{F}$ corretta![26]. Successivamente osserviamo che il lato destro di questa equazione non è la componente spaziale di un quadrivettore. Infatti abbiamo moltiplicato dp^μ per dt, che non è una costante. Possiamo risolvere facilmente questo problema derivando rispetto al tempo proprio e definendo così una **quadriforza** e una **quadriaccelerazione**:

$$ma^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \tag{91}$$

Da una parte, questa ambiguità dipende dalla libertà che abbiamo di scegliere F di cui abbiamo discusso prima; dall'altra è spesso irrilevante perchè per studiare gli effetti di una forza su un corpo definiamo come questa agisce nel sistema localmente inerziale, dove $F_N = F$ e quindi conosciamo F. Approfondiremo questi concetti negli esercizi. Se espandiamo la componente

[25] In particolare data una lagrangiana L (in una dimensione per semplicità di notazione) dipendente dalla posizione x, dalla sua derivata $\dot{x}$ e dal tempo t si definisce l'impulso coniugato $p = \frac{\partial L}{\partial t}$ e l'equazioni del moto sono: $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x}$. Noi abbiamo chiamato F il lato destro di questa equazione.

[26] Nel formalismo lagrangiano la relatività ristretta impone delle condizioni sulla forma di $\vec{F}$, in particolare la lagrangiana stessa deve essere un'invariante di Lorentz per rispettare il prinicipio di relatività. Rimane comunque una certa libertà.

spaziale dell'equazione 91 troviamo:

$$\vec{F} = \frac{d}{d\tau}(m\gamma\vec{v}) = m\frac{d\gamma}{d\tau}\vec{v} + m\gamma\frac{d\vec{v}}{d\tau} \tag{92}$$

Come vediamo l'effetto di una forza relativistica è diverso da quello a cui siamo abituati. Infatti oltre ad aumentare la velocità della particella (secondo termine a destra dell'equazione sopra) una parte di forza è spesa per aumentare γ. Quando $v \sim c$, γ è molto grande e il primo termine diventa dominante. Per questo anche continuando ad "accelerare" una particella la sua velocità rimane minore di c.

Notiamo che la componente temporale dell'equazione 91:

$$\begin{aligned} \frac{dp^0}{d\tau} &= F^0 \\ \frac{dE}{d\tau} &= F^0 c \end{aligned} \tag{93}$$

ci dice, come potevamo aspettarci, come cambia l'energia di una particella quando è sottoposta a forze esterne.

In generale il concetto di forza in relatività non è molto preciso, nè troppo utile. Un motivo è che una forza alla Newton tra due particelle, implica un'azione a distanza che sembrerebbe violare lo spirito della relatività: se l'effetto di una particella su un'altra è istantaneo abbiamo propagato un segnale a una velocità maggiore di c. In realtà questo non avviene se costruiamo una teoria nel modo corretto; spesso queste teorie non utilizzano il concetto di forza. Un'eccezione è la forza di Lorentz che mantiene la sua forma e la sua utilità. D'altronde sono state proprio le equazioni di Maxwell a dirci che la velocità della luce è costante, dunque ci possiamo aspettare che la teoria elettromagnetica sia relativisticamente corretta.

7.5 Elettromagnetismo

Concludiamo queste dispense parlando brevemente dei fenomeni elettromagnetici in relatività. Come abbiamo notato sopra l'elettromagnetismo è una teoria che sembra essere naturalmente relativistica. Predice infatti che la velocità della luce sia costante. Ci possiamo quindi aspettare che non si debba modificare, e in effetti è così. Ad esempio la forza di Lorentz per una particella carica in un campo elettrico e magnetico ha la corretta forma:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{94}$$

L'unica differenza è nella parte "cinetica" dell'equazione del moto. Infatti come abbiamo detto sopra, la forza è uguale alla variazione dell'impulso relativistico, non alla derivata di $m\vec{v}$. Allora l'equazione del moto ha la forma:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{95}$$

Notiamo che compare la derivata rispetto al tempo t, e non al tempo proprio τ. Apparentemente quest'equazione non rispetta il principio di reatività di cui abbiamo parlato sopra. In realtà possiamo scriverla come equazione tra tensori dello stesso tipo, ma ha una forma più complicata di quelle viste finora. Il motivo è che campo elettrico e magnetico non sono le componenti spaziali di un quadrivettore, ma si combinano con una relazione (e quindi leggi di trasformazione) più complicata. Possiamo intuire come mai $\vec{E}$ e $\vec{B}$ non possano essere componenti di due quadrivettori distinti, ma debbano appartenere a uno stesso oggetto più grande (un tensore a due indici). Infatti supponiamo che una particella si muova con velocità $\vec{v}$ in presenza di un campo magnetico. Questa subirà un'accelerazione, come si vede dalla forza di Lorentz. Se tuttavia ci mettiamo nel sistema solidale con la particella, lei ha velocità nulla e dunque non può essere accelerata da un campo magnetico. L'unico campo che può accelerarla è un campo elettrico: quello che nel sistema dove la particella si muove è un campo magnetico si trasforma (almeno in parte) in un campo elettrico nel sistema dove la particella è ferma! Possiamo vedere questo fenomeno anche da un altro punto di vista. Consideriamo un flusso di elettroni che si muove in un filo, dove sono presenti in uguale densità delle cariche positive così che il filo sia complessivamente neutro. In questo sistema si ha una corrente e dunque un campo magnetico. Se adesso facciamo un boost nel sistema dove gli elettroni sono fermi avremo che la densità delle cariche positive aumenta per effetto della contrazione delle lunghezze ($\rho = \Delta q/\Delta l$). Si crea allora una densità netta $\rho > 0$ e dunque un campo elettrico! Per formalizzare il ragionamento possiamo notare che una densità di corrente è descritta da:

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \tag{96}$$

Considerando la contrazione dele lunghezze possiamo scrivere:

$$\rho = \rho_0\gamma \tag{97}$$

con ρ_0 la densità di cariche nel sistema dove sono a riposo. Allora $\vec{j}$ è la componente spaziale della quadrivelocità per una costante. Possiamo allora costruire la **quadricorrente**:

$$j^\mu = \rho_0 u^\mu \tag{98}$$

Ricordando la definizione di u^μ:

$$j^\mu = (\rho_0\gamma c, \rho_0\gamma\vec{v}) = (c\rho, \vec{j}) \tag{99}$$

La quadricorrente trasforma come tutti i quadrivettori con l'equazioni 33. Scriviamole un'ultima volta:

$$\begin{cases} c\rho' = \gamma(c\rho - \vec{\beta} \cdot \vec{j}) \\ \vec{j}' = \gamma(\vec{j} - \vec{\beta} c\rho) \end{cases} \tag{100}$$

Una corrente in un sistema diventa una densità di carica in un altro. Poichè una densità di carica genera un campo elettrico e una corrente genera un campo magnetico, i campi si devono mescolare tra loro quando cambiamo sistema di riferimento. Campo elettrico e magnetico hanno in tutto 6 componenti, dunque non possiamo metterli entrambi in un quadrivettore. L'oggetto geometrico più piccolo con 6 componenti in 4 dimensioni è un tensore a due indici (cioè una matrice) antisimmetrico. Questo è il **tensore dei campi** $F^{\mu\nu}$ ed effettivamente è l'oggetto che descrive campi elettrici e magnetici.

8 Esercizi

8.1 Un treno di fisici

Un gruppo di fisici sta andando in treno all'inaugurazione del nuovo acceleratore di particelle che sicuramente scoprirà la supersimmetria. Un gruppo di ingegneri, gelosi dei fisici, decide di fare un attentato al treno e piazza due bombe all'ingresso e all'uscita di una galleria in cui dovrà passare il treno dei fisici. Il treno ha lunghezza L mentre la galleria ha lunghezza $L/2$. Gli ingegneri decidono di far esplodere entrambe le bombe quando l'inizio del treno è all'uscita della galleria. Per fortuna gli ingegneri non conoscono la relatività ristretta e i fisici riescono a salvarsi andando abbastanza veloci.

1. Scrivere i quadrivettori corrispondenti all'esplosione delle due bombe nel sistema degli ingegneri. Specificare l'origine spaziale e temporale utilizzata.

2. Scrivere gli stessi quadrivettori nel sistema dei fisici, supponendo che il treno vada a velocità v.

3. Qual è la minima velocità v con la quale i fisici si salvano?

4. Secondo gli ingegneri come hanno fatto i fisici a salvarsi? E secondo i fisici?

8.2 God bless America

In questo esercizio "risolviamo" il paradosso dei gemelli. L'America organizza una missione spaziale per esportare democrazia, con una navicella che si inoltra nello spazio profondo (che sappiamo essere pieno di petrolio) e torna indietro. La traiettoria della navicella vista dalla Terra e supposta in una dimensione per semplicità, è:

$$\begin{cases} x = vt & 0 < t \leq T - a \\ x = -\frac{v}{2a}(t-T)^2 + v(T-a) + \frac{av}{2} & T - a < t \leq T + a \\ x = v(2T - t) & T - a < t \leq 2T \end{cases} \tag{101}$$

Le costanti v ed a sono parametri della traiettoria che inizialmente supponiamo dati. La comandante della missione è Alice, mentre suo fratello gemello Bob rimane a Terra. La missione dura in totale $2T = 1$ anno terrestre.

1. Quanto è il tempo proprio passato per Bob quando Alice torna dalla missione?

2. Per Alice invece? date la risposta in funzione dei parametri a e v?

3. Alice è stanca di Bob, così prende i comandi della navicella e modifica i parametri a e v. Che valori deve utilizzare affinchè un anno sulla navicella corrisponda a 80 anni sulla Terra?

Può essere utile l'integrale:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(a\sin(x) + x\sqrt{1-x^2}) \tag{102}$$

e sapere che il corpo umano può sopportare accelerazioni fino a 5g.

8.3 L'inganno della cadrega

Un satellite in orbita geostazionaria e circolare trasmette segnali a frequenza w ad un'antenna sulla terra. Inoltre il satellite può oscillare radialmente attorno a quest'orbita con una frequenza Ω e ampiezza A.

1. Qual è la frequenza dei segnali ricevuta dall'antenna, nel caso $A = 0$?

2. Sapendo che l'antenna ha un margine di errore $\delta \equiv \frac{\Delta w}{w}$ oltre il quale l'informazione contenuta in un segnale è compromessa, trovare la massima ampiezza A con cui può oscillare il satellite attorno all'orbita circolare.

8.4 L'equazione più famosa del mondo

Utilizzate gli sviluppi di Taylor per dare un'espressione dell'energia di una particella con $v \ll c$. Che interpretazione fisica ha questo risultato?

8.5 Pallette e pallettoni

L'hobby preferito dei fisici sperimentali delle alte energie è far scontrare particelle. Vogliamo completare lo studio del processo:

$$A + B \rightarrow C \tag{103}$$

Supponiamo per semplicità $m_A = m_B \equiv m \neq m_C \equiv M$ In particolare vogliamo trovare l'energia di soglia nei due casi:

1. Le particelle A e B vengono sparate una contro l'altra con impulsi opposti.

2. La particella A viene sparata contro la particella B che è utilizzata come bersaglio fermo.

Ragionate sui vantaggi e gli svantaggi di entrambi i metodi.

8.6 No atomo, ma che fai?

Consideriamo un atomo di massa M. Un elettrone dell'atomo può trovarsi in due stati, con una differenza di energia $\Delta E = \epsilon$. Quando l'elettrone è nello stato con energia maggiore l'atomo si dice *eccitato*. L'atomo può passare dallo stato eccitato a quello deeccitato emettendo un fotone γ. Indichiamo il processo con:

$$M^* \rightarrow M + \gamma \tag{104}$$

Utilizzando la relazione di Planck tra energia e frequenza di un fotone:

1. Dire, senza fare i conti, quanto vi aspettate sia la frequenza dell'atomo emesso.

2. Fate i conti, considerando la conservazione del quadrimpulso durante il processo.

3. C'è un limite in cui il secondo risultato coincide con quello intuitivo? (A meno che non abbiate avuto suito l'intuizione corretta, in quel caso bravi!)

BONUS: Se consideriamo un insieme di atomi come quello sopra, a temperatura T, come è distribuita la probabilità di osservare un atomo a frequenza w? Potete usare la distribuzione di Maxwell-Boltzmann per le velocità di un gas a temperatura T:

$$p(v)dv \propto v^2 exp\left\{-\frac{Mv^2}{2K_BT}\right\} \tag{105}$$

Supponete inoltre che i fotoni siano emessi in direzioni random e fate una media di queste.

8.7 La cosa più importante di tutta la fisica

Datemi un oscillatore armonico e vi descriverò il mondo

Consideriamo un oscillatore armonico relativistico, ovvero una particella sottoposta a una forza di richiamo lineare nel suo sistema di riferimento. In una dimensione:

$$F = -kx \tag{106}$$

Trovate le prime correzioni relativistiche alla frequenza di oscillazione.

8.8 Verso l'infinto e oltre

Un vostro amico ingegnere ha studiato la seconda equazione della dinamica ed è convinto che accelerando in modo costante una particella si possa andare a qualsiasi velocità: "La formula dice questo!" continua a ripetere. Provate che ha torto studiando una particella di massa m sottoposta ad una forza costante nel suo sistema di riferimento. Trovate la legge oraria della particella in un sistema di riferimento in cui al tempo $t = 0$ è ferma e disegnate la traiettoria nel piano x_0x.
Può essere utile il seguente integrale:

$$\int dx \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \tag{107}$$

9 Soluzioni

9.1 Un treno di fisici

Mettiamo l'origine del sistema di riferimento spaziale all'inizio della galleria, con il tempo $t = 0$ che, nel sistema degli ingegneri, coincide con lo scoppio delle bombe. Allora i quadrivettori corrispondenti alle esplosioni sono:

$$x^{\mu}_{1,ing} = (0,0) \qquad x^{\mu}_{2,ing} = (0, L/2) \tag{108}$$

Nel sistema dei fisici dobbiamo trasformare con la matrice di Lorentz:

$$x^{\mu}_{fis} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x_{ing} \tag{109}$$

con:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \tag{110}$$

Allora:

$$x^{\mu}_{1,fis} = (0,0) \qquad x^{\mu}_{2,fis} = (-\beta\gamma L/2, \gamma L/2) \tag{111}$$

I fisici si salvano se l'esplosione avviene ad una distanza maggiore di L, la coordinata in cui cì'è la fine del treno. Allora dobbiamo imporre:

$$\gamma L/2 > L \tag{112}$$

da cui si risolve per la velocità.

Per i fisici le due esplosioni non avvengono simultaneamente, per cui prima esplode la bomba alla fine della galleria. poi passano e infine esplode quella all'inizio. Per gli ingegneri il treno dei fisici è più corto per la contrazione della lunghezza e le bombe non prendono i fisici.

9.2 God Bless America

Per Bob il tempo passato è T.

Per trovare il tempo proprio di Alice dobbiamo integrare:

$$d\tau = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} \tag{113}$$

La velocità nei tre pezzi è:

$$\begin{cases} \dot{x} = v & 0 < t \leq T - a \\ \dot{x} = -\frac{v}{a}(t - T) + v & T - a < t \leq T + a \\ x = -v & T - a < t \leq 2T \end{cases} \tag{114}$$

Sostituendo nella formula sopra e integrando si ottiene:

$$\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}(2T - 2a) + \int dt \sqrt{1 - (\frac{v}{a}(t - T) + v)^2/c^2} \tag{115}$$

che si riconduce all'integrale dato.

Dato il risultato del punto sopra basta imporre che il risulttao sia 40 annui.

9.3 L'equazione più famosa di tutta la fisica

Espandendo si trova:

$$E = m\gamma c^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (116)$$

9.4 Pallette e pallettoni

L'energia di soglia è m_C. Supponendo i due impulsi vengano sparati uno contro l'altro con impulso p i quadrimulsi sono:

$$p_1 = (\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \vec{p}c) \qquad p_1 = (\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, -\vec{p}c) \qquad (117)$$

allora:

$$p_{tot} = p_1 + p_2 = (2\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, 0) \qquad (118)$$

e la massa invariante:

$$M_{inv}^2 = 4(m^2c^4 + p^2c^2) \qquad (119)$$

Nel secondo caso si ha:

$$p_1 = (\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \vec{p}c) \qquad p_1 = (mc^2, 0) \qquad (120)$$

e

$$p_{tot} = p_1 + p_2 = (\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + m, \vec{p}c) \qquad (121)$$

cioè:

$$M_{inv}^2 = m^2c^4 + 2m\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \qquad (122)$$

9.5 No atomo, ma che fai?

Il quadrimpulso iniziale (usiamo c=1) è:

$$p^\mu = (M + \epsilon, 0) \qquad (123)$$

Dopo il decadimento il fotone e l'atomo si muoveranno con impulso p:

$$p_M = (\sqrt{M^2 + p^2}, p) \qquad p_\gamma = (p, -p) \qquad (124)$$

allora la conservazione del quadrimulso:

$$M + \epsilon = \sqrt{M^2 + p^2} + p \qquad (125)$$

e la frequenza dell'onda emessa è: $w = p/\hbar$. Nel limite in cui $M \gg \epsilon$ si ha $w = \epsilon/\hbar$.

9.6 Verso l'infinito e oltre

Si veda il libro "Lezioni di Meccanica Classica", Massimo d'Elia, pag. 321-322.