

Circuiti

Matteo Pioldi*

13 febbraio 2023

Sommario

La lezione tratta di circuiti lineari in corrente continua e alternata, introducendo i principali componenti circuitali (resistenze, capacità, induttanze). Saranno presentati il principio di sovrapposizione e alcune sue conseguenze e il formalismo dei fasori. Queste conoscenze verranno impiegate per affrontare esempi ed esercizi svolti.

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Prime definizioni	3
1.2	Leggi di Kirchhoff	4
2	Principali componenti	6
2.1	Alcuni componenti lineari	6
2.2	Circuiti puramente resistivi DC	8
2.3	Partitore di tensione	8
2.4	Partitore di corrente	9
2.5	Circuito RC DC	9
2.6	Circuito LR DC	10
3	Principio di sovrapposizione lineare	11
3.1	La proprietà di linearità	11
3.2	Teorema di Millman	11
3.3	Teorema di Thévenin	12
3.4	Teorema di Norton	13

*matteo.pioldi@sns.it

4	Fasori	14
4.1	Perché i fasori?	14
4.2	L'esponenziale complesso	14
4.3	Circuito RC con segnale periodico	15
4.4	Circuito RL con segnale periodico	17
4.5	Circuito RLC	17
5	Esercizi	19
5.1	Esercizi Svolti	19
5.1.1	Un esempio di principio di sovrapposizione	19
5.1.2	Trasformazione Y- Δ	20
5.1.3	Cubo di resistenze	21
5.1.4	Anello vs Möbius	22
5.1.5	Scala LC infinita	25
5.1.6	Trovare la risonanza	26
5.2	Altri esercizi	29
5.2.1	Solidi platonici	29
5.2.2	Griglia infinita di resistenze	29
5.2.3	Scala di resistenze	29
5.2.4	Scala di resistenze e generatori	30
5.2.5	Circuito frattale quadrato	30
5.2.6	Scatola nera	31

1 Introduzione

1.1 Prime definizioni

Un circuito è una sequenza di elementi attraverso i quali può scorrere corrente senza accumuli o perdite di carica netta. Nello specifico, vengono solitamente realizzati connettendo elementi come generatori, resistenze, condensatori e induttanze (di cui parleremo più tardi) utilizzando fili di materiale conduttore (ad esempio, rame). Possiamo quindi dare le prime definizioni:

- **Nodo:** punto in cui convergono tre o più fili;
- **Ramo:** connessione tra due nodi diversi;
- **Maglia:** successione di rami consecutivi in cui l'ultimo si ricollega al nodo di partenza.

Un componente può collegarsi a due o più fili e in base al numero di queste giunzioni viene definito bipolare, tripolare, quadripolare... In questa lezione ci concentreremo sui componenti bipolari. Componenti bipolari collegati tra di loro senza nodi in mezzo vengono definiti *in serie*. Rami che connettono gli stessi punti vengono detti *in parallelo*.

È inoltre necessario definire due grandezze fondamentali per lo studio del comportamento di un circuito:

- **Differenza di potenziale tra due punti:** è il rapporto tra il lavoro fatto per spostare una carica da un punto all'altro (nelle nostre ipotesi di lavoro risulterà indipendente dal percorso) e il valore della carica stessa e viene misurata in Volt [V], che è un'energia su carica;
- **Corrente:** quantità di carica che passa in un punto per unità di tempo, misurata in Ampère [A].

Possiamo già dedurre da queste definizioni che la potenza dissipata in un ramo con differenza di potenziale (ddp) V tra i suoi estremi e in cui passa una corrente I è:

$$P = VI. \tag{1}$$

Nella nostra trattazione generalmente consideriamo le porzioni di materiale conduttore tra un elemento e l'altro come equipotenziali (ossia la differenza di potenziale tra due loro punti è nulla). Possiamo già quindi dedurre che la differenza di potenziale fra le estremità di un ramo è la somma delle ddp fra i capi degli elementi connessi in parallelo presenti sul ramo stesso e che le correnti passanti per elementi collegati in serie sono uguali.

1.2 Leggi di Kirchhoff

- **Prima legge di Kirchhoff**

La somma delle correnti dei rami connessi a un nodo, prese con segno (convenzionalmente, positivo per le entranti e negativo per le uscenti), è nulla. In formule:

$$\sum_i I_i = 0, \quad (2)$$

dove I_i è la corrente passante nell' i -esimo ramo, con il segno dettato dalla convenzione. Questa legge deriva dall'assunzione che nel circuito non avvengano accumuli di carica netta: la quantità di carica che entra deve essere compensata da quella che esce.

- **Seconda legge di Kirchhoff**

La somma delle differenze di potenziale misurate ai capi dei rami che formano una maglia è nulla. In formule:

$$\sum_i V_i = 0, \quad (3)$$

dove V_i è la ddp ai capi dell' i -esimo ramo della maglia. Questa legge vale finché gli unici campi magnetici che prendiamo in considerazione sono quelli confinati negli elementi circuitali come le induttanze. Da questa legge si deduce anche che ai capi di due rami in parallelo la ddp è uguale: infatti, è sufficiente considerare la maglia formata da uno dei due rami seguito dall'altro percorso al contrario. Chiamando i rami in considerazione, che si estendono per esempio da un punto A a un punto B, rispettivamente 1 e 2 (cambiamo segno alla ddp ai capi di 2 perché lo stiamo percorrendo al contrario):

$$V_{1,A \rightarrow B} + V_{2,B \rightarrow A} = 0 \rightarrow V_{1,A \rightarrow B} = V_{2,A \rightarrow B}, \quad (4)$$

e ne deduciamo che effettivamente la ddp dipende solo dal punto di inizio e dal punto di fine (considerando anche il loro ordine, che ne detta il segno), definendo univocamente V_{AB} .

Notiamo che è quindi possibile dare una definizione di potenziale all'interno del circuito: basta scegliere un punto O che faccia da riferimento (in alcuni casi viene detto che quel punto è "messo a terra"), in cui fissare il valore $V = 0$ e definire il potenziale in tutti gli altri punti in funzione della loro differenza di potenziale rispetto a O :

$$V_A \equiv V_{AO} \rightarrow V_{AB} = V_A - V_B. \quad (5)$$

Aggiungiamo una convenzione: le correnti (che immaginiamo composte da cariche positive) vanno da punti di potenziale più alto a potenziale più basso. I generatori servono a riportare le cariche in punti ad alto potenziale, poi queste perderanno la loro energia passando per gli altri componenti del circuito. Infatti, considerando una maglia con un generatore di ddp V e altri N componenti, spesso la seconda legge di Kirchhoff si scrive come:

$$V = \sum_{i=1}^N (\Delta V)_i, \quad (6)$$

con $(\Delta V)_i$ le cadute di potenziale ai capi dei vari elementi.

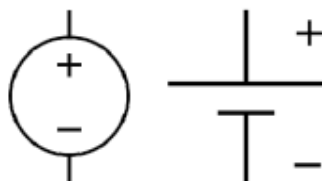
2 Principali componenti lineari

2.1 Alcuni componenti lineari

Passiamo a una breve rassegna dei componenti che potremo incontrare nella nostra trattazione. Non ci soffermeremo sui loro principi di funzionamento, ma solo sul loro effetto in termini dei valori della tensione e della corrente all'interno del circuito. I modelli che presenteremo si riferiscono a casi ideali e hanno i loro limiti di validità.

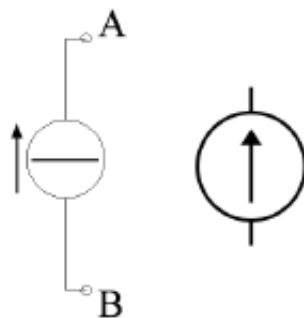
- **Generatori di tensione**

Fissano il valore della differenza di tensione ai loro capi (il nostro modello non può prevedere cosa possano fare generatori di tensione in parallelo). Presentiamo dei simboli usati per questo componente:



- **Generatori di corrente**

Fissano il valore della corrente nel ramo in cui si trovano (il nostro modello non può prevedere cosa possano fare generatori di corrente in serie). Presentiamo dei simboli usati per questo componente:

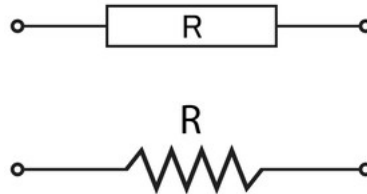


- **Resistenze**

Introducono un “attrito” nel moto delle cariche. Per esse vale la relazione:

$$V = RI, \tag{7}$$

e se ne deduce che dissipano una potenza pari a $VI = RI^2 = V^2/R$, che viene convertita in calore. L'unità di misura della resistenza R è l'Ohm Ω . Presentiamo dei simboli usati per questo componente:



- **Capacità**

Sono elementi che prevedono accumuli di cariche opposte che generano un campo elettrico (ad esempio, un condensatore a facce piane e parallele): la carica totale è nulla (così da salvare l'ipotesi di assenza di accumuli di carica netta e la prima legge di Kirchhoff) e il circuito scambia energia con il campo elettrico contenuto in essi. Vale la legge:

$$Q = CV \rightarrow \frac{dQ}{dt} = I = C \frac{dV}{dt}. \quad (8)$$

Vedremo a breve che per la capacità non avviene una vera e propria dissipazione di energia, quanto un immagazzinamento di quest'ultima nel campo elettrico, che può restituirla in seguito. L'unità di misura della capacità C è il Farad F . Presentiamo il simbolo usato per questo componente:



- **Induttanze**

Questi elementi simulano l'interazione della corrente con il campo magnetico. Nel nostro modello tale interazione sarà della forma:

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad (9)$$

Ciò si deve al fatto che le correnti inducono dei campi magnetici, i quali contengono energia: la potenza persa dalla corrente in un'induttanza viene immagazzinata nel campo, che può restituirla in seguito. L'unità di misura dell'induttanza L è l'Henry H . Presentiamo il simbolo usato per questo componente:



Inoltre distinguiamo tra circuiti in corrente continua (“Direct Current”, abbreviato in DC), dove i generatori inducono ddp/correnti costanti nel tempo, e circuiti in corrente alternata (“Alternate Current”, abbreviato in AC), dove invece ci sono generatori che inducono ddp/correnti che variano nel tempo con leggi descritte da funzioni periodiche. Possiamo ora passare ad alcuni esempi di circuiti lineari (saranno tutti in corrente continua, mentre aspetteremo di introdurre i fasori per studiare quelli in alternata).

2.2 Circuiti puramente resistivi DC

Il più semplice esempio di circuito lineare è una singola maglia con un generatore di ddp V e una resistenza R : si deduce subito che al suo interno scorrerà una corrente $I = V/R$ (basta pensare alla seconda legge di Kirchhoff). Possiamo complicare leggermente la questione e supporre che il generatore sia collegato a due resistenze R_1 e R_2 in serie o in parallelo tra di loro. Nel primo caso la seconda legge di Kirchhoff dice che:

$$V - R_1 I - R_2 I = 0, \quad (10)$$

notando che $I = V/(R_1 + R_2)$. Otterremmo la stessa I sostituendo la serie di R_1 e R_2 con la resistenza equivalente $R_{eq} = R_1 + R_2$, arrivando a $I = V/R_{eq}$. Nel secondo caso, invece, possiamo già trovare le correnti nei rami delle rispettive resistenze come $I_1 = V/R_1$ e $I_2 = V/R_2$, e allora:

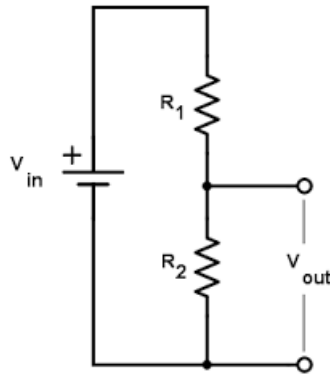
$$I = I_1 + I_2 = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}}, \quad (11)$$

concludendo che è possibile sostituire il parallelo con una resistenza R_{eq} per trovare $I = V/R_{eq}$, dove stavolta $R_{eq} = (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}$. Circuiti più complicati possono essere equivalentemente risolti sostituendo gradualmente serie e paralleli di resistenze con i rispettivi equivalenti, fino ad arrivare al circuito con una sola R , di cui abbiamo parlato all’inizio del paragrafo. Questa utile tecnica tuttavia non risolve tutti i circuiti puramente resistivi che esistono: pensate ad esempio a delle resistenze disposte in modo da formare dei solidi...

2.3 Partitore di tensione

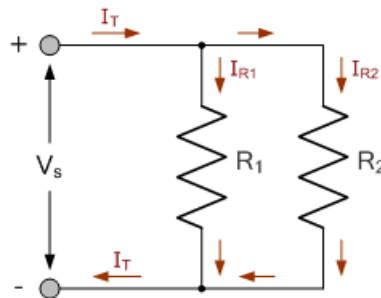
Un dispositivo semplice ma interessante può essere assemblato usando solo resistenze. Considerando un circuito con un generatore di ddp V e

due resistenze in serie R_1 e R_2 , otteniamo che la corrente passante per le resistenze è pari a $V/(R_1 + R_2)$. Ne deduciamo che le cadute di potenziale ai capi delle resistenze sono rispettivamente $R_1/(R_1 + R_2)V$ e $R_2/(R_1 + R_2)V$: se calibriamo adeguatamente i valori delle resistenze possiamo spartire come vogliamo il potenziale fra le due resistenze.



2.4 Partitore di corrente

Consideriamo un generatore di tensione V collegato al parallelo di due resistenze R_1 e R_2 : nella prima resistenza passa una corrente $I_1 = V/R_1$ e nella seconda $I_2 = V/R_2$. Sapendo che $V = I_{tot}R_{eq} = (I_1 + I_2)R_1R_2/(R_1 + R_2)$, ne deduciamo $I_1 = R_2/(R_1 + R_2)I_{tot}$ e $I_2 = R_1/(R_1 + R_2)I_{tot}$.



2.5 Circuito RC DC

Abbiamo una resistenza R , una capacità C e un generatore di potenziale costante V . Dalla seconda legge di Kirchhoff deduciamo che:

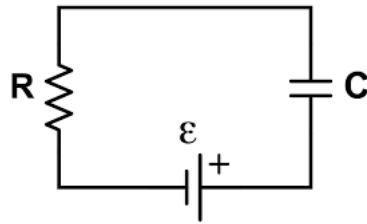
$$V = RI + \frac{Q}{C} \rightarrow V = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}. \quad (12)$$

Risolvendo, nell'ipotesi che il generatore debba essere stato acceso in un certo momento, che faremo coincidere con l'origine dei tempi $t = 0$, e che in quel

momento avessimo $Q = 0$:

$$Q(t) = CV(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (13)$$

con $\tau = RC$. Derivando si trova la corrente $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ con $I_0 = V/R$.



2.6 Circuito LR DC

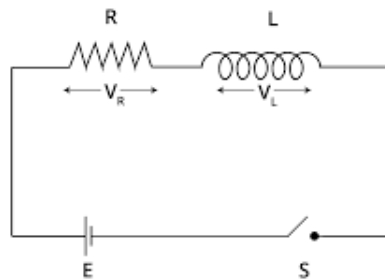
Abbiamo una resistenza R , un'induttanza L e un generatore di potenziale costante V . Ne deduciamo:

$$V = RI + L \frac{dI}{dt}. \quad (14)$$

Si risolve analogamente alla precedente, trovando (condizione iniziale $I(t = 0) = 0$)

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (15)$$

dove $\tau = L/R$.



3 Principio di sovrapposizione lineare

3.1 La proprietà di linearità

Una parte fondamentale dello studio dei circuiti consiste nello studio di come essi rispondano a una differenza di potenziale tra due punti fissata (ad esempio da un generatore di potenziale), ossia quale sia il valore della corrente nei vari punti in funzione di questa ddp. Possiamo anche fare l'opposto, ossia osservare come cambino i valori del potenziale nei vari punti (rispetto a un certo riferimento) in funzione di una corrente fissata su di un ramo (si può fare con un generatore di corrente). La risposta in termini di corrente/ddp dei circuiti assemblati con resistenze, capacità e induttanze in funzione di ddp/correnti fissate dall'esterno gode della proprietà di linearità: ciò vuol dire che, ad esempio, se la risposta a una tensione $V_1(t)$ è una corrente $I_1(t)$ e a $V_2(t)$ segue $I_2(t)$, allora la risposta del circuito a $\alpha V_1(t) + \beta V_2(t)$ è $\alpha I_1(t) + \beta I_2(t)$ (α e β sono delle costanti).

Questo vuol dire, ad esempio, che se abbiamo un circuito con più generatori di tensione, possiamo risolverlo nel modo seguente:

1. Considerare il circuito in cui abbiamo sostituito con un “corto”, cioè una porzione di filo conduttore, tutti i generatori tranne uno e risolverlo trovando le correnti nei vari rami (si dice che stiamo “cortocircuitando” i generatori);
2. Ripetere il procedimento per ogni generatore;
3. Trovare la risposta complessiva in corrente nei diversi rami sommando le risposte ai singoli generatori trovate nei punti precedenti, ramo per ramo.

Per avere un esempio, vedere l'esercizio svolto 5.1.1. Nel caso avessimo anche generatori di corrente, possiamo agire come prima e considerare solo un generatore, che sia di corrente o di ddp, per volta e ignorare tutti gli altri. Va fatta solo una precisazione: ignorare i generatori di corrente vuol dire sostituirli con un aperto (ossia mandare a 0 la corrente nel ramo cui appartengono, come se qualcuno avesse tagliato il filo). Da questa proprietà derivano vari teoremi, che verranno illustrati nel seguito e possono servire a districare situazioni complicate.

3.2 Teorema di Millman

Dato un circuito binodale in cui abbiamo diversi rami in parallelo, alcuni dei quali contenenti generatori di ddp V_k e resistenze R_k , altri semplicemente

resistenze R_i e altri ancora generatori di corrente I_m , la differenza di potenziale fra A e B è pari a:

$$V_{AB} = \frac{\sum \frac{V_k}{R_k} + \sum I_m}{\sum \frac{1}{R_k} + \sum \frac{1}{R_i}}. \quad (16)$$

[N.B.: Non ci sono né generatori di ddp senza resistenze né generatori di corrente seguiti da resistenze perché tali rami avrebbero ddp fissata.]

Dimostrazione:

Poniamo $V_B = 0$ e consideriamo i contributi individuali dei generatori:

- **Generatore di ddp V_s :**

Possiamo ottenere V_A ragionando sul partitore di tensione formato da R_s e il parallelo di tutte le altre resistenze, escluse quelle in serie ai generatori di corrente. Otteniamo:

$$V_{A,k} = \frac{(\sum' \frac{1}{R_k} + \sum \frac{1}{R_i})^{-1}}{R_s + (\sum' \frac{1}{R_k} + \sum \frac{1}{R_i})^{-1}} V_k = \frac{\frac{V_k}{R_k}}{\sum \frac{1}{R_k} + \sum \frac{1}{R_i}}, \quad (17)$$

dove il simbolo \sum' indica la somma in cui ignoriamo R_s .

- **Generatori di corrente I_m :**

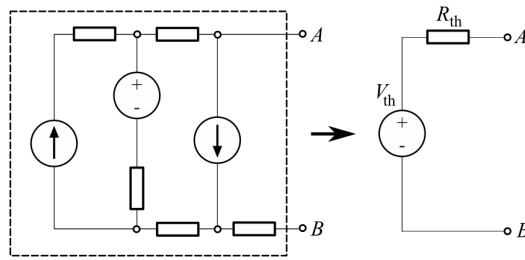
Basta considerare che la corrente totale I_m passa nel parallelo di tutte le resistenze eccetto la resistenza sul ramo del generatore e quelle in serie agli altri generatori di corrente. Quindi il contributo a V_A è:

$$V_{A,m} = \frac{I_m}{\sum \frac{1}{R_k} + \sum \frac{1}{R_i}}. \quad (18)$$

Sommare questi risultati dimostra l'enunciato.

3.3 Teorema di Thévenin

Qualsiasi rete elettrica contenente solo generatori di corrente e di potenziale e resistenze, posta tra due punti A e B , può essere sostituita dalla serie tra un generatore di potenziale V_{th} e una resistenza R_{th} . V_{th} è pari alla ddp che si misura tra A e B a circuito aperto, ossia quando non può passare corrente tra A e B , mentre R_{th} è la resistenza equivalente che misuriamo tra A e B quando cortocircuitiamo tutti i generatori di tensione e apriamo i rami di tutti i generatori di corrente.

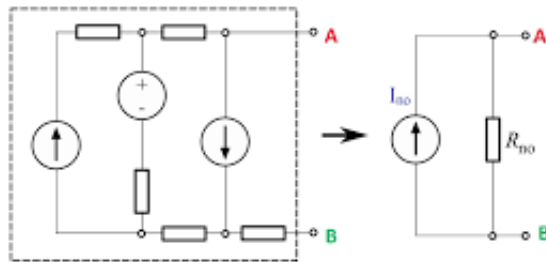


Dimostrazione:

Il teorema sta dicendo che se colleghiamo un generatore di corrente I_{ext} tra A e B , $V_{AB} = V_{th} - R_{th}I_{ext}$. Questo può essere ottenuto risolvendo la rete in considerazione, con l'aggiunta di I_{ext} , usando il principio di sovrapposizione. Ogni volta che prendiamo in considerazione un generatore interno alla rete dobbiamo passivare I_{ext} , ossia considerare il circuito con il ramo AB aperto. Pertanto, i contributi di ciascuno di questi generatori verranno valutati a circuito aperto e, una volta sommati, daranno V_{th} come definita nell'enunciato. Invece, per valutare il contributo di I_{th} , dobbiamo passivare tutti i generatori interni, ottenendo che il contributo alla ddp è effettivamente $R_{th}I_{ext}$.

3.4 Teorema di Norton

Qualsiasi rete elettrica contenente solo generatori di corrente e di potenziale e resistenze, posta tra due punti A e B , può essere sostituita dal parallelo tra un generatore di corrente I_N , calcolata mettendo un corto tra A e B , e una resistenza $R_N = R_{th}$.



Dimostrazione:

La dimostrazione è analoga a quella di Thévenin, con la differenza che stavolta partiamo dalla risposta in corrente del circuito a una ddp V_{ext} , volendo dimostrare che nel ramo AB passa una corrente $I_{AB} = I_N - V_{ext}/R_N$. Notiamo che la resistenza $R_N = R_{th}$ perché si calcolano allo stesso modo, ossia passivando tutti i generatori interni.

4 Il formalismo dei fasori

4.1 Perché i fasori?

In questa sezione affronteremo un utile formalismo per lo studio dei circuiti in cui corrente e differenza di potenziale hanno andamento periodico nel tempo. In particolare, usando questo metodo riusciremo a risolvere circuiti in cui i segnali sono descritti da seni e coseni. Questo può sembrare limitante, ma è stato matematicamente dimostrato che ogni funzione periodica può essere scomposta in una serie di seni e coseni a diverse frequenze moltiplicati per adeguati coefficienti. Pertanto, grazie al principio di sovrapposizione, saper risolvere il sistema quando i segnali sono sinusoidali ci porta a saperlo risolvere per tutti i segnali periodici: basta risolvere indipendentemente per ogni senoide che compone il segnale e poi sommare. La dimostrazione di queste affermazioni va oltre gli scopi di questa lezione e richiede conoscenze di matematica più avanzate, tuttavia se siete interessati potete cercare *Serie di Fourier* in rete: ci sono molti contenuti, anche divulgativi, a riguardo.

4.2 L'esponenziale complesso

Dato un numero reale b , possiamo valutare l'esponenziale con esponente immaginario (i è l'unità immaginaria: $\sqrt{-1} = i$):

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b. \quad (19)$$

Possiamo anche generalizzare all'esponenziale con esponente complesso (a, b reali):

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b). \quad (20)$$

Notiamo che:

$$\cos b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} = \Re[e^{ib}]. \quad (21)$$

Il simbolo \Re denota la parte reale di un numero complesso: $\Re[a + ib] = a$ con a, b reali. Questo è un caso particolare di un fatto generale: l'operazione di valutare la parte reale di un numero complesso è lineare (prevede infatti solo somme tra segnali e moltiplicazioni per costanti). Pertanto, per il principio di sovrapposizione lineare, possiamo concludere che se conosciamo la risposta in corrente I ad una ddp V descritta da valori complessi, la risposta al segnale descritto da $\Re[V]$ sarà $\Re[I]$. Supponiamo ora di avere un generatore di ddp che fornisca una differenza di tensione variabile nel tempo secondo la legge $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$. Sappiamo che $V(t) = \Re[V_0 e^{i\omega t + \phi}]$. Calcolare integrali e derivate usando la funzione esponenziale è facile e veloce. Per questo, piuttosto

che trovare direttamente la risposta al segnale descritto dalla funzione coseno, nei prossimi esempi valuteremo la risposta a segnali descritti da esponenziali complessi e prenderemo la parte reale. Tutto quello che abbiamo detto fino ad adesso vale anche quando l'input esterno è un generatore di corrente con dipendenza temporale sinusoidale. Un promemoria:

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad \int e^{i\omega t} = \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} + C. \quad (22)$$

Siccome, sempre per il principio di sovrapposizione, la parte costante dei segnali può essere trattata separatamente e poi sommata per ottenere la soluzione finale, nella maggior parte dei casi considereremo $C = 0$ nel calcolo dell'integrale indefinito: se poi sarà necessario considerare $C \neq 0$ potremo inserirlo a posteriori.

4.3 Circuito RC con segnale periodico

Sia $V(t) = V_0 \cos \omega t$ la ddp del generatore nel circuito. Vogliamo risolvere valutando la risposta a $\tilde{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$:

$$V_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I} + \frac{\tilde{Q}}{C}. \quad (23)$$

Per risolvere quest'equazione differenziale risolviamo prima l'omogenea e poi aggiungiamo una soluzione particolare. L'omogenea è:

$$\tilde{I} + \frac{\tilde{Q}}{C} = 0, \quad (24)$$

che ha come soluzione $\tilde{I}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

Per trovare la soluzione particolare facciamo alcune osservazioni:

- Il membro di destra dell'uguaglianza deve avere la stessa forma di quello di sinistra, cioè deve risultare che la somma di $R\tilde{I}$ e \tilde{Q}/C sia pari a una costante moltiplicata per $e^{i\omega t}$: cerchiamo soluzioni della forma $\tilde{I}(t) = I_0 e^{i\omega t}$ e $\tilde{Q}(t) = Q_0 e^{i\omega t}$;
- $\tilde{Q}(t) = \int \tilde{I}(t) dt$, quindi $\tilde{Q}(t) = I_0 e^{i\omega t} / (i\omega)$ (siccome ci basta una soluzione particolare scegliamo quella con costante d'integrazione nulla).

La soluzione più generale del problema sarà $\tilde{I}(t) = I_0 e^{i\omega t} + Ae^{-t/\tau}$, dove il secondo addendo consente di aggiustare le condizioni iniziali e tende a 0 nel tempo. Ci resta quindi da risolvere:

$$V_0 e^{i\omega t} = \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right) I_0 e^{i\omega t}. \quad (25)$$

Questo è quello che succede tipicamente quando si calcola una risposta lineare a un segnale con dipendenza esponenziale $e^{i\omega t}$: possiamo calcolare una soluzione particolare in cui assumiamo una dipendenza temporale banale $e^{i\omega t}$ e poi sistemare le condizioni iniziali aggiungendo l'adeguata soluzione all'equazione omogenea in cui il segnale esterno vale 0 (vale a dire, $Ae^{-t/\tau}$ che abbiamo trovato prima). Troveremo quindi:

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} e^{-i \arctan(1/(\omega RC))} I_0 \equiv \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} e^{i\theta} I_0. \quad (26)$$

Il fattore davanti a I_0 è una riscrittura del valore complesso $(R + 1/(i\omega C))$, che mette in evidenza sia il rapporto tra le ampiezze delle oscillazioni V_0 e I_0 , pari a $\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}$, sia un fattore complesso $e^{i\theta}$ che darà lo sfasamento tra queste oscillazioni. Pertanto otterremo:

$$\tilde{I}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} e^{i\omega t + i\theta}. \quad (27)$$

Allora:

$$I(t) = \Re[\tilde{I}(t)] = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} \cos(\omega t + \theta). \quad (28)$$

Accade frequentemente che il rapporto tra le ampiezze V_0 e I_0 sia complesso e risulta comodo definire il concetto di impedenza complessa, che è una generalizzazione dell'idea di resistenza: se in questo problema consideriamo al posto del condensatore una resistenza $1/(i\omega C)$ in serie a R otteniamo lo stesso risultato. L'impedenza complessa determina sia l'ampiezza che lo sfasamento della risposta. Quella che abbiamo ottenuto è la cosiddetta soluzione a regime: la soluzione dell'omogenea è un'esponenziale che svanisce andando avanti nel tempo, pertanto aspettando a sufficienza il comportamento del circuito sarà descritto in maniera soddisfacente da questa funzione. Se vogliamo descrivere anche il transiente che collega le condizioni iniziali al comportamento a regime dobbiamo reintrodurre la soluzione dell'omogenea, inserendola nella $I(t)$. La chiameremo $Be^{-t/\tau}$, dove $B = \Re[A]$. Valutiamo un esempio: sia $Q(0) = 0$. Sappiamo che:

$$Q(t) = \int_0^t I(t) dt = \frac{V_0}{\omega \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} (\sin(\omega t + \theta) - \sin \theta) - B\tau(e^{-t/\tau} - 1). \quad (29)$$

Basta poi fissare B in maniera tale da ottenere $Q(0) = 0$.

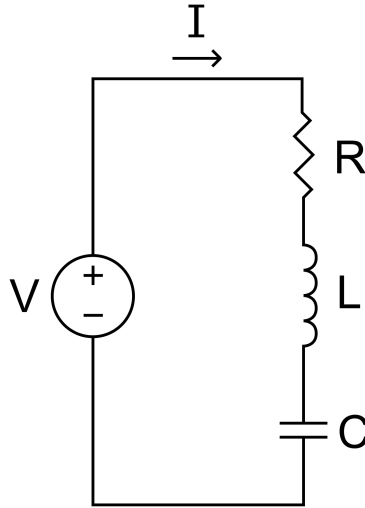
4.4 Circuito RL con segnale periodico

In maniera analoga all'esempio precedente si può risolvere un circuito con resistenza e induttanza in serie:

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} \rightarrow V_0 = (R + i\omega L)I_0, \quad (30)$$

e ne deduciamo che anche per le induttanze è possibile definire un'impedenza complessa $i\omega L$.

4.5 Circuito RLC



Consideriamo ora il circuito descritto dall'equazione:

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \rightarrow V_0 = \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right) I_0. \quad (31)$$

Quindi a regime:

$$I_0 = \frac{V_0 e^{i \arctan[\omega L/R - 1/(\omega RC)]}}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}. \quad (32)$$

È utile definire $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ per studiare due funzioni rilevanti: il rapporto tra le ampiezze di I_0 e V_0 , che chiameremo $A(\omega)$, e lo sfasamento tra corrente e tensione in input $\phi(\omega)$. La corrente a regime quindi è:

$$I(t) = A(\omega)V_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (33)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \right)^2}}. \quad (34)$$

$$\phi(\omega) = \arctan \left[\frac{L(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega R} \right] \quad (35)$$

Notiamo che, per $\omega = \omega_0$, A è massima e $\phi = 0$: questa è detta condizione di risonanza.

Vale la pena anche di studiare cosa succede nel transiente, ossia cercare la soluzione dell'omogenea:

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \rightarrow L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (36)$$

Proviamo a trovare soluzioni della forma $Q = Ce^{\lambda t}$:

$$Ce^{\lambda t} \left(L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} \right) = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\Delta}. \quad (37)$$

Abbiamo diversi casi:

- $R^2/(4L^2) > 1/(LC)$:

$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 e^{\sqrt{\Delta}t} + C_2 e^{-\sqrt{\Delta}t}). \quad (38)$$

- $R^2/(4L^2) = 1/(LC)$:

$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 + C_2 t). \quad (39)$$

- $R^2/(4L^2) < 1/(LC)$:

$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} [C_1 \sin(\sqrt{\|\Delta\|}t) + C_2 \cos(\sqrt{\|\Delta\|}t)]. \quad (40)$$

In tutti questi casi vediamo che $Q(t)$ e $I(t)$ sono esponenzialmente smorzati: questo vuol dire che il sistema, per un tempo sufficientemente lungo, arriva al comportamento a regime indipendentemente dalle condizioni iniziali.

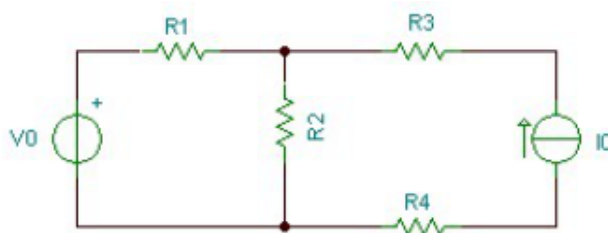
5 Esercizi

Presentiamo alcuni esercizi. I primi hanno anche lo svolgimento e sono stati scelti per mostrare tecniche e procedimenti che possono tornare utili; sono poi seguiti da altri esercizi senza soluzione. È comunque consigliato provare in prima battuta a fare gli esercizi senza guardare alle soluzioni. Il testo di ciascun problema è seguito da dei consigli di lettura per affrontarlo, che funzionano anche da hint...

5.1 Esercizi Svolti

5.1.1 Un esempio di principio di sovrapposizione

Trovare la ddp ai capi di R_1 e R_2 nel circuito in figura usando il principio di sovrapposizione:



Consiglio di lettura: Capitolo 3.

Svolgimento:

Facciamo attenzione: siccome qua stiamo trattando di somme su diverse configurazioni dello stesso circuito, converrà fissare lo 0 del potenziale, ad esempio al capo di R_2 in basso. Prima consideriamo solo V_0 , quindi sostituiamo il generatore I_0 con un aperto. Se il circuito sul ramo dove si trovava I_0 è aperto, per R_3 e R_4 non può passare corrente e troviamo un circuito in cui R_1 e R_2 sono in serie. Otterremo che $V_1 = R_1 V_0 / (R_1 + R_2)$ e $V_2 = R_2 V_0 / (R_1 + R_2)$.

Ora consideriamo solo I_0 , sostituendo V_0 con un corto: adesso avremo che R_1 e R_2 sono in parallelo (quindi $V_1 = V_2$) e questo parallelo è in serie a R_3 e R_4 . La caduta tensione vale $-V_1 = V_2 = R_2 R_1 I_0 / (R_1 + R_2)$. Facciamo attenzione ai segni: qua V_1 è stata presa con il segno “-“ per una questione di coerenza con il punto precedente, siccome in questa seconda configurazione R_1 è percorsa nel verso contrario. Concludendo:

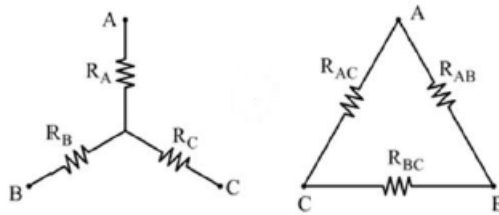
$$V_{1,tot} = \frac{R_1 V_0 - R_2 R_1 I_0}{R_1 + R_2}, \quad V_{2,tot} = \frac{R_2 V_0 + R_1 R_2 I_0}{R_1 + R_2}. \quad (41)$$

5.1.2 Trasformazione Y- Δ

Date 3 resistenze R_A , R_B e R_C poste in configurazione a stella e altre tre resistenze R_{AB} , R_{BC} e R_{AC} poste in configurazione a triangolo (vedere figura), mostrare che i due circuiti sono equivalenti se:

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}. \quad (42)$$

e R_{AC} , R_{BC} hanno valori analoghi ottenuti permutando gli indici.



Consiglio di lettura: Capitolo 3.

Svolgimento:

Due circuiti sono equivalenti se, applicando una qualunque terna di tensioni, la risposta in corrente è la stessa. Usiamo il principio di sovrapposizione: consideriamo un potenziale $\neq 0$ solo su un vertice per volta. Ad esempio, sia $V_A \neq 0$ e valutiamo I_B e I_C (poi avremo $I_A = I_B + I_C$). Nella configurazione a triangolo conosciamo la ddp ai capi di ciascuna resistenza, quindi è sufficiente usare $V = RI$:

$$I_B = \frac{V_A}{R_{AB}}, \quad I_C = \frac{V_A}{R_{AC}}. \quad (43)$$

Nella configurazione a stella ci accorgiamo che, siccome $V_B = V_C$, R_B e R_C sono in parallelo. Ne segue che la resistenza equivalente tra A e i punti B e C , che in questa configurazione sono collegati da un corto, è data dalla serie tra R_A e il parallelo di R_B e R_C :

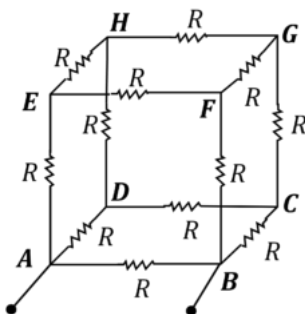
$$I_A = \frac{V_A}{R_{eq}} = \frac{V_A}{R_A + \frac{R_B R_C}{R_B + R_C}} = \frac{(R_B + R_C)V_A}{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}. \quad (44)$$

Poi possiamo valutare le correnti uscenti dagli altri due vertici usando le leggi dei partitori di corrente:

$$I_B = \frac{R_C V_A}{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}, \quad I_C = \frac{R_B V_A}{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}. \quad (45)$$

5.1.3 Cubo di resistenze

Date 12 resistenze, tutte di valore R , disposte nello spazio in modo che ciascuna di esse giaccia su uno spigolo di un cubo, misurare la resistenza equivalente tra due vertici opposti e tra due vertici adiacenti.



Consiglio di lettura: Capitoli 2-3.

Svolgimento:

In primo luogo chiariamo cosa vuol dire misurare una resistenza. Usando la legge di Ohm, potremmo o fissare una differenza di potenziale ai suoi capi, misurare la corrente che passa nella resistenza e fare il rapporto tra la V fissata e la I misurata, oppure fare l'opposto fissando la corrente (che, per le nostre ipotesi di lavoro, deve essere uguale in entrata e in uscita) e misurando la differenza di potenziale.

Vertici opposti: Fissiamo un potenziale $V_A = V$ nel punto A e $V_G = 0$ nel punto G . Se osserviamo il sistema in queste condizioni, noteremo che sia il potenziale fissato dall'esterno che il cubo stesso non cambiano per rotazioni di 120° intorno all'asse AG . Il principio di sovrapposizione lineare ci aiuta molto in questo caso. Consideriamo infatti l'insieme dei valori dei potenziali nei vari punti: $V_A = V, V_B, V_C, \dots, V_G = 0$. Quando ruotiamo il sistema di 120° intorno all'asse AG , $V'_A = V$ e $V'_G = 0$ come prima, ma i valori dei potenziali nei punti adiacenti ad A e in quelli adiacenti a G si sono scambiati ciclicamente ($V'_B = V_E, V'_D = V_B, V'_E = V_D$). Quello che possiamo osservare è che prima e dopo la rotazione la rete di resistenze è identica, pertanto per il principio di sovrapposizione lineare se fissiamo la coppia di potenziali in input $V''_A = V_A - V_A$ e $V''_G = V_G - V_G$ i potenziali negli altri punti varranno $V''_B = V_B - V_E, V''_E = V_E - V_D \dots$. Ma sappiamo anche che $V''_A = 0$ e $V''_G = 0$, da cui possiamo intuire che per questo sistema vale la soluzione banale in cui tutti i potenziali fanno 0. Allora $V_B = V_E \dots$. Facendo una seconda rotazione capiamo che $V_B = V_E = V_D$ e $V_H = V_F = V_C$. Abbiamo detto in maniera estremamente complicata una cosa che alcuni avranno visto subito, ma abbiamo legittimato formalmente una linea di procedimento in

diversi casi può tornare utile per qualsiasi sistema che goda della proprietà di linearità: confrontare il sistema prima e dopo una trasformazione che lascia inalterati sia il circuito che il potenziale o la corrente in input. Ora possiamo imporre una semplificazione: sapendo che con questo input $V_B = V_E = V_D$ e $V_H = V_F = V_C$, perché non identificare ciascun tripletto con un singolo vertice? Dopotutto è come se i rami AB, AD, AE fossero in parallelo: la ddp ai loro capi è la stessa. Quindi anche GF, GH, GC sono in parallelo tra di loro e lo stesso vale per i restanti sei vertici. Questo vuol dire che il circuito che stiamo risolvendo equivale a una serie tra tre resistenze in parallelo, sei resistenze in parallelo e tre resistenze in parallelo. Allora $R_{eq} = R/3 + R/6 + R/3 = 5R/6$.

Vertici adiacenti: Per esempio, consideriamo i vertici A e B . Stavolta fissiamo le correnti in ingresso e in uscita nel sistema. Prima consideriamo di far entrare una corrente pari a I nel vertice A e far uscire $I/7$ da ciascuno degli altri vertici. Vista la simmetria del sistema, con un ragionamento analogo al punto precedente, possiamo dedurre che nel ramo AB vada un terzo della corrente in ingresso, ossia $I/3$. Questo vuol dire, essendoci una resistenza di valore R sul ramo, che la differenza di potenziale tra A e B è di $RI/3$. Se invece consideriamo un secondo sistema, in cui viene prelevata dal vertice B una corrente I , mentre tutti gli altri vertici hanno una corrente $I/7$ in ingresso. Anche in questo caso per ragioni di simmetria in ciascuno dei rami che hanno B per estremo passa una corrente $I/3$: anche in questo caso la differenza di potenziale è $RI/3$.

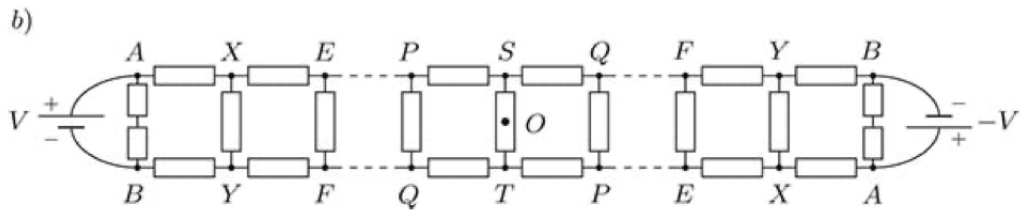
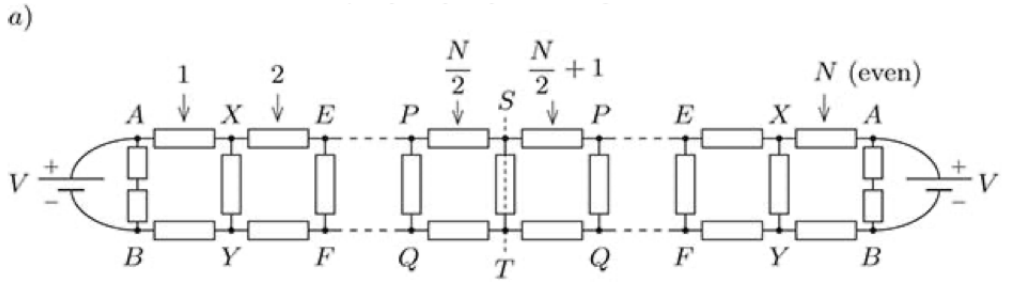
Ora possiamo sommare i due risultati: avremo una corrente $8I/7$ in ingresso in A , una corrente di uguale modulo in uscita da B e nessuna corrente che entri od esca dagli altri vertici. Pertanto, nel sistema passa una corrente totale $8I/7$ e si misura una caduta di potenziale $RI/3 + RI/3 = 2RI/3$. Allora:

$$R_{eq} = \frac{2RI/3}{8I/7} = \frac{7}{12}R. \quad (46)$$

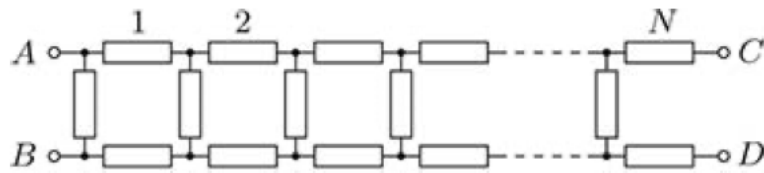
5.1.4 Anello vs Möbius

Costruiamo due strisce come in figura, usando $3N$ resistenze, per poi chiuderle in due maniere differenti: una attaccando il terminale A con C e B con D , ottenendo una disposizione ad anello; l'altra collegando A con D e B con C , facendone una striscia di Möbius. In quale caso la resistenza equivalente tra A e B è maggiore?

Consiglio di lettura: Capitoli 2-3.



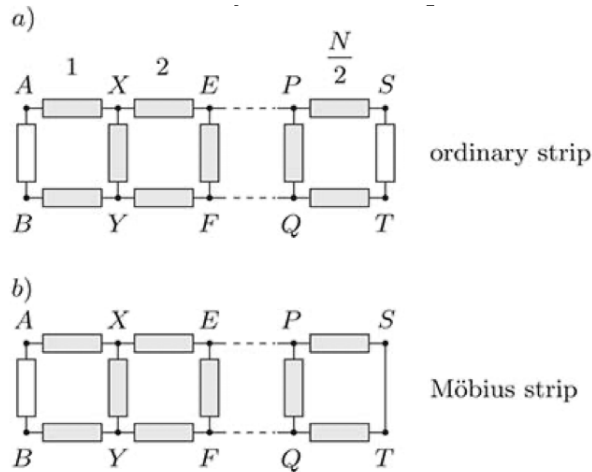
a) nastro ad anello; b) nastro di Möbius



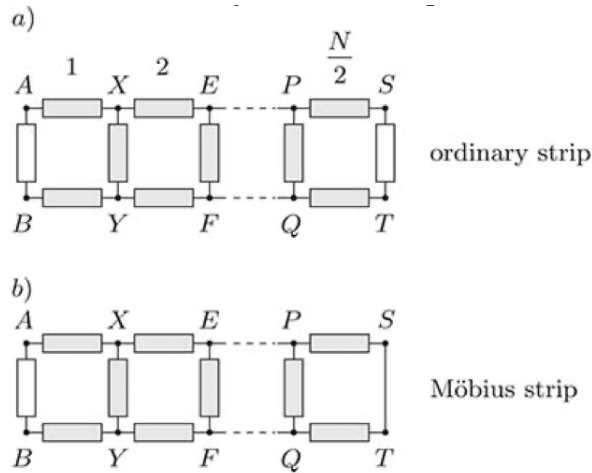
Svolgimento:

Per valutare la resistenza imponiamo una ddp V tra i vertici A e B . Fatto questo lavoriamo su maniere di rappresentare il circuito in maniera comoda. In particolare sarebbe interessante poter aprire il circuito così da ricondurci a un oggetto planare, più vicino a quanto abbiamo visto prima. Per farlo, possiamo tranquillamente sdoppiare la resistenza R tra A e B in due resistenze in parallelo, ciascuna di valore $2R$. Tenendo la condizione che nei punti che hanno lo stesso nome il potenziale deve essere uguale (possiamo immaginarci di collegarli con dei tratti di conduttore a resistenza nulla), un circuito equivalente al precedente è quello in figura. Notare che per fissare la ddp tra le due copie di A e B sono necessari due diversi generatori di ddp. Nei disegni molti punti hanno lo stesso nome grazie alle simmetrie del sistema (con ragionamenti analoghi al problema 5.1.1): nell'anello abbiamo simmetria per riflessione rispetto all'asse ST , mentre nel nastro di Möbius simmetria centrale rispetto al punto medio di ST . Distinguiamo poi due casi: N pari e N dispari.

N pari: Notiamo che resistenze tra coppie di punti aventi lo stesso nome sono effettivamente in parallelo, pertanto possiamo sostituire i circuiti precedenti con i seguenti, in cui ogni resistenza, a parte ST , siccome è in parallelo con una uguale, risulta avere valore dimezzato. Dobbiamo solo prestare attenzione al segmento ST : mentre nel caso dell'anello semplicemente terremo l'effettiva resistenza R , siccome nel nastro di Möbius sono punti simmetrici e hanno lo stesso valore di potenziale è come se fossero collegati da un cortocircuito. Quando una resistenza è in parallelo a un cortocircuito, quest'ultima può essere del tutto ignorata: tutta la corrente passerà nel cortocircuito, seguendo il percorso di minima resistenza. I due circuiti ottenuti sono quindi identici, eccetto che quello equivalente all'anello presenta una resistenza in più, pertanto quello con la resistenza minore è il nastro di Möbius.

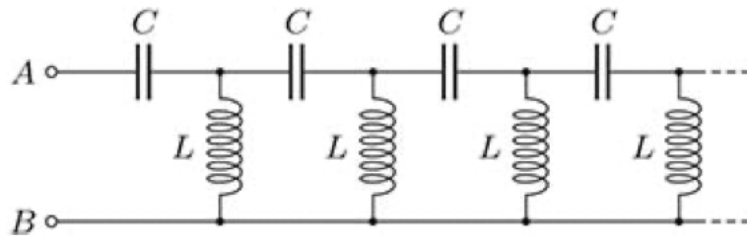


N dispari: Anche in questo caso possiamo descrivere un circuito più semplice in cui il grosso delle resistenze compare con valore dimezzato a causa del parallelo con la propria simmetrica. restano escluse le resistenze PP e QQ nell'anello, che essendo fra punti uguali possono essere ignorate, mentre nel nastro di Möbius ci sono quattro resistenze che hanno ai loro capi la stessa ddp ΔV_{PQ} , pertanto abbiamo $R/4$ tra P e Q . Anche nel caso di N dispari quindi abbiamo che il nastro ha resistenza minore.



5.1.5 Scala LC infinita

Si consideri un circuito infinito come quello in figura. Calcolarne l'impedenza equivalente in funzione della frequenza ω del segnale. Se alimentiamo il circuito con un generatore di ddp $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$, come varia nel tempo V_n , ddp tra i capi dell' n -esima capacità, una volta arrivati a regime?



Consiglio di lettura: Capitolo 4.

Svolgimento:

Notiamo che nel circuito infinito C è in parallelo a un circuito identico a quello iniziale (dopotutto, è ancora una sequenza infinita di L e C disposte come prima). Quindi, notando anche che L è in serie a questo parallelo, chiamando Z l'impedenza del circuito possiamo valutare (notiamo che le impedenze si trattano esattamente come resistenze):

$$Z = i\omega L + \left[\left(\frac{1}{i\omega C} \right)^{-1} + Z^{-1} \right]^{-1} = i\omega L + \frac{Z}{1 + i\omega CZ}. \quad (47)$$

Se ne deduce:

$$i\omega CZ^2 + \omega^2 CLZ - i\omega L = 0 \rightarrow Z = \frac{i\omega L}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\omega^2 LC}} \right). \quad (48)$$

Come scegliere il segno? Notiamo che, per $\omega < 2/\sqrt{LC}$, l'impedenza ha una parte reale, che equivale alla presenza di una resistenza, pertanto questa parte reale deve avere segno positivo, il che ci porta ad affermare che la soluzione è quella con il segno meno. Può sembrare strano che una catena composta solo da elementi che immagazzinano energia senza dissiparla, come L e C , abbia una resistenza e in effetti questo non si verificherebbe in una sequenza di lunghezza finita. Il problema è che in una catena infinita l'energia fornita da eventuali generatori potrebbe andare in avanti senza mai tornare indietro, il che corrisponde sostanzialmente a una perdita. Studiamo la propagazione del segnale attraverso la conservazione della corrente nel nodo n :

$$\frac{V_{n-1} - V_n}{i\omega L} = \left[\frac{V_n}{1/(i\omega C)} \right] + \left[\frac{V_n - V_{n+1}}{i\omega L} \right], \quad (49)$$

da cui si ricava:

$$V_{n+1} - (2 - \omega^2 LC)V_n + V_{n-1} = 0. \quad (50)$$

Notiamo che questa equazione va bene per qualsiasi $n > 1$. L'andamento temporale a regime sarà $e^{i\omega t}$, mentre per quanto riguarda la parte che varia con la posizione n possiamo provare con una dipendenza α^n . Quindi la nostra ipotesi è che:

$$V_n = V_0 \alpha^n e^{i\omega t}. \quad (51)$$

Sostituendo nell'equazione e semplificando:

$$\alpha^2 - (2 - \omega^2 LC)\alpha + 1 = 0 \rightarrow \alpha = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right)^2 - 1}. \quad (52)$$

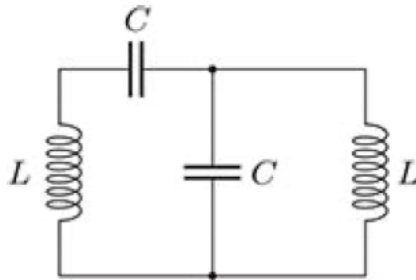
Dobbiamo scegliere il segno. Nel caso in cui $\omega > 2/(\sqrt{LC})$: in questo caso va scelto il segno più, così che α abbia modulo minore di 1 e il segnale, allontanandosi, si indebolisca. Invece, se $\omega \leq 2/(\sqrt{LC})$, abbiamo che:

$$\alpha = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right)^2}, \quad (53)$$

dove possiamo notare che, essendo $1 - (\omega^2 LC)/2 \leq 1$, possiamo dire che $1 - (\omega^2 LC)/2 := \cos \phi$ e che $\alpha = e^{i\phi}$. In questo caso la scelta del segno va condotta così: si aggiunge una resistenza R piccola in serie a L e si risolve cercando la soluzione tale che $\|\alpha\| < 1$.

5.1.6 Trovare la risonanza

Trovare le frequenze naturali di oscillazione del circuito in figura.



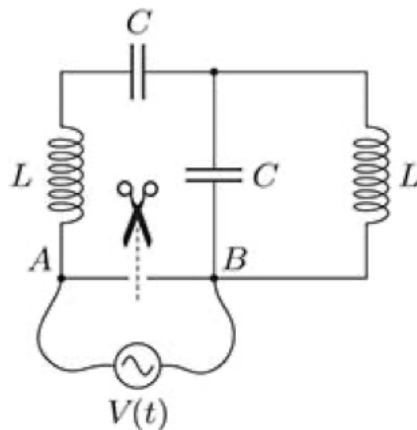
Consiglio di lettura: Capitolo 4.

Svolgimento:

Possiamo procedere in tre maniere:

1. inserire una ddp sinusoidale di pulsazione ω su di un ramo e trovare quando l'impedenza tra i suoi capi si avvicina a 0 (ossia, alla risonanza basta una piccola ddp a generare una grande corrente);
2. pompare ed estrarre una corrente sinusoidale di frequenza angolare ω e trovare quando l'impedenza tra punto di ingresso e estrazione diverge (ossia, alla risonanza una piccola corrente genera una grande ddp);
3. studiare effettivamente le oscillazioni di carica e corrente.

1. Scegliamo di disporre il generatore come in figura.

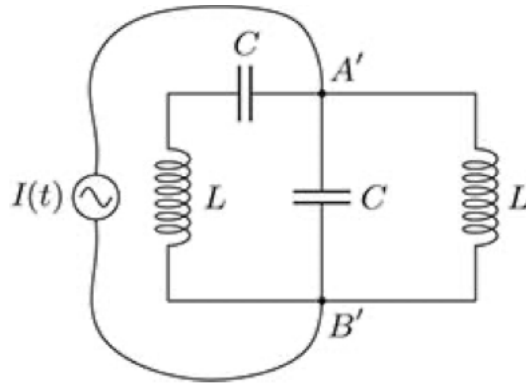


Imponiamo uguale a 0 l'impedenza equivalente tra i punti A e B :

$$Z_{AB} = iL\omega + \frac{1}{iC\omega} + \frac{iL\omega}{1 - LC\omega^2} = 0 \rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - 3\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1 = 0 \quad (54)$$

Dove $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Allora le frequenze di risonanza sono $\omega_{1,2} = (\sqrt{5} \pm 1)\omega_0/2$.

2. Scegliamo di pompare corrente come in figura.

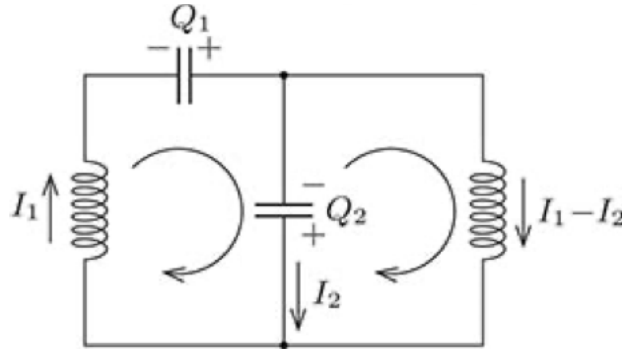


L'impedenza fra i due capi è:

$$Z_{CD} = \left(\frac{1}{iL\omega} + iC\omega + \frac{1}{iL\omega + 1/(iC\omega)} \right)^{-1} \quad (55)$$

Z_{CD} diverge se l'espressione fra parentesi vale 0. Otterremo gli stessi $\omega_{1,2}$ del problema precedente.

3. Scriviamo le leggi di Kirchhoff per due maglie del circuito:



$$\frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2}{C} - L \frac{dI_1}{dt} = 0, \quad -\frac{Q_2}{C} - L \frac{d}{dt}(I_1 - I_2) = 0 \quad (56)$$

Sapendo che $I_2 = -dQ_2/dt$, $I_1 = -dQ_1/dt$, troviamo:

$$\frac{d^2 Q_1}{dt^2} = -\omega_0^2 Q_1 - \omega_0^2 Q_2, \quad \frac{d^2 Q_2}{dt^2} = -\omega_0^2 Q_1 - 2\omega_0^2 Q_2 \quad (57)$$

Per risolvere queste equazioni accoppiate potremmo utilizzare conoscenze di algebra lineare che vanno oltre gli scopi della lezione. Cerchiamo di introdurre un metodo per risolverle comunque: proviamo a risolvere per una combinazione lineare $q_1 = Q_1 + \alpha Q_2$ cercando di trovare un coefficiente α particolarmente comodo.

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = \frac{d^2 Q_1}{dt^2} + \alpha \frac{d^2 Q_2}{dt^2} = -\omega_0^2 (1 + \alpha) \left[Q_1 + \left(\frac{1 + 2\alpha}{1 + \alpha} \right) Q_2 \right] \quad (58)$$

Per ottenere qualcosa della forma $d^2q_1/dt^2 = -\omega^2q_1$, ($\omega^2 = \omega_0^2(1 + \alpha)$) ci serve imporre: $\alpha = (1 + 2\alpha)/(1 + \alpha)$, che porta a $\alpha_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ e ai valori $\omega_{1,2}$ trovati precedentemente. Possiamo anche concludere che abbiamo due soluzioni $q_1 = q_{0,1} \sin(\omega_1 t + \phi_1)$ e $q_2 = q_{0,2} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$ dove le costanti sono determinate dalle condizioni iniziali. Così sembra tutto molto astratto, ma possiamo ritrovare $Q_1 = \alpha_2 q_1 / (\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_1 q_2 / (\alpha_2 - \alpha_1)$ e $Q_2 = q_1 / (\alpha_1 - \alpha_2) - q_2 / (\alpha_1 - \alpha_2)$.

5.2 Altri esercizi

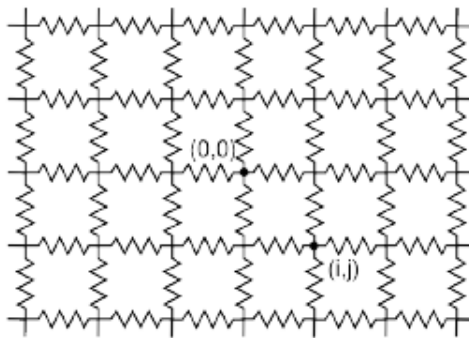
5.2.1 Solidi platonici

Per i diversi solidi platonici (cubo, tetraedro, ottaedro, dodecaedro e icosaedro), valutare la resistenza equivalente tra i nodi di una rete di resistenze disposte ciascuna su uno degli spigoli del solido, analogamente all'esercizio svolto 5.1.1.

Consiglio di lettura: Capitolo 3, Esercizio 5.1.2.

5.2.2 Griglia infinita di resistenze

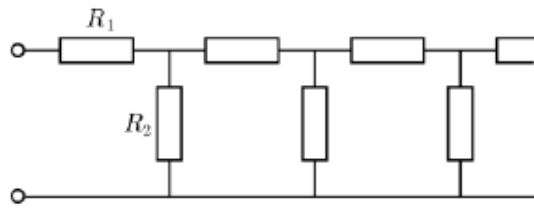
Si consideri una griglia infinita di resistenze R , disposte in modo che ciascuno nodo sia collegato ad altri quattro nodi, disposti rispettivamente sopra, sotto a destra e a sinistra, da una resistenza. Valutare la resistenza equivalente tra due punti direttamente adiacenti.



Consiglio di lettura: Capitolo 3, Esercizio 5.1.2.

5.2.3 Scala di resistenze

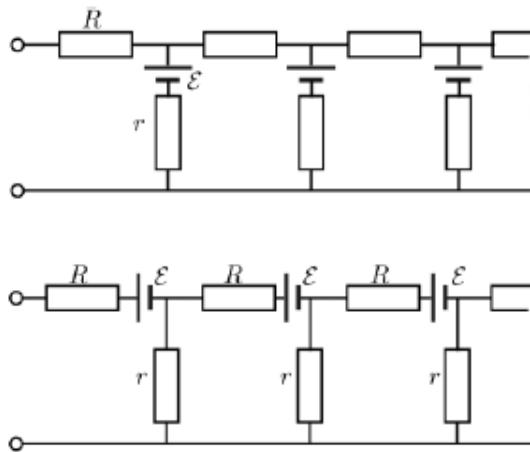
Calcolare la resistenza equivalente del circuito in figura e mostrare che se il circuito è alimentato da un generatore di tensione V_0 la tensione sull' n -esima resistenza verticale è della forma $V_0 \lambda^n$ e determinare λ .



Consiglio di lettura: Esercizio 5.1.5.

5.2.4 Scala di resistenze e generatori

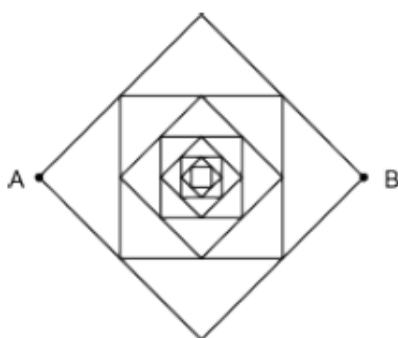
Calcolare la resistenza e i generatori equivalenti dei circuiti in figura.



Consiglio di lettura: Esercizio 5.1.5.

5.2.5 Circuito frattale quadrato

Si consideri di costruire il seguente circuito: si parte da un quadrato i lati del quale presentano ciascuno una resistenza R , poi connettere i punti medi di questi lati in modo da fare un secondo quadrato, i cui lati hanno resistenza $R/2$ e ripetere la procedura all'infinito prendendo come valore della resistenza del lato la metà di quella del lato del quadrato precedente. Calcolare la resistenza misurata tra due vertici opposti del quadrato iniziale.



5.2.6 Scatola nera

Si consideri una scatola con due capi a sinistra e due capi a destra. Non è possibile conoscere il contenuto della scatola, a parte che è un circuito puramente resistivo. Se ai capi di sinistra viene attaccato un generatore di ddp V e a quelli di destra un voltmetro, il voltmetro misura $V/4$, se i dispositivi vengono scambiati di posto il voltmetro misura V . Considerando i voltmetri come dispositivi di resistenza infinita, ipotizzare come sia fatto il circuito dentro alla scatola.

