

Ottica

Isabella Corso*

9 Febbraio 2023

Sommario

In questa lezione ricaveremo i postulati dell'ottica geometrica a partire dal principio del tempo minimo. Spiegheremo le leggi della riflessione e la legge di Snell, quest'ultima anche a partire dal principio di Huygens. Useremo poi questa legge per capire il funzionamento dei diottri sferici e delle lenti, in particolare dimostreremo la formula del costruttore di lenti e la legge dei punti coniugati, per poi trattare il caso di sorgenti estese. Riassumeremo il funzionamento degli specchi sferici. Infine accenneremo ai limiti dell'ottica geometrica come teoria approssimata.

*isabella.corso@sns.it

Indice

1	Introduzione	4
1.1	L'indice di rifrazione	4
1.2	I postulati	4
2	Principio di Fermat	5
2.1	Traiettorie nei mezzi omogenei	6
2.2	Riflessione	7
2.3	Rifrazione	7
2.4	Riflessione totale	9
3	Principio di Huygens	9
4	Passaggio al continuo	11
4.1	Traiettoria circolare	11
5	Reversibilità dei cammini ottici	12
6	Sorgenti e immagini	14
7	Diottro sferico	15
7.1	Segni	17
8	Lenti	18
8.1	Formula dei punti coniugati	18
8.2	Segni	20
8.3	Lenti convergenti e divergenti	21
9	Sorgenti estese	21
9.1	Posizione dell'immagine	22
9.2	Ingrandimento	23
10	Specchi sferici	24
11	Cenni ai limiti dell'ottica geometrica	24
	Esercizi	26
I	Immagini	26
II	Specchio piano	26
III	Gara di primo livello, olifis 2019 - modificato	26
IV	Legge di Gladstone-Dale	26
V	Senigallia 2000/1A	27

VI	Senigallia 2015/1	27
VII	Senigallia 1994/4	29
VIII	IPhO 1984/1 - ridotto	30
IX	IPhO 2021/1B	30
X	IPhO 1995/2	32
XI	Senigallia 2017/3	33
XII	Doppietto di lenti	35
Soluzioni		36
I	Immagini	36
II	Specchio piano	36
III	Gara di primo livello, olifis 2019 - modificato	37
IV	Legge di Gladstone-Dale	37
V	Senigallia 2000/1A	37
VI	Senigallia 2015/1	38
VII	Senigallia 1994/4	40
VIII	IPhO 1984/1 - ridotto	41
IX	IPhO 2021/1B	42
X	IPhO 1995/2	44
XI	Senigallia 2017/3	45
XII	Doppietto di lenti	50

1 Introduzione

L'ottica geometrica è la teoria più semplice e antica in grado di descrivere la propagazione della luce nei mezzi trasparenti. È una teoria approssimata e si può ricavare interamente dalle equazioni di Maxwell: la luce infatti è un'onda elettromagnetica. Quando gli oggetti e le discontinuità che la radiazione incontra hanno dimensioni molto maggiori della lunghezza d'onda, possiamo però trascurarne la natura ondulatoria e studiare soltanto la propagazione dei raggi, cioè la traiettorie seguite dalla luce.

1.1 L'indice di rifrazione

La luce si propaga a una velocità finita che dipende dal mezzo in cui si trova. Dato un certo materiale si può quindi definire il suo indice di rifrazione $n = c/v$, dove v è la velocità di propagazione in quel materiale e c è la velocità della luce nel vuoto, che vale $c = 299792458 \text{ m/s}$ ¹.

Poiché nei materiali la luce rallenta (c è la velocità massima raggiungibile da ogni cosa), si avrà sempre $n \geq 1$. Per esempio, per l'aria $n \simeq 1$, per l'acqua $n = 1.33$ e per il vetro n varia tipicamente tra 1.5 e 1.9.

Un mezzo si dice omogeneo se n è costante, isotropo se n non dipende dalla direzione di propagazione. Assumeremo che tutti i mezzi con cui avremo a che fare siano isotropi.

1.2 I postulati

L'ottica geometrica si basa su postulati che definiscono univocamente il comportamento dei raggi all'interno di mezzi omogenei e nei pressi dell'interfaccia tra due mezzi distinti e che possono essere riassunti come segue.

1. In un mezzo omogeneo, i raggi di luce sono linee rette.
2. Quando un raggio (detto incidente) incontra la superficie di una interfaccia piana tra due mezzi omogenei, esso si divide in due raggi, detti riflesso e rifratto.
3. I raggi riflesso e rifratto giacciono sul piano individuato dal raggio incidente e dalla normale all'interfaccia nel punto di incidenza. Gli angoli tra la normale e i raggi sono detti angoli di incidenza, di riflessione e di rifrazione.

¹Questo valore è esatto e viene usato nel Sistema Internazionale per definire la lunghezza del metro.

4. L'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza (θ_1 in figura 1).
5. L'angolo di rifrazione (θ_2 in figura 1) è legato all'angolo di incidenza dalla legge di Snell:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

dove n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione dei due mezzi.

Per quanto riguarda il punto (2), entrambi questi due raggi sono quasi sempre presenti contemporaneamente, anche se spesso non notiamo il raggio rifratto (basti pensare a qualunque oggetto opaco che abbiamo intorno), ma ciò è dovuto all'assorbimento del materiale e non è spiegabile con l'ottica geometrica.

Questi postulati possono essere assunti a priori, ma è possibile darne una giustificazione a partire da principi più generali. In particolare noi vedremo il principio del tempo minimo di Fermat e il principio di Huygens.

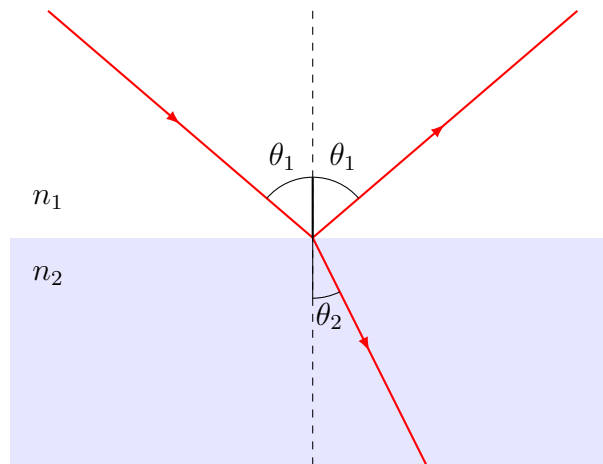


Figura 1: Comportamento di un raggio che incide con angolo θ_1 sulla superficie di separazione tra due materiali diversi

2 Principio di Fermat

Nel 1650 circa Pierre de Fermat enunciò il principio del tempo minimo, che nella forma originale afferma che, se un raggio di luce passa per un punto A e per un punto B, allora la traiettoria che ha seguito tra A e B è quella che minimizza il tempo di percorrenza. Questo principio però è stato modificato successivamente perché esistono casi in cui la traiettoria seguita è quella che,

al contrario, massimizza il tempo di percorrenza ². è quindi più corretto dire che un percorso tra due punti può essere la traiettoria di un raggio soltanto se rende stazionario il tempo di percorrenza.

Una definizione rigorosa di punto stazionario in questo contesto è complicata: consideriamo prima un caso più semplice, quello di una funzione in una variabile. I punti stazionari sono per definizione quelli con derivata nulla e comprendono massimi, minimi e punti di sella. In tutti questi casi si ha che la variazione della funzione corrispondente a un piccolo spostamento dal punto stazionario considerato dipende da tale spostamento *elevato al quadrato*, ed è quindi approssimativamente nulla (come si vede chiaramente espandendo in Taylor la funzione e fermandosi all'ordine lineare, che è nullo). Nel nostro caso il tempo di percorrenza è una funzione del percorso scelto: anche se non è chiaro come fare una derivata in questo contesto, i percorsi che cerchiamo sono tali che se modificati leggermente, il tempo di percorrenza è approssimativamente costante. Nei casi che incontreremo noi o sarà chiaro qual è il percorso che minimizza il tempo, oppure saremo in grado di scrivere questo tempo in funzione di una sola variabile, rispetto alla quale potremo fare una derivata e porla uguale a zero (lo faremo nel caso della rifrazione). Ricaviamo ora da questo principio i postulati appena descritti.

2.1 Traiettorie nei mezzi omogenei

In un mezzo omogeneo la velocità della luce è costante e il tempo di percorrenza è direttamente proporzionale alla lunghezza del percorso. Persi due punti (A e B) per i quali sappiamo passare un raggio, questo si muoverà quindi lungo la retta che li collega.

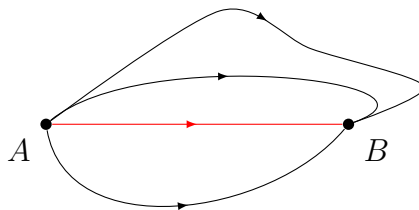


Figura 2: Alcune delle possibili traiettorie dei raggi tra A e B , se la velocità è uniforme per il principio di Fermat la traiettoria effettiva sarà quella rettilinea

²Succede, per esempio, nel caso di uno specchio concavo

2.2 Riflessione

Abbiamo già detto che quando un raggio incontra una discontinuità, in generale ci saranno sia un raggio rifratto che un raggio riflesso. Consideriamo ora il raggio riflesso proveniente da una superficie *riflettente*, che per semplicità considereremo piana e chiameremo *specchio*.

Supponiamo quindi tale specchio a $z = 0$, A e B a coordinate rispettivamente (x_a, y_a, z_a) e (x_b, y_b, z_b) . È facile vedere che il problema di trovare la traiettoria del raggio tra i due punti è del tutto analogo a quello, senza specchio, tra A e $B' = (x_b, y_b, -z_b)$ che sappiamo già essere rettilinea (Figura 3).

Tale risultato porta a tre immediate conseguenze:

1. Esiste un unico punto di contatto P del raggio sullo specchio
2. A , B e P giacciono sul piano individuato dal raggio incidente e dalla normale all'interfaccia nel punto di incidenza.
3. L'angolo tra la normale al piano e il raggio che arriva da A (*raggio incidente*) è uguale all'angolo tra la normale al piano e il raggio che va verso B (*raggio riflesso*)

Queste sono generalmente note come leggi della riflessione.

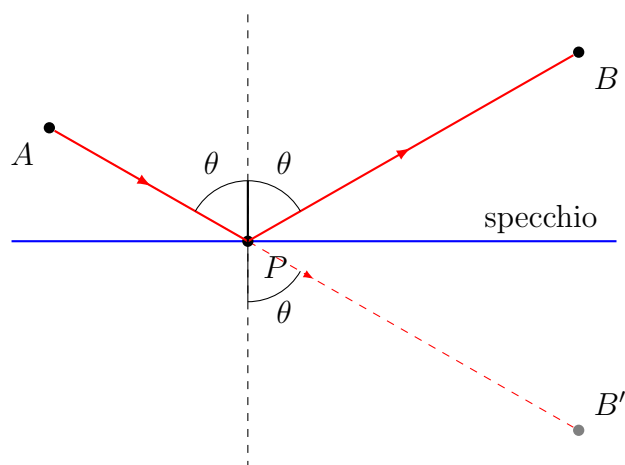


Figura 3: Costruzione equivalente per la risoluzione del problema della riflessione

2.3 Rifrazione

Consideriamo ora il raggio rifratto. In questo caso A e B si trovano in due regioni distinte con due velocità caratteristiche diverse, rispettivamente

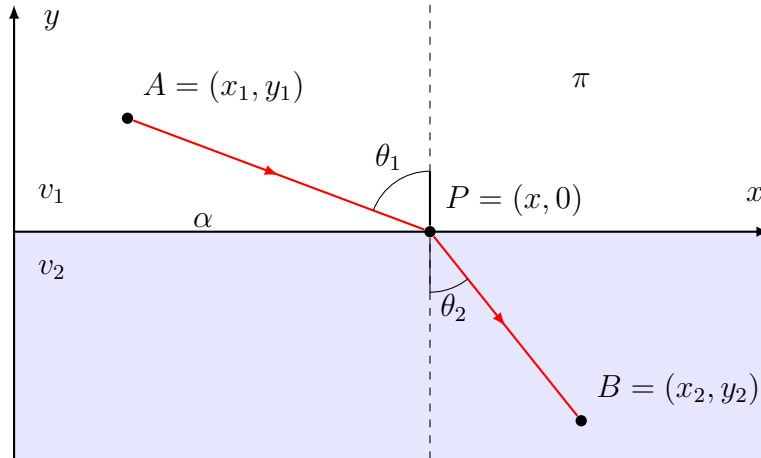


Figura 4: Partendo dal principio di Fermat vogliamo trovare la posizione del punto P che minimizza il tempo che impiega la luce per arrivare a B

$v_1 = \frac{c}{n_1}$ e $v_2 = \frac{c}{n_2}$. Le due regioni sono separate da un piano che chiameremo α .

Sappiamo già che il raggio incidente sarà rettilineo così come quello che dal punto di contatto P va a B (*raggio rifratto*). Chiamiamo π il piano passante per A e B e perpendicolare ad α . Supponiamo ora per assurdo che il punto di contatto non si trovi su π . Allora, muovendo P sulla perpendicolare a π , il tempo totale di percorrenza dei due raggi ha un unico minimo che si ha quando P si trova su π . I raggi e la normale ad α giacciono quindi sullo stesso piano.

Possiamo quindi analizzare il problema in due sole dimensioni. Poniamo un sistema di coordinate cartesiano tale che la superficie di separazione sia lungo l'asse x : A e B avranno coordinate rispettivamente (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , P avrà coordinate $(x, 0)$, dove x è da determinare. Supponiamo $y_1 > 0, y_2 < 0$ (Figura 4).

Il tempo di percorrenza sarà una funzione di x :

$$t(x) = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}}{v_2}$$

I punti stazionari di $t(x)$ si possono quindi trovare facendo ponendo $t'(x) = 0$.

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}} = 0$$

da cui

$$v_2 \sin \theta_1 - v_1 \sin \theta_2 = 0$$

Sostituendo gli indici di rifrazione si ricava la *legge di Snell*:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

2.4 Riflessione totale

Anche se in generale un raggio che incide sulla superficie di separazione tra due materiali si divide in un raggio rifratto e uno riflesso, esiste un caso particolare in cui il raggio rifratto non può formarsi. Infatti se $n_2 < n_1$ è possibile che $\sin \theta_1 > n_2/n_1$, ma per la legge di Snell si avrebbe $\sin \theta_2 > 1$ che è evidentemente privo di significato. In questo caso non esiste il raggio rifratto, e la luce resta nel mezzo con indice di rifrazione maggiore. Il fenomeno è noto come *riflessione totale* e l'angolo θ_L tale che $\sin \theta_L = n_2/n_1$ si chiama *angolo limite*.

3 Principio di Huygens

Dimostriamo ora la legge di Snell a partire da un altro principio, quello di Huygens. La luce viene interpretata come un'onda e i raggi sono le rette perpendicolari ai fronti d'onda³. Secondo questo principio ogni punto di un fronte d'onda che esiste in un certo istante si comporta come sorgente di onde sferiche secondarie che si propagano verso l'esterno con la stessa velocità dell'onda; il fronte d'onda nell'istante successivo è la superficie tangente a tutte le onde sferiche secondarie.

Questo principio è utile perché ci permette di generalizzare i postulati dell'ottica geometrica tutti i tipi di onde, per esempio le onde sonore o le onde sismiche (è capitato più volte nei problemi delle olimpiadi).

Consideriamo quindi un'onda piana (cioè con fronti d'onda che sono rette o piani paralleli) che, provenendo da un mezzo in cui si muove con velocità $v_1 = \frac{c}{n_1}$, impatta l'interfaccia con un altro mezzo, in cui ha velocità $v_2 = \frac{c}{n_2}$, con un angolo di incidenza θ_1 . Vogliamo determinare la relazione tra θ_1 e l'angolo di rifrazione θ_2 .

In figura 5 sono rappresentati in rosso alcuni raggi che incidono sulla superficie di separazione. I punti dello stesso fronte d'onda (rappresentato con una linea perpendicolare ai raggi) raggiungono il secondo mezzo in momenti diversi.

³Definite come superfici a fase costante

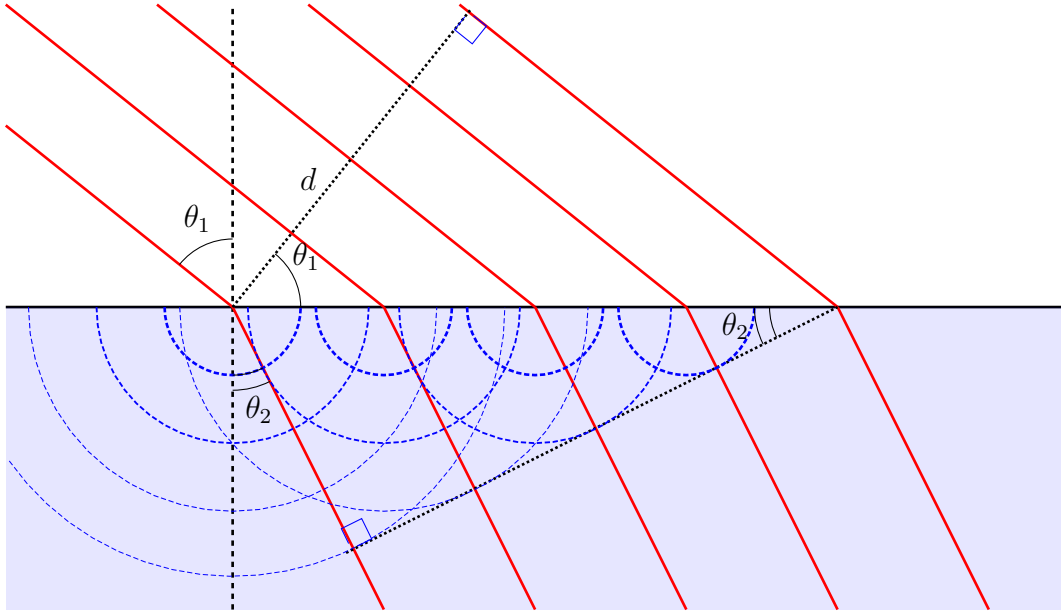


Figura 5: Costruzione geometrica per dimostrare la legge di Snell a partire dal principio di Huygens

Consideriamo le onde secondarie prodotte nel punto di incidenza da ogni raggio: sono circonferenze centrate nel punto in cui il raggio interseca la superficie di separazione, con raggio $r = v_2 dt$ dove dt è il tempo passato da quando il raggio ha raggiunto il nuovo mezzo.

Sappiamo che il raggio più a destra incontra la superficie di separazione dopo $dt = \frac{d \tan \theta_1}{v_1}$ rispetto al raggio più a sinistra del disegno, dove d è la distanza fra i due raggi. In questo tempo l'onda secondaria creata dal primo si è propagata di $v_2 dt = v_2 \frac{d \tan \theta_1}{v_1}$. Con semplici considerazioni geometriche si trova quindi

$$v_2 \frac{d \tan \theta_1}{v_1 \sin \theta_2} = \frac{d}{\cos \theta_1}$$

da cui, con qualche passaggio algebrico, riotteniamo la legge di Snell.

4 Passaggio al continuo

Nelle sezioni precedenti abbiamo solamente trattato il caso in cui esiste una separazione netta tra due mezzi omogenei. Si vuole ora cercare di generalizzare quanto detto precedentemente per mezzi in cui l'indice di rifrazione varia con continuità. Consideriamo inizialmente tre materiali con indici di rifrazione rispettivamente n_1, n_2, n_3 disposti su tre strati paralleli in quest'ordine. Supponiamo che un raggio entri dal materiale con indice di rifrazione n_1 con un angolo θ_1 rispetto alla normale ai piani, possiamo semplicemente applicare la legge di Snell due volte sulle superfici di separazione e ottenere, con ovvio significato di θ_2 e θ_3

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3$$

È da notare che la validità di quanto detto è condizionata al fatto che i tre strati sono paralleli, ma se questa condizione è soddisfatta allora è sufficiente applicare la legge di Snell tra il primo e l'ultimo strato, non ha importanza quanti siano quelli in mezzo.

Supponiamo ora di avere un materiale in cui l'indice di rifrazione varia in modo continuo come una funzione $n(y)$, possiamo allora modellizzarlo come composto da strati orizzontali (quindi tutti paralleli) e omogenei di spessore infinitesimo. Detta $f(x)$ la funzione che descrive la traiettoria del raggio, e detto $\theta(x)$ l'angolo tra la verticale e la tangente alla traiettoria nel punto x , per la legge di Snell è chiaro che la quantità $n(f(x)) \sin \theta(x)$ è una costante fissata dai parametri iniziali del problema. Poiché si verifica che $\sin \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ si ottiene che la quantità rilevante conservata è: Una volta data un'opportuna condizione iniziale sulla traiettoria del raggio, che determini il valore della costante, si ottiene un'equazione differenziale per $h(x)$. Alternativamente, se in partenza è nota $h(x)$, la relazione può essere risolta per $n(h(x))$, da cui si ricava $n(y)$ invertendo la funzione $h(x)$.

$$\frac{n(f(x))}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \tag{1}$$

4.1 Traiettoria circolare

Con il fine di fissare le idee su questo argomento che è già stato più volte presente anche nelle prove delle Olimpiadi di Fisica proponiamo qui un veloce esercizio. Supponiamo di avere un materiale costruito come prima con l'indice di rifrazione dipendente solamente dal valore delle ordinate. Trovare la funzione $n(y)$ affinché la traiettoria di un raggio di luce entrante parallelo

all'asse delle ascisse nel materiale⁴ sia un arco di circonferenza. Supponiamo che $f(x) = \sqrt{(R^2 - x^2)}$ dove R è il raggio della circonferenza, allora sappiamo per la (1) che

$$n(y) \propto \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \sqrt{1 + \frac{R^2 - y^2}{y^2}}$$

Da cui, limitandoci al primo quadrante

$$n(y) \propto \frac{1}{y}$$

5 Reversibilità dei cammini ottici

Un principio importante di cui non abbiamo ancora parlato, che è alla base dell'ottica geometrica, è la reversibilità dei cammini ottici. Esso afferma che dato un raggio incidente su un sistema ottico e dato lo stesso raggio (o anche un fascio di raggi separati) in uscita dal sistema, se si rimandasse indietro il raggio (o il fascio) di uscita si otterrebbe quello di ingresso. Con "rimandare indietro" si intende invertire il verso di scorrimento del tempo: immaginiamo di registrare il raggio che interagisce con il sistema, riguardando il video sarebbero fisicamente sensati sia il video come è stato registrato che lo stesso mandato al contrario.

Si noti la simmetria della legge di Snell: non si specifica quale sia il mezzo attraversato per primo dal raggio e non avrebbe senso che sia in qualche modo privilegiato uno dei due per via di questo principio. Poiché i sistemi ottici che vedremo saranno basati principalmente sulla legge di Snell e sulla legge della riflessione (angolo di incidenza e di riflessione sono uguali) che sono simmetriche di per sé, è chiaro che questo principio è valido anche per quei sistemi che sono basati su questi fenomeni. La validità del principio prescinde da questa limitazione, ma per quello che ci servirà si può vedere come conseguenza di questa caratteristica delle leggi fondamentali.

Inoltre potrebbe portare a conclusioni errate lavorare nel solo ambito dell'ottica geometrica, in quanto essa non si occupa minimamente dell'interazione tra due raggi. Ad esempio un raggio incidente su una superficie trasparente viene sia riflesso che rifratto; applicando il principio di reversibilità e partendo

⁴Se il raggio fosse esattamente parallelo ovviamente non curverebbe mai, qua si sottointende che il raggio abbia una piccola deflessione iniziale

dalle leggi dell'ottica geometrica ci si potrebbe aspettare che guardando il fenomeno al contrario i due raggi prodotti non si uniscano in uno solo, ma formino anche un secondo raggio dovuto alla rifrazione del raggio riflesso. In sostanza nella Figura 1 ci si potrebbe aspettare la presenza di un raggio proveniente da in basso a sinistra. Il principio però deve essere valido, la spiegazione di questa inconsistenza è che limitandoci all'ottica geometrica trascuriamo l'interazione tra i raggi, che invece in questo caso è rilevante.

6 Sorgenti e immagini

Introduciamo brevemente i concetti di sorgente e immagine: si chiama sorgente un corpo che fornisce luce al sistema ottico, mentre l'immagine è il corpo che un osservatore vede attraverso il sistema ottico. È importante notare che secondo queste definizioni l'immagine di un sistema può essere la sorgente di un altro.

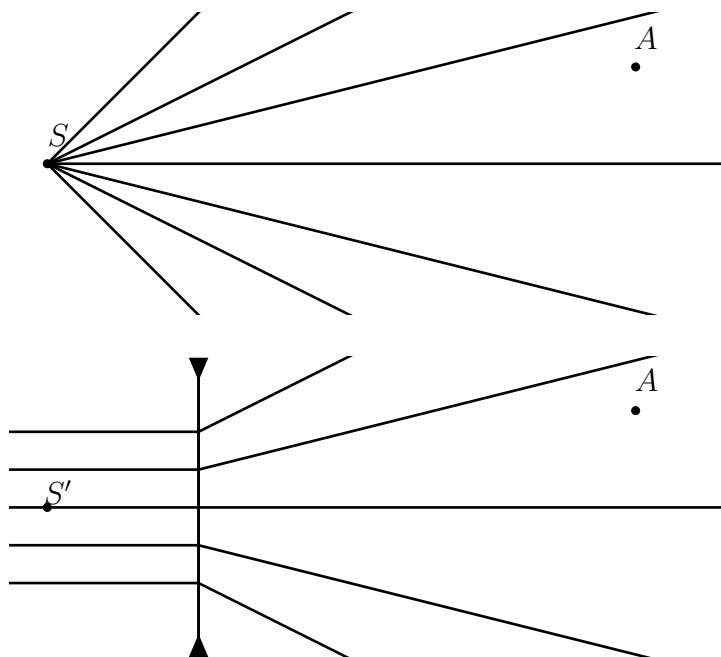


Figura 6: L'osservatore posto in A non è in grado di capire quale dei due casi è quello che osserva. L'oggetto presente nel secondo caso è una lente divergente

Le immagini possono essere di due tipi: reali o virtuali. Un'immagine reale si forma quando i raggi che partono da una sorgente e passano attraverso un sistema ottico convergono tutti in un punto: per un osservatore sarà come se in quel punto ci fosse la sorgente. Un'immagine virtuale si forma invece quando i raggi fisicamente non convergono, ma se immaginiamo di prolungarli, tutte le rette ottenute si incontreranno in un unico punto. A un osservatore sembrerà che i raggi provengano effettivamente da quel punto.

La situazione è quella che si vede in figura 6: dei raggi paralleli (che possiamo pensare come emessi da una sorgente posta all'infinito) vengono deviati in modo che i loro prolungamenti si incontrino in S' . Per un osservatore posto in

A (o un sistema ottico qualsiasi posto in A) sarà come se non ci fosse nessuna lente e la sorgente si trovasse in S' , ovvero il caso illustrato nella prima parte della figura.

Da notare che i raggi “virtuali” non stanno davvero passando attraverso la lente e quindi non subiscono una seconda riflessione: per capirlo, si può pensare di sostituire il sistema “sistema ottico + sorgente” con l’immagine virtuale, ma non si può sostituire soltanto la sorgente con l’immagine, lasciando al suo posto la lente.

Conseguenza della differenza tra queste due situazioni è che un’immagine reale può essere racchiusa su uno schermo posto nel punto dove i raggi convergono, mentre questo non è possibile nel caso di immagini virtuali.

Infine, consideriamo il caso di *sorgenti virtuali*: per la reversibilità dei cammini ottici, possiamo immaginare di invertire il senso dei raggi in figura 6. Dei raggi che non sembrano provenire da un punto unico, ma che, se non ci fosse la lente, convergerebbero, possono essere trattati come provenienti da una sorgente virtuale posta dove convergerebbero. Queste osservazioni saranno utili per poter usare la stessa formula in più situazioni, modificando soltanto i segni di alcune variabili.

7 Diottro sferico

Il diottro è il sistema ottico più semplice ed è costituito da due mezzi con diverso indice di rifrazione a contatto. Il diottro sferico è quello che ha la superficie di separazione di forma sferica. Sebbene non sia molto comune avere a che fare con dei diottri nelle olimpiadi, essi sono alla base delle lenti che invece costituiscono dei sistemi ottici molto comuni.

Nella figura 7 il punto S rappresenta una sorgente puntiforme e I il punto in cui il raggio incidente sul diottro con angolo α incontra l’asse ottico. Indicando con n_1 l’indice di rifrazione del mezzo in cui si trova la sorgente e n_2 l’altro, si può applicare la legge di Snell per trovare la seguente relazione tra gli angoli in figura:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (2)$$

Questa equazione è esatta, ma a priori la posizione di I potrebbe dipendere da α : La sorgente emette raggi in tutte le direzioni e questi potrebbero non convergere in un punto per formare un’immagine. Vedremo però che questo con qualche approssimazione questo effettivamente succede.

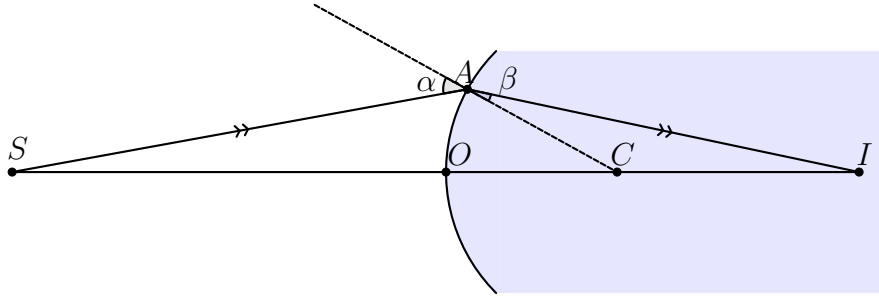


Figura 7: Schema ottico di un diottro sferico, S è una sorgente puntiforme e I il punto in cui il raggio incidente sul diottro con angolo α incontra l'asse ottico

Definiamo p come la distanza tra S e O (il punto della superficie di separazione che appartiene al segmento SI) e q la distanza tra I e O . Inoltre il diottro è ricavato da una sfera di centro C e raggio R . Useremo d'ora in poi un'approssimazione parassiale, ovvero considereremo $\alpha \ll 1$ per poter giustificare delle approssimazioni altrimenti non valide, in particolare si noti che sono piccoli tutti gli angoli che tendono a 0 quando α tende a 0.

Per prima cosa si ricordi che se $x \ll 1$ allora $\sin x \approx x$, da cui l'equazione (2) diventa:

$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (3)$$

Ciò permette di considerare approssimativamente il punto in cui il raggio incontra la superficie come appartenente alla perpendicolare a SI passante per O . Si può notare che per il teorema dell'angolo esterno⁵ (applicato al triangolo ACI e all'angolo esterno \widehat{ACS}) si ricava che:

$$\widehat{ACS} = \beta + \widehat{CIA} \quad (4)$$

Inoltre, notando che tutti gli angoli sono piccoli, si ottiene che:

$$\widehat{ACS} \approx \tan(\widehat{ACS}) = \frac{AO}{R} \quad \widehat{AIO} \approx \tan(\widehat{AIO}) = \frac{AO}{q} \quad (5)$$

Combinando le equazioni (4) e (5) si ottiene:

$$\frac{AO}{R} = \beta + \frac{AO}{q} \quad (6)$$

⁵In un triangolo, l'ampiezza di un angolo esterno corrispondente a un angolo interno è uguale alla somma degli altri due angoli interni.

Guardando ora al triangolo SAC e applicando di nuovo il teorema dell'angolo esterno si ottiene:

$$\alpha = \widehat{ASO} + \widehat{ACS} \quad (7)$$

Notando che anche \widehat{ASO} è piccolo si ha:

$$\widehat{ASO} \approx \tan(\widehat{ASO}) = \frac{AO}{p} \quad (8)$$

Combinando le equazioni (5), (7) e (8) si ottiene:

$$\alpha = \frac{AO}{p} + \frac{AO}{R} \quad (9)$$

Per finire unendo le equazioni (3), (6) e (9) si ottiene:

$$n_1 \left(\frac{AO}{p} + \frac{AO}{R} \right) = n_2 \left(\frac{AO}{R} - \frac{AO}{q} \right) \quad (10)$$

$$n_1 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right) = n_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right) \quad (11)$$

Da cui:

$$\frac{n_2}{q} + \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (12)$$

Quest'equazione è molto interessante in quanto non appare α , dunque la posizione di I non dipende da esso, purché sia valida l'approssimazione parassiale, e dunque si forma un'immagine nel punto I .

7.1 Segni

Nel caso in cui i parametri geometrici del sistema e il valore di p rendano negativo q , questo significa che non si forma un'immagine reale, ovvero i raggi non convergono in nessun punto (in particolare, non convergono in un punto a distanza $|q|$ a destra del diottro) ma *sembrano* provenire da un punto a sinistra del sistema: si è formata un'immagine virtuale.

Abbiamo ricavato la formula (12) ipotizzando $p > 0, R > 0$ ma la formula è valida più in generale. In particolare, se la sorgente è virtuale, ovvero i raggi provengono sempre dalla sinistra del sistema, ma non da una sorgente puntiforme e, se non ci fosse il diottro, convergerebbero in un punto a distanza $x > 0$ sulla destra. In questo caso la formula funziona ma dovremmo porre $p = -x$. Analogamente se il diottro ha concavità verso destra (ovvero C si

trova a sinistra di O), sarà sufficiente sostituire a R il valore del raggio ma cambiato di segno: $R < 0$.

Si può notare che l'equazione (12) è tale che se gli indici di rifrazione sono uguali l'immagine virtuale si forma nella sorgente, cioè non ha alcun effetto ottico dovuto al diottrio.

8 Lenti

8.1 Formula dei punti coniugati

Le lenti sono il sistema ottico più comune. Esse sono costituite da due segmenti sferici dello stesso materiale uniti sulla parte piatta. In ambito olimpico si avrà quasi sempre a che fare con lenti sottili (vedremo cosa significa) in approssimazione parassiale.

Per studiare a livello ottico le lenti si noti che esse possono essere viste come due diottri a contatto, in cui il primo forma un'immagine (reale o virtuale) che fa da sorgente per il secondo diottrio.

Supponiamo che la luce provenga da una sorgente puntiforme sull'asse ottico a distanza p dal centro della lente, costituita da due calotte sferiche di raggi $|R_1|$ e $|R_2|$ di materiale con indice di rifrazione n . Le calotte siano disposte come in figura 8 e circondate da aria (che ha indice di rifrazione 1). Il fatto che siano circondate dall'aria non è strettamente necessario, richiede solo una minima correzione della formula finale: nell'equazione (15) apparirebbe il rapporto tra gli indici di rifrazione dei due mezzi al posto della sola n del materiale della lente.

Per comodità si noterà in seguito che un'opportuna convenzione sui segni dei raggi può essere utile per memorizzare la formula finale anche nei casi in cui una o entrambi le calotte siano concave.

Lavoreremo nell'approssimazione di lente sottile, cioè lo spessore della lente è trascurabile rispetto a R_1 , R_2 e p .

Per quanto ricavato sui diottri vediamo che in approssimazione parassiale si ha che la prima calotta forma un'immagine a distanza q' , la quale rispetta:

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q'} = \frac{n-1}{R_1} \quad (13)$$

L'immagine della prima calotta si forma oltre la seconda e inoltre l'immagine è reale. Questa immagine si comporta quindi da sorgente *virtuale* per il

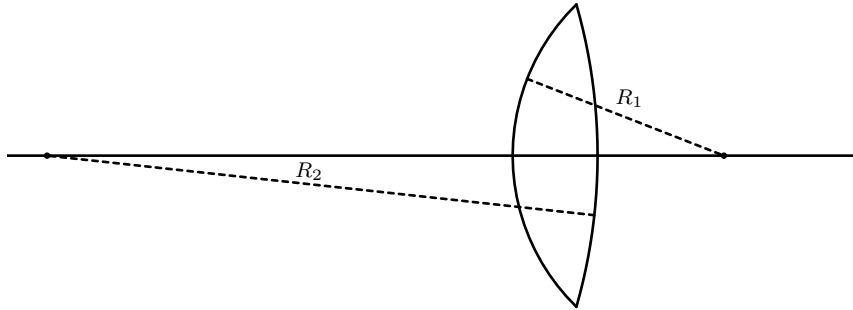


Figura 8: Rappresentazione indicativa di una lente convergente, i raggi sono stati accentuati per chiarezza

secondo diottro: applichiamo la formula usando come distanza della sorgente $-q'$ e come raggio R_2 (il diottro è “al contrario”, per cui R_2 è un numero negativo):

$$\frac{1}{q} - \frac{n}{q'} = \frac{-n + 1}{R_2} \quad (14)$$

Dove q è la distanza dell'immagine che si formerebbe. Formalmente, al posto di $-q'$ avremmo dovuto scrivere $-q' - d$, dove d è lo spessore della lente, e poi, una volta ottenuta la formula finale, prendere il limite per $d \rightarrow 0$ perché siamo in approssimazione di lente sottile (potete farlo per esercizio). Per comodità però poniamo subito $d = 0$ e la dimostrazione funziona ugualmente. Sommando le equazioni (13) e (14) si ottiene:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (15)$$

Solitamente si definisce la lunghezza focale f in modo che

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Questa è nota come equazione del costruttore di lenti Sostituendo nella (15) si ha:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (16)$$

nota come legge dei punti coniugati. Questa formula è sufficiente a risolvere quasi ogni esercizio olimpico di ottica che coinvolge le lenti; a volte può capitare di usare la formula del costruttore se si conosce la geometria della lente.

8.2 Segni

Abbiamo ricavato la formula sopra nel caso di lenti con un raggio positivo e uno negativo (le concavità dei due diottri rivolte come in figura 8), ma sono valide anche se una o entrambe le calotte hanno concavità diversa e sorgente o immagine sono virtuali, anche se non lo dimostriamo (potete farlo per esercizio: la dimostrazione è quasi uguale, basta fare attenzione a come applicare la (12)).

In ogni caso la formula non va modificata, ma le variabili p , q , R_1 e R_2 vanno sempre pensate come variabili con segno piuttosto che come distanze. In particolare:

- $p > 0$ se la sorgente è reale, cioè i raggi provengono da un punto che si trova a sinistra della lente a distanza $|p|$ da essa; $p < 0$ se la sorgente è virtuale, cioè i raggi provengono dalla sinistra della lente ma convergerebbero in un punto a distanza $|p|$ dalla lente, alla sua destra;
- $q > 0$ se l'immagine è reale, ovvero i raggi convergono in un punto a distanza $|q|$ dalla lente, alla sua destra; $q < 0$ se l'immagine è virtuale, ovvero i raggi non convergono ma i loro prolungamenti si incontrano in un punto posto a sinistra della lente, a distanza $|q|$ da essa e per un osservatore a destra della lente, sarà come se ci fosse un oggetto in quel punto;
- $R_1 > 0$ se la calotta di sinistra è un tratto di cerchio con centro a destra della lente; $R_1 < 0$ se la calotta di sinistra è un tratto di cerchio con centro a sinistra della lente;
- $R_2 > 0$ se la calotta di destra è un tratto di cerchio con centro a destra della lente; $R_2 < 0$ se la calotta di destra è un tratto di cerchio con centro a sinistra della lente (esattamente come per R_1).

Un modo sensato per ricordarsi come mettere i segni è che p e q sono positivi quando rispettivamente immagine e sorgente sono dal lato che ci aspettiamo.

Da notare che la formula rispetta l'invertibilità del cammino ottico, infatti è simmetrica per scambio di p e q (cioè: ponendo una sorgente nell'immagine, si ottiene un'immagine dove prima c'era la sorgente).

Inoltre, una lente si comporta allo stesso modo della sua simmetrica, cioè quella con i raggi R_1 e R_2 invertiti in valore assoluto: provate a sostituire nell'equazione del costruttore di lenti, si ottiene la stessa lunghezza focale (attenzione: anche il segno di f non cambia, perché scambiare i raggi di curvatura non significa semplicemente scambiare R_1 e R_2 nella formula, ma

anche fare dei cambi di segno).

8.3 Lenti convergenti e divergenti

Se la lunghezza focale è positiva, la lente si dice *convergente*, se è negativa si dice *divergente*. Questi nomi sono dovuti ai comportamenti che esse assumono se colpite da raggi paralleli all'asse ottico: la lente convergente forma un'immagine reale nel fuoco facendoli convergere, mentre quella divergente li allontana creando un'immagine virtuale nel fuoco dalla parte di provenienza. La lente convergente è solitamente indicata in maniera schematica come un segmento con delle frecce agli estremi che puntano verso l'esterno e quella divergente con le frecce che puntano verso l'interno, come in figura 9.

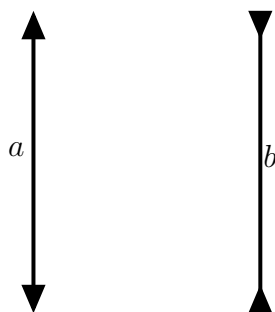


Figura 9: Rappresentazione schematica delle lenti: a è convergente e b è divergente

È importante ricordare che raggi parassiali e vicini all'asse ottico vengono sempre focalizzati nel fuoco, ovvero quel punto che si trova sull'asse ottico a distanza $|f|$ dalla lente (dopo la lente per le convergenti e prima delle lente per le divergenti) creando un'immagine che è virtuale per le lenti divergenti e reale per quelle convergenti. Questo si può dedurre dalla formula dei punti coniugati, perché possiamo pensare ai raggi paralleli all'asse ottico come provenienti da una sorgente a distanza infinita, quindi $\frac{1}{p} = 0$, da cui $q = f$ (notare che il segno giustifica quanto appena detto).

9 Sorgenti estese

Le lenti con cui abbiamo a che fare tutti i giorni non hanno solo una sorgente puntiforme, ma piuttosto oggetti estesi. La formula dei punti coniugati però ci dice solo dove si formerà l'immagine (puntiforme) di una

sorgente puntiforme posta sull'asse ottico. Nel caso di sorgenti estese ci sono quindi due problemi: la sorgente non è puntiforme e non tutti i punti della sorgente si trovano sull'asse ottico, caso che, per ora, non sappiamo trattare.

Per risolvere questo problema supponiamo per semplicità che la sorgente sia un segmento sufficientemente corto con un estremo sull'asse ottico e ortogonale ad esso. Questo caso copre gran parte dei casi interessanti per le olimpiadi, studiare l'immagine di una sorgente lontana dall'asse ottico è in generale complicato.

Sappiamo come trattare la base del segmento: la sua immagine sarà sempre sull'asse ottico in una posizione che si trova con la (16). Inoltre, sotto queste ipotesi, si può dimostrare (non lo faremo) che le immagini si formano⁶ e sono sempre segmenti ortogonali all'asse ottico nello stesso piano della sorgente. Quindi se capiamo dove finisce il punto del segmento più lontano dall'asse, sappiamo tutto sull'immagine.

9.1 Posizione dell'immagine

Per quanto abbiamo detto, per trovare la posizione dell'immagine usiamo la (16) e sappiamo che tutti il segmento-immagine si trova sopra o sotto l'asse ottico, perpendicolare a esso e con proiezione in q . È spesso utile però fare un disegno schematico, dal quale oltre che ricavare q , senza fare conti, si trova la dimensione dell'immagine e se è diritta o capovolta (tutte cose utili negli esercizi olimpici).

Poiché sappiamo che l'immagine della punta si forma, basta disegnare due raggi provenienti dalla punta e vedere dove si intersecano, sapendo che anche gli altri passeranno per quel punto. In particolare, come in figura 10, sia per sorgenti reali che virtuali, useremo:

- un raggio parallelo all'asse ottico, che quando incontra la lente viene mandato nel fuoco, a destra o a sinistra della lente a seconda che sia convergente o divergente, scelto sempre nella direzione da cui realmente proviene la luce;
- uno passante per il centro della lente, che non viene deviato, perché incontra solo due superfici di separazione parallele e l'aria circostante ha sempre lo stesso indice di rifrazione.

⁶Non è ovvio: abbiamo dimostrato solo che i raggi provenienti da punti sull'asse ottico vengono focalizzati in un punto, qui stiamo dicendo che tutti i punti della sorgente hanno un'immagine puntiforme ben definita

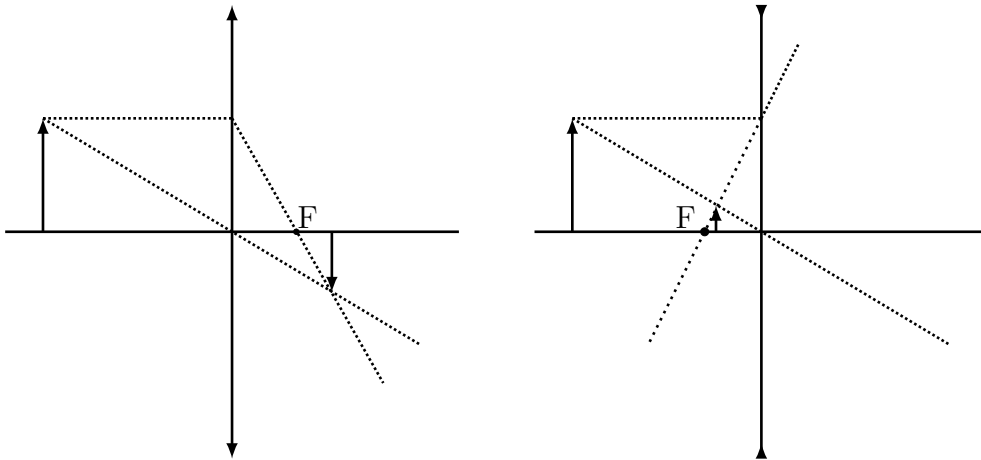


Figura 10: Immagini di una sorgente reale per una lente convergente (sinistra) e divergente (destra). Sono stati disegnati un raggio parallelo all'asse ottico e uno passante per il centro della lente.

9.2 Ingrandimento

Dalla figura 10, per similitudine tra triangoli, si vede che, in entrambi i casi $\frac{h'}{h} = \frac{|q|}{p}$, dove h e h' sono l'altezza rispettivamente della sorgente e dell'immagine. Questo vale in generale. Sostituendo q con la sua espressione in funzione di p e f , si ha $\left|\frac{q}{p}\right| = \left|\frac{f}{f-p}\right|$. Si può quindi definire l'ingrandimento come il rapporto

$$G = \frac{f}{p - f}$$

dove il segno è scelto in modo che G sia positivo se l'immagine è reale e capovolta, negativo se è virtuale e diritta⁷ (dal disegno dovrebbe essere chiaro che le immagini reali sono sempre capovolte e quelle virtuali sempre diritte, basta considerare il raggio passante per il centro della lente).

⁷Attenzione perché la convenzione non è fissa, alcuni definiscono G come $\frac{f}{p-f}$ e il segno di G ha significato opposto.

10 Specchi sferici

In questa dispensa si è preferito descrivere in dettaglio le lenti e lasciare gli specchi sferici come eventuale esercizio per il lettore, in quanto essi non richiedono di passare per un sistema ottico intermedio (come il diottro per le lenti). Ricordiamo però i punti fondamentali, che generalmente sono sufficienti a risolvere gli esercizi sugli specchi sferici.

Uno specchio sferico è una calotta sferica costituita di materiale riflettente. Lo specchio si chiama concavo se la luce proviene dalla parte della calotta interna alla sfera, convesso in caso contrario. Con dei calcoli analoghi a quelli fatti per il diottro sferico, si ottiene che gli specchi sferici sono buone approssimazioni di quelli parabolici (per i quali i raggi paralleli all'asse ottico convergono esattamente nel fuoco), purché il raggio della calotta sia piccolo rispetto a quello della sfera.

Anche in questo caso vale la legge dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

dove definiamo le variabili nel seguente modo:

- p è la posizione della sorgente, ed è positivo se è reale, negativo se è virtuale;
- q è la posizione dell'immagine, che è positiva per immagini reali (che si formano dalla stessa parte della sorgente), negativa per le immagini virtuali (dal lato opposto dello specchio);
- f è la distanza focale dello specchio e, detto R il raggio dello specchio, vale $\frac{R}{2}$ per gli specchi concavi, $-\frac{R}{2}$ per gli specchi convessi

L'ingrandimento è $G = -\frac{q}{p}$, modo che sia $G > 0$ per le immagini diritte, $G < 0$ per le immagini capovolte.

11 Cenni ai limiti dell'ottica geometrica

Come detto in precedenza, l'ottica geometrica è una teoria approssimata che non tiene conto della natura ondulatoria della luce. Finora abbiamo considerato fenomeni che possono essere spiegati da questa teoria, ma ce ne sono altri che, invece, non possono essere spiegati.

In particolare, questa teoria fallisce quando la lunghezza d'onda λ ha dimensioni paragonabili a quelle degli oggetti con cui la luce interagisce. Per

esempio se la luce incontra una fessura di dimensioni paragonabili a λ non si può trascurare la diffrazione; la generalizzazione della legge di Snell per indici di rifrazione che variano con continuità vale nel limite in cui n varia molto lentamente, ovvero la scala su cui si apprezza una variazione significativa di n è molto maggiore di λ . Altri fenomeni non spiegabili sono l'assorbimento e la dispersione della luce.

Un effetto interessante e meno noto della diffrazione è l'effetto tunnel elettromagnetico. Immaginiamo di porre tra due strati di un materiale con indice di rifrazione n_1 un sottile strato di un mezzo con indice di rifrazione $n_2 < n_1$, per esempio un sottile strato d'aria tra due lastre di vetro. Se un raggio incide sulla superficie di separazione tra uno degli strati di vetro e l'aria con angolo maggiore dell'angolo limite, ci si aspetta che la luce non passi dal vetro all'aria ma subisca riflessione totale. In realtà, se lo strato di aria ha spessore dell'ordine di λ , si osserva che la luce riesce ad attraversare lo strato d'aria a continua a propagarsi nel vetro.

Questo fenomeno è spiegabile solo risolvendo il problema con le equazioni di Maxwell: il problema sta nel fatto che i campi elettrici non sono esattamente nulli appena fuori dal primo strato di vetro, ma decadono esponenzialmente con lunghezza caratteristica che dipende da λ - mentre nei limiti dell'ottica geometrica, $\lambda = 0$, per cui il campo si annullerebbe immediatamente fuori dal materiale. Questo campo raggiunge la seconda interfaccia, si riflette e interferisce con il campo presente. Si trova che il risultato di questo processo è che viene trasportata energia oltre l'interfaccia, creando un raggio nel secondo strato vetro.

Esercizi

I Immagini

Data una lente convergente con lunghezza focale fissata f , dire, in funzione della posizione della sorgente, quando l'immagine è virtuale e quando è reale, quando è diritta e quando è capovolta, quando è ingrandita e quando è rimpicciolita.

Fare la stessa cosa per una lente convergente e per entrambi i tipi di specchi sferici (concavo e convesso).

II Specchio piano

Una persona di altezza h si guarda allo specchio, in piedi. Qual è la minima altezza dello specchio perché possa vedere la sua immagine completa?

III Gara di primo livello, olifis 2019 - modificato

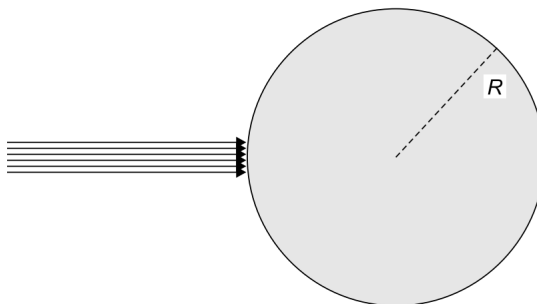
Si pone una sorgente davanti a una lente convergente di vetro crown ($n \simeq 1.52$) a distanza leggermente minore della distanza focale f . L'immagine prodotta è reale o virtuale? Nel caso sia virtuale, si vuole ottenere un'immagine reale mantenendo l'oggetto fermo e sostituendo la lente con una di forma identica, ma composta di un materiale diverso, posta nella stessa posizione della prima lente. È possibile? Come deve essere l'indice di rifrazione della nuova lente rispetto a quello del vetro crown?

IV Legge di Gladstone-Dale

La legge di Gladstone-Dale è una legge empirica che afferma che, detto n l'indice di rifrazione di un materiale e ρ la sua densità, $n - 1$ è direttamente proporzionale a ρ . Supponendo che la legge valga anche per ghiaccio e acqua e sapendo che quando un iceberg galleggia sul mare, solo il 10% del suo volume emerge, calcolare l'indice di rifrazione del ghiaccio a partire dal quello dell'acqua.

V Senigallia 2000/1A

Un sottile fascio di raggio luminosi paralleli incide su una sfera trasparente di raggio R e indice di rifrazione n lungo la direzione di un diametro, come mostrato in figura. I raggi vengono focalizzati in uno stesso punto che può essere interno o esterno alla sfera stessa. Trovare per quali valori di n il fascio viene focalizzato esternamente alla sfera.



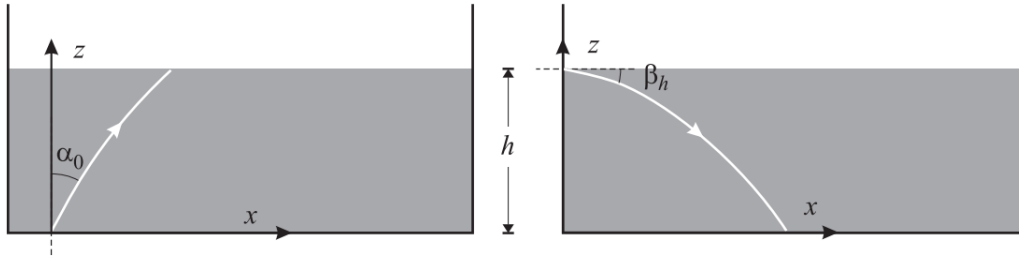
VI Senigallia 2015/1

Quando al di sopra di un piano orizzontale la temperatura varia con la quota, restando uniforme ad una stessa altezza dal suolo, anche l'indice di rifrazione dell'aria varia e ciò fa sì che i raggi luminosi siano deviati da un percorso rettilineo, dando luogo al ben noto fenomeno del miraggio.

Sarà studiato qui un fenomeno analogo. Si consideri un fascio di luce laser che entra in una vaschetta con le pareti piane e trasparenti. Nella vaschetta c'è una soluzione di acqua e zucchero in cui la concentrazione diminuisce progressivamente con l'altezza z : raggiunge il valore di saturazione sul fondo del recipiente ed è praticamente nulla al livello più alto.

L'indice di rifrazione n dipende dalla concentrazione e quindi varia anch'esso con la quota, ma la funzione $n(z)$ non è nota, non essendo nota la variazione della concentrazione al variare di z : si sa solo che sul fondo il valore di n è quello di una soluzione satura di acqua e zucchero ($n_0 = 1.46$) mentre al livello più alto, dove c'è la superficie orizzontale del liquido, $n_h = 1.33$. Al di sopra c'è aria, il cui indice di rifrazione può essere approssimato con $n_a = 1$.

Lo scopo di questo problema è quello di capire, adottando alcune ipotesi semplificative, il comportamento del fascio di luce.



Si inizia facendo entrare il fascio luminoso dal fondo della vaschetta, diretto dal basso verso l'alto (figura a sinistra). Sia α_0 l'angolo che il raggio forma con l'asse z appena entrato nel liquido. Si consideri un sistema cartesiano (x, z) nel piano verticale individuato dal raggio e dall'asse z , e si ponga l'origine nel punto d'ingresso (vedi figura a sinistra). A partire da questo punto il fascio luminoso devia seguendo una traiettoria non rettilinea.

1. Si trovi la deviazione angolare subita dal fascio nel liquido, dal fondo fino alla superficie superiore di separazione con l'aria, assumendo $\alpha_0 = 30^\circ$.
2. Si trovi qual è il valore minimo che deve avere l'angolo d'ingresso se si vuole che il fascio non emerga in aria alla superficie superiore ma subisca una riflessione totale.

Come si è visto, la traiettoria del fascio di luce nella soluzione non è rettilinea, tuttavia la deviazione dalla retta è piccola: per semplicità verrà approssimata con una parabola con asse verticale nel piano (x, z) , i cui parametri dipendono ovviamente dall'angolo di incidenza.

3. Si calcolino i parametri della parabola per una incidenza all'angolo limite calcolato al punto 2 supponendo che l'altezza del liquido nella vaschetta sia $h = 20$ cm. Si trovi inoltre la distanza, misurata sul fondo della vaschetta, dal punto di incidenza al punto in cui il raggio riflesso dalla superficie dell'acqua ritorna sul fondo della vaschetta (si supponga che la vaschetta sia sufficientemente lunga).
4. Si ricavi, dall'equazione della parabola derivata al punto 3, l'espressione dell'indice di rifrazione in funzione di z e lo si calcoli per $z = 5$ cm, $z = 10$ cm, $z = 15$ cm e si tracci un grafico approssimativo di $n(z)$.

Negli esempi considerati finora la deviazione dalla traiettoria rettilinea è molto piccola. In altre condizioni però può diventare molto consistente,

e il percorso del raggio può ricordare quello di un getto d'acqua sparato orizzontalmente.

Si supponga che il fascio entri nella vaschetta da una parete laterale, in un punto immediatamente sotto la superficie, quindi in $z = h$ e $x = 0$ (vedi figura a destra). Supponiamo che l'angolo di ingresso nel liquido sia $\beta_h = 2^\circ$ rispetto all'asse x , verso il basso, e che il raggio arrivi sul fondo prima di colpire la parete verticale opposta.

5. Si calcoli l'angolo β_0 che il raggio forma con l'asse x sul fondo e la deviazione angolare subita all'interno del liquido.
6. Supponendo che la traiettoria del raggio si possa approssimare con una parabola anche in questo caso di grande deviazione angolare, se ne calcolino i coefficienti. Si calcoli in quale punto il raggio arriva sul fondo.

VII Senigallia 1994/4

Guidando in una giornata assolata su un tratto piano e rettilineo di autostrada si nota che, in lontananza, il manto stradale appare "bagnato". Il fenomeno, noto da sempre a chi attraversa zone desertiche, viene detto miraggio ed è dovuto alla rifrazione atmosferica in presenza di un gradiente termico particolarmente accentuato nei bassi strati d'aria.

Si consideri uno strato d'aria piano e orizzontale, entro cui l'indice di rifrazione dipende solo dall'altezza. Sia α_i l'angolo di incidenza di un raggio di luce nello strato ed α_e l'angolo di emergenza dello stesso raggio dallo strato.

1. mostrare che, fissato α_i , l'angolo α_e dipende solo dai valori che l'indice di rifrazione assume sulle superfici superiore ed inferiore dello strato.

Per l'indice di rifrazione dell'aria si osserva sperimentalmente che $n - 1$ è proporzionale alla densità ρ

$$n - 1 = k\rho \text{ (legge di Gladstone \& Dale)}$$

e si misura $n = 1.00027$ in condizioni di pressione standard ad una temperatura di circa $27^\circ C$.

2. Mostrare che, per temperature prossime al valore dato, a pressione costante, l'indice di rifrazione dell'aria può essere approssimato dalla relazione $n = n_0(1 + \nu\Delta T)$. Verificare che $\nu = -0.9 \times 10^{-6} K^{-1}$.

L'automobilista, che ha gli occhi ad un'altezza $h_0 = 1.4$ m dal suolo, ha l'impressione di vedere la strada bagnata ad una distanza d_0 di circa 200 m davanti a sé. Con buona approssimazione le traiettorie dei raggi luminosi possono essere assimilate a parabole (con asse verticale e concavità rivolta verso l'alto).

3. Calcolare la lunghezza del tratto di strada effettivamente visibile da parte dell'automobilista.
4. Determinare l'indice di rifrazione all'altezza dell'occhio del guidatore $[n(h_0)]$ in funzione dei parametri dati e dell'indice di rifrazione al suolo $[n_0]$. Può essere utile tenere presente che $h_0 \ll d_0$.
5. Supponendo per semplicità che il gradiente termico dell'aria sia uniforme, cioè che la temperatura T dell'aria vari linearmente con l'altezza h secondo la legge $T(h) = T(0) + \theta h$, determinare il gradiente termico θ .

VIII IPhO 1984/1 - ridotto

Assumi di essere in un deserto ampio e piatto. Ad una distanza 250 m osservi quella che sembra una superficie d'acqua. Man mano che ti avvicini, però, l'acqua sembra allontanarsi in modo da restare a distanza costante. Assumi che i tuoi occhi si trovino ad una altezza di 1.60 m. L'indice di rifrazione dell'aria a 15°C e a pressione standard 101.3 kPa è 1.000 276. La temperatura dell'aria ad altezza superiore al metro è assunta costante e uguale a 30°C , la pressione è supposta standard e l'indice di rifrazione è tale che $n - 1$ è direttamente proporzionale alla densità dell'aria. Spiega il fenomeno (com'è possibile che la distanza apparente resti costante?) e trova la temperatura dell'aria vicino alla superficie del deserto.

IX IPhO 2021/1B

Questo problema consiste di due problemi indipendenti relativi all'interno dei pianeti. Gli effetti della curvatura della superficie dei pianeti può essere trascurata. Potrebbe essere utile usare la formula: $(1 + x)^\varepsilon \simeq 1 + \varepsilon x$, quando $|x| \ll 1$.

Parte B

Supponiamo che si verifichi un breve terremoto sulla superficie di un pianeta. Si può ipotizzare che le onde sismiche provengano da una sorgente

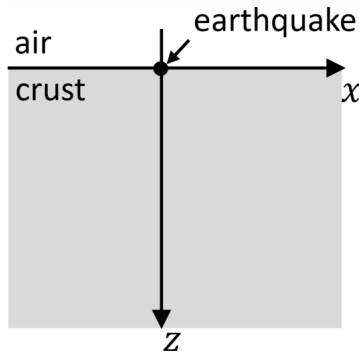


Figura 11: Sistema di coordinate utilizzato nella parte B

lineare situata a $z = x = 0$), dove x è la coordinata orizzontale e z è la profondità sotto la superficie (figura 11). Si può presumere che la sorgente dell'onda sismica sia molto più lunga di qualsiasi altra lunghezza considerata in questa domanda. A seguito del terremoto, viene emesso un flusso uniforme delle cosiddette onde longitudinali P lungo tutte le direzioni nel piano $x - z$ che ha componente positiva lungo l'asse z . Poiché la teoria delle onde in un solido è generalmente complicata, in questo problema trascuriamo tutte le altre onde emesse dal terremoto. La crosta del pianeta è stratificata in modo che il modulo della velocità v dell'onda P dipende dalla profondità z secondo la formula $v = v_0(1 + \frac{z}{z_0})$, dove v_0 è la velocità in superficie e z_0 è una costante positiva nota.

1. Consideriamo un singolo raggio emesso dal terremoto che forma un angolo iniziale $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ con l'asse z e si muove nel piano $x - z$. Qual è la coordinata orizzontale $x_1(\theta_0) \neq 0$ alla quale questo raggio può essere individuato sulla superficie del pianeta? È noto che il percorso del raggio è un arco di circonferenza. Scrivere la risposta nella forma $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ dove A e b sono costanti che devono essere determinate.

Se non sei riuscito a trovare A e b , nelle domande successive puoi usare il risultato $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ come fornito.

Supponiamo che l'energia totale, per unità di lunghezza della sorgente, rilasciata come onde P nella crosta durante il terremoto sia E . Supponiamo che le onde siano completamente assorbite quando raggiungono la superficie del pianeta provenendo dal basso.

2. Trova come la densità di energia per unità di area $\varepsilon(x)$ assorbita dalla superficie dipende dalla distanza lungo la superficie x . Disegna

l'andamento di $\varepsilon(x)$.

D'ora in poi, supponiamo che le onde siano invece completamente riflesse quando raggiungono la superficie. Immagina un dispositivo posizionato a $z = x = 0$ che ha la stessa geometria della sorgente sismica considerata in precedenza. Il dispositivo è in grado di emettere onde P in una distribuzione angolare liberamente scelta. Facciamo in modo che il dispositivo emetta un segnale con una gamma ristretta di angoli di emissione. In particolare, l'angolo iniziale che il segnale forma con la verticale appartiene all'intervallo $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, dove $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, $\delta\theta_0 \ll 1$ e $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.

3. A quale distanza x_{max} lungo la superficie dalla sorgente si trova il punto più lontano che non viene raggiunto dal segnale? Scrivere la risposta in funzione di θ_0 , $\delta\theta_0$ e delle altre costanti fornite sopra.

X IPhO 1995/2

La velocità di propagazione del suono nell'oceano varia con profondità, temperatura e salinità. Se z è l'asse verticale, in un modello in cui la velocità ha un minimo ad una certa profondità, la velocità del suono è $c = c_0 + b|z|$ (c_0 e b sono costanti), in cui si è fissato $z = 0$ in corrispondenza del minimo di c . La superficie dell'oceano è a $z = z_s$ e il fondale (assunto orizzontale) è a $z = -z_b$. Una sorgente è posta a $(x, z) = (0, 0)$ ed emette un "raggio sonoro" nel piano $x - z$ che forma un angolo θ_0 con l'asse z . A causa della variazione di c , il raggio verrà rifratto.

1. Mostrare che la traiettoria del raggio forma un arco di circonferenza di raggio $R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}$, con $0 < \theta_0 < \pi/2$
2. Trovare il più piccolo valore di θ_0 , per raggi diretti verso l'alto, per cui il raggio si trasmetta senza riflettersi sulla superficie dell'oceano, in funzione di z_s , c_0 e b
3. Un ricevitore sonoro è posizionato a $(x, z) = (X, 0)$. Trovare i valori di θ_0 per cui il raggio emesso dalla sorgente arrivi al ricevitore. Si assuma che z_s e z_b siano sufficientemente grandi da rimuovere la possibilità che il raggio si rifletta sulla superficie o sul fondale dell'oceano
4. Calcolare i quattro più piccoli valori di θ_0 che permettono al raggio di raggiungere il ricevitore nel caso in cui
 - $X = 10\,000$ m
 - $c_0 = 1500$ ms⁻¹

- $b = 0.020\,00\text{ s}^{-1}$

5. Per il più *piccolo* valore di θ_0 trovato al punto 3, trovare il tempo impiegato dal raggio per andare dalla sorgente al ricevitore. Calcolarne il valore numerico usando i valori dati al punto 4. Può essere utile il seguente risultato:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \tan \frac{x}{2} + \text{cost}$$

Calcolare il tempo impiegato da un raggio che raggiunga il ricevitore muovendosi lungo $z = 0$. Se vengono emessi insieme, quale dei due raggi arriverà prima?

XI Senigallia 2017/3⁸

La cosiddetta lente gravitazionale è un fenomeno astronomico previsto dalla teoria della relatività generale, dovuto alla deflessione della luce proveniente da una sorgente lontana nell'attraversamento di un campo gravitazionale molto intenso. Tale fenomeno si può descrivere in forma semplificata col seguente diagramma nel quale, per chiarezza, gli angoli sono enormemente amplificati e il percorso curvilineo della luce è approssimato con due tratti rettilinei, come se la deviazione avvenisse in un solo punto. In figura H è la posizione dell'osservatore, θ l'angolo sotto cui si osserva l'anello di luce e δ l'angolo di deflessione dovuta al campo gravitazionale di A ; questo, espresso in termini della massa M della galassia A e della distanza $R = AD$, si scrive:

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 R} \quad (17)$$

1. Esprimere la distanza R in funzione della massa M e delle distanze d_A e d_B delle due galassie, indicate in figura (Ricordare la relazione tra gli angoli δ , θ e θ' e tenere presente che le misure di questi angoli sono sempre dell'ordine dei secondi d'arco).
2. Esprimere l'angolo di deflessione δ in funzione delle stesse grandezze.
3. Mostrare che la massa M della galassia-lente A può essere ricavata se sono note le distanze d_A e d_B e la misura angolare (θ) del raggio dell'anello di Einstein.

⁸Il testo è stato parzialmente modificato e l'immagine è stata presa dal testo originale

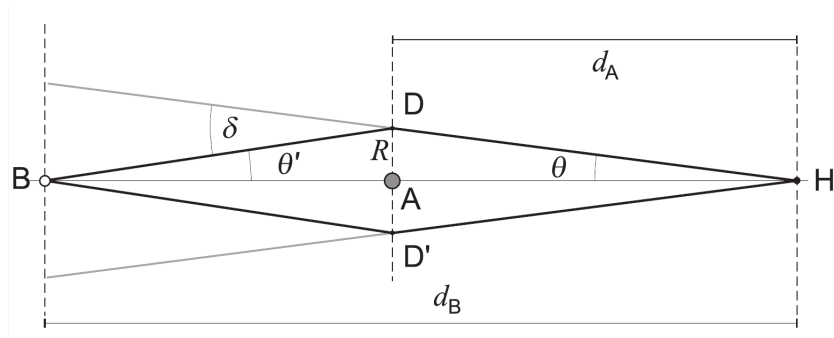


Figura 12: Diagramma della lente gravitazionale

4. Fissata la distanza d_A e posto $d_B = kd_A$, determinare per quale valore di k la misura angolare dell'anello visto da H è massima e trovare la corrispondente espressione di θ_{\max} .

Si supponga che la galassia A sia a forma di disco schiacciato e che sia su un piano perpendicolare alla linea di vista. Perché l'anello possa essere osservato occorre che la misura angolare del suo raggio sia abbastanza maggiore dell'apertura angolare sotto cui si osserva il raggio R_A della galassia A , ovvero che sia almeno $\theta > 2\frac{R_A}{d_A}$. Questo determina una relazione tra la distanza della galassia e la sua "compattezza", espressa in termini di densità superficiale $\sigma = \frac{M}{\pi R_A^2}$

5. Tenuto conto che la massima densità osservata per una galassia compatta è dell'ordine di $\sigma_0 = 200 \text{ kg m}^{-2}$, trovare la minima distanza d_A a cui una galassia compatta può generare un anello di Einstein che sia almeno il doppio delle dimensioni apparenti della galassia. Esprimere il risultato in megaparsec ($1 \text{ Mpc} = 3.08568 \times 10^{22} \text{ m}$).

Volendo esaminare in che senso si può parlare di lente gravitazionale si può confrontare l'andamento della deflessione δ in funzione di R , con l'analoga relazione per la deviazione prodotta da una sottile lente ottica convergente di focale f , in funzione della distanza R tra l'asse ottico e il punto di intersezione del raggio con la lente.

6. Determinare la funzione $\delta(R)$ per una lente ottica quando sorgente e immagine sono a distanze p e q dalla lente e gli angoli sono piccoli (ovvero per $p, q \gg R$).

Posto adesso $q = d_A$ e $p = d_B - d_A$, si consideri il cono formato dai raggi di luce che incidono sulla lente gravitazionale ad una distanza R dall'asse ottico.

7. Si dimostri che, limitatamente all'insieme dei raggi di questo cono, la lente gravitazionale equivale ad una lente ottica con una distanza focale F dipendente dal parametro R (oltre che dalle altre costanti) e si trovi l'espressione di $F(R)$. Si mostri con uno schizzo il differente comportamento di una lente gravitazionale rispetto ad una lente ottica, tracciando – in entrambi i casi – tre raggi relativi a tre coni con $R = r, 2r, 3r$.
8. Nel caso particolare in cui la galassia B possa essere considerata a distanza infinita, mostrare che per l'osservatore H , la luce di quella galassia appare provenire da una sorgente a forma di anello, posto a distanza D da H : determinare tale distanza in termini di d_A .

XII Doppietto di lenti

Si prendano due lenti sottili convergenti e si facciano coincidere i loro assi ottici. Si supponga che le lenti siano a distanza d e abbiano lunghezze focali pari a f_1 e f_2 . Si assuma inoltre che il sistema ottico sia equivalente a una lente (ovviamente con delle limitazioni, la sorgente non potrà trovarsi tra le due lenti). Trovare la lunghezza focale e la posizione della lente equivalente. Le formule trovate sono valide anche se le lenti iniziali non sono convergenti?

Soluzioni

I Immagini

Lenti convergenti	
$p > 2f$	Rimpicciolita, reale, capovolta
$2f > p > f$	Ingrandita, reale, capovolta
$f > p > 0$	Ingrandita, virtuale, diritta
$p < 0$	Rimpicciolita, virtuale, diritta
Lenti divergenti	
$p > 0$	Rimpicciolita, virtuale, diritta
$0 > p > f$	Ingrandita, virtuale, diritta
$f > p > 2f$	Ingrandita, reale, capovolta
$2f > p$	Rimpicciolita, reale, capovolta
Specchi concavi	
$p > R$	Rimpicciolita, reale, capovolta
$R > p > \frac{R}{2}$	Ingrandita, reale, capovolta
$\frac{R}{2} > p > 0$	Ingrandita, virtuale, diritta
$0 > p$	Rimpicciolita, reale, capovolta
Specchi convessi	
$p > 0$	Rimpicciolita, virtuale, diritta
$0 > p > \frac{R}{2}$	Ingrandita, virtuale, diritta
$\frac{R}{2} > p > R$	Ingrandita, reale, capovolta
$R > p$	Rimpicciolita, reale, capovolta

II Specchio piano

La minima altezza è $\frac{h}{2}$. Immaginiamo di dividere la persona in due parti, una alta h_P tra occhi e piedi e una alta h_T tra gli occhi e il punto più alto della testa. Il raggio che parte dagli occhi e arriva ai piedi incide sullo specchio in un punto che si trova a metà altezza tra occhi e piedi. Quindi è necessaria una parte di specchio alta $\frac{h_P}{2}$, posizionata in modo che il punto più alto dello specchio sia all'altezza degli occhi, per contenere l'immagine della parte occhi - piedi della persona. Analogamente, per vedere la parte occhi - testa, ci vuole uno specchio alto $\frac{h_T}{2}$ posizionato in modo che il bordo inferiore dello specchio si trovi all'altezza degli occhi. In totale quindi lo specchio sarà alto $\frac{h_T}{2} + \frac{h_P}{2} = \frac{h}{2}$.

III Gara di primo livello, olifis 2019 - modificato

L'immagine è virtuale. Per avere un'immagine reale, deve essere $p > f$ (si veda l'esercizio 1). Non potendo spostare l'oggetto, è necessario modificare la distanza focale della lente f , che, in particolare, deve diminuire. Dall'equazione del costruttore di lenti si vede che, fissati R_1 ed R_2 , f è inversamente proporzionale a n , quindi n deve aumentare.

IV Legge di Gladstone-Dale

Detto V il volume dell'iceberg, n_A l'indice di rifrazione dell'acqua, n_G quello del ghiaccio e ρ_A , ρ_G le rispettive densità, dal principio di Archimede si ricava

$$0.9V\rho_A = V\rho_g \quad \text{e quindi} \quad \rho_G = 0.9\rho_A.$$

Sapendo che

$$\frac{n_G - 1}{\rho_G} = \frac{n_A - 1}{\rho_A}$$

si trova, prendendo $n_A = 1.33$, $n_G = 0.9(n_A - 1) + 1 = 1.30$.

V Senigallia 2000/1A

La soluzione ufficiale utilizza soltanto la legge di Snell e semplici considerazioni geometriche, ma è interessante notare che il problema può essere risolto velocemente applicando la legge del diottro sferico. La sfera infatti può essere vista come due diottri sferici a contatto (un po' come una lente, ma in questo caso non possiamo assumere che sia una lente sottile). Per la prima rifrazione si ha raggio R (positivo), $n_1 = 1$, $n_2 = n$ e $p = \infty$, da cui

$$\frac{n}{q} = \frac{n-1}{R}$$

Per avere $q > 2R$ (ovvero la prima immagine si trova fuori dalla sfera) si deve avere $n < 2$. Se questa immagine si trova fuori dalla sfera deve essere considerata sorgente virtuale per il secondo diottro, che ha $n_1 = n$, $n_2 = 1$ e raggio $-R$, e bisogna verificare che i raggi convergano in un punto fuori dalla sfera e non vengano deviati dalla seconda rifrazione in modo da formare un'immagine virtuale o formarne una reale nella sfera. Per un sistema di questo tipo però una sorgente virtuale crea sempre un'immagine reale: $\frac{1}{q} = \frac{1-n}{-R} - \frac{1}{p} > 0$. Quindi per $n < 2$ i raggi si focalizzano fuori dalla sfera. Viceversa per $n > 2$ ci sarebbe già una prima immagine dentro la sfera.

VI Senigallia 2015/1

1. Poiché l'indice di rifrazione dipende solo dalla quota z , si può considerare il mezzo come la sovrapposizione di tanti strati infinitesimi in ciascuno dei quali n è costante, e quindi la rifrazione avviene nel passaggio da uno strato all'altro. Tuttavia, poiché, per la legge di Snell, a ogni rifrazione il prodotto $n(z) \sin(\alpha(z))$ rimane costante, non è necessario conoscere il valore di n in ogni straterello, ma basta imporre la condizione di uguaglianza fra lo strato più basso di indice di rifrazione n_0 e lo strato in superficie di indice n_h

$$n_h \sin(\alpha_h) = n_0 \sin \alpha_0 \text{ da cui segue } \alpha_h = 33.3^\circ.$$

La variazione angolare è quindi

$$\alpha = \alpha_h - \alpha_0 = 3.3^\circ.$$

2. Calcolo analogo vale per l'angolo limite:

$$n_0 \sin \alpha_{0,\text{lim}} = n_h \sin \alpha_{h,\text{lim}}$$

e d'altra parte

$$n_h \sin \alpha_{h,\text{lim}} = n_a \sin 90^\circ = 1$$

da cui segue

$$\alpha_{0,\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n_0}\right) = 43.23^\circ.$$

3. Ponendo $z = x = 0$ nel punto di incidenza sul fondo della vaschetta, l'equazione della parabola è:

$$z = ax^2 + bx.$$

La derivata della curva, $z'(x) = 2ax + b$, fornisce il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola, al variare di x . Nel punto d'ingresso, sul fondo della vaschetta, $x = z = 0$ e il coefficiente angolare della retta tangente vale b . Chiamando $\beta = 90^\circ - \alpha$ l'angolo con il piano orizzontale si ha

$$b = \tan \beta_0 = \tan(90^\circ - \alpha_{0,\text{lim}}) = 1.064.$$

Il fascio arriva alla superficie superiore ($z = h$) con un angolo di inclinazione

$$\alpha_{h,\text{lim}} = \arcsin 1/n_h = 48.75^\circ.$$

per cui la tangente alla traiettoria in superficie vale

$$m = \tan \beta_h = \tan (90^\circ - \alpha_{h,\text{lim}}) = 0.8769.$$

Dall'equazione della parabola, $m = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=x_h} = 2ax_h + b$ e $h = ax_h^2 + bx_h$.
Ricavando x_h dalla prima e sostituendo nella seconda

$$a = (m^2 - b^2)/4h = -0.0045 \text{ cm}^{-1}$$

Avendo i parametri della parabola si può calcolare $x_h = \frac{2h}{m+b}$, per cui la distanza dal punto di incidenza a cui viene riflesso il fascio è

$$d = 2xh = \frac{4h}{m+b} = 41.2 \text{ cm.}$$

4. Dalla relazione $n(z) \sin(\alpha(z)) = \text{costante}$ segue che la costante vale 1 nelle condizioni di incidenza all'angolo limite discusse al punto 3, quindi, ricordando che $\beta = 90^\circ - \alpha$ e che

$$\frac{1}{\cos \beta} = \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \Rightarrow n(z) = \frac{1}{\sin(\alpha(z))} = \sqrt{1 + \tan^2 \beta}$$

Tenendo conto che $\tan \beta = 2ax + b$ e dell'equazione della parabola trovata nel punto precedente, si ha $\tan \beta(z) = \sqrt{2 + 4az}$. Quindi

$$n(z) = \sqrt{1 + b^2 + 4az}. \quad (18)$$

da cui $n(5 \text{ cm}) = 1.429$; $n(10 \text{ cm}) = 1.397$; $n(15 \text{ cm}) = 1.364$

5. Dentro il liquido, vale ancora la relazione $n(z) \sin \alpha(z) = \text{costante}$, dove α è il complementare dell'angolo β . Conviene quindi riscrivere la relazione come $n(z) \cos(\beta(z)) = \text{costante}$.
Imponendo i valori noti per $z = h$ e $z = 0$, si ha

$$\beta_0 = \arccos \left(n_h \cos \frac{\beta_h}{n_0} \right) = 24.4^\circ.$$

La deviazione angolare fra ingresso e uscita in aria è quindi $\Delta\beta = 22.4$.

6. Per determinare il punto in cui il raggio ritorna sul fondo della vaschetta si procede come al punto 3 precedente con l'equazione della parabola che ora è $z = a'x^2 + b'x + h$. Si osserva, come fatto nel punto 3, che $b' = -\tan \beta_h = -0.03492$.

Sul fondo si ha $\tan -\beta_0 = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{z=0} = 2a'x + b'$ e $0 = a'x^2 + b'x + h$.
 Ricavando a' dalla prima e sostituendo nella seconda si ottiene

$$a' = \frac{b'^2 - \tan^2 \beta_0}{4h} = -0.00257 \text{ cm}^{-1}$$

$$x = \frac{2h}{\tan \beta_0} - b' = 81.7 \text{ cm}$$

VII Senigallia 1994/4

1. Suddividendo l'atmosfera in sottili strati orizzontali omogenei ed applicando ripetutamente la legge di rifrazione si ha

$$n_i \sin \alpha_i = n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = \dots = n_e \sin \alpha_e$$

da cui

$$\sin \alpha_e = \sin \alpha_i \frac{n_i}{n_e}$$

2. La legge di stato dei gas perfetti, in termini di densità si scrive

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{A}$$

essendo A il peso molecolare medio, per cui

$$n - 1 = \frac{pA}{RT} \Rightarrow \frac{kpA}{R} = (n - 1)T$$

Il coefficiente termico di variazione è

$$\nu = \frac{dn}{dT} = -\frac{kpA}{RT^2} = -\frac{n - 1}{T} = -\frac{0.00027}{300} \simeq -0.90 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

3. Si consideri il raggio che proviene dal punto più lontano della parte visibile della strada: esso descrive una parabola tangente al piano della strada in un punto a distanza d dall'osservatore. L'equazione della parabola è $y = a(d - x)^2$ e per la condizione $y(0) = h_0$ si ha

$$y(x) = \frac{h_0}{d^2}(d - x)^2$$

Il punto a distanza d appare invece al guidare in posizione d_0 tale che $\frac{d_0}{h_0} = \tan \alpha$ essendo $\frac{1}{\tan \alpha} = y'(0)$ per cui

$$y'(0) = 2\frac{h_0}{d^2}(d - x)\Big|_{x=0} = \frac{2h_0}{d} = \frac{h_0}{d_0} \Rightarrow d = 2d_0 = 400 \text{ m}$$

4. Al suolo $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ e dunque

$$n(h_0) = \frac{n_0}{\sin \alpha} = n_0 \frac{\sqrt{d^2 + h_0^2}}{d_0}$$

che sfruttando la condizione $h_0 \ll d_0$ si può approssimare con

$$n(h_0) = n_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{d_0^2} \right)$$

5. Combinando le relazioni

$$n(T) = n(T_0)(1 + \nu \Delta T) \text{ e } T(h) = T(0) + \theta h$$

si ha, per $h = h_0$,

$$n(h_0) = n_0(1 + \nu \theta h_0)$$

Uguagliando questa espressione con quella trovata al punto 4 si ricava immediatamente

$$\frac{1}{2} \frac{h_0^2}{d_0^2} = \nu \theta h_0 \Rightarrow \theta = \frac{h_0}{2\nu d_0^2} = 19.4 \text{ Km}^{-1}$$

VIII IPhO 1984/1 - ridotto

Il fenomeno osservato è dovuto alla riflessione totale in uno strato d'aria calda quando il raggio di luce proveniente dal cielo diventa parallelo alla superficie del deserto.

Poiché la densità dell'aria è inversamente proporzionale alla temperatura T a pressione fissata, si ha:

$$n(T) = 1 + \alpha * \rho = 1 + \beta/T$$

Dal valore dato dell'indice di rifrazione si ottiene

$$\beta = 0.0795 \text{ K}$$

Per avere riflessione totale è necessario che $n_{30} \sin \alpha = n_T$ dove n_{30} è l'indice di rifrazione a $T_0 = 303 \text{ K}$, n_T quella all'altezza di inversione e α l'angolo con cui il raggio arriva all'occhio dell'osservatore. Riscrivendo l'espressione precedente si ottiene

$$\left(1 + \frac{\beta}{T_0} \right) \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}} = 1 + \frac{\beta}{T}$$

dove $L = 250$ m $h = 1.6$ m. Da cui si ottiene, sfruttando che $h \ll L$ che

$$T = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{T_0}{\beta}\right) \frac{L}{\sqrt{1+h^2/L^2}} - 1 + \frac{T_0}{\beta}} \approx T_0 \left(1 + \frac{h^2 T_0}{2\beta L}\right) = 328 \text{ K}$$

IX IPhO 2021/1B

1. Anche per le onde sismiche vale la legge di Snell:

$$n(0) \sin \theta_0 = n(z) \sin \theta$$

dove l'indice di rifrazione è

$$n(z) = \frac{c}{v(z)} = \frac{c}{v_0 \left(1 + \frac{z}{z_0}\right)}$$

e con c si indica la velocità dell'onda sismica in un materiale con indice $n = 1$.

Dalle due equazioni precedenti otteniamo

$$v_0 \left(1 + \frac{z}{z_0}\right) \sin \theta_0 = v_0 \sin \theta$$

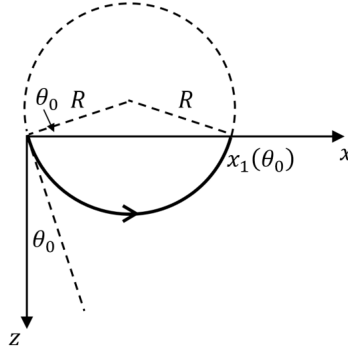


Figura 13: Costruzione geometrica per la soluzione alla domanda (1) del problema IX.

Sapendo che la traiettoria è un arco di cerchio si ha che a $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z = R - R \sin \theta_0$, che dà (vedi figura 13)

$$\left(1 + \frac{R - R \sin \theta_0}{z_0}\right) \sin \theta_0 = 1$$

da cui il raggio del cerchio è $R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}$. Con semplici passaggi geometrici si ottiene

$$x_1(\theta_0) = 2R \cos(\theta_0)$$

cioè $A = 2z_0$ e $b = 1$.⁹

2. In due dimensioni, $\frac{E}{\pi} d\theta_0$ è l'energia trasportata dai raggi che vengono emessi nell'intervallo $[\theta_0, \theta_0 + d\theta_0]$. D'altra parte, l'energia trasportata dai raggi che arrivano a $[x, x + dx]$ è εdx . Quindi

$$\varepsilon = \frac{E}{\pi} \left| \frac{d\theta_0}{dx} \right|.$$

Usando il risultato della domanda 1

$$\frac{dx}{d\theta_0} = -\frac{Ab}{\sin^2 b\theta_0} = -Ab(1 + \cot^2(b\theta_0)) = -\frac{b(A^2 + x^2)}{A}$$

Quindi,

$$\varepsilon(x) = \frac{EA}{\pi b(A^2 + x^2)} = \frac{2Ez_0}{\pi(4z_0^2 + x^2)}$$

3. Definiamo $x_- = x_1(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2})$ e $x_+ = x_1(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2})$. Al prim'ordine non nullo in $\delta\theta_0$, $x_- \simeq x_+ \simeq x_1(\theta_0)$. A ogni riflessione, la distanza orizzontale tra i due punti dove i bordi del segnale si riflettono aumenta di $|x_+ - x_-| = x_- - x_+$. Spostandosi lungo l'asse positivo delle x , questa zona diventano sempre più larghe finché non si sovrappongono. Se questo succede dopo N riflessioni, allora si ha

$$N \simeq \frac{x_1(\theta_0)}{x_- - x_+}$$

che tende a essere un'uguaglianza e non un'approssimazione per $\theta_0 \rightarrow 0$. La posizione dove le iniziano a sovrapporsi è $x_{\max} = Nx_1(\theta_0)$. Quindi

$$x_{\max} = \frac{x_1(\theta_0)^2}{x_1(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}) - x_1(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2})}$$

Dato che $\delta\theta_0 \ll \theta_0$, possiamo approssimare

$$x_1\left(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}\right) - x_1\left(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2}\right) \simeq -\frac{dx_1(\theta_0)}{d\theta_0} \delta\theta_0 = \frac{Ab}{\sin^2(b\theta_0)} \delta\theta_0$$

Combinando le ultime due equazioni e sostituendo l'espressione per $x_1(\theta_0)$ si trova

$$x_{\max} = \frac{Ab \cos^2(b\theta_0)}{\delta\theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2(\theta_0)}{\delta\theta_0}$$

⁹Le soluzioni ufficiali della gara forniscono anche una soluzione alternativa a questa parte del problema.

X IPhO 1995/2

1. Si consideri un pezzetto ds di traiettoria come localmente circolare di raggio R che sottende un angolo $d\theta$, allora $R = \frac{ds}{d\theta}$.
Dalla legge di Snell $c_0 \sin \theta = c \sin \theta_0$ per una piccola variazione di velocità dc si ottiene

$$\cos \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{c_0} dc$$

Supponendo senza perdita di generalità che il raggio sia diretto verso l'alto $dc = b dz$ da cui

$$dz = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} \cos \theta d\theta$$

Usando il fatto che $dz = ds \cos \theta_0$ si ottiene infine che

$$\frac{ds}{d\theta} = R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}$$

che è una costante perciò valida per tutta la traiettoria (fino a che z rimane positivo)

2. Poichè la coordinata z del centro della circonferenza della traiettoria vale $-R \cos \theta_0$ si ha che affinché il raggio sfiori la superficie dell'oceano senza uscire o riflettersi si deve avere che

$$z_s = R - R \sin \theta_0 = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} (1 - \sin \theta_0)$$

da cui

$$\theta_0 = \arcsin \left(\frac{c_0}{bz_s + c_0} \right)$$

3. Supponiamo per semplicità $X < 2R$, nel caso generale semplicemnete alcune delle traiettorie non sono percorribili. La traiettoria più semplice è un arco di circonferenza che congiunge la sorgente e il ricevitore. In questo caso $X = 2R \cos \theta_0$ da cui

$$\cot \theta_0 = \frac{bX}{2c_0}$$

La possibilità successiva è che la traiettoria sia la giunzione di due archi di circonferenza con concavità opposta uno a $z > 0$ l'altro a $z < 0$. In questo caso si ottiene

$$\cot \theta_0 = \frac{bX}{4c_0}$$

In generale si ha per ogni $m = 1, 2, 3, \dots$ si ha una traiettoria che arriva al ricevitore quando

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{2nc_0}{bX}\right)$$

4. Con i valori dati, i quattro più piccoli valori di θ_0 sono

n	$\theta_0 [^\circ]$
1	86.19
2	88.09
3	88.73
4	89.04

5. La traiettoria associata al più piccolo angolo di lancio consiste in un singolo arco che congiunge sorgente e ricevitore. Da $c = \frac{ds}{dt}$ otteniamo

$$T = 2 \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{R d\theta}{c} = \frac{2}{b} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta} = -\frac{2}{b} \ln \tan \frac{\theta_0}{2}$$

Con il primo dei risultati del punto precedente si ottiene

$$T = 6.6546 \text{ s}$$

mentre per la traiettoria lineare

$$T' = \frac{X}{c_0} = 6.6666 \text{ s}$$

Il raggio che compie la traiettoria lungo l'arco di circonferenza arriva prima di quello rettilineo

XI Senigallia 2017/3

1. Si noti per prima cosa che gli angoli sono piccoli, quindi è possibile approssimarli con la propria tangente. Ne consegue che:

$$\theta = \frac{R}{d_A}$$

$$\theta' = \frac{R}{d_B - d_A}$$

Inoltre dal disegno si nota facilmente che:

$$\delta = \theta + \theta'$$

Ne consegue che possiamo unire queste tre equazioni alla formula per δ ottenendo:

$$\frac{4GM}{c^2 R} = R \left(\frac{1}{d_A} + \frac{1}{d_B - d_A} \right)$$

$$R = \sqrt{\frac{4GMd_A(d_B - d_A)}{c^2 d_B}}$$

2. Questo punto chiede sostanzialmente di riprendere l'equazione data nel testo e sostituire R con il valore trovato sopra:

$$\delta = \sqrt{\frac{4GMd_B}{c^2 d_A(d_B - d_A)}}$$

3. Dalla formula riportata sopra per θ posso trovare R in funzione dei dati:

$$R = \theta d_A$$

A questo punto basta sostituirla nella formula trovata al primo punto in cui l'unica incognita è M :

$$\theta^2 d_A^2 = \frac{4GMd_A(d_B - d_A)}{c^2 d_B}$$

$$M = \frac{\theta^2 d_A c^2 d_B}{4G(d_B - d_A)}$$

4. Poiché si vuole massimizzare θ , è comodo riscrivere l'equazione del testo come:

$$\theta + \theta' = \frac{4GM}{c^2 \theta d_A}$$

Da cui si deduce che a parità di M e d_A , θ' è decrescente in θ . Il θ massimo si avrà dunque quando θ' è minimo, ovvero quando è nullo. Questo caso corrisponde chiaramente a $k = \infty$. Per trovare θ_{MAX} sono sufficienti le equazioni già scritte:

$$\theta = \frac{R}{d_A} = \sqrt{\frac{4GM(d_B - d_A)}{c^2 d_B d_A}} = \sqrt{\frac{4GM(k-1)}{c^2 k d_A}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2 d_A} \frac{k-1}{k}}$$

Da cui si ricava chiaramente che:

$$\theta_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2 d_A}}$$

5. Prendiamo $R = \alpha R_A$ con $\alpha \geq 2$. La massa della galassia è:

$$M = \pi R_A^2 \sigma_0$$

Inoltre si ha che:

$$\theta = \frac{R}{d_A} = \alpha \frac{R_A}{d_A}$$

Del resto si ha che:

$$\alpha \frac{R_A}{d_A} = \theta \leq \theta_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2 d_A}} = \sqrt{\frac{4G\pi R_A^2 \sigma_0}{c^2 d_A}}$$

Da cui quindi:

$$2 \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{4G\pi\sigma_0 d_A}{c^2}}$$

E quindi la condizione cercata è:

$$d_A \geq \frac{c^2}{G\pi\sigma_0}$$

Da cui il minimo valore di d_A è proprio $\frac{c^2}{G\pi\sigma_0} = 69.5 \text{ Mpc}$.

6. Come avviene per la lente gravitazionale, δ può essere espresso come somma di due angoli (in maniera totalmente analoga si approssimano anche essi con le loro tangenti):

$$\delta = \frac{R}{p} + \frac{R}{q}$$

Del resto essendo una lente sottile si ha:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Che unita alla precedente dà:

$$\delta = \frac{R}{f}$$

7. Imponendo l'uguaglianza tra i δ si ottiene che:

$$\frac{R}{F} = \frac{4GM}{c^2 R}$$

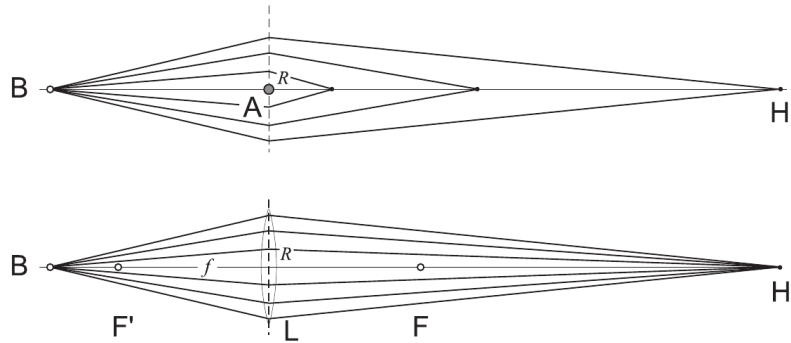


Figura 14: Lenti a confronto: sopra quella gravitazionale, sotto quella sottile (Immagine presa dalla soluzione ufficiale scritta dal gruppo olimpiadi della fisica: AIF, Progetto Olimpiadi)

Da cui:

$$F(R) = \frac{c^2 R^2}{4GM}$$

L'immagine richiesta è riportata di seguito (Figura 14). Per disegnarla è sufficiente fissare dei valori numerici per le variabili (ed eventualmente anche per le costanti universali), infatti ciò che conta è il rapporto tra le distanze nel disegno, non tanto il loro valore.

8. Per prima cosa, se B va a distanza infinita, si ottiene che $\theta' = 0$, da cui:

$$\frac{4GM}{c^2 R} = \delta = \theta + \theta' = \theta = \frac{R}{d_A}$$

Che riscritta diventa:

$$R^2 = \frac{4GM}{c^2} d_A$$

I raggi che arrivano all'osservatore sembrano provenire da un anello, dunque questa è un'immagine virtuale e i raggi che provengono da essa sono disposti in maniera tale che spostandosi di poco sia possibile capire la sua effettiva.

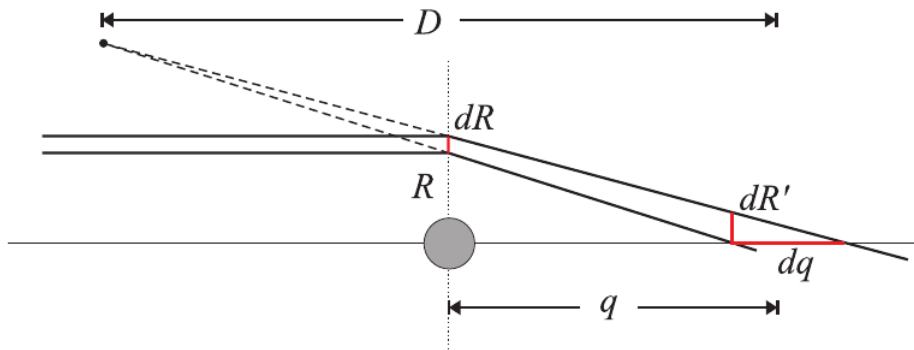


Figura 15: Immagine rappresentativa della soluzione del punto 8 (Immagine presa dalla soluzione ufficiale scritta dal gruppo olimpiadi della fisica: AIF, Progetto Olimpiadi)

Ora, se si aumenta di $dR \ll R$ la quantità R , ci si aspetta un aumento di $dq \ll d_A$ della quantità d_A . La relazione sopra ci dice che:

$$(R + dR)^2 \approx R^2 + 2RdR = \frac{4GM}{c^2}(d_A + dq)$$

Cioè:

$$dR = \frac{2GM}{Rc^2}dq$$

Come si nota dalla figura 15, il teorema di Talete afferma che:

$$\frac{D}{d_A} = \frac{dR'}{dR}$$

Del resto però si ha:

$$\frac{dR'}{dq} = \tan \theta \approx \theta = \delta = \frac{4GM}{c^2 R}$$

Quindi sostituendo si ricava:

$$\frac{D}{d_A} = \frac{dq}{dR} \frac{4GM}{c^2 R} = \frac{c^2 R}{2GM} \frac{4GM}{c^2 R} = 2$$

In conclusione:

$$D = 2d_A$$

Ciò significa che effettivamente l'immagine si forma a una distanza dall'osservatore pari al doppio della distanza tra osservatore e galassia.

XII Doppietto di lenti

Per risolvere questo problema iniziamo considerando delle lenti convergenti e dividendo il sistema da studiare nei due sottosistemi costituiti da singole lenti. In particolare vediamo come il doppietto agisce su dei fasci di luce paralleli.

Prendiamo un fascio di luce parallelo all'asse ottico che incide prima sulla lente 1. Esso viene chiaramente concentrato nel fuoco a distanza f_1 dalla lente. La seconda lente avrà come sorgente l'immagine prodotta dalla prima, la quale si trova a una distanza $d - f_1$ dalla lente 2 (con il segno già a posto, basti pensare che se f_1 è grande la distanza deve essere negativa). L'immagine complessiva si forma quindi a una distanza f dalla seconda lente, la quale rispetta:

$$\frac{1}{d - f_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2}$$

Da cui:

$$f = \frac{(d - f_1)f_2}{d - f_1 - f_2}$$

Allo stesso modo se il fascio incide sulla lente 2 con un analogo ragionamento si trova:

$$f' = \frac{(d - f_2)f_1}{d - f_1 - f_2}$$

Ora che abbiamo trovato i fuochi, bisogna trovare la distanza focale della lente equivalente e la sua posizione.

La distanza focale sarà la distanza tra i due fuochi divisa per 2:

$$2f_{\text{res}} = \frac{(d - f_1)f_2}{d - f_1 - f_2} + \frac{(d - f_2)f_1}{d - f_1 - f_2} + d = \frac{d^2 - 2f_1f_2}{d - f_1 - f_2}$$

$$f_{\text{res}} = \frac{d^2 - 2f_1f_2}{2(d - f_1 - f_2)}$$

La posizione della lente del resto è nel punto medio tra i due fuochi, quindi sarà a una distanza d' misurata dalla lente 1 verso la lente 2:

$$d' = -f' + f_{\text{res}} = \frac{d^2 - 2f_1f_2 - 2df_1 + 2f_1f_2}{2(d - f_1 - f_2)} = \frac{d^2 - 2df_1}{2(d - f_1 - f_2)}$$

Il fatto che le lenti siano convergenti non è necessario, infatti la convenzione sui segni delle distanze focali permette di utilizzare le stesse formule anche per quelle divergenti, dunque il risultato non dipende dal tipo di lenti.