

Dispense di Meccanica

Luca Milanese*, Giacomo Calogero†

7 febbraio 2023

Meccanica del Corpo Rigido

1 Cinematica corpo rigido

1.1 Definizione di corpo rigido

In Fisica, spesso abbiamo a che fare con oggetti le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a quelle dell'ambiente in cui esso si trova, e la cui struttura interna può essere trascurata in quanto irrilevante per lo studio del problema in questione: parliamo in tal caso di *punti materiali*. Fissato un sistema di riferimento, la cinematica di un punto materiale è completamente descritta dalla sua posizione $\vec{r}(t)$, in quanto, approssimando l'oggetto a un punto, è sufficiente specificare la posizione di tale punto.

Tuttavia, non sempre è possibile fare questa approssimazione, e anzi in molti casi la fisica di un processo dipende sostanzialmente dal fatto che gli oggetti coinvolti hanno estensione finita. Per aggirare il problema, possiamo considerare un corpo esteso come un insieme di tanti punti materiali (infiniti nel limite in cui ciascuno diviene puntiforme), e studiare come evolve nel tempo la posizione di ciascuno. Noi qui ci occuperemo di un tipo particolare di tali oggetti, cioè quelli in cui la distanza tra ogni coppia di punti che lo compongono è costante nel tempo: questi sono detti *corpi rigidi*.

Per studiare il moto di un corpo rigido non è più sufficiente esibire una singola $\vec{r}(t)$ (o, meglio, tre leggi orarie $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$), perchè essa non dà informazioni sul moto di ciascun punto componente l'oggetto. Ci poniamo allora il problema di quante leggi orarie sia necessario fornire per descrivere completamente il moto di un corpo rigido, cioè di quanti siano i gradi di libertà ad esso associati. Se stessimo trattando un sistema di N particelle libere, avremmo $3N$ gradi di libertà, in quanto per ciascuna particella dovremmo specificare le tre coordinate cartesiane (o altre tre coordinate, a seconda del sistema scelto) in funzione del tempo. La condizione sulla distanza tra ogni coppia di punti dell'oggetto riduce

*luca.milanese@sns.it

†giacomo.calogero@sns.it

il numero di gradi di libertà, in particolare vale il seguente risultato:

A un corpo rigido in tre dimensioni sono associati 6 gradi di libertà.

La dimostrazione si può ottenere in maniera costruttiva, vedendo il corpo rigido come fatto da $N \geq 3$ punti materiali. Preso il primo punto, ad esso sono associati tre gradi di libertà. Aggiungendone un secondo, i gradi di libertà diventano cinque, perché ai tre nuovi ne va sottratto uno per via della condizione sulla distanza tra i due. Aggiungendo il terzo, otteniamo un ulteriore grado di libertà (tre meno i due persi per la rigidità del triangolo). Da ora in poi, aggiungendo punti, non guadagniamo più gradi di libertà, perché ogni nuovo punto dovrà trovarsi sull'intersezione di (almeno) tre sfere, e tale punto, se esiste, è unico (in realtà i punti possono anche essere due, ma, non potendo il punto materiale muoversi in maniera continua dall'uno all'altro, contano come un solo punto.)

1.2 Velocità angolare e asse istantaneo di rotazione

Una comoda interpretazione dei sei gradi di libertà è la seguente: la posizione nello spazio di un corpo rigido è completamente determinata dalla posizione di un suo punto P (tre gradi di libertà), dalla scelta di un asse r passante attraverso P (due gradi di libertà, pensiamo ad esempio alle coordinate sferiche) e dall'angolo di cui il corpo è ruotato attorno a tale asse (un grado). Come conseguenza, abbiamo il *Teorema di Chasles*:

Consideriamo un corpo rigido che si muove di un moto arbitrariamente complicato. Sia P un punto del corpo. Ad ogni istante temporale il moto del corpo può essere scritto come somma di un moto di traslazione di P rispetto all'origine del sistema di riferimento, e una rotazione intorno ad un qualche asse (che in generale può cambiare nel tempo) passante per P .

Questo teorema permette di definire, associato al moto di un corpo rigido, il vettore *velocità angolare* $\vec{\omega}$ tale che, se P e Q sono due punti del corpo rigido, \vec{v}_P e \vec{v}_Q le loro velocità istantanee, e \vec{r} è il vettore posizione da P a Q , abbiamo:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1)$$

Va notato che la velocità angolare è relativa al sistema di riferimento scelto: in particolare, se nel sistema S il corpo rigido ha velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$, e il sistema S' ruota con velocità angolare $\vec{\Omega}$ rispetto a S , allora la velocità angolare dell'oggetto in S' è:

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} - \vec{\Omega}$$

Potete convincervi che la formula è sensata pensando a cosa accade nel caso in cui $\vec{\Omega}$ e $\vec{\omega}$ hanno la stessa direzione. Se invece gli assi di S ed S' non ruotano gli uni rispetto agli altri (come avviene, ad esempio, se sono due sistemi inerziali il cui moto relativo è rettilineo uniforme), allora misurano la stessa $\vec{\omega}$. Una

conseguenza importante è che possiamo sempre scegliere un sistema di riferimento inerziale in cui ciascun punto del corpo rigido abbia velocità ortogonale a $\vec{\omega}$: infatti, dalla (1) segue che tutti i punti del corpo hanno la stessa velocità lungo la direzione di $\vec{\omega}$, perciò ci basta metterci in un sistema di riferimento in cui questa componente è nulla. Quando questa condizione è soddisfatta, possiamo scrivere $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_0)$, dove \vec{r}_P è la posizione di P e \vec{r}_0 è un opportuno vettore che non dipende dalla scelta di P : dalla (1), ricordando che $\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$, abbiamo infatti:

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_0) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) = \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_0)$$

Il luogo dei punti dato dalla retta passante per il punto descritto da \vec{r}_0 e parallela alla direzione di $\vec{\omega}$ è detto *asse istantaneo di rotazione*. Va notato che questo asse può sia trovarsi esternamente al corpo sia passargli attraverso: nel secondo caso, tutti i punti del corpo sull'asse sono istantaneamente fermi. Questa osservazione può spesso aiutare a trovare l'asse istantaneo.

2 Dinamica del corpo rigido

2.1 Richiami sul centro di massa

Per un sistema di N masse puntiformi m_i , poste nelle posizioni \vec{r}_i (rispetto al nostro sistema di riferimento), il *centro di massa* è definito come il punto la cui posizione è:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Cioè la media pesata delle posizioni delle particelle. Per una distribuzione continua di massa (in pratica quello che si ottiene quando N tende a infinito e ciascuna m_i tende a zero) la formula equivalente è:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

Il sistema di riferimento del centro di massa è definito in modo che la sua origine coincida con la posizione del centro di massa e che i suoi assi restino sempre paralleli a quelli di un sistema inerziale (cioè, vogliamo che esso sia non rotante): nel seguito, indicheremo con \vec{r}_i la posizione di un punto rispetto al sistema di riferimento in cui ci troviamo e con $r_{i/\text{cm}}$ la sua posizione rispetto al sistema di riferimento del centro di massa. Chiaramente, vale:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\text{cm}} + \vec{r}_{i/\text{cm}} \quad (2)$$

Dalle Leggi di Newton segue che se la forza totale agente sul sistema è nulla, allora la quantità di moto totale si conserva. Quest'ultima può essere espressa in una forma illuminante come segue:

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \left(\sum m_i \right) \frac{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum m_i} = M_{\text{tot}} \frac{d}{dt} \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = M_{\text{tot}} \dot{\vec{r}}_{\text{cm}}$$

$$= M_{\text{tot}} \vec{v}_{\text{cm}}$$

Perciò la conservazione della quantità di moto totale si traduce nella costanza nel tempo della velocità del centro di massa. In particolare, *il sistema di riferimento del centro di massa è un sistema inerziale quando la risultante delle forze esterne è nulla*. Più avanti vedremo come è possibile sfruttare questo fatto per semplificare l'espressione di molte leggi della meccanica.

2.2 Momento angolare, energia cinetica e Teoremi di König

Il momento angolare di un punto materiale di massa m rispetto al polo P e rispetto a un dato sistema di riferimento è definito come:

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_P) \times \vec{p} = (\vec{r} - \vec{r}_P) \times m\vec{v}$$

Dove \vec{r} è la posizione del punto materiale nel sistema di riferimento dato, \vec{r}_P la posizione di P e \vec{v} la velocità del punto materiale nello stesso sistema di riferimento. Il momento angolare di un sistema di punti materiali è semplicemente la somma dei loro momenti angolari:

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i \quad (3)$$

Similmente, l'energia cinetica totale di un sistema siffatto è:

$$K_{\text{tot}} = \sum K_i = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (4)$$

Queste espressioni non sono particolarmente maneggevoli, per via della dipendenza dal sistema di riferimento in cui si sta operando; esiste tuttavia un modo comodo di riformularle. Riscriviamo anzitutto la (3) in termini delle quantità relative al centro di massa, notando che dalla (2) segue anche $\vec{v}_i = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_{i/\text{cm}}$:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\text{tot}} &= \sum \left[(\vec{r}_{\text{cm}} + \vec{r}_{i/\text{cm}}) - (\vec{r}_{\text{cm}} + \vec{r}_{P/\text{cm}}) \right] \times m_i (\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_{i/\text{cm}}) \\ &= \sum m_i \vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}} - \sum m_i \vec{r}_{P/\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}} \\ &\quad + \sum m_i \vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{v}_{i/\text{cm}} - \sum m_i \vec{r}_{P/\text{cm}} \times \vec{v}_{i/\text{cm}} \\ &= \left(\sum m_i \vec{r}_{i/\text{cm}} \right) \times \vec{v}_{\text{cm}} - M_{\text{tot}} \vec{r}_{P/\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}} \\ &\quad + \sum m_i \vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{v}_{i/\text{cm}} - \vec{r}_{P/\text{cm}} \times \left(\sum m_i \vec{v}_{i/\text{cm}} \right) \end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo addendo sono nulli, in quanto i termini tra parentesi rappresentano, rispettivamente, la posizione e la velocità del centro di massa *calcolati nel sistema di riferimento del centro di massa stesso*, dove sono per definizione entrambi identicamente nulli. Resta quindi:

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum m_i \vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{v}_{i/\text{cm}} - M_{\text{tot}} \vec{r}_{P/\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}}$$

Il primo termine rappresenta *il momento angolare totale del sistema calcolato nel sistema del centro di massa, prendendo come polo il centro di massa stesso*, $\vec{L}_{/cm}$. Il secondo termine, ricordando che $\vec{r}_{P/cm} = \vec{r}_P - \vec{r}_{cm}$, si può scrivere anche come:

$$M_{tot}(\vec{r}_{cm} - \vec{r}_P) \times \vec{v}_{cm} = (\vec{r}_{cm} - \vec{r}_P) \times \vec{P}_{tot}$$

In questo modo diventa evidente che esso esprime il momento angolare, rispetto al polo P e calcolato nel nostro sistema di riferimento, che avrebbe il sistema se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro di massa. Definendo quest'ultimo *momento angolare del centro di massa*, \vec{L}_{cm} , abbiamo allora:

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{/cm} + \vec{L}_{cm}$$

Questo risultato è detto *Primo Teorema di König*. Un risultato simile (detto, ovviamente, *Secondo Teorema di König*) si ottiene per l'espressione dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned} K_{tot} &= \sum \frac{m_i(\vec{v}_{i/cm} + \vec{v}_{cm})^2}{2} = \sum \frac{m_i v_{i/cm}^2}{2} + \sum m_i \vec{v}_{i/cm} \cdot \vec{v}_{cm} + \sum \frac{m_i v_{cm}^2}{2} \\ &= \sum \frac{m_i v_{i/cm}^2}{2} + \vec{0} \cdot \vec{v}_{cm} + \frac{M_{tot} v_{cm}^2}{2} \end{aligned}$$

Identificando in $\sum \frac{m_i v_{i/cm}^2}{2}$ l'energia cinetica calcolata nel sistema del centro di massa, $K_{/cm}$, e in $\frac{M_{tot} v_{cm}^2}{2}$ quella associata al moto del centro di massa nel nostro sistema di riferimento, K_{cm} , ricaviamo infatti:

$$K_{tot} = K_{/cm} + K_{cm}$$

Notiamo inoltre che, in generale, non otteniamo gli stessi risultati scegliendo come punto privilegiato un punto diverso dal centro di massa del sistema: le cancellazioni dei termini misti ottenuti espandendo le espressioni di \vec{L}_{tot} e di K_{tot} seguono direttamente dalla definizione di centro di massa.

2.3 Momento angolare ed energia cinetica del corpo rigido

Forti dei Teoremi di König, possiamo ora ricavare le espressioni del momento angolare e dell'energia cinetica nel caso in cui il sistema considerato sia un corpo rigido. Usando la (1), la velocità del punto del corpo posto in \vec{r}_i vale:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm})$$

Da cui otteniamo:

$$\vec{v}_{i/cm} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm})$$

Perciò:

$$\vec{L}_{/cm} = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}) \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm})]$$

$$= \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{cm}})^2 \vec{\omega} - \sum m_i [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{cm}})] (\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{cm}})$$

In generale, da questa espressione sarebbe possibile ottenere l'espressione del *tensor* d'inerzia, oggetto utile a descrivere il moto generale di corpi rigidi nello spazio, il che va ben oltre gli scopi di queste dispense. Per le situazioni cui siamo interessati (cioè, quelle che potrete incontrare nei Campionati di Fisica) avremo a che fare con moti in cui il vettore velocità angolare mantiene la propria direzione costante nel tempo, e con oggetti simmetrici rispetto al piano passante per il centro di massa e perpendicolare a questo asse (condizione banalmente verificata, ad esempio, da oggetti planari o da solidi particolarmente simmetrici come cilindri o sfere omogenei). In tal caso, tornando alla penultima riga di equazione, abbiamo:

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{cm}}) \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{cm}})] = r_i^2 \vec{\omega}$$

Dove r è la distanza tra \vec{r}_i e l'asse parallelo a $\vec{\omega}$ e passante per il centro di massa (il lettore è invitato a verificare per esercizio questa uguaglianza). Otteniamo quindi:

$$\vec{L}_{/\text{cm}} = \sum m_i r_i^2 \vec{\omega} \Rightarrow \vec{L}_{\text{tot}} = \sum m_i r_i^2 \vec{\omega} + M_{\text{tot}} (\vec{r}_{\text{cm}} - \vec{r}_{\text{P}}) \times \vec{v}_{\text{cm}}$$

Poiché $\vec{\omega}$ è la stessa per tutti i punti del corpo, essa può essere messa in evidenza fuori dalla sommatoria. Il termine rimanente:

$$I_{\text{cm}} = \sum m_i r_i^2$$

Prende il nome di *momento d'inerzia* del corpo rigido rispetto al dato asse passante per il centro di massa. Ciò che è importante è che tale oggetto non dipende da $\vec{\omega}$, ma solo dalla geometria del corpo. Per distribuzioni di massa continue la formula diventa:

$$I_{\text{cm}} = \int r^2 dm$$

Con calcoli del tutto analoghi a quelli di sopra, e sotto le stesse ipotesi, si ottiene l'espressione dell'energia cinetica totale:

$$K_{\text{tot}} = \frac{I_{\text{cm}} \omega^2}{2} + \frac{M_{\text{tot}} v_{\text{cm}}^2}{2}$$

In cui il primo termine è spesso detto energia cinetica rotazionale.

Il Teorema di Huygens-Steiner Più in generale, il momento d'inerzia può essere definito rispetto a un qualunque asse (non necessariamente passante per il corpo) usando la stessa formula:

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

Con la sola differenza che la distanza r_i o r va intesa rispetto all'asse in considerazione. Consideriamo ora il caso in cui il corpo rigido stia ruotando attorno a un asse fisso che lo attraversa in un punto Q (si immagini, ad esempio, un pendolo fisico) e calcoliamo il suo momento angolare rispetto a tale asse (cioè la sua proiezione su questo asse). La velocità di un punto P_i a distanza r_i da Q varrà, in modulo, $v_i = \omega r_i$, e sarà perpendicolare all'asse di $\vec{\omega}$. Si ha quindi che la componente di $\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$ parallela a $\vec{\omega}$ è $r_i^2 \omega$, da cui:

$$\vec{L}_{/Q} \cdot \hat{\omega} = \sum m_i r_i^2 \omega$$

Dove $\hat{\omega}$ è il versore diretto lungo $\vec{\omega}$. Scopriamo quindi che si ha:

$$L = I\omega$$

Allo stesso modo, volendo esprimere l'energia cinetica totale del corpo in questa situazione, otterremo l'espressione:

$$K = \frac{I\omega^2}{2}$$

Abbiamo quindi imparato che il momento d'inerzia compare un po' ovunque nella meccanica del corpo rigido. Sorge allora il problema di calcolarlo esplicitamente. A tale fine sono dedicati alcuni esempi risolti a seguire. Prima, però, è conveniente introdurre un utile risultato noto come *Teorema degli assi paralleli*, o *Teorema di Huygens-Steiner*:

Il momento di inerzia di un corpo rigido rispetto a un asse passante per un suo punto P è dato da:

$$I = Ml^2 + I_{\text{cm}}$$

Dove M è la massa totale del corpo rigido, l la distanza tra P e il centro di massa, e I_{cm} il momento d'inerzia rispetto a un asse parallelo a quello in questione e passante per il centro di massa.

Forniamo qui due dimostrazioni. Per la prima, moltiplicando l'uguaglianza per ω , essa si può riscrivere come:

$$I\omega = Ml^2\omega + I_{\text{cm}}\omega \Leftrightarrow L_P = Ml^2\omega + L_{\text{cm}}$$

Riconoscendo ora in $l\omega$ la velocità del centro di massa dell'oggetto, e dunque in $Ml^2\omega$ il momento angolare associato al moto del centro di massa rispetto all'asse passante per P , l'uguaglianza si riscrive come:

$$L_P = L_{/cm} + L_{\text{cm}}$$

Che sappiamo essere vera. Per la seconda, più diretta, dopo aver fissato un sistema di assi cartesiani $Oxyz$ con l'asse delle z coincidente con l'asse rispetto al quale cerchiamo il momento d'inerzia, scriviamo quest'ultimo esplicitamente

(si ricorda che x_{cm} indica la coordinata del centro di massa e x'_i la coordinata relativa alla posizione del centro di massa):

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i \left[(x_{\text{cm}} + x'_i)^2 + (y_{\text{cm}} + y'_i)^2 \right] \\ &= \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + \sum m_i(x_{\text{cm}}^2 + y_{\text{cm}}^2) + 2x_{\text{cm}} \sum m_i x'_i + 2y_{\text{cm}} \sum m_i y'_i \\ &= I_{\text{cm}} + Ml^2 \end{aligned}$$

Dove le ultime due somme si annullano per definizione di centro di massa.

2.4 Esempio 1: momento d'inerzia di un disco

Si calcoli il momento d'inerzia di un disco di raggio R , spessore h e massa M rispetto ad un asse perpendicolare allo stesso nei due casi in cui è passante per il centro o passante per il bordo.

Notiamo che lo spessore h non influenza il calcolo. Definiamo $\sigma = M/(\pi R^2)$ come la massa per unità di area di base. Per calcolare il momento d'inerzia del disco immaginiamo di suddividerlo in tanti anelli infinitesimi, di cui conosciamo il momento d'inerzia, e integrare per sommare tutti i contributi. Per un anello infinitesimo, infatti:

$$dI = r^2 dm = r^2(2\pi r \sigma dr) = 2\pi \sigma r^3 dr$$

da cui, integrando:

$$I = \int_0^R 2\pi \sigma r^3 dr = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \sigma \frac{R^4}{4}$$

e infine sostituendo σ si trova:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Per trovare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il bordo si può utilizzare il teorema di Huygens-Steiner: il centro di massa si trova nel centro del disco e ogni punto sul bordo si trova a distanza R dal centro:

$$I' = MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

Metodo dei frattali Il calcolo del momento di inerzia di alcuni oggetti particolarmente regolari può essere effettuato senza utilizzare il calcolo integrale, ma sfruttando particolari simmetrie del sistema. Supponiamo di avere un oggetto

omogeneo di massa totale M , dotato di qualche simmetria particolare¹. Il suo momento di inerzia può essere supposto della forma

$$I = \beta ML^2$$

dove β è un fattore numerico incognito e L è una lunghezza caratteristica dell'oggetto. Per esempio, in un cubo si può prendere in considerazione il lato. L'idea del metodo è quella di determinare β sfruttando la proprietà dell'oggetto di essere decomposto in copie di se stesso più piccole (quindi con lunghezza caratteristica ridotta di un qualche fattore), i cui momenti di inerzia possono essere sommati con il teorema di Huygens-Steiner. Per rendere tutto più chiaro vediamo un esempio.

2.5 Esempio 2: momento d'inerzia di un triangolo equilatero

Calcolare il momento di inerzia di un triangolo equilatero di lato L e massa M rispetto al baricentro.

Il triangolo equilatero è identificato univocamente dalla lunghezza del lato, e si decompone in altri triangoli equilateri come in Figura 1. Il momento di inerzia

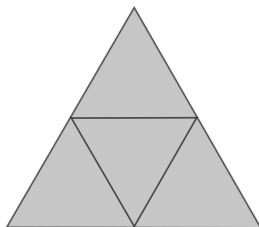


Figura 1: Decomposizione di un triangolo equilatero in triangoli equilateri.

di un triangolo equilatero rispetto al centro si scrive come:

$$I = \beta ML^2.$$

Ognuno dei 4 triangoli ha massa $M/4$ e lato $L/2$, quindi rispetto al proprio centro il momento di inerzia è:

$$I = \beta \left(\frac{M}{4} \right) \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{\beta}{16} ML^2.$$

¹Le parole *particolare simmetria* non sono una definizione matematica rigorosa, e al momento non risulta chiaro cosa si intende. Si invita a continuare a leggere e una volta capito il metodo dovrebbe risultare chiaro come utilizzare il metodo, sarà anche evidente quali momenti di inerzia possono essere calcolati con questo metodo.

Uno di questi triangoli ha il centro che coincide con il centro del triangolo di partenza, mentre i centri degli altri 3 si trovano a distanza $\frac{\sqrt{3}}{6}L$ da esso. Per il Teorema di Huygens-Steiner si può scrivere:

$$I = I' + 3 \left(I' + \left(\frac{M}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{6}L \right)^2 \right),$$

che si traduce in un'equazione in β :

$$\beta = \frac{1}{16}\beta + 3 \left(\frac{1}{16}\beta + \frac{1}{48} \right)$$

la cui soluzione è $\beta = 1/12$.

2.6 La seconda equazione cardinale e il termine di polo mobile

Veniamo adesso al motivo per cui abbiamo insistito così tanto sul momento angolare. In meccanica, come sappiamo, le leggi fondamentali dalle quali discende (quasi) tutto il resto sono le Leggi di Newton; dalla seconda e dalla terza, in particolare, segue che, per un dato sistema fisico:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt}$$

Cioè, la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale è data dalla somma delle forze esterne agenti sul sistema (quelle interne si cancellano per la terza legge). Questa equazione è detta *Prima Equazione Cardinale della meccanica*. Vorremmo ora ricavare un risultato analogo per la derivata del momento angolare totale, in quanto come abbiamo visto esso risulta un oggetto molto utile per descrivere il moto di un corpo rigido. Partendo dalla legge generale:

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{v}_i$$

E considerando il polo P come non necessariamente fisso, abbiamo:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_P) \times \vec{v}_i + \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{a}_i$$

Ora, ricordando che $\vec{v}_i \times \vec{v}_i = \vec{0}$ e che $m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i$ è la forza totale agente sull' i -esimo punto materiale, otteniamo:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i - \vec{v}_P \times \vec{p}_{\text{tot}}$$

Da cui, definendo $\vec{\tau}_{/P} = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i$ il *momento torcente* totale delle forze agenti sul sistema rispetto al polo P , ricaviamo:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{/P} - \vec{v}_P \times \vec{p}_{\text{tot}}$$

Che si chiama *Seconda Equazione Cardinale*. A differenza di come avviene per la prima non è vero, in generale, che il momento torcente totale è uguale a quello applicato dalle forze esterne: i momenti torcenti interni possono non cancellarsi. Nel caso del corpo rigido, tuttavia, le forze interne sono dirette lungo le congiungenti delle diverse coppie di punti dell'oggetto, perchè originano dalla necessità di mantenerne fissa la distanza. Questa condizione è sufficiente a garantire la cancellazione dei momenti torcenti interni, dunque per un corpo rigido vale:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ext/P}} - \vec{v}_P \times M_{\text{tot}} \vec{v}_{\text{cm}}$$

Il secondo addendo al secondo membro è detto *termine di polo mobile*. Solitamente, è preferibile che non compaia nelle equazioni con cui si sta lavorando, in modo da avere una legge più facilmente richiamabile alla mente della forma $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$. Osserviamo che tale termine si annulla nei seguenti casi:

1. $\vec{v}_P = \vec{0}$, il polo è fermo.
2. $\vec{v}_{\text{cm}} = \vec{0}$, il centro di massa è fisso rispetto al nostro sistema di riferimento
3. \vec{v}_P e \vec{v}_{cm} sono paralleli, condizione soddisfatta, ad esempio, scegliendo il centro di massa come polo.

Ciascuna di queste situazioni presenta dei vantaggi, ed è solo facendo esercizi che si impara a capire di volta in volta in quale conviene mettersi per risolvere il problema.

Meccanica Celeste

3 Gravitazione

La base di partenza per descrivere il moto dei pianeti è la legge di gravitazione universale, che esprime la forza di attrazione tra due masse puntiformi poste ad una certa distanza

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}.$$

Mettiamoci nell'ipotesi in cui una delle due masse sia molto più grande dell'altra ($M \gg m$) in modo da interessarci solo al moto della seconda (ad esempio, se consideriamo l'attrazione tra un satellite e la Terra, quest'ultima può considerarsi ferma). In questo modo possiamo fissare l'origine del sistema di coordinate nel centro del corpo grande. Eliminando i pedici, la forza agente sul corpo piccolo potrà scriversi come

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}.$$

Questa è una forza centrale che ammette un potenziale della forma

$$U = -\frac{GMm}{r} \equiv -\frac{\alpha}{r}.$$

3.1 Quantità conservate

Generalmente esistono due modi di risolvere un problema di meccanica: il primo consiste nel trovare le leggi orarie dei corpi del sistema a partire dalla seconda legge di Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$), per poi risolverle bovinamente attraverso conti arbitrariamente brutti, mentre il secondo si basa su alcune leggi di conservazione che legano la velocità alla posizione e che sperabilmente conducono a una trattazione più comoda del fenomeno. In questa sezione vedremo tre interessanti quantità che vengono conservate nei moti in potenziale gravitazionale e che risultano spesso utili per risolvere problemi in meccanica celeste. Stiamo parlando di:

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{\alpha}{|\vec{r}|} \quad \text{Energia Meccanica}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad \text{Momento Angolare}$$

$$\vec{A} = m\vec{v} \times \vec{L} - m\alpha\hat{r} \quad \text{Vettore di Lenz}$$

L'energia meccanica si conserva perché la forza gravitazionale è una forza conservativa² e sul sistema non agiscono forze dissipative.

Il momento angolare si conserva perché la forza gravitazionale è una forza centrale che non produce alcun momento torcente sul sistema, in effetti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r} = 0.$$

Questo fatto ha una notevole conseguenza fisica poiché, essendo \vec{L} un vettore, si conserva non solo il modulo, ma anche la direzione. Da questo si evince immediatamente che il moto avviene sul piano perpendicolare a \vec{L} .

L'ultima quantità conservata è la più esotica tra le tre. Essa, come è chiaro dalla sua espressione, è necessariamente collocata sul piano dell'orbita. Per mostrare che il vettore di Lenz è una costante del moto, sfruttiamo il fatto che $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{z}$ è a sua volta costante.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= m\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} + m\vec{v} \times \frac{d\vec{L}}{dt} - m\alpha\frac{d\hat{r}}{dt} = \vec{F} \times \vec{L} - m\alpha\dot{\theta}\hat{\theta} = \\ &= -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r} \times mr^2\dot{\theta}\hat{z} - m\alpha\dot{\theta}\hat{\theta} = -m\alpha\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{z} + \hat{\theta}) = 0. \end{aligned}$$

Vedremo di dare nei capitoli seguenti un senso fisico a questa grandezza e mostreremo la sua utilità nella risoluzione di problemi.

3.2 Potenziale efficace

Introduciamo ora un approccio generale molto utile in meccanica celeste. Consideriamo una particella di massa m che si muove in un campo centrale

²Si può dimostrare che un qualsiasi campo centrale è conservativo, ma si necessita di potenti mezzi matematici, che sono decisamente superflui ai fini di questa lezione.

descritto dal potenziale $V(r)$. La sua energia scritta in coordinate polari è data da

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2r^2 + V(r).$$

Sfruttiamo la conservazione del momento angolare per eliminare la dipendenza da $\dot{\theta}$ ottenendo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (5)$$

Abbiamo, così, ridotto il problema a una sola dimensione, dove l'energia ha due termini ben distinti: uno che dipende da r (termine potenziale) e uno che dipende da \dot{r} (termine cinetico). Il termine potenziale è detto potenziale efficace:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Si noti che generalmente i potenziali che ci interessano divergono per $r \rightarrow 0$ meno di r^{-2} , quindi l'aggiunta del termine con L , detto termine centrifugo, dà un andamento tipico per piccole distanze. Dalla forma del potenziale efficace è possibile ricavare importanti proprietà sulle orbite percorse dalla particella.

Per fissare le idee, prendiamo il potenziale più semplice possibile, ossia un potenziale armonico

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2.$$

Il potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2,$$

il cui grafico è riportato in Figura 2.

Il potenziale efficace diverge sia a grandi che a piccole distanze: la prima divergenza è dovuta al termine armonico, la seconda al termine centrifugo.

Notiamo ora che nell'Equazione 5 il termine cinetico è non negativo, pertanto il moto è limitato alla regione in cui $V(r) \leq E$.

Detto V_0 il valore minimo di V_{eff} , possiamo distinguere diversi regimi:

- per $E < V_0$ nessuna regione è accessibile dalla particella;
- per $E = V_0$, la particella è vincolata a stare nel minimo di V_{eff} , ossia $r = r_0$ in ogni istante, quindi il moto è circolare;
- per $E > V_0$ la particella si muove in una regione limitata $r_1 \leq r \leq r_2$, dove r_1 e r_2 dipendono in generale da E .

Supponiamo invece di avere un potenziale gravitazionale

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

In tal caso il potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r},$$

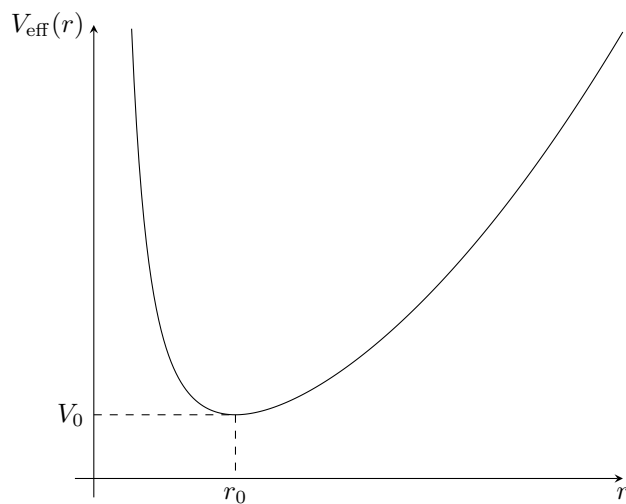


Figura 2: potenziale efficace per un oscillatore armonico.

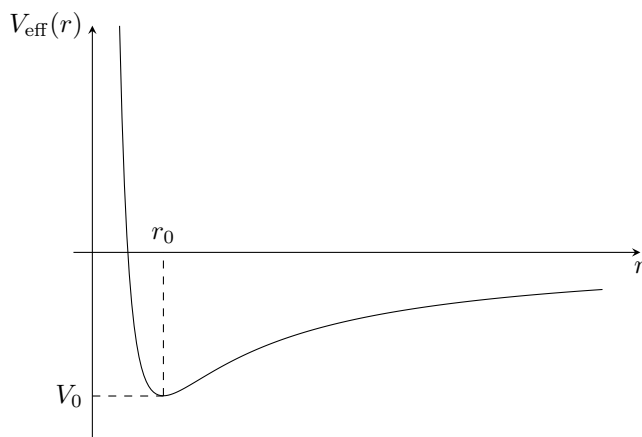


Figura 3: potenziale efficace per un potenziale gravitazionale.

il cui grafico è riportato in Figura 3. Anche in questo caso il potenziale efficace diverge a piccole distanze come r^{-2} . A grandi distanze, invece, la situazione è differente, dato che per $r \rightarrow +\infty$ sia $V(r)$ sia il termine centrifugo si annullano. Questa caratteristica, assente nel potenziale armonico, permette l'esistenza di orbite illimitate. Più precisamente:

- per $E < V_0$ nessuna regione è accessibile dalla particella;
- per $E = V_0$, la particella è vincolata a stare nel minimo di V_{eff} , ossia $r = r_0$ in ogni istante, quindi il moto è circolare;

- per $V_0 < E < 0$ la particella si muove in una regione limitata $r_1 \leq r \leq r_2$, dove r_1 e r_2 dipendono in generale da E ;
- per $E \geq 0$ la particella può muoversi in una semiretta $\bar{r} \leq r$, con \bar{r} dipendente da E . La particella quindi prima o poi si allontana indefinitamente dall'origine.

4 Problema dei due corpi

Consideriamo adesso il moto di due masse m_1 e m_2 , poste rispettivamente in \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , che interagiscono tramite un potenziale centrale della forma $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. L'energia totale è

$$E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

Una strategia generale per studiare un problema del genere è passare alle coordinate del centro di massa e a quelle relative. Poniamo

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 & \mu &= \frac{m_1 m_2}{M} \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \vec{R} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \end{aligned}$$

Con queste sostituzioni si può dimostrare che l'energia può essere scritta nella forma

$$E = \frac{1}{2}M\vec{u}^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 + V(|\vec{r}|)$$

dove $\vec{u} = \dot{\vec{R}}$ e $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. Questa equazione è la somma di due termini che dipendono da coordinate diverse. Il primo termine

$$E_{\text{cm}} = \frac{1}{2}M\vec{u}^2$$

è l'energia del centro di massa. Dato che il potenziale non dipende da \vec{R} , il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, come deve essere per un sistema isolato. L'altro termine

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 + V(|\vec{r}|)$$

è esattamente quello di un moto in campo centrale per una particella di massa μ . Tale massa è nota come massa ridotta del sistema. Nel caso particolare di interazione gravitazionale, la massa μ si muove nel potenziale generato da M , infatti si ha

$$V(|\vec{r}|) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} = -\frac{GM\mu}{r}$$

Vediamo, quindi, che è possibile ricondurre un generico problema a due corpi in uno in cui uno solo dei due è libero di muoversi mentre l'altro è vincolato e supposto fermo.

4.1 Leggi di Keplero

Siamo ora pronti per ricavare le famose *Leggi di Keplero*:

1. Le orbite descritte dai pianeti sono delle ellissi, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro dei pianeti spazza aree uguali in tempi uguali.
3. I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo dei semiassi maggiori delle rispettive ellissi.

4.1.1 Prima Legge

La prima legge stabilisce il tipo di traiettoria percorsa dai pianeti. Per i pianeti del sistema solare sono solo ellissi, ma nel caso generale le orbite possibili sono delle coniche, quindi circonferenze, ellissi, parabole o iperboli.

Nell'Appendice B in fondo alle dispense potete trovare la trattazione classica per ricavare la forma delle orbite a partire dall'espressione del potenziale efficace. Di seguito proponiamo un'alternativa più carina (e che necessita di molti meno conti) che fa uso del Vettore di Lenz introdotto in precedenza.

Consideriamo il seguente prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \theta.$$

Dalla definizione di \vec{A} segue che

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (m\vec{v} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - m\alpha \hat{r} \cdot \vec{r} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{L} - m\alpha r = \vec{L} \cdot \vec{L} - m\alpha r = L^2 - m\alpha r.$$

Dove è stata usata la seguente identità vettoriale dimostrata nell'Appendice A.2:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Questo ci conduce all'espressione finale

$$\begin{aligned} Ar \cos \theta &= L^2 - m\alpha r \\ \implies r(\theta) &= \frac{L^2}{m\alpha + A \cos \theta} = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \theta}. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso il modulo del vettore \vec{A} sfruttando la perpendicolarità di \vec{v} e \vec{L} :

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{m^2} &= \alpha^2 - 2\alpha \hat{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{L}) + |\vec{v} \times \vec{L}|^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha L^2}{mr} + v^2 L^2 = \\ &= \alpha^2 + \frac{2L^2}{m} \left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2} m v^2 \right) = \alpha^2 + \frac{2EL^2}{m}. \end{aligned}$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione per $r(\theta)$, otteniamo

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \theta} = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad , \quad (6)$$

dove

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GMm)^2 m}} \quad (7)$$

che è l'equazione di una conica di eccentricità ϵ in coordinate polari. Questo ci porta alla seguente caratterizzazione delle orbite in base all'eccentricità e quindi all'energia meccanica totale:

- $\epsilon = 0$, ossia $E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}$ per orbite circolari;
- $0 < \epsilon < 1$, ossia $-\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} < E < 0$ per orbite ellittiche;
- $\epsilon = 1$ ossia $E = 0$ per orbite paraboliche;
- $\epsilon > 1$, ossia $E > 0$ per orbite iperboliche.

Dall'Equazione 6 notiamo che il valore minimo di r si ha per $\theta = 0$, ossia quando \vec{r} e \vec{A} sono paralleli, pertanto abbiamo che il vettore di Lenz, essendo una quantità fissata, punta sempre verso il pericentro dell'orbita.

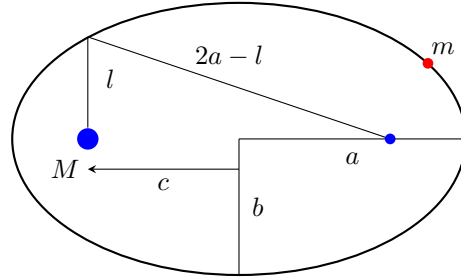


Figura 4: Satellite in moto su un'orbita ellittica di semiassi a e b .

Concentriamoci ora ad analizzare il caso di orbita chiusa come rappresentato in Figura 4. Dalla geometria è ben noto che

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{1 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

quindi considerando il triangolo rettangolo di cateti l , $2c$ e $2a - l$ abbiamo che

$$(2a - l)^2 = l^2 + 4c^2 = l^2 + 4a^2\epsilon^2 \implies l = a(1 - \epsilon^2) = \frac{b^2}{a}.$$

Dall'Equazione 7 otteniamo che

$$\frac{L^2}{GMm^2} = -a \frac{2EL^2}{(GMm)^2 m} \implies E = -\frac{GMm}{2a},$$

$$\frac{L^2}{GMm^2} = \frac{b^2}{a} \implies L = mb\sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (8)$$

Abbiamo, quindi, ricavato delle espressioni per energia e momento angolare di un'orbita ellittica che dipendono dai suoi parametri geometrici.

4.1.2 Seconda Legge

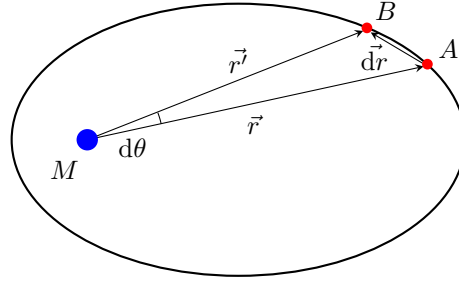


Figura 5: Visualizzazione della 2^a legge di Keplero.

Prendiamo come riferimento la Figura 5. Per piccoli angoli $d\theta$ l'area dA spazzata dal raggio vettore \vec{r} andando da A a B equivale a quella del triangolo MAB , che può essere assunto isoscele, pertanto

$$dA = \frac{1}{2} r dr = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

In un piccolo intervallo dt la velocità areolare è data da

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2m} m r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m}, \quad (9)$$

che è una costante essendo L costante.

4.1.3 Terza Legge

Isolando i differenziali nell'Equazione 9 e integrando lungo un periodo T otteniamo che

$$\pi ab = \int dA = \frac{L}{2m} \int_0^T dt = \frac{LT}{2m},$$

dove è stato usato il noto fatto che l'area di un'ellisse è pari a πab .

Elevando al quadrato entrambi i membri e sostituendo l'espressione di L trovata nell'Equazione 8 otteniamo

$$(\pi ab)^2 = \frac{T^2}{4m^2} L^2 = T^2 b^2 \frac{GM}{4a} \implies \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2},$$

che è proprio l'espressione richiesta.

Ribadiamo che a meno di un cambio di coordinate i risultati ottenuti sono validi per un qualsiasi problema a due corpi, ad esempio ricordando che $M = m_1 + m_2$, la terza legge di Keplero può essere riscritta come

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}.$$

5 Teorema del Viriale

Dato un sistema di n particelle puntiformi, consideriamo la quantità

$$I(t) \equiv \sum_{i=1}^n m_i |\vec{r}_i(t)|^2$$

dove m_i e $\vec{r}_i(t)$ sono la massa e la posizione della particella i -esima. Se le particelle e l'origine sono tutte sullo stesso piano, I è il momento d'inerzia del sistema lungo l'asse perpendicolare a tale piano e passante per l'origine. Calcoliamone le derivate rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} G &\equiv \frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) = 2 \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{d^2 I}{dt^2} = 2 \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i) = 2 \sum_{i=1}^n m_i (\ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) \end{aligned}$$

In quest'ultima espressione riconosciamo l'espressione della forza risultante agente sulla particella i -esima, $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$, e dell'energia cinetica totale

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2,$$

quindi

$$\frac{1}{2} \frac{dG}{dt} = 2K + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i. \quad (10)$$

Data una generica quantità $A(t)$, la sua media temporale su un intervallo di tempo Δt è definita da

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} A(t) dt,$$

in cui abbiamo scelto convenzionalmente di far cominciare l'intervallo dal tempo $t = 0$. Prendendo la media temporale dell'Equazione 10, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{dG}{dt} dt &= \langle 2K + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle \\ \frac{G(\Delta t) - G(0)}{2\Delta t} &= 2\langle K \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle \end{aligned}$$

In diversi casi, il termine a sinistra si annulla. Questo succede ad esempio se il moto è periodico di periodo Δt , dato che G è funzione delle posizioni e delle velocità delle particelle. Più in generale, è sufficiente che $G(t)$, durante l'evoluzione del sistema, vari tra un valore massimo e uno minimo affinché il primo membro si annulli nel limite $\Delta t \rightarrow +\infty$; dall'espressione per G scritta precedentemente, è chiaro che questa condizione è soddisfatta, ad esempio, da sistemi stabilmente legati in cui le velocità delle particelle non divergono. Il teorema del viriale, nella sua forma più generale, è dunque

$$2\langle K \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle = 0$$

Restringiamoci adesso al caso di n particelle interagenti a coppie unicamente attraverso un potenziale proporzionale alla potenza ν -esima della distanza reciproca:

$$U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \alpha_{ij} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^\nu.$$

La forza agente sulla particella i causata da j è pari a

$$\vec{F}_{ij} = -\alpha_{ij} \nu |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{\nu-2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\alpha_{ij} \nu r_{ij}^{\nu-2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j),$$

dove chiaramente, per il principio di azione e reazione, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Possiamo, quindi, riscrivere

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \sum_{j \neq i} -\alpha_{ij} \nu r_{ij}^{\nu-2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \\ &= - \sum_{j>i} \alpha_{ij} \nu r_{ij}^{\nu-2} [\vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{r}_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)] = \\ &= - \sum_{j>i} \alpha_{ij} \nu r_{ij}^{\nu-2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = -\nu \sum_{j>i} \alpha_{ij} \nu r_{ij}^\nu = -\nu U, \end{aligned}$$

dove U indica l'energia potenziale totale del sistema. Il teorema del viriale assume, quindi, la seguente forma:

$$2\langle K \rangle = \nu \langle U \rangle.$$

Diamo un'occhiata al teorema del viriale nei due casi più importanti di potenziali centrali con una sola particella.

- Se il potenziale è armonico, $\nu = 2$, cioè $\langle K \rangle = \langle U \rangle$. Questa conclusione è ovvia nel caso unidimensionale, perché il quadrato della posizione e il quadrato della velocità sono due funzioni sinusoidali shiftate di un quarto di periodo, e le energie cinetica e potenziale oscillano tra gli stessi massimi e minimi (basta considerare i punti di inversione del moto e quello di massima velocità). La conclusione, invece, non è ovvia nel caso a più dimensioni con orbite non circolari.

- Se il potenziale è quello coulombiano, $\nu = -1$, cioè $\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle$. Questa relazione si può ottenere facilmente nel caso di orbita circolare, in cui le due energie sono costanti nel tempo, mentre risulta non ovvia nel caso di orbite ellittiche.

Visto così il teorema del viriale sembra solo il malato frutto di elucubrazioni mentali di fisici in cerca di passatempi, ma nasconde molte applicazioni interessanti, che consentono di ottenere risultati per nulla scontati.

5.1 Esempio 1: La legge dei gas ideali

Di seguito cercheremo di derivare la nota equazione dei gas ideali $PV = nRT$ attraverso un'applicazione del teorema del viriale.

Sappiamo che l'energia cinetica media di una particella dipende unicamente dalla sua temperatura T , in particolare considerando un gas formato da N particelle abbiamo che

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2}NkT,$$

dove abbiamo indicato con k la costante di Boltzmann.

In un gas ideale si assume che non esistano interazioni tra le particelle che lo compongono, quindi l'unica forza agente è quella dovuta alla pressione che agisce sulle pareti del recipiente considerato

$$d\vec{F} = -P dA\hat{n},$$

dove \hat{n} indica il versore normale alla superficie.

Passando al continuo abbiamo, quindi, che

$$\sum_{i=1}^n \langle \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle = -P \int \vec{r} \cdot \hat{n} dA = -P \int \vec{\nabla} \cdot \vec{r} dV = -3P \int dV = -3PV,$$

dove è stato fatto uso del teorema della divergenza.

Combinando i risultati ottenuti abbiamo, quindi, che

$$0 = 2\langle K \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle = 3NkT - 3PV \implies PV = NkT = nRT.$$

5.2 Esempio 2: La massa delle galassie

Il teorema del viriale può anche essere utilizzato per fornire una grezza stima della massa di un ammasso di galassie. Consideriamo un'ammasso di N galassie, ciascuna di massa m , in modo che la massa totale valga $M = Nm$. Una stima molto brutale dell'energia potenziale dell'ammasso è data da

$$\langle U \rangle \approx -\frac{GM^2}{R},$$

dove R indica il raggio dell'ammasso.
L'energia cinetica media del sistema è data da

$$\langle K \rangle \approx N \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{M \langle v^2 \rangle}{2},$$

dove $\langle v^2 \rangle$ sta a indicare la velocità quadratica media delle galassie rispetto al centro di massa dell'ammasso. Dal teorema del viriale applicato al potenziale gravitazionale otteniamo che

$$\langle U \rangle = -2 \langle K \rangle \implies M \approx \frac{R \langle v^2 \rangle}{G}.$$

Questa stima è decisamente maggiore del valore ottenuto attraverso altre analisi, ad esempio misurando la luminosità delle galassie. Questa rappresenta una delle tantissime prove che hanno portato alla formulazione della teoria della materia oscura.

Problemi

6 Meccanica del corpo rigido

6.1 Momenti di inerzia

Calcolare il momento di inerzia dei seguenti oggetti, tutti di massa M :

- sfera di raggio R , sia cava che piena;
- cilindro di altezza h e raggio R rispetto all'asse e rispetto una retta perpendicolare ad esso;
- asta di lunghezza L ;
- prisma a base triangolare con lati a , b e c e altezza h , rispetto ad un asse passante per i baricentri delle facce;
- cubo di lato L ;
- sfera di raggio R con cavità sferica di raggio r a distanza d dal centro;

6.2 Mimima distanza

Tre piccole sfere identiche (indicate come A, B e C) di massa m sono collegate con due barre senza massa di lunghezza l , in modo che una delle aste collega le sfere A e B, e l'altra asta collega le sfere B e C. Le aste sono incernierate alla sfera B, cioè l'angolo tra le aste può cambiare senza sforzo. Il sistema riposa in assenza di gravità in modo tale che le sfere si trovino su una retta. Alla palla A viene data istantaneamente una velocità v_0 perpendicolare alle aste. Trovare la distanza minima d tra le sfere A e C durante il successivo movimento del sistema. Trascurare l'attrito.

6.3 Urto tra sfere

Una sfera A di massa m_A e raggio R è a riposo sul piano. Una seconda sfera (B) di massa m_B e raggio R colpisce la sfera A con velocità prima dell'urto v_0 e parametro d'impatto $b < 2R$. In questo caso il parametro di impatto b è definito come la distanza perpendicolare tra la traiettoria della sfera A e il centro della sfera B. Trovare le velocità finali di entrambe le sfere. Trascurare l'attrito.

6.4 Urto tra asta e pallina

Un'asta omogenea lunga l e di massa m , inizialmente a riposo in assenza di gravità, viene colpita da una massa puntiforme di massa m' a una distanza a dall'estremo superiore dell'asta ($0 < a < l/2$) con velocità prima dell'urto v_0 perpendicolare all'asta. Trovare la relazione fra le m , m' , a , l e v_0 per cui c'è un unico urto fra l'asta e la massa. Trascurare l'attrito.

6.5 Asta che cade

Sia data un'asta omogenea lunga l appoggiata ad una parete, che forma un certo angolo $\theta_0 < \pi/2$ rispetto al pavimento. Improvvisamente sparisce l'attrito sul pavimento e sulla parete che teneva l'asta in posizione. Determinare a quale angolo avviene il distacco tra l'asta e la parete verticale.³

6.6 Matita che cade

Una matita, modellizzabile come asta rigida omogenea di massa m e lunghezza l , è tenuta in equilibrio sulla punta. Viene ora una piccola spinta iniziale. Nel caso in cui il tavolo in cui poggia sia privo d'attrito, si dimostri che la punta resta sempre in contatto con il tavolo e trovi la velocità angolare con cui la matita impatta il tavolo. Cosa cambia se invece il tavolo ha attrito infinito?

6.7 Tidal lock

È risaputo che la Luna mostra sempre, più o meno, la stessa faccia alla Terra. Questa curiosità non è una coincidenza, ma una semplice conseguenza delle forze di marea che agiscono tra la Terra e la Luna. Nel corso del tempo, le forze di marea hanno continuamente rallentato la rotazione della Luna asse fino a quando il periodo di quella rotazione è diventato uguale al periodo orbitale della Luna intorno alla Terra. È per la stessa ragione per cui la rotazione della Terra attorno al suo asse rallenta continuamente e la velocità orbitale della Luna sta ancora decrescendo.

1. Stimare il rapporto tra la diminuzione di energia cinetica della Terra e della Luna per unità di tempo.
2. Durante il programma Apollo (voli 11, 14 e 15), dei catadiottri (serie di specchi laser ad angolo cubo) sono stati posizionati sulla Luna. Secondo le misurazioni laser estremamente accurate rese possibili dalla presenza dei catadiottri, la distanza lineare della Luna dalla Terra è attualmente in aumento a una velocità di 3,8 cm per anno. Utilizzando questo dato, stimare la variazione della lunghezza di un giorno terrestre durante un anno.
3. Se il sistema Terra-Luna continuasse il suo moto indisturbato, come a risultato dell'effetto frenante delle forze di marea, dopo un tempo sufficientemente lungo, la Terra mostrerebbe sempre la stessa faccia alla Luna, cioè le rotazioni e i movimenti orbitali di questi due corpi sarebbero sincronizzati⁴. Quante volte più lungo di oggi sarebbe un giorno della Terra e quanto più grande di oggi sarebbe la distanza Terra-Luna?

³Può essere utile fare il problema prendendo come polo il centro di massa, l'intersezione fra la parete e il pavimento, il punto (mobile) in cui la scala tocca il muro o il pavimento, o ancora un polo più furbo (quello per cui i momenti delle forze di contatto sono nulli).

⁴In realtà, prima che questo possa accadere, il Sole esploderà in una gigante rossa

Si supponga che l'orbita della Luna rimanga circolare e si trascuri l'effetto di marea del Sole.

6.8 Disco da hockey

Un disco piatto omogeneo (come un disco da hockey su ghiaccio) scivola e rotola su una superficie ghiacciata. A causa dell'attrito, entrambi i tipi di movimento decelerano e infine fermarsi. Quale dei due movimenti si ferma prima, la rotazione o lo scivolamento? Supponiamo che il disco preme uniformemente sul ghiaccio, che la forza di attrito tra due superfici non dipenda dalla loro velocità relativa e che resistenza dell'aria sia trascurabile.

6.9 Giradischi

Un disco orizzontale con superficie ruvida è tenuto in rotazione attorno il suo asse di simmetria con velocità angolare Ω . Una sfera ruvida di raggio R rotola senza strisciare e il suo centro si muove su una circonferenza di raggio r_0 , concentrica al disco. Trovare la velocità lineare iniziale e la velocità angolare iniziale che la palla deve avere per compiere questo moto. Qual è il moto del centro della sfera se inizialmente ha velocità e velocità angolare uguali in modulo rispetto a quello trovate nella domanda precedente, ma opposte?

6.10 Matita che rotola

Si modellizzi una matita lunga l come un prisma che ha per base un esagono regolare di lato $a \ll l$, e ha una massa M distribuita omogeneamente. Si pone ora la matita su un piano inclinato di un angolo θ con attrito infinito, con il lato lungo sempre alla stessa altezza. Viene quindi data una spinta alla matita che comincia a rotolare. Si assuma che le facce del prisma siano leggermente concave in modo che solo gli spigoli siano in contatto con il piano, ma che la concavità non abbia effetto sul momento d'inerzia.

1. Si dimostri che il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse centrale del prisma vale $I = \frac{5}{12}Ma^2$.
2. Si trovi la relazione fra la velocità angolare della matita appena prima che uno spigolo colpisca il tavolo e la velocità angolare immediatamente dopo l'urto. Domanda analoga per l'energia cinetica. Trovare ora l'energia cinetica minima appena dopo un impatto affinché possa avvenire l'impatto successivo. Trovare la velocità limite della matita. Si assuma che la matita tocchi il piano in ogni istante.
3. Qual è il minimo valore di θ per cui esiste una velocità limite non nulla? Qual è il valore massimo di θ per cui la matita rimane sempre in contatto con il piano?

6.11 Angolo di rotazione

Una disco piatto omogeneo di massa m e raggio r può ruotare sul piano senza attrito. Un bambino di massa m' sale sul disco dove c'è un segno S e fa un giro completo lungo il bordo del disco tornando in S. Dove si trova il bambino rispetto al punto dove è salito? Di quale angolo ha ruotato il disco rispetto al suo centro?

6.12 Dipolo in campo magnetico

Possiamo schematizzare un dipolo elettrico come una sbarretta rigida di lunghezza \vec{l} ai cui capi sono attaccate due cariche, una $+q$ e l'altra $-q$. Il verso di \vec{l} è fatto in modo che il vettore vada dalla carica negativa a quella positiva. Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$.

1. Leggi di conservazione

- Calcolare la forza totale agente sul dipolo, e il momento torcente rispetto al centro di massa. Scrivere le equazioni del moto per il centro di massa del dipolo e per la rotazione attorno al centro di massa.
- Dalle equazioni del moto trovare la quantità di moto modificata che si conserva. Denotarla con \vec{P} . Scrivere la conservazione dell'energia meccanica totale E .
- Mostrare che la quantità definita come :

$$J = (\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \vec{B}$$

è una costante del moto (I è il momento di inerzia rispetto al centro di massa).

2. Moto nel piano perpendicolare a \vec{B}

- Supponiamo che all'istante iniziale il centro di massa del dipolo sia fermo nell'origine, \vec{l} punti nella direzione x e la velocità angolare iniziale sia $\omega_0 \hat{z}$. Se ω_0 è minore di un certo valore critico ω_c , il dipolo non compie un giro completo rispetto al centro di massa. Trovare ω_c .
- Per un generico $\omega_0 > 0$ qual è la massima distanza d_{max} nella direzione x , che il centro di massa può raggiungere?
- Qual è la tensione sulla sbarretta in funzione di ω ?

6.13 Superpalla 1

Una super-palla di raggio R , massa m e momento di inerzia $I = \beta m R^2$ viene lanciata verso il pavimento e ruota intorno ad un asse perpendicolare al piano (verticale) del moto $x - y$. La palla rimbalza rotolando senza strisciare.

Assumendo che la collisione con il pavimento sia elastica e che il modulo della velocità verticale v_y sia la stessa prima e dopo l'urto mostrare che

$$v'_x = \frac{(1 - \beta)v_x - 2\beta R\omega}{1 + \beta}$$

$$R\omega' = \frac{-2v_x - (1 - \beta)R\omega}{1 + \beta}$$

dove v_x positivo è verso destra, mentre ω positivo è antiorario. Commentare in particolare il caso in cui $\beta = 1$.

6.14 Superpalla 2

Lanciando la super-palla del problema precedente in modo che rimbalzi inizialmente sul pavimento, poi sotto un tavolo e infine nuovamente sul pavimento, quale dev'essere la relazione fra v_x e $R\omega$ in modo che la palla torni in mano al lanciatore con lo stesso percorso?

6.15 Superpalla 3

Considerare l'esercizio precedente, in cui la palla ha momento di inerzia $I = \beta mR^2$.

1. Mostrare che la traiettoria per cui palla torna in mano al lanciatore è necessariamente quella in cui la palla compie lo stesso percorso in andata e al ritorno per $\beta \leq \frac{1}{3}$, che significato fisico ha tale β ?
2. Far vedere che per $\beta = 1$, la traiettoria di andata è sempre uguale a quella di ritorno, a meno che il tempo di volo t_1 fra la mano e il pavimento sia esattamente lo stesso che fra il pavimento e il tavolo t_2 , e in tal caso la palla torna alla mano del lanciatore qualunque sia la relazione fra v_x e $R\omega$.
3. Trovare la relazione fra β e il rapporto fra i tempi t_1 e t_2 in modo che la palla torni in mano al lanciatore indipendentemente da come sia stata lanciata.

6.16 Decelerazione di una bicicletta

Abbiamo una bicicletta di massa M che si muove con velocità v_0 e il cui centro di massa è a un'altezza D dal terreno. Le due ruote sono equidistanti dal centro di massa, con i rispettivi centri a una distanza orizzontale $2L$ l'uno dall'altro. Il momento d'inerzia delle due ruote è trascurabile. Le due ruote possono rotolare senza strisciare fintantoché si abbia $F \leq \mu N$, dove F è la forza applicata nel punto di contatto tra ruota e terreno, parallela a quest'ultimo, N è la reazione normale e μ è il coefficiente d'attrito. Alla bicicletta è impressa una decelerazione a .

1. nel caso in cui si possa frenare solo con la ruota anteriore, dire qual è il massimo valore di a (in modulo) tale che la bicicletta non slitti durante la frenata;
2. fare lo stesso nel caso in cui si possa frenare solo con la ruota posteriore.

La gravità è presente e vale \vec{g} .

6.17 Sistema di aste e masse

Abbiamo un sistema planare costituito da tre aste identiche di massa trascurabile e lunghezza L che condividono uno stesso vertice. All'altro estremo di ciascuna asta è attaccata una massa puntiforme, che vale m , $2m$ o $3m$ in base all'asta. Il sistema è libero di traslare nel piano che lo contiene, e le aste sono libere di ruotare attorno al vertice comune. Inizialmente l'angolo tra ciascuna coppia di aste è uguale e vale $\frac{2\pi}{3}$. Improvvisamente, alla massa $3m$ è impressa una velocità v_0 perpendicolare alla sua asta. Si determinino le accelerazioni delle tre masse subito dopo quell'istante. La gravità è trascurabile.

6.18 Monociclo

Un monociclista viaggia su un monociclo il cui punto più basso percorre una traiettoria circolare piana di raggio R . Monociclista e monociclo assieme possono essere modellizzati come un'asta rigida e uniforme di lunghezza L , inclinata di un angolo θ verso il centro della circonferenza rispetto alla verticale. Supponendo che il coefficiente d'attrito fra monociclo e terreno sia abbastanza alto, qual è la velocità angolare alla quale viene percorsa la traiettoria? La gravità è \vec{g} .

7 Meccanica celeste

7.1 Esercizio base

Consideriamo un satellite di massa m su un'orbita circolare di raggio R attorno alla Terra (di massa M), che supporremo ferma.

1. Trova la velocità v_R ed il periodo orbitale T del satellite.
2. Trova l'energia meccanica totale del satellite ed il suo momento angolare.
3. Trova il valore di R nel caso dell'orbita geostazionaria.

Supponiamo adesso che il satellite si muova su un'orbita ellittica (di semiasse maggiore a ed eccentricità ϵ) attorno alla Terra.

1. Trova v_m e v_M , rispettivamente la velocità minima e massima del satellite durante il moto orbitale
2. Trova il periodo T del moto orbitale.

3. Dimostra che

$$a = \frac{T}{2\pi} \sqrt{v_m v_M}$$

4. Trova l'energia meccanica totale del satellite.

7.2 Missile verso l'equatore

Un missile viene lanciato dal polo Nord (con la prima velocità cosmica) in modo tale da farlo cadere su un punto posto all'equatore.

1. Trova il semiasse maggiore dell'orbita del missile.
2. Qual è la massima altezza dalla superficie terrestre a cui il satellite arriva?
3. Quanto vale il tempo di volo del satellite? (Ricorda che l'area di un'ellisse vale $S = \pi ab$)

7.3 Asteroide dentro l'orbita terrestre

Un asteroide di massa m si muove su una traiettoria parabolica intorno al Sole (la cui massa è M_s) nello stesso piano dell'orbita terrestre, che si assume essere circolare e di raggio R . Trascurare l'attrazione tra asteroide e Terra.

4. Sia p la distanza di minimo avvicinamento dell'asteroide dal Sole. Nel caso in cui $p < R$, trovare il tempo T che la cometa spende all'interno dell'orbita terrestre.
5. Calcolare il massimo valore possibile di T in giorni. Per quale valore di p avviene ciò?

Se, invece, p è minore del raggio del Sole, l'asteroide ci cadrà dentro e la massa del Sole aumenterà di una frazione $\alpha \equiv \frac{m}{M_S}$.

6. Studiare come cambiano i parametri dell'orbita terrestre (asse maggiore ed eccentricità) al variare di α .

7.4 Impatto imminente

Supponiamo di essere su un'astronave di massa m ferma a distanza d dal Sole. Per via dell'attrazione gravitazionale ci avviciniamo verso il Sole (oggetto puntiforme di massa $M \gg m$) fino a scontrarci con esso. Quanto tempo passa tra l'istante iniziale (astronave ferma) e l'impatto con il Sole? Supponiamo invece di porre 2 oggetti di massa m a distanza d l'uno dall'altro. Muovendosi solo per la reciproca attrazione gravitazionale, quanto tempo impiegano per scontrarsi?

7.5 Cambio di eccentricità

Un corpo si trova in un'orbita ellittica di eccentricità ϵ_1 attorno a una stella. Quando si trova nel pericentro un urto gli fornisce un impulso radiale che trasforma l'orbita in una di eccentricità ϵ_2 . Trovare l'angolo formato tra gli assi maggiori delle due orbite.

7.6 Missile Balistico

Un missile balistico viene lanciato da un punto A della superficie terrestre, con una velocità iniziale \mathbf{v}_0 (inferiore alla velocità di fuga) ad un angolo α dall'orizzontale. Dopo aver percorso un arco di ellisse, il missile si schianta in un certo punto B, la cui posizione dipende dalle condizioni di lancio (Figura 6).

1. Trova i parametri dell'orbita ellittica in funzione di v_0 e α .
2. Trova la distanza tra punto di partenza e di arrivo sulla superficie terrestre. Quanto dista il punto più alto dalla superficie terrestre?
3. Quanto dovrebbe essere la velocità iniziale v_0 di un missile lanciato ad un dato angolo α in modo che esso impatti nell'antipode (Figura 7)?

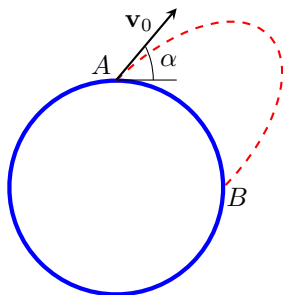


Figura 6: Esempio di moto di un proiettile all'interno del campo gravitazionale della Terra.

7.7 Trio gravitazionale

Tre corpi (considerati come punti materiali) di masse m_1 , m_2 e m_3 interagiscono tra di loro solo gravitazionalmente. Sotto quali condizioni sulle mutue posizioni e sulla velocità angolare i tre corpi ruotano rigidamente attorno al centro di massa comune?

7.8 Punti di Lagrange

I punti di Lagrange sono i punti di equilibrio nel piano dell'orbita terrestre per il potenziale gravitazionale. Sono 5 in tutto, vediamo di individuarli.

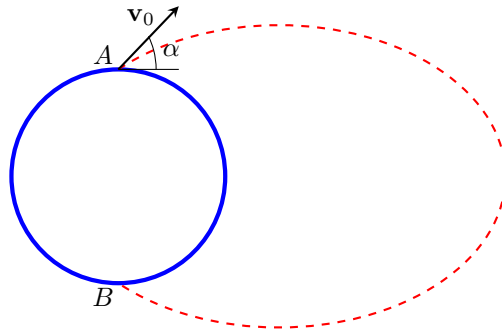


Figura 7: Moto di un proiettile da un punto verso l'antipode.

; In tutto il problema supporre il Sole di massa M_S e la Terra di massa $M_T \ll M_S$. Potrebbe essere utile ricordare che per x abbastanza piccolo in modulo, vale:

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

I primi 3 punti giacciono sulla retta passante per il Sole e la Terra:

1. Ponendosi nel sistema di riferimento rotante che ha origine nel Sole e asse \hat{x} che punta sempre verso la Terra, trovare le posizioni lungo tale asse in cui è possibile inserire una massetta di prova che subisca una forza totale nulla.
Nota: Supporre che la Terra giri intorno al centro del Sole su un'orbita circolare di raggio R
2. Ripetere il punto precedente, ma considerando l'origine del sistema di riferimento nel baricentro del sistema Terra-Sole, attorno a cui ruotano su orbite circolari il Sole e la Terra. I due corpi mantengono comunque una distanza R costante tutto il tempo. I risultati ottenuti sono diversi da quelli del punto precedente?

Gli altri 2 punti di Lagrange sono invece fuori dall'asse di simmetria.

3. Restando nel sistema inerziale del baricentro del sistema, supporre che il Sole sia nel punto \vec{R}_S e la Terra nel punto \vec{R}_T . Scrivere la forza percepita da una massetta m posta nel punto \vec{r} .
HINT: usare la notazione vettoriale, ovvero cercate di non passare in componenti
4. Trovare la distanza tra \vec{r} e uno degli altri due corpi affinché la forza subita dalla massetta sia diretta verso il baricentro del sistema Terra-Sole e abbia il giusto modulo per farla restare in orbita.

7.9 Nube di gas

Consideriamo una nube di gas, fatta da particelle finissime, che all'istante $t = 0$ è sferica di raggio R e ha una densità $\rho(r, t = 0)$. Ogni particella si muove, all'istante iniziale, con una velocità $v(r, t = 0)$ tangenziale rispetto alla sfera di raggio r , orientata in modo casuale sul piano tangente alla sfera in quel punto. Trascuriamo le collisioni tra le particelle della nube, che quindi interagiscono solo tramite forze gravitazionali.

1. Determinare $\rho(r, t = 0)$ affinché la configurazione $v(r, t = 0) = v_0$ sia stabile nel tempo.
2. Determinare $v(r, t = 0)$ affinché la configurazione $\rho(r, t = 0) = \rho_0$ sia stabile nel tempo. Sia $v_1(r)$ la risposta a questa domanda.

Supponiamo d'ora in poi che $\rho(r, t = 0) = \rho_0$ e $v(r, t = 0) = \alpha v_1(r)$, con $0 < \alpha < 1$. Assumiamo inoltre che, per ogni coppia di particelle (i, j) , se $r_i(t = 0) > r_j(t = 0)$, allora $r_i(t) > r_j(t)$ per ogni $t > 0$ (*no shell-crossing*). In seguito verificheremo la consistenza di questa ipotesi.

3. Trovare la posizione di massimo avvicinamento al centro della nube di ogni particella, in funzione della sua posizione iniziale $r_0 = r(t = 0)$.
4. Dimostrare che il moto *globale* della nube è periodico e trovarne il periodo.
5. Verificare l'ipotesi di *no shell-crossing*.
6. Calcolare l'energia cinetica media di una particella di massa m in funzione di r_0 .

7.10 Satellite con attrito

Un satellite di massa m si trova inizialmente in un'orbita circolare di raggio r_0 intorno alla Terra (la cui massa sia M). Il satellite è soggetto ad una forza d'attrito $\vec{F}_a = -A\vec{v}$.

1. Quali sono le dimensioni della costante A ?
2. Calcolare, in funzione del tempo, la quantità $a(1 - e^2)$, dove a ed e sono i valori istantanei del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita.
3. Dimostrare che

$$\left. \frac{d(1 - e^2)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

4. Trovare $a(t)$ per piccoli tempi e specificare quantitativamente fino a quando è valida questa approssimazione.

Supporre ora che la forza di attrito sia sufficientemente piccola da poter approssimare l'orbita come istantaneamente circolare. Generalizziamo inoltre al caso in cui $\vec{F}_a = -Av^n\vec{v}$.

5. Calcolare $a(t)$. Per quali n il satellite raggiunge $a = 0$? Quando?
6. Scrivere quantitativamente l'ipotesi di forza di attrito piccola. Usare il teorema del viriale per giustificare, a partire da questa ipotesi, l'assunzione fatta precedentemente, ossia che $\epsilon(t) \approx 0$ anche per tempi lunghi.

7.11 Temperatura del Sole

È data la massa del sole M_s e il suo raggio R_s . Stimare la sua temperatura media trattandolo come una palla di gas (idrogeno) monoatomico di densità uniforme.

7.12 Asteroidi ferromagnetici

Un insieme di asteroidi ferromagnetici orbita intorno ad una pulsar. La pulsar genera un campo magnetico approssimabile con $\vec{H} = \vec{H}_0/|\vec{r}|$. Immaginando che la magnetizzazione \vec{M} di un asteroide dipenda soltanto da $\langle \vec{H} \rangle$, la media temporale del campo magnetico, secondo una legge del tipo $\vec{M} = \alpha \langle \vec{H} \rangle$, si calcoli la magnetizzazione media di un asteroide in funzione del semiasse maggiore della sua orbita a e della sua eccentricità ϵ .

Appendici

A Identità vettoriali

A.1 Doppio prodotto vettore

Dimostriamo che:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Per farlo ci ridurremo a dimostrare che la componente x dei due membri è la stessa, infatti sarà possibile estendere la dimostrazione anche alle altre 2 componenti. Per prima cosa espandiamo il membro di sinistra (il pedice indica che sto considerando solo quella componente del vettore):

$$L_x = (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_x = a_y(\vec{b} \times \vec{c})_z - a_z(\vec{b} \times \vec{c})_y.$$

Posso quindi espandere i due prodotti vettori in componenti:

$$L_x = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z).$$

Raccogliendo opportunamente i termini con lo stesso pedice si ottiene:

$$L_x = b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z).$$

Sommando e sottraendo $a_x b_x c_x$ si ottiene:

$$L_x = b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z c_z).$$

Che si nota essere la componente x del membro di destra dell'uguaglianza iniziale.

A.2 Prodotto scalare e vettoriale

La formula da dimostrare è la seguente:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Come prima, proviamo a scrivere in componenti il membro di sinistra:

$$a_x(\vec{b} \times \vec{c})_x + a_y(\vec{b} \times \vec{c})_y + a_z(\vec{b} \times \vec{c})_z.$$

Espandendo anche i prodotti vettori in coordinate si ottiene:

$$a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

Se ora raccogliamo i termini che condividono la stessa componente di \vec{c} , otteniamo:

$$c_x(a_y b_z - a_z b_y) + c_y(a_z b_x - a_x b_z) + c_z(a_x b_y - a_y b_x).$$

Si può ora notare che i termini tra parentesi sono proprio le componenti di $\vec{a} \times \vec{b}$ e dunque la forma ottenuta è la scrittura in coordinate del membro di destra della formula iniziale.

B Derivazione alternativa della forma delle orbite

Riprendiamo l'espressione dell'energia in campo gravitazionale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Dato che l'energia è una costante del moto, derivandola rispetto al tempo otteniamo

$$0 = \dot{E} = m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} + \frac{\alpha}{r^2}\dot{r} = \dot{r} \left(m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} \right).$$

Il caso di $\dot{r} = 0$ costantemente corrisponde all'orbita circolare e non è di particolare interesse, quindi possiamo limitarci a

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} = 0.$$

Volendo noi trovare la forma dell'orbita $r(\theta)$, cambiamo la variabile di derivazione:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2},$$

dove abbiamo usato il fatto che $L = mr^2\dot{\theta}$.

Abbiamo, quindi, che

$$m \frac{d}{d\theta} \left(\frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \frac{L}{mr^2} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}.$$

Per integrare questo schifo torna utile la sostituzione

$$u = \frac{1}{r},$$

che ci porta a

$$\begin{aligned} m \frac{d}{d\theta} \left(\frac{Lu^2}{m} \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \right) \frac{Lu^2}{m} &= \frac{L^2u^3}{m} - \alpha u^2 \\ -\frac{L^2}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{L^2}{m}u - \alpha \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= -u + \frac{\alpha m}{L^2}. \end{aligned}$$

Questa non è altro che l'equazione di un moto armonico, la cui soluzione è data da

$$u(\theta) = A \cos(\theta + \phi) + \frac{\alpha m}{L^2}.$$

Possiamo porre $\phi = 0$ ruotando opportunamente gli assi delle coordinate e, ricordando la definizione di u , ottenere finalmente

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \frac{L^2 A}{\alpha m} \cos \theta} = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad ,$$

che abbiamo visto essere l'equazione di una conica in polari.

Soluzioni

C Corpo rigido

C.1 Momenti di inerzia

- Se l'asse non passa per il centro della sfera, ci si può sempre ricondurre al caso in cui vi passi tramite il Teorema di Huygens-Steiner, dunque risolviamo questo caso. Inoltre è chiaro che il momento d'inerzia ha lo stesso valore per ogni asse passante per il centro della sfera, datane la simmetria. Consideriamo dunque tre assi tra loro perpendicolari, che possiamo immaginare diretti lungo i tre assi cartesiani. Il momento d'inerzia è allora:

$$I = \int (x^2 + y^2) dm = \int (y^2 + z^2) dm = \int (z^2 + x^2) dm$$
$$\implies I = \frac{2}{3} \int x^2 + y^2 + z^2 dm$$

Nel caso di una sfera cava, essendo la massa tutta localizzata a $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, si ottiene $I = \frac{2MR^2}{3}$. Nel caso di sfera piena, invece, ogni guscio di raggio r e spessore dr ha massa $dm = \frac{3Mr^2 dr}{R^3}$, da cui, svolgendo l'integrale, $I = \frac{2MR^2}{5}$.

- Rispetto al proprio asse, un cilindro si comporta come un disco piatto per quanto riguarda il momento d'inerzia, in quanto contano solo le distanze perpendicolari all'asse. Nel caso di asse perpendicolare a quello del cilindro, conviene dividere il solido in dischi infinitesimi e usare Huygens-Steiner su ciascuno, integrando i contributi alla fine. Il risultato è $I = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12}$.
- Rispetto a un asse ad essa perpendicolare e passante per il centro, il momento di inerzia si calcola direttamente dalla formula con un integrale:

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{Mx^2 dx}{L} = \frac{ML^2}{12}$$

Per assi non passanti per il centro di massa, ma comunque perpendicolari all'asta, si ricorre a Huygens-Steiner.

- Tracciamo tutte le possibili congiungenti dei punti medi di una faccia triangolare: essi dividono il triangolo in 4 triangoli simili all'originale (esattamente come nel triangolo equilatero). A questo punto basta applicare il metodo dei frattali. Si noti che, come nel caso del cilindro, l'altezza del prisma risulta irrilevante.
- Metodo dei frattali: dividere il cubo in 8 cubetti più piccoli.

- Il momento di inerzia di una sfera piena, che è noto dal punto 1, può essere visto come somma di quello di una sfera cava come descritta nel testo e quello una sferetta piccola che riempie la cavità, di cui è facile calcolare il momento di inerzia con il Teorema di Huygens-Steiner. A questo punto per ottenere quella della sfera cava basta fare una differenza.

C.2 Minima distanza

Il problema è tratto dalle EuPhO del 2018. La soluzione si trova qui: <http://eupho2018.mipt.ru/pdf/eupho18-th-solution.pdf>, Problema 1.

C.3 Urto tra sfere

Poiché va trascurato l'attrito, nell'urto si conserva l'energia cinetica, e la forza tra le due sfere è diretta lungo la congiungente i loro centri. In questo modo sappiamo in che direzione si muoverà la sfera A dopo l'urto, e troviamo che l'angolo tra questa direzione e quella della velocità iniziale di B è dato da $\sin \theta = \frac{b}{2R}$. Usando un sistema cartesiano Oxy tale che $\vec{v}_0 = (v_0, 0)$ abbiamo allora che la velocità di A dopo l'urto si scrive, detto v il suo modulo, come:

$$\vec{v}_A = (v \cos \theta, v \sin \theta)$$

Per conservazione della quantità di moto troviamo la velocità di B dopo l'urto:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 - \frac{m_A}{m_B} \vec{v}_A = \left(v_0 - \frac{m_A v \cos \theta}{m_B}, -\frac{m_A v \sin \theta}{m_B} \right)$$

Infine il valore di v si ricava scrivendo e risolvendo la conservazione dell'energia:

$$\frac{m_B v_0^2}{2} = \frac{m_A |\vec{v}_A|^2}{2} + \frac{m_B |\vec{v}_B|^2}{2}$$

C.4 Urto tra asta e pallina

Il problema può essere risolto con la conservazione di 3 quantità: energia, quantità di moto e momento angolare rispetto al punto dove avviene l'urto.⁵ Utilizzando queste tre relazioni il moto dopo l'urto può essere risolto completamente, ottenendo la velocità finale della massa, la velocità del centro di massa dell'asta e la velocità di angolare dell'asta; note quest'ultime la condizione che non avvenga un nuovo urto è banale cinematica.

C.5 Asta che cade

Sia $\theta(t)$ l'angolo che la sbarretta forma col pavimento in funzione del tempo. Dal momento che non è presente attrito, sull'asta agiscono tre forze: le due

⁵Attenzione: con punto dove avviene l'urto si deve intendere la proiezione sul piano del punto di contatto tra asta e massa, che quindi non si muove, ma resta nella stessa posizione anche dopo l'urto.

reazioni normali, dovute alla presenza di pavimento e parete, e la forza peso. Osserviamo che le prime due non compiono lavoro, mentre la terza è conservativa, perciò si conserva l'energia totale del sistema. Si noti che il centro di massa G della sbarretta si muove su una circonferenza di raggio $\frac{l}{2}$ centrata nel punto d'incontro O tra pavimento e parete, e che la congiungente OG forma con l'orizzontale un angolo pari a θ , perciò si ha $v_{cm}^2 = \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{4}$. Inoltre, $\dot{\theta}$ è anche la velocità angolare della sbarretta, perciò, ricordando che il momento d'inerzia rispetto al centro di massa vale in questo caso $I = \frac{ml^2}{12}$ (m è la massa), si ottiene l'energia totale conservata:

$$E = K + U = K_{cm} + K_{rot} + U = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{8} + \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{24} + \frac{mgl \sin \theta}{2} = \frac{mgl \sin \theta_0}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g(\sin \theta_0 - \sin \theta)}{l}$$

L'equazione differenziale risultante, che permetterebbe in teoria di ottenere $\theta(t)$, non è integrabile analiticamente. Per trovare l'angolo di distacco, tuttavia, non ci è necessario risolverla. Il distacco avviene quando la reazione normale N esercitata dal muro si annulla, e poiché le altre due forze sono entrambe verticali, per la legge di Newton, detta x la coordinata orizzontale del centro di massa della sbarretta, risulta:

$$N = m\ddot{x}$$

Perciò ci è sufficiente esprimere \ddot{x} in funzione di θ e trovare per quale angolo asse si annulla. Abbiamo:

$$x = \frac{l \cos \theta}{2} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{l \dot{\theta} \sin \theta}{2} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{l(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)}{2}$$

Abbiamo già l'espressione di $\dot{\theta}^2$ in funzione di θ . Per ottenere quella di $\ddot{\theta}$, deriviamo la prima rispetto al tempo, ottenendo:

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{3g\dot{\theta} \cos \theta}{l} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3g \cos \theta}{2l}$$

Sostituendo, si ottiene:

$$\ddot{x} = \frac{3g \cos \theta (3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0)}{4}$$

Perciò il distacco avviene all'angolo θ tale che:

$$\sin \theta = \frac{2 \sin \theta_0}{3}$$

C.6 Matita che cade

Se il tavolo è privo di attrito, sulla matita agiscono solo forze verticali (la reazione normale e il peso), dunque la quantità di moto orizzontale si conserva.

Essendo questa inizialmente nulla, il centro di massa si sposta solo verticalmente durante il moto. Chiamando allora θ l'angolo tra l'asta e la verticale in funzione del tempo, si ha che la coordinata verticale del centro di massa vale $z = \frac{l \cos \theta}{2}$, da cui, derivando, troviamo anche velocità e accelerazione:

$$\dot{z} = -\frac{l\dot{\theta} \sin \theta}{2}, \quad \ddot{z} = -\frac{l(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)}{2}$$

Dunque:

$$N - mg = -\frac{ml(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)}{2}$$

La conservazione dell'energia, scomponendo con Koenig quella cinetica, si scrive come:

$$\frac{mgl(1 - \cos \theta)}{2} = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2(1 + 3 \sin^2 \theta)}{24}$$

Da qui possiamo esplicitare $\dot{\theta}^2$ in funzione di θ e poi derivare per ottenere $\ddot{\theta}$:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12g(1 - \cos \theta)}{l(1 + 3 \sin^2 \theta)}, \quad \ddot{\theta} = \frac{6g \sin \theta (3 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 4)}{l(1 + 3 \sin^2 \theta)^2}$$

Sostituendo, si trova N in funzione di θ :

$$N = \frac{mg(1 + 3(1 - \cos \theta)^2)}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2}$$

Poiché questa quantità è sempre positiva, la matita non si stacca mai dal tavolo. La velocità angolare all'impatto si trova ponendo $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

Se invece è presente attrito infinito, cioè il coefficiente di attrito statico è arbitrariamente alto (e dunque la forza di attrito statico può essere arbitrariamente alta fintantoché la reazione normale è nonnulla), si ha che il punto di contatto tra tavolo e matita resta fermo mentre la matita vi ruota attorno. Come prima, è possibile trovare $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ e N (l'attrito statico non dissipa energia):

$$\frac{mgl(1 - \cos \theta)}{2} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{6} \implies \dot{\theta}^2 = \frac{3g(1 - \cos \theta)}{l}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3g \sin \theta}{2l}, \quad N = mg \left(\frac{3 \cos \theta - 1}{2} \right)^2$$

Dunque quando $\cos \theta = \frac{1}{3}$ la reazione normale si annulla.

C.7 Tidal Lock

Se trascuriamo gli effetti del momento angolare dovuti al Sole, il sistema Terra-Luna può essere considerato come un sistema chiuso in cui il momento angolare totale è conservato. Il momento angolare totale consiste nelle rotazioni dei corpi celesti ruotanti intorno ai propri assi e il momento angolare orbitale associato ai loro movimenti attorno al loro centro comune di massa. È utile stimare quali di questi contribuiscono in modo significativo al momento angolare totale e quali sono trascurabili. Ai fini di questa stima, possiamo usare l'approssimazione che l'Equatore della Terra, l'equatore della Luna e l'orbita della Luna si trovano tutti nello stesso piano. Supponiamo che la Luna sia una sfera omogenea. Oltre alla conservazione del momento angolare, è necessaria un'altra equazione - una che dia una connessione tra la velocità angolare orbitale della Luna e la distanza Terra-Luna. Per ottenere ciò, considera l'accelerazione centripeta della Luna mentre orbita attorno a un cerchio approssimativo.

C.8 Disco da hockey

Il rapporto $\frac{\tau}{F}$ tra il momento torcente τ dovuto all'attrito e la forza totale di attrito F è funzione del rapporto $\frac{\omega}{v}$, quindi possiamo scrivere:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\dot{\omega}}{\dot{v}} = f\left(\frac{\omega}{v}\right),$$

Con f tale che $f(0) = 0$ ovviamente. Fisicamente mi aspetto che la funzione f sia continua e in particolare deve valere $f \rightarrow 0$ se $\frac{\omega}{v} \rightarrow 0$. Mostriamo che la rotazione non può finire prima della traslazione. Se succedesse da un certo istante in poi t_0 dovrebbe succedere

$$\frac{\dot{\omega}}{\frac{\dot{\omega}_0}{v_0}} > 1,$$

dove ω_0 e v_0 sono la velocità angolare e di traslazione al tempo t_0 . La condizione ci dice che la diminuzione percentuale della rotazione è più grande della diminuzione percentuale della traslazione. Se fosse vero però si avrebbe

$$\frac{\dot{\omega}}{\frac{\dot{v}}{v_0}} = \frac{v_0}{\omega_0} f\left(\frac{\omega}{v}\right) > 1,$$

ma questo non è verificato quando $\frac{\omega}{v} \rightarrow 0$. Analogamente a quanto detto ora si può ripetere il ragionamento per mostrare che la traslazione non può finire prima della rotazione, quindi l'unica possibilità è che terminino insieme.

C.9 Giradischi

Si rimanda alla soluzione presente sul Forum Olifis:

<https://forum.olifis.it/viewtopic.php?t=6916>.

Si noti che il risultato è valido qualunque sia il centro della circonferenza descritta dalla sfera.

C.10 Matita che rotola

Il problema è tratto dalle IPhO del 1998. Testo e soluzione sono disponibili al seguente link:

<https://physprob.com/>

C.11 Angolo di rotazione

Tutte le forze sono interne, il centro di massa G rimane immobile durante il moto.

$$r = \frac{mR}{m+M}$$

Si conserva inoltre il momento angolare rispetto a G .

Chiamiamo con θ l'angolo tra OG e l'asse x . Invece ϕ è l'angolo di cui ha ruotato la corona circolare rispetto all'asse x .

Per rispondere alla richiesta del problema è sufficiente calcolare $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$, una volta che il bambino ha raggiunto di nuovo S .

$$L_G = L_O + L_{O/G} + m(R-r)\dot{\theta} = MR^2\dot{\phi} + Mr^2\dot{\theta} + m(R-r)^2\dot{\theta} = 0$$

$$\rightarrow \dot{\phi} = -\frac{m}{m+M}\dot{\theta} \rightarrow \Delta\phi = -\frac{m}{m+M}\Delta\theta$$

dato che il bambino visto dalla corona ha fatto un giro completo, abbiamo anche la relazione:

$$\Delta\theta - \Delta\phi = 2\pi$$

da queste due si ottiene:

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{m+M}{2m+M}$$

$$\Delta\phi = -2\pi \frac{m}{2m+M}$$

Controllare i casi limite.

C.12 Dipolo in campo magnetico

Questo problema è tratto dalle APhO 2001. Testo e soluzione sono disponibili al seguente link:

<https://apho.olimpicos.net/>

Inoltre, un problema quasi identico è apparso nelle EuPhO 2022.

C.13 Superpalla 1

Dal momento che v_y è lasciato invariato dal rimbalzo possiamo ignorarlo quando conserviamo l'energia, e dal momento che l'impulso verticale dal pavimento non ha braccio, possiamo ignorare il moto verticale nel problema. Dalla conservazione del momento angolare rispetto al punto di contatto, abbiamo:

$$I(\omega' - \omega) = Rm(v'_x - v_x)$$

La conservazione dell'energia invece ci dà:

$$I(\omega'^2 - \omega^2) = m(v_x'^2 - v_x^2)$$

Dividendo ora la seconda equazione per la prima otteniamo ù:

$$R(\omega' + \omega) = -(v_x' + v_x)$$

Che combinata alla prima equazione riscritta sostituendo il momento di inerzia

$$\beta R(\omega' - \omega) = v_x' - v_x$$

ci fornisce le equazioni richieste dal testo.

C.14 Superpalla 2

Il rimbalzo sotto il tavolo ha la seguente trasformazione:

$$v_x' = \frac{(1 - \beta)v_x + 2\beta R\omega}{1 + \beta}$$

$$R\omega' = \frac{2v_x - (1 - \beta)R\omega}{1 + \beta}$$

Per ottenerla a partire dal problema precedente si può fare la sostituzione $\omega \rightarrow -\omega$. (Immaginate di riflettere il problema rispetto al piano orizzontale. Questo non cambia v_x , ma cambia il moto orario con quello antiorario.) Vogliamo che v_x e ω cambino segno durante il rimbalzo sotto il tavolo, cioè:

$$-v_x = \frac{(1 - \beta)v_x + 2\beta R\omega}{1 + \beta}$$

$$-R\omega = \frac{2v_x - (1 - \beta)R\omega}{1 + \beta}$$

Entrambe le equazioni danno la stessa informazione, cioè $(v_x, R\omega) \propto (-\beta, 1)$. Per il secondo rimbalzo sul pavimento, usiamo la trasformazione originaria per ottenere:

$$v_x' = k \frac{(1 - \beta)[- \beta] - 2\beta[1]}{1 + \beta} = \frac{\beta^2 - 3\beta}{1 + \beta}$$

$$R\omega' = k \frac{-2[- \beta] - (1 - \beta)[1]}{1 + \beta} = \frac{3\beta - 1}{1 + \beta}$$

con k una certa costante di proporzionalità. Le quantità iniziali sono quelle negative perciò vogliamo lanciare la palla con $(v_x, R\omega) \propto (\beta(3 - \beta), 1 - 3\beta)$. Nota che per $\beta > \frac{1}{3}$ dal momento che ω è negativo, bisogna lanciare la palla con spin in avanti (perché definiamo ω antiorario come positivo), mentre per $\beta < \frac{1}{3}$ bisogna lanciare la pallina con backspin. Infine per $\beta = \frac{1}{3}$ bisogna lanciarla senza spin.

C.15 Superpalla 3

Ricordiamo che per la trasformazione sul pavimento:

$$v'_x = \frac{(1 - \beta)v_x - 2\beta R\omega}{1 + \beta}$$

$$R\omega' = \frac{-2v_x - (1 - \beta)R\omega}{1 + \beta}$$

e sotto il tavolo:

$$v'_x = \frac{(1 - \beta)v_x + 2\beta R\omega}{1 + \beta}$$

$$R\omega' = \frac{2v_x - (1 - \beta)R\omega}{1 + \beta}$$

Pertanto lo spostamento orizzontale totale è pari a $v_x t_1 + v'_x t_2 + v''_x t_2 + v'''_x t_1$, dove t_1 è il tempo che la pallina trascorre fra la mano del lanciatore e il pavimento, e t_2 il tempo fra il pavimento e il tavolo. Quindi ponendo che lo spostamento orizzontale totale sia zero, si ottiene:

$$0 = \frac{2}{(1 + \beta)^3} [(3\beta - 1)t_1 - (\beta + 1)t_2] [(3\beta - 1)v_x + (3 - \beta)\beta R\omega].$$

Quest'identità è rispettata se una delle due parentesi si annulla. Se si annulla la seconda, abbiamo la relazione trovata nel problema precedente per cui la pallina torna in mano al lanciatore con lo stesso percorso dell'andata.

1. Se $\beta < \frac{1}{3}$, i coefficienti davanti a t_1 e t_2 hanno lo stesso segno, quindi affinché il primo termine si annulli t_1 e t_2 devono essere discordi, assurdo. Quindi se per $\beta < \frac{1}{3}$ la particella torna in mano al lanciatore, necessariamente lo fa ritraendosi nello stesso percorso dell'andata.
2. Per $\beta = 1$ otteniamo $(t_1 - t_2)(v_x + R\omega) = 0$, da cui segue immediatamente la risposta.
3. In generale per $\frac{t_2}{t_1} = \frac{3\beta - 1}{\beta + 1}$, la pallina torna in mano al lanciatore indipendentemente dal rapporto fra v_x e $R\omega$.

C.16 Decelerazione di una bicicletta

- Siano N_1 ed N_2 le reazioni normali che il terreno applica rispettivamente alle ruote anteriore e posteriore. Poiché l'unico momento torcente agente sulla ruota posteriore è dovuto all'attrito agente su di essa, e dal momento che la bicicletta sta decelerando, questo deve essere diretto in avanti. Al contrario, quello agente sulla ruota anteriore punta indietro, altrimenti la forza netta agente sulla bicicletta punterebbe in avanti. Chiamo i moduli di queste forze f_1 ed f_2 , e scrivo i bilanci delle forze:

$$N_1 + N_2 = Mg, \quad f_1 - f_2 = Ma$$

Trascurando il momento di inerzia delle ruote, si ha che il momento angolare dell'intera bicicletta può essere trattato come costante, dunque si annulla il momento torcente totale rispetto al centro di massa:

$$(N_1 - N_2)L = (f_1 - f_2)D$$

Da qui troviamo:

$$N_1 = \frac{MaD}{2L} + \frac{Mg}{2}, \quad N_2 = \frac{Mg}{2} - \frac{MaD}{2L}$$

Perciò sicuramente $a \leq \frac{gL}{D}$. Dalle condizioni $f_1 \leq \mu N_1$ ed $f_2 \geq 0$ si trova:

$$Ma \leq Ma \frac{\mu D}{2L} + \frac{\mu Mg}{2} \implies a \left(1 - \frac{\mu D}{2L}\right) \leq \frac{\mu g}{2}$$

Distinguiamo ora due casi. Se $2L \leq \mu D$, l'ultima disuguaglianza è sempre soddisfatta. Possiamo allora ottenere per a il valore $\frac{gL}{D}$ con $f_2 = 0$ e $f_1 = \frac{MgL}{D}$. Si noti che $2L \leq \mu D \implies L \leq \mu D$, dunque la disuguaglianza $f_1 \leq \mu N_1$ risulta soddisfatta. Se invece $2L > \mu D$, allora si ha:

$$a \leq \frac{\mu g}{2 - \frac{\mu D}{L}}$$

Perciò si verifica facilmente che la massima decelerazione ottenibile è data dal minimo tra $\frac{gL}{D}$ e $\frac{\mu g}{2 - \frac{\mu D}{L}}$.

- La soluzione è analoga a quella del primo punto: le espressioni per N_1 ed N_2 restano le stesse, come anche la condizione $a \leq \frac{gL}{D}$. I versi degli attriti si invertono, dopodiché i passaggi algebrici sono simili a quelli già illustrati.

C.17 Sistema di aste e masse

Il problema è tratto dalla prima edizione della Physics Cup.
<http://www.ipho2012.ee/physicscup/problem-no-4/solution/>

C.18 Monociclo

Si rimanda alla soluzione presente sul Forum Olifis:
<https://forum.olifis.it/viewtopic.php?t=7107>

D Meccanica Celeste

D.1 Esercizio base

1. Eguagliando la forza gravitazionale a quella centripeta si trova

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Dall'equazione dell'energia segue

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}m \left(\frac{GM}{R} \right) - \frac{GMm}{R}.$$

Il periodo del moto non è altro che la lunghezza della circonferenza divisa per la velocità del satellite

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}.$$

2. L'energia meccanica totale è pari alla somma di energia cinetica e potenziale

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}.$$

Il momento angolare, dalla definizione, vale

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mRv \hat{z} = m\sqrt{GM R} \hat{z},$$

dove \hat{z} è la direzione perpendicolare al piano dell'orbita.

3. L'orbita geostazionaria ha lo stesso periodo della rotazione terrestre (1 giorno). Allora, usando nuovamente la seconda legge di Newton, troviamo

$$m \left(\frac{2\pi}{T_{Giorno}} \right)^2 R_{GEO} = \frac{GMm}{R_{GEO}^2} \rightarrow R_{GEO} = \left(\frac{GMT_{Giorno}^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \approx 42000 \text{ km}.$$

4. La velocità massima sarà assunta in corrispondenza del perielio, mentre la minima all'afelio. I valori desiderati si trovano facilmente uguagliando l'energia totale a $-\frac{GMm}{2a}$. Si trova che

$$v_{max} = \sqrt{\frac{GM r_{max}}{a r_{min}}},$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{GM r_{min}}{a r_{max}}}.$$

5. Il periodo del moto orbitale è semplicemente dato dalla legge di Keplero

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}.$$

6. Questa identità segue direttamente dalle due richieste precedenti.

7. Infine, questo ultimo punto non è altro che la dimostrazione della famosa relazione usata in precedenza

$$E = -\frac{GMm}{2a}.$$

Esistono tanti modi per dimostrarla, uno lo abbiamo visto nella parte di teoria. Un modo alternativo consiste nell'utilizzare un'operazione di media temporale dell'energia meccanica. Abbiamo visto che nel caso di un'orbita circolare

$$E = -\frac{GMm}{2R}.$$

Cosa succede se R non è costante nel tempo? Calcoliamo la media temporale dell'energia

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{GMm}{2r(t)} dt,$$

dove T è il periodo orbitale. Ricordando che

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt},$$

$$r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2(1 + \varepsilon \cos \theta)},$$

sostituendo sopra, si ottiene

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{GMm}{2r(t)} dt = -\frac{L}{2T} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = -\frac{GMm}{2a}.$$

D.2 Missile verso l'equatore

1. Dall'equazione dell'energia segue

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}m \left(\frac{GM}{R} \right) - \frac{GMm}{R}.$$

Segue quindi che $a = R$.

2. L'ellisse ha la proprietà per cui la somma delle distanze da ciascun punto ai due fuochi è costante (ed uguale a $2a$). Quindi il secondo fuoco dell'ellisse (quello che non sta nel centro della Terra) sta a distanza R sia dal polo che dall'equatore. Quindi, l'altezza desiderata può essere trovata con un semplice ragionamento geometrico. Ad esempio, si può notare che la distanza tra il punto ad altezza massima e il fuoco "esterno" alla Terra si può trovare come la somma delle distanze dai fuochi ($2R$), meno la distanza tra i fuochi ($\sqrt{2}R$) e poi diviso per 2. Il risultato ottenuto è $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})R$. A questo punto basta sommare $(\sqrt{2} - 1)R$ per trovare l'altezza cercata, ovvero $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

3. Il tempo di volo può essere trovato ricordando che esso è proporzionale all'area spazzata dal raggio vettore. In questo caso vale

$$T = (\pi + \sqrt{2})\sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

Il risultato può essere trovato sommando l'area della semiellisse ($\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R^2$) a quella del triangolo rettangolo formato con il centro della Terra ($\frac{R^2}{2}$) e dividendo per la velocità areolare ($\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{GMR}$).

D.3 Asteroide dentro l'orbita terrestre

1. Se la traiettoria è parabolica, allora l'energia meccanica totale è nulla

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM_S}{r} = 0.$$

Nel punto della parabola più vicino al sole si ha $r = r_{\min} = p$ e $\dot{r} = 0$, quindi sostituendo si trova $L^2 = 2m^2pGM_S$. Per un generico valore di r si ha che

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{GmM_S}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}.$$

Separando le variabili da quest'ultima equazione è possibile integrare entrambi i membri e trovare che

$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \left[\frac{2}{m} \left(\frac{GmM_S}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2GM_S}} \int_p^R \frac{r dr}{\sqrt{r-p}}.$$

Questo integrale è risolvibile operando la sostituzione $y = \sqrt{r-p}$. Quello che si ottiene è

$$T = \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2GM_S}} \left(1 + \frac{2p}{R} \right) \sqrt{1 - \frac{p}{R}}.$$

2. Considerando T come una funzione della variabile p e annullando la sua derivata prima si trova che il valore massimo viene assunto per $p = \frac{R}{2}$ ed è

$$T_{Max} = \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2GM_S}} = \frac{2}{3\pi} T_t \simeq 77 \text{ giorni}.$$

3. L'energia meccanica della Terra dopo la caduta dell'asteroide sul Sole è

$$-\frac{GM_S(1+\alpha)M_T}{2a} = \frac{GM_S M_T}{2R} - \frac{GM_S(1+\alpha)M_T}{R},$$

dove a è il semiasse maggiore della nuova orbita ed è stata usata la formula per l'energia cinetica dell'orbita circolare. Semplificando si trova

$$a = \frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha} R.$$

Come era prevedibile, $a < R$ perché quello che prima era R adesso è la distanza massima dal fuoco.

$$R = a + c \longrightarrow e \equiv \frac{c}{a} = \frac{R}{a} - 1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha}.$$

Questa eccentricità è una funzione crescente di α , limitata superiormente dal valore unitario. Quindi per ogni valore di $\alpha > 0$ si hanno delle orbite ellittiche.

D.4 Impatto imminente

L'orbita in questo caso è chiaramente un segmento che congiunge la posizione iniziale e il centro del Sole. Si può vedere questo segmento come un'ellisse degenera di semiasse maggiore $\frac{d}{2}$ e semiasse minore 0. A questo punto, sempre pensando al limite dell'orbita ellittica appiattita, si può applicare la terza legge di Keplero:

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}} = \frac{\pi d^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2GM}}.$$

Dove T è il tempo necessario per compiere un'orbita completa, ovvero tornare a distanza d , il tempo richiesto dal problema è invece $t = \frac{T}{2}$. Il caso con due corpi di masse uguali si può approssimare passando al sistema del centro di massa e utilizzando la legge di Keplero per il problema dei due corpi di massa generica. Poiché questo approccio non è stato mostrato a lezione, si segue una via alternativa.

Ognuno dei due corpi sente una forza attrattiva diretta verso il centro di massa del sistema, dello stesso modulo di quella generata da una massa $\frac{m}{4}$ posizionata nel centro di massa stesso. In un certo senso questo problema è dunque equivalente al precedente in quanto ciascun corpo non vede davvero l'altro, ma ne sente solo la forza attrattiva. In questo caso il semiasse maggiore dell'orbita di ciascun corpo è $\frac{d}{4}$ e la massa del "Sole equivalente" è $\frac{m}{4}$, dunque il risultato è:

$$t = \frac{\pi d^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{Gm}}.$$

D.5 Cambio di eccentricità

Detta M la massa della stella e m la massa del corpo, l'equazione dell'orbita prima dell'urto è

$$\frac{1}{r} = \frac{m^2 MG}{L^2} (1 + \epsilon_1 \cos \theta), \quad (11)$$

dove si è scelto $\theta = 0$ al pericentro. Dato che l'impulso è radiale \vec{L} resta costante, in particolare anche L . Dopo l'urto l'equazione dell'orbita è quindi

$$\frac{1}{r} = \frac{m^2 MG}{L^2} (1 + \epsilon_2 \cos(\theta - \theta_0)), \quad (12)$$

E dato che in $\theta = \theta_0$ si ha il pericentro della seconda orbita, l'angolo tra i due assi maggiori è proprio θ_0 . L'urto avviene quando $r = r_{min}$ quindi quando $\theta = 0$. Uguagliamo quindi i raggi, o meglio, i loro inversi, poiché immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto il corpo è alla stessa distanza dalla stella si ha per (11) e (12):

$$\frac{m^2 MG}{L^2} (1 + \epsilon_1) = \frac{m^2 MG}{L^2} (1 + \epsilon_2 \cos(-\theta_0)) \Rightarrow \theta_0 = \arccos\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right).$$

Si noti in particolare che deve necessariamente essere $\epsilon_2 > \epsilon_1$ quindi non è possibile per esempio trasformare un'orbita ellittica in una circolare con un impulso radiale.

Dato che il vettore di Lenz ha sempre la direzione dell'asse maggiore, l'angolo tra i due assi è l'angolo tra i due vettori di Lenz

$$\cos(\theta_0) = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{A_1 A_2}.$$

Scriviamo le espressioni dei due vettori di Lenz considerando che l'impulso $\Delta \vec{p}$ è radiale e che \vec{L} si conserva di conseguenza:

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= \vec{p} \times \vec{L} - m^2 MG \frac{\vec{r}}{r} \\ \vec{A}_2 &= (\vec{p} + \Delta \vec{p}) \times \vec{L} - m^2 MG \frac{\vec{r}}{r} = \vec{A}_1 + \Delta \vec{p} \times \vec{L} \end{aligned}$$

E dato che l'urto avviene al pericentro, \vec{r} e \vec{A}_1 sono allineati, pertanto $A_1 \cdot (\vec{r} \times \vec{L}) = 0$, quindi:

$$\cos(\theta_0) = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{A_1 A_2} = \frac{A_1^2}{A_1 A_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{m^2 MG \epsilon_1}{m^2 MG \epsilon_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

D.6 Missile Balistico

1. Per prima cosa calcoliamo l'energia del missile

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R},$$

da cui possiamo ricavare il semiasse maggiore dell'orbita

$$a = \frac{GMR}{2GM - Rv_0^2}.$$

Il momento angolare rispetto al centro della Terra vale

$$L = mRv_0 \cos \alpha.$$

Il semiasse minore vale dunque

$$b = \frac{L}{m} \sqrt{\frac{a}{GM}} = Rv_0 \cos \alpha \sqrt{\frac{R}{2GM - Rv_0^2}}.$$

2. Calcoliamo il vettore di Lenz

$$\vec{A} = m(\vec{v} \times \vec{L} - GMm\hat{r}) = m((v_0L - GMm)\hat{r} - v_0L \sin \alpha \hat{\theta}).$$

L'angolo tra il vettore di Lenz e \hat{r} è la metà dell'angolo tra il punto di partenza e quello di arrivo, tale angolo è

$$\theta = \arctan \left(\frac{v_0L \sin \alpha}{v_0L - GMm} \right),$$

dunque la distanza percorsa sulla superficie terrestre è

$$d = 2R\theta.$$

Per quanto riguarda il punto di massima altezza, si può trovare partendo dalla forma delle orbite

$$r(\phi) = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \phi},$$

e notando che quindi l'apogeo è quando $\phi = \pi$. Basta quindi sostituire i valori di energia e momento angolare nella formula trovata a lezione per ottenere

$$h_{max} = \frac{\frac{R^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{GM}}{1 - \sqrt{1 + \frac{(mv_0^2 R^2 - 2GMmR)v_0^2 \cos^2 \alpha}{G^2 M^2 m}}} - R.$$

3. La richiesta è equivalente a porre l'angolo percorso 2θ pari a π :

$$\frac{vL \sin \alpha}{vL - GMm} = \tan \frac{\pi}{2} = +\infty,$$

Che si ottiene quando il denominatore si annulla, ovvero quando

$$v_0L = GMm,$$

$$Rv_0^2 \cos \alpha = GM,$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R \cos \alpha}}.$$

Bisogna stare attenti in quanto questo risultato è valido solo se l'orbita è chiusa, altrimenti non è possibile effettuare la manovra in quanto la velocità richiesta è maggiore della velocità di fuga.

D.7 Trio gravitazionale

Mettiamoci nel riferimento che ruota insieme ai tre corpi, centrato nel centro di massa del sistema. Quindi indicando con $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ i vettori posizione in tale riferimento si ha chiaramente

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0. \quad (13)$$

Indichiamo poi con $l_{i,j}^{\vec{}}$ il vettore che va dalla massa i alla massa j . Si ha $l_{i,j}^{\vec{}} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$, Scriviamo allora le condizioni di equilibrio in questo sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} \frac{Gm_1m_2}{l_{1,2}^3} l_{1,2}^{\vec{}} + \frac{Gm_1m_3}{l_{1,3}^3} l_{1,3}^{\vec{}} + m_1\omega^2\vec{r}_1 &= 0; \\ \frac{Gm_2m_3}{l_{2,3}^3} l_{2,3}^{\vec{}} + \frac{Gm_2m_1}{l_{2,1}^3} l_{2,1}^{\vec{}} + m_2\omega^2\vec{r}_2 &= 0 : \\ \frac{Gm_3m_1}{l_{3,1}^3} l_{3,1}^{\vec{}} + \frac{Gm_3m_2}{l_{3,2}^3} l_{3,2}^{\vec{}} + m_3\omega^2\vec{r}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sommando le prime due equazioni si ha

$$Gm_3 \left(m_1 \frac{l_{1,3}^{\vec{}}}{l_{1,3}^3} + m_2 \frac{l_{2,3}^{\vec{}}}{l_{2,3}^3} \right) + \omega^2(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = 0,$$

che sostituendo alle $l_{i,j}^{\vec{}}$ le espressioni in termini dei vettori posizione diventa

$$Gm_3 \left(m_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{l_{1,3}^3} + m_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{l_{2,3}^3} \right) + \omega^2(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = 0.$$

Inoltre possiamo eliminare \vec{r}_2 con (13):

$$Gm_3 \left(\frac{m_1\vec{r}_3 - m_1\vec{r}_1}{l_{1,3}^3} + \frac{m_2\vec{r}_3 + m_1\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3}{l_{2,3}^3} \right) - m_3\omega^2\vec{r}_3 = 0.$$

Riordinando i termini si ha

$$\left(G \left(\frac{m_1}{l_{1,3}^3} + \frac{m_2 + m_3}{l_{2,3}^3} \right) - \omega^2 \right) \vec{r}_3 + Gm_1 \left(\frac{1}{l_{2,3}^3} - \frac{1}{l_{1,3}^3} \right) \vec{r}_1 = 0.$$

Se invece sommiamo la seconda e la terza condizione d'equilibrio, analogamente otteniamo

$$\left(G \left(\frac{m_2}{l_{2,1}^3} + \frac{m_3 + m_1}{l_{3,1}^3} \right) - \omega^2 \right) \vec{r}_1 + Gm_2 \left(\frac{1}{l_{3,1}^3} - \frac{1}{l_{2,1}^3} \right) \vec{r}_2 = 0.$$

Dato che le masse non sono allineate, i vettori posizione non possono essere a due a due paralleli, ovvero i coefficienti di $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ nelle due equazioni precedenti devono essere tutti nulli. Per prima cosa se ne deduce che

$$l_{2,3} = l_{1,3} = l_{2,1} = l,$$

cioè le masse sono sui vertici di un triangolo di lato l . Infine si deduce anche che la velocità di rotazione deve essere

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{l^3}}.$$

D.8 Punti di Lagrange

1. Poniamo la massetta di prova, di massa m , a una distanza \vec{x} dal Sole. Le forze che essa subisce sono:

Forza centrifuga

$$\vec{F}_C = m\omega^2\vec{x} = m\frac{GM_S}{R^3}\vec{x};$$

Forza gravitazionale del Sole

$$\vec{F}_S = -\frac{GM_S m}{x^3}\vec{x};$$

Forza gravitazionale della Terra

$$\vec{F}_T = \frac{GM_T m}{(R \pm x)^3}(\vec{R} - \vec{x}).$$

Dove il segno va deciso in base al lato della Terra in cui ci si trova. Iniziamo a cercare dalla parte opposta del Sole rispetto alla Terra. La forza totale va posta nulla:

$$0 = m\frac{GM_S}{R^3}x - \frac{GM_S m}{x^2} - \frac{GM_T m}{(R+x)^2};$$

$$0 = x^3(R+x)^2 - R^3(R+x)^2 - \frac{M_T}{M_S}x^2R^3.$$

Dividendo per R^5 e definendo $1 + \epsilon \equiv \frac{x}{R}$:

$$0 = (1 + \epsilon)^3(2 + \epsilon)^2 - (2 + \epsilon)^2 - \frac{M_T}{M_S}(1 + \epsilon)^2.$$

Usando l'approssimazione data nel testo (assumendo quindi ϵ piccolo):

$$0 = 4(1 + 3\epsilon)(1 + \epsilon) - 4(1 + \epsilon) - \frac{M_T}{M_S}(1 + 2\epsilon)$$

$$0 = 12\epsilon^2 + \left(12 - 2\frac{M_T}{M_S}\right)\epsilon - \frac{M_T}{M_S}$$

$$\epsilon = \frac{-12 + 2\frac{M_T}{M_S} \pm \sqrt{144 - 48\frac{M_T}{M_S} + 4\frac{M_T^2}{M_S^2} + 48\frac{M_T}{M_S}}}{24}.$$

Trascurando il termine in $\frac{M_T^2}{M_S^2}$, si ottiene

$$\epsilon = \frac{-1 + \frac{M_T}{6M_S} \pm 1}{2}.$$

Da cui la soluzione accettabile è $\epsilon = \frac{M_T}{12M_S}$.

Ripetiamo i passaggi per il caso in cui la massetta si trovi tra il Sole e la Terra:

$$0 = m\frac{GM_S}{R^3}x - \frac{GM_Sm}{x^2} + \frac{GM_Tm}{(R-x)^2},$$

$$0 = x^3(R-x)^2 - R^3(R-x)^2 + \frac{M_T}{M_S}x^2R^3.$$

Dividendo per R^5 e definendo $1 + \epsilon \equiv \frac{x}{R}$:

$$0 = (1 + \epsilon)^3\epsilon^2 - \epsilon^2 + \frac{M_T}{M_S}(1 + \epsilon)^2.$$

Usando l'approssimazione data nel testo (assumendo quindi ϵ piccolo):

$$0 = (1 + 3\epsilon)\epsilon^2 - \epsilon^2 + \frac{M_T}{M_S}(1 + 2\epsilon)$$

$$0 = \frac{M_T}{M_S}(1 + 2\epsilon).$$

Ma questo ci darebbe $\epsilon = -\frac{1}{2}$, che non è piccolo, dunque teniamo fino al terzo ordine (il secondo dà lo stesso problema):

$$3\epsilon^3 = -\frac{M_T}{M_S}(1 + 2\epsilon + \epsilon^2).$$

A questo punto si può notare che la più piccola potenza di $\frac{M_T}{M_S}$ che appare in ϵ^3 è quella con esponente 1. Ne consegue che i termini in ϵ nel membro di destra sono trascurabili rispetto a 1, in quanto contengono delle potenze non nulle di una quantità piccola, e si possono dunque eliminare. Il risultato è dunque:

$$\epsilon = -\sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}.$$

Infine dobbiamo considerare il caso della massetta oltre la Terra:

$$0 = m\frac{GM_S}{R^3}x - \frac{GM_Sm}{x^2} - \frac{GM_Tm}{(x-R)^2},$$

$$0 = x^3(R-x)^2 - R^3(R-x)^2 - \frac{M_T}{M_S}x^2R^3.$$

Dividendo per R^5 e definendo $1 + \epsilon \equiv \frac{x}{R}$:

$$0 = (1 + \epsilon)^3\epsilon^2 - \epsilon^2 - \frac{M_T}{M_S}(1 + \epsilon)^2.$$

Ragionando come prima:

$$3\epsilon^3 = \frac{M_T}{M_S}(1 + 2\epsilon + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}.$$

2. La distanza del baricentro del sistema dal Sole è:

$$d = \frac{M_T R}{M_T + M_S} \approx R \frac{M_T}{M_S} \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) \approx R \frac{M_T}{M_S}.$$

Riscriviamo l'equilibrio delle forze nel caso in cui la massetta sia dalla parte opposta del Sole:

$$0 = m \frac{GM_S}{R^3 \left(1 - \frac{d}{R}\right)} x - \frac{GM_S m}{(x-d)^2} - \frac{GM_T m}{(R+x-d)^2}$$

$$0 = x(x-d)^2(x+R-d)^2 - R^3(R+x-d)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) - \frac{M_T}{M_S} R^3 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) (x-d)^2.$$

I termini con d possono essere approssimati come:

$$(x-d)^2 = x^2 \left(1 - \frac{d}{x}\right)^2 \approx x^2 \left(1 - 2\frac{d}{R}\right),$$

$$(R+x-d)^2 = (R+x)^2 \left(1 - \frac{d}{R+x}\right)^2 \approx (R+x)^2 \left(1 - \frac{d}{R}\right),$$

dove si approssima x con R nel termine correttivo proporzionale a d . Usando le approssimazioni si ottiene:

$$0 = x^3 \left(1 - 2\frac{M_T}{M_S}\right) (x+R)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) - R^3(R+x)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right)^2 - \frac{M_T}{M_S} R^3 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) x^2 \left(1 - 2\frac{M_T}{M_S}\right).$$

Dividendo come prima per R^5 , definendo $1 + \epsilon \equiv \frac{x}{R}$ e tenendo solo i termini al primo ordine in $\frac{M_T}{M_S}$, si ottiene:

$$0 = (1 + \epsilon)^3(2 + \epsilon)^2 \left(1 - 3\frac{M_T}{M_S}\right) - (2 + \epsilon)^2 \left(1 - 2\frac{M_T}{M_S}\right) - \frac{M_T}{M_S}(1 + \epsilon)^2$$

$$0 = 4(1 + 4\epsilon) \left(1 - 3\frac{M_T}{M_S}\right) - 4(1 + \epsilon) \left(1 - 2\frac{M_T}{M_S}\right) - \frac{M_T}{M_S}(1 + 2\epsilon).$$

Portiamo a sinistra i termini che non contengono ϵ :

$$5\frac{M_T}{M_S} = \epsilon \left(12 - 42\frac{M_T}{M_S}\right),$$

da cui

$$\epsilon = \frac{5}{12} \frac{M_T}{M_S}.$$

La distanza dal Sole è però:

$$x - d = (1 + \epsilon)R - d = \left(1 - \frac{7}{12} \frac{M_T}{M_S}\right) R.$$

Come si nota, questo risultato è diverso da quello precedente. Questo perché il risultato del conto precedente era al primo ordine in $\frac{M_T}{M_S}$, che è lo stesso dell'approssimazione del baricentro.

Ripetiamo per la posizione tra Sole e Terra:

$$0 = m \frac{GM_S}{R^3 \left(1 - \frac{d}{R}\right)} x - \frac{GM_S m}{(x+d)^2} + \frac{GM_T m}{(R-x-d)^2}$$

$$0 = x(x+d)^2(R-x-d)^2 - R^3(R-x-d)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) + \frac{M_T}{M_S} R^3(x+d)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right).$$

Dividendo per R^5 e definendo $1 + \epsilon \equiv \frac{x}{R}$:

$$0 = (1 + \epsilon)^3 \left(1 + 2\frac{M_T}{M_S}\right) \left(\epsilon + \frac{M_T}{M_S}\right)^2 - \left(\epsilon + \frac{M_T}{M_S}\right)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) + \frac{M_T}{M_S} (1 + \epsilon)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) \left(1 + 2\frac{M_T}{M_S}\right).$$

Tenendo solo i termini al primo ordine in $\frac{M_T}{M_S}$:

$$0 = (1 + \epsilon)^3 \left(\epsilon^2 + 2\epsilon \frac{M_T}{M_S} (\epsilon + 1)\right) - \left(\epsilon^2 + 2\epsilon \frac{M_T}{M_S} - \frac{M_T}{M_S} \epsilon^2\right) + \frac{M_T}{M_S} (1 + \epsilon)^2.$$

Tenendo fino al terzo ordine in ϵ :

$$0 = 3\epsilon^3 \left(1 + 4\frac{M_T}{M_S}\right) + 10\epsilon^2 \frac{M_T}{M_S} + 2\epsilon \frac{M_T}{M_S} + \frac{M_T}{M_S}.$$

Con lo stesso ragionamento del punto 1 si possono eliminare i termini in cui ϵ appare moltiplicato per $\frac{M_T}{M_S}$, ottenendo:

$$\epsilon = -\sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}.$$

E allo stesso modo si otterrebbe il risultato opposto per il punto oltre la Terra. Come si vede, il risultato trovato al punto 1 era corretto. Questo perché è un risultato a un ordine $\frac{1}{3}$ nel rapporto tra le masse ed è dunque molto più marcato della correzione dovuta alla posizione del baricentro, che è all'ordine 1.

3. Scegliamo il baricentro come origine del nostro sistema. Se poniamo una massetta nel punto \vec{r} , essa subisce una forza pari alla somma delle forze gravitazionali. La forza gravitazionale del Sole vale

$$\vec{F}_S = \frac{GM_S m}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} (\vec{R}_S - \vec{r}).$$

La forza gravitazionale della Terra vale

$$\vec{F}_T = \frac{GM_T m}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3} (\vec{R}_T - \vec{r}).$$

La forza totale è la somma delle due.

4. Vogliamo che la forza totale sia diretta verso l'origine (ovvero lungo $-\vec{r}$):

$$\begin{aligned} \vec{F}_T &= \frac{GM_S m}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} (\vec{R}_S - \vec{r}) + \frac{GM_T m}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3} (\vec{R}_T - \vec{r}) = \\ &= Gm \left(\frac{M_S}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} + \frac{M_T}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3} \right) (-\vec{r}) + Gm \left(\frac{M_S \vec{R}_S}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} + \frac{M_T \vec{R}_T}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3} \right). \end{aligned}$$

Per avere una forza diretta verso l'origine serve che il secondo addendo sia nullo. Usando il fatto che il centro di massa è nell'origine si ottiene che $M_S \vec{R}_S = -M_T \vec{R}_T$ e la condizione da soddisfare si riduce dunque a

$$\frac{1}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} = \frac{1}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3}.$$

Tale condizione è equivalente a dire che la massetta deve essere equidistante dalla Terra e dal Sole.

Per far tornare il modulo, iniziamo a calcolare quanto deve vale la forza centrifuga da compensare:

$$\vec{F}_C = m\omega^2 \vec{r} = m \frac{GM_S}{R_T |\vec{R}_T - \vec{R}_S|^2} \vec{r}.$$

Chiamando R la distanza Terra-Sole, si può ricavare che $R_T = \frac{M_S}{M_T + M_S} R$ e $R_S = \frac{M_T}{M_T + M_S} R$. Imponiamo quindi che la forza centrifuga abbia lo stesso modulo della componente restante della forza gravitazionale:

$$Gm \left(\frac{M_S}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} + \frac{M_T}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3} \right) = m \frac{GM_S}{R_T R^2}.$$

Chiamando d la distanza tra la massetta e il Sole e sostituendo R_T :

$$\frac{M_S}{d^3} + \frac{M_T}{d^3} = \frac{M_T + M_S}{R^3}.$$

Da qui segue immediatamente che $d = R$, dunque i due punti di equilibrio sono quelli tali per cui le tre masse sono disposte a triangolo equilatero. Si noti che abbiamo trascurato solo il contributo gravitazionale della massetta, mentre non abbiamo assunto nulla sul rapporto tra le masse di Terra e Sole, dunque questo risultato è più generale degli altri.

D.9 Nube di gas

1. La configurazione è stabile se e solo se ogni particella percorre un'orbita circolare. Deve dunque valere $rv_0^2 = GM(r)$, dove M è la massa contenuta all'interno dell'orbita,

$$M(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'.$$

Derivando rispetto a r (e usando il teorema fondamentale del calcolo integrale), si ottiene

$$v_0^2 = G \frac{dM}{dr} \implies v_0^2 = 4\pi G r^2 \rho(r).$$

da cui si ricava facilmente $\rho(r) = v_0^2 / (4\pi G r^2)$.

2. La relazione usata al punto precedente stavolta diventa $rv_1(r)^2 = GM(r)$, dove $M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3$, quindi

$$v_1(r) = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{3}} r.$$

3. Sotto l'ipotesi di *no shell-crossing*, l'orbita di ogni particella è, grazie al teorema di Gauss e alla simmetria sferica, identica a quella che si avrebbe attorno ad un corpo di massa $M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3$. Uguagliando i valori di potenziale efficace all'afelio e al perielio, dove la velocità radiale è nulla, si ha

$$\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0}.$$

Essendo $L = mr_0\alpha v_1$, possiamo sostituire le espressioni esplicite di L e M e semplificare l'equazione in

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{2}{\alpha^2} \frac{r_0}{r} + \frac{2}{\alpha^2} - 1 = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono i valori di r corrispondenti ad afelio e perielio. Il primo sappiamo già che vale r_0 (che verifica banalmente

l'equazione), quindi possiamo sfruttare la formula di Viète per il prodotto delle radici di un'equazione di secondo grado per ottenere rapidamente l'altra soluzione:

$$\frac{1}{r_0} \frac{1}{r_1} = \frac{2}{\alpha^2} - 1 \implies r_1 = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha^2} r_0.$$

4. Dalla terza legge di Keplero,

$$\omega^2 = \frac{GM}{\left(\frac{r_0+r_1}{2}\right)^3}.$$

Sostituendo le espressioni esplicite di M e r_1 , si ottiene

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_0}} (2 - \alpha^2)^{-3/2}.$$

Il moto della nube è periodico perché T è indipendente da r_0 , quindi ogni particella ha lo stesso periodo.

5. L'equazione

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{2}{\alpha^2} \frac{r_0}{r} + \frac{2}{\alpha^2} - 1 = 0,$$

ricavata in precedenza dipende solo dal rapporto r_0/r , quindi l'evoluzione di questa quantità è identica per ogni particella. Se all'inizio una particella ha r_0 maggiore rispetto ad un'altra, allora avrà anche r maggiore ad ogni istante successivo. Questa è esattamente l'ipotesi di *no shell-crossing*.

6. Dal teorema del viriale, $2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0$, quindi

$$\langle T \rangle = -E = \frac{GMm}{2\frac{r_0+r_1}{2}} = \frac{2\pi}{3} G\rho_0 r_0^2 m (2 - \alpha^2)$$

dove $E = T + U$ è l'energia totale per una particella in orbita intorno a un corpo di massa M . Si è qui usata la formula $E = -\frac{GMm}{2a}$, dove a è il semiasse maggiore.

D.10 Satellite con attrito

1. A ha le dimensioni di una massa per unità di tempo.
2. La distanza tra un fuoco di una ellisse e il centro è per definizione ae , quindi le coordinate radiali di afelio e perielio valgono rispettivamente $r_{max} = a(1 + e)$ e $r_{min} = a(1 - e)$, quindi $r_{max}r_{min} = a^2(1 - e^2)$.
 r_{max} e r_{min} soddisfano l'equazione (potenziale efficace con velocità radiale nulla)

$$\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E \implies \frac{1}{r^2} - \frac{2GMm^2}{L^2} \frac{1}{r} - \frac{2mE}{L^2} = 0.$$

Usando le formule di Viète per la somma e il prodotto delle radici, si trova

$$\frac{1}{r_{max}} + \frac{1}{r_{min}} = \frac{2GMm^2}{L^2} \implies a(1 - e^2) = \frac{L^2}{GMm^2},$$

$$\frac{1}{r_{max} r_{min}} = -\frac{2mE}{L^2} \implies E = -\frac{GMm}{2a}.$$

La prima relazione ci dice che per rispondere alla domanda bisogna capire come varia il momento angolare. Questo è facile, infatti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_a = -A\vec{r} \times \vec{v} = -\frac{A}{m}\vec{L}$$

da cui $\vec{L} = \vec{L}(0)e^{-(A/m)t}$ e quindi

$$a(1 - e^2) = r_0 e^{-2(A/m)t}.$$

3. Combinando le formule ricavate nel punto precedente, si ottiene

$$1 - e^2 = \frac{L^2}{GMm^2a} = -\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}.$$

Per calcolarne la derivata, serve sapere $\frac{dE}{dt}$. Anche questa è facile, infatti

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}_a \cdot \vec{v} = -Av^2.$$

Allora,

$$\begin{aligned} \frac{d(1 - e^2)}{dt} &= -\frac{2}{G^2M^2m^3} \left(\frac{dE}{dt} L^2 + 2EL \frac{dL}{dt} \right) = \\ &= \frac{4AL^2}{G^2M^2m^4} \left(E + \frac{1}{2}mv^2 \right) = \\ &= \frac{4A}{GMm^2} a(1 - e^2) \left(E + \frac{1}{2}mv^2 \right). \end{aligned}$$

Il satellite si trova inizialmente su un'orbita circolare, quindi all'istante iniziale $E + \frac{1}{2}mv^2 = 0$ (segue dalla condizione di orbita circolare o anche dal teorema del viriale se tutte le energie sono costanti nel tempo) e si ha la tesi.

4. Sviluppando al prim'ordine l'equazione per $a(1 - e^2)$ e usando il risultato appena dimostrato,

$$a(t) \approx r_0 \left(1 - 2\frac{A}{m}t \right),$$

valida finché $2\frac{A}{m}t \ll 1$.

5. Imponiamo $v = \sqrt{GM/a}$ in ogni istante. Stavolta,

$$\frac{dL}{dt} = -Av^{n+1}a,$$

e imponendo la condizione di orbita circolare si ottiene

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt}(\sqrt{GMa}) &= -A \left(\frac{GM}{a}\right)^{\frac{n+1}{2}} a \\ a^{\frac{n}{2}-1} \frac{da}{dt} &= -\frac{2A}{m}(GM)^{n/2} \\ \frac{2}{n} \left(a(t)^{n/2} - r_0^{n/2}\right) &= -\frac{2A}{m}(GM)^{n/2}t \\ a(t) &= r_0 \left(1 - \frac{nA}{m} \left(\frac{GM}{r_0}\right)^{n/2} t\right)^{2/n}. \end{aligned}$$

La quantità in parentesi può annullarsi ad un tempo finito solo se $n > 0$. In questo caso, l'esponente $2/n$ è positivo e garantisce che anche a sia nullo. Il tempo richiesto per raggiungere $a = 0$ è

$$t = \frac{m}{nA} \left(\frac{r_0}{GM}\right)^{n/2} = \frac{m}{nAv_0^n}.$$

Per $n \leq 0$, invece, si ha semplicemente che $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 0$. Si noti che la soluzione per n generico non è ben definita per $n = 0$. Per recuperare il caso $\vec{F}_a = -A\vec{v}$ da quella formula, bisogna far uso del seguente limite noto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

6. Possiamo generalizzare la formula per la derivata temporale di $(1 - e^2)$ trovata precedentemente utilizzando $\frac{dL}{dt} = -\frac{A}{m}Lv^n$ e $\frac{dE}{dt} = -Av^{n+2}$:

$$\frac{d(1 - e^2)}{dt} = \frac{4Av^n}{GMm^2} a(1 - e^2) \left(E + \frac{1}{2}mv^2\right).$$

La condizione più naturale di “forza di attrito piccola” è che il tempo di rallentamento sia molto minore del periodo dell'orbita:

$$\frac{m}{nAv^n} \gg 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}.$$

Usando $v = \sqrt{GM/a}$, questa condizione è uguale (a meno di un fattore $2\pi n$) a $F_a \ll \frac{GMm}{a^2}$. Possiamo quindi applicare in modo approssimato il teorema del viriale per concludere che la quantità $E + \frac{1}{2}mv^2$ si media a zero, quindi i contributi che diminuiscono $1 - e^2$ si cancellano, approssimativamente, con quelli che lo aumentano.

D.11 Temperatura del Sole

l'energia potenziale del sistema vale $U = -\frac{3GM_s^2}{5R_s}$. L'energia interna di un gas perfetto monoatomico è $K = N\frac{3}{2}k_B T$, dove $N = \frac{M_s}{m_p}$ dove m_p è la massa del protone. Appliciamo il teorema del viriale:

$$\frac{3GM_s^2}{5R_s} = 3\frac{M_s}{m_p}k_B T \Rightarrow T \approx 3 \cdot 10^6 \text{K}.$$

D.12 Asteroidi ferromagnetici

Per quanto affermato dal testo:

$$M = \alpha \langle \vec{H} \rangle = \alpha \vec{H}_0 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle,$$

ma per il teorema del viriale:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

$$E_{TOT} = -\frac{GM}{2a} = \langle U \rangle + \langle T \rangle = \frac{1}{2} \langle U \rangle = \frac{1}{2} \left\langle -\frac{GM}{r} \right\rangle = -\frac{GM}{2} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{a}$$

$$M = \frac{\alpha \vec{H}_0}{a}.$$