

Elettrostatica base

Marco Catapano*, Dariel Vllamasi†

13 febbraio 2023

Sommario

Lo scopo di questa lezione è di introdurre gli strumenti base per affrontare i problemi di elettrostatica e magnetostatica. Tratteremo la legge di Coulomb, il teorema di Gauss, i conduttori (mostrando la tecnica delle cariche immagini), i condensatori e introdurremo le leggi della magnetostatica. Gli argomenti saranno accompagnati da esempi ed esercizi di livello Febbraio/Senigallia.

*marco.catapano@sns.it

†daniel.vllamasi@sns.it

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Legge di Coulomb	3
1.2	Principio di sovrapposizione	3
1.3	Simmetrie	4
1.4	Legge di Gauss	6
1.5	Energia elettrostatica	10
2	Conduttori	16
2.1	Definizione	16
2.2	Disposizione delle cariche	18
2.3	Metodo delle cariche immagine	21
3	Dipolo elettrostatico	26
3.1	Il campo del dipolo.	27
3.2	Campo elettrico del dipolo a grande distanza.	29
3.3	Momento torcente, energia e forza netta su un dipolo.	30
4	Condensatori	32
5	Magnetostatica	34

1 Introduzione

1.1 Legge di Coulomb

In natura esistono corpi dotati di una certa proprietà, detta carica elettrica. Esistono due tipi di carica elettrica, che per convenzione si identificano come carica positiva e carica negativa. Si può osservare sperimentalmente che due corpi carichi, posti a grande distanza rispetto alle proprie dimensioni (in modo che possano essere trattati a tutti gli effetti come puntiformi) interagiscono tramite una forza. In particolare, se si pone una carica q_1 nella posizione \mathbf{r}_1 e una carica q_2 nella posizione \mathbf{r}_2 , la forza di cui risente la carica q_2 è

$$\mathbf{F}_{2,1} = k \frac{q_1 q_2}{r_{2,1}^2} \hat{\mathbf{r}}_{2,1} \quad (1)$$

dove si è posto $\mathbf{r}_{2,1} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ e $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ è una costante positiva, chiamata costante elettrostatica o costante di Coulomb.

1.2 Principio di sovrapposizione

Un altro risultato sperimentale è che in una configurazione di 3 cariche q_1, q_2, q_3 , la forza sulla terza carica in presenza delle altre due, $\mathbf{F}_{3,12}$, vale

$$\mathbf{F}_{3,12} = \mathbf{F}_{3,1} + \mathbf{F}_{3,2}$$

In particolare, non compaiono altri termini di interazione, come ad esempio un termine $\mathcal{F}(q_1 q_2 q_3)$ dipendente dal prodotto delle cariche. Questo fatto è fondamentale e assolutamente non banale, perché la conoscenza della sola legge di Coulomb non ci fornisce informazioni su come si comporta la forza in presenza di un numero di cariche maggiore di 2. La teoria che andremo a trattare sarà quindi lineare e vedremo che questo sarà di notevole importanza per i metodi matematici che useremo per risolvere gli esercizi.

Dall'equazione sopra deriva anche che se consideriamo varie cariche puntiformi q_1, \dots, q_N , posizionate rispettivamente in $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e tenute fisse, allora la forza di cui risente una carica di prova q posta in \mathbf{r} (con $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_j$ per ogni $j = 1, \dots, N$) è

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k \sum_{j=1}^N \frac{q q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = k q \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \equiv q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2)$$

Il vettore $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, chiamato campo elettrico, definisce una proprietà del punto \mathbf{r} che dipende solo dalla distribuzione delle cariche q_1, \dots, q_N ed è indipendente da q .

Possiamo ovviamente considerare distribuzioni di cariche continue, oltre che puntiformi, e quindi introdurre il concetto di densità di carica. Usualmente vengono utilizzate le lettere ρ, σ, λ per la densità di carica rispettivamente volumica, superficiale e lineare. In particolare, il campo elettrico generato da una densità volumica di carica è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'$$

Spieghiamo questa scrittura: in un volume sufficientemente piccolo d^3r' (centrato in un punto \mathbf{r}') la densità di carica $\rho(\mathbf{r}')$ può essere considerata costante, anzi, possiamo equiparare il contenuto di questo volume a una carica puntiforme $q = \rho d^3r'$ posizionata in \mathbf{r}' . Questa carica genera nel punto \mathbf{r} un campo infinitesimo

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'$$

Per ottenere il campo totale sommiamo i contributi di tutti i volumetti d^3r' , ma questo, per volumi infinitamente piccoli, significa fare l'integrale. L'integrale è chiaramente esteso a tutti i punti in cui ρ è non nulla, eventualmente tutto lo spazio.

Analogamente, per distribuzioni superficiali e lineari si parte considerando i campi $d\mathbf{E}$ prodotti rispettivamente dalle cariche $\sigma d^2r'$ e $\lambda dr'$.

1.3 Simmetrie

Se una distribuzione di carica gode di una certa simmetria (ad esempio sotto riflessione o rotazione), allora a causa del principio di sovrapposizione lineare, anche il campo elettrico da essa generato deve godere della stessa simmetria. Se infatti abbiamo una distribuzione di carica che rimane invariata sotto una certa trasformazione allora la differenza tra il campo iniziale \mathbf{E} e il campo del sistema risultante dopo la trasformazione \mathbf{E}' è pari al campo prodotto dalla differenza delle cariche che però sono invariate e quindi hanno differenza nulla.

Esempio 1.1 (Filo infinito uniformemente carico). Consideriamo un filo rettilineo con densità di carica uniforme λ , e supponiamo per semplicità che sia infinito. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano in cui l'asse z coincide con il filo. Consideriamo un punto P sull'asse x a distanza D dal filo. Se facciamo una riflessione rispetto al piano xz , sia il filo che P vengono mandati in se stessi. Ciò significa che il vettore campo elettrico in P è contenuto nel piano xz , perché se ci fosse una componente ortogonale a esso,

questa cambierebbe di segno sotto tale riflessione. Analogamente, operando una riflessione rispetto a xy arriviamo a concludere che anche la componente z è nulla.

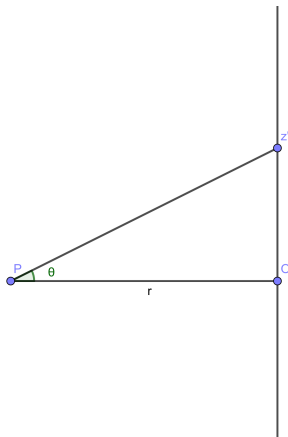
Passiamo ora a un sistema di coordinate cilindriche (z è lo stesso di prima): il risultato precedente si traduce nel fatto che il campo è radiale. Inoltre, data appunto la simmetria cilindrica della distribuzione di cariche e l'invarianza per traslazioni lungo z , non ci potrà essere nessuna dipendenza da z o φ ma solo da r . Infine, usando l'analisi dimensionale, concludiamo che il campo elettrico non può che essere del tipo $Ck\lambda/r$ con C costante adimensionale. Infatti λ è l'unica carica che abbiamo a disposizione e non può che essere presente come termine lineare per il principio di sovrapposizione, e analogamente r è l'unico termine di lunghezza rilevante (per quanto detto prima).

Procediamo ora con il calcolo, dove indichiamo con θ l'angolo in Fig. 1a.

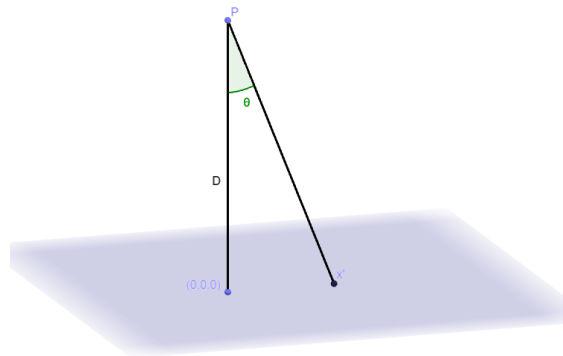
$$dE_r(r, z') = k \frac{dq}{|\mathbf{PP}'|^2} \cos \theta = k \frac{\lambda dz'}{r^2 + z'^2} \cos \theta \quad (3)$$

Possiamo ora integrare, sfruttando il cambio di coordinate $z' = r \tan \theta \implies dz' = \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta$:

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dE_r(r, z') = k\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz' \cos \theta}{r^2 + z'^2} = k\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{r}{\cos \theta} \frac{1}{r^2 + r^2 \tan^2 \theta} = \\ &= \frac{k\lambda}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2k\lambda}{r} \end{aligned}$$



(a) *Filo infinito uniformemente carico.*



(b) *Piano infinito uniformemente carico.*

Figura 1: le due situazioni fisiche considerate.

Esempio 1.2 (Piano uniformemente carico). Sia xy un piano uniformemente carico di densità superficiale σ .

Il sistema è invariante sotto traslazioni lungo il piano xy e quindi il campo in un punto P dipende solo dalla sua distanza D dal piano. Supponiamo ora per assurdo che $\mathbf{E}(P)$ abbia una componente non nulla parallela al piano. Facendo ora una riflessione rispetto al piano ortogonale a tale componente e passante per P il sistema rimane invariato ma questa componente del campo cambia di segno, il che è assurdo. Abbiamo così ottenuto $\mathbf{E} = E_z(D)\hat{z}$. Analogamente a quanto detto prima, con ragionamenti di analisi dimensionali si conclude che il modulo è del tipo $Ck\sigma$.

Possiamo ora calcolare il modulo di tale vettore: per farlo, dividiamo il piano in corone circolari concentriche di raggio r e spessore dr , che avranno una carica $dq = 2\pi r dr \cdot \sigma$. Come osservato, siamo solo interessati alla componente lungo \hat{z} ($\cos \theta = \frac{D}{\sqrt{r^2 + D^2}}$):

$$\begin{aligned} dE_z(D) &= \frac{k dq}{r^2 + D^2} \cos \theta = k \frac{2\pi\sigma r dr D}{(r^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z(D) &= k\pi\sigma \int_0^{+\infty} \frac{2r dr D}{(r^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} = k\pi\sigma \int_0^{+\infty} \frac{2r dr D}{(r^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad u = r^2 + D^2 \implies du = 2r dr \\ E_z(D) &= k\pi\sigma D \int_{D^2}^{+\infty} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = k\pi\sigma D \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_{D^2}^{+\infty} = 2k\pi\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

1.4 Legge di Gauss

In questa sezione andremo a dimostrare uno dei teoremi cardine dell'elettrostatica e vedremo come applicarlo in alcuni casi semplici.

Iniziamo presentando uno strumento matematico fondamentale in molti ambiti della fisica: il flusso. Immaginiamo di avere un fluido e una funzione che ci dice qual è il suo vettore velocità in ogni punto dello spazio. Ci chiediamo quanto fluido attraversa una superficie infinitesimale dA in un piccolo intervallo di tempo dt (chiameremo questa quantità $d\Phi$). Sicuramente $d\Phi$ è proporzionale alla velocità del flusso nelle vicinanze della superficie, ed essendo la superficie infinitesima possiamo immaginare la velocità uniforme (e dunque dipendente solo dalla posizione del baricentro della superficie dA). Ma, pensandoci meglio, ci interessa solo la componente della velocità perpendicolare alla superficie (le altre componenti fanno muovere il fluido *lungo* la superficie, non *attraverso*). Indicando allora questa direzione con \hat{n}

avremo $d\Phi \propto \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$ ¹. Se la superficie non fosse infinitesima, si ottiene la grandezza desiderata integrando.

Flusso attraverso una superficie: dato un campo vettoriale \mathbf{F} (ossia un vettore per ogni punto dello spazio e le cui componenti dipendono dalla posizione, e.g. il campo elettrico) e una superficie S , si dice flusso $\Phi_S(\mathbf{F})$ di \mathbf{F} attraverso S

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \quad (4)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie.

Rimanendo all'interno dell'esempio del fluido (incomprimibile) è facile convincersi del fatto che un flusso positivo attraverso una superficie chiusa indica una sorgente (ossia una regione da cui esce più fluido di quanto ne entri), uno negativo un pozzo (ossia una regione in cui entra più fluido di quanto ne esca), mentre il flusso nullo è la condizione di conservazione della materia (ossia una regione in cui entra tanto fluido quanto ne esce).

L'operatore flusso gode di alcune proprietà di linearità (derivanti dalla linearità dell'integrale) che tornano spesso comode e che quindi è utile sapere:

$$\begin{aligned} \Phi_S(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) &= \Phi_S(\mathbf{F}_1) + \Phi_S(\mathbf{F}_2) \\ \Phi_{S_1+S_2}(\mathbf{F}) &= \Phi_{S_1}(\mathbf{F}) + \Phi_{S_2}(\mathbf{F}) \end{aligned}$$

la prima equazione ci dice cosa succede al flusso della somma di due campi vettoriali (dove si intende che ad ogni punto associo la somma dei vettori associati a quel punto da due campi di partenza), mentre la seconda tratta del caso in cui divido la mia area di interesse in due.

Vediamo ora che informazioni ci dà questo nuovo operatore sul campo elettrico. Partiamo dal caso più semplice possibile: prendiamo una superficie sferica di raggio R e mettiamoci una carica puntiforme al centro.

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_S k \frac{q}{R^2} \, dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Dove $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ si calcola facilmente essendo i due vettori paralleli (entrambi radiali) ed essendo il modulo E in funzione della sola distanza tra il punto in cui lo calcolo e la carica sorgente, che nel nostro caso è costante e pari a R . Notare che il flusso attraverso una superficie sferica centrata nella carica non dipende dalle dimensioni della sfera. Complichiamo un attimo le cose, considerando sempre una carica puntiforme q , ma ora come S prendiamo una superficie convessa generica.

¹Talvolta troverete $d\mathbf{A}$ al posto di $\hat{\mathbf{n}} \, dA$

Calcoliamo il contributo $d\Phi$ di un singolo elemento dA a distanza R dalla carica:

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}dA = \mathbf{E} \cos \theta dA = k \frac{q}{R^2} R^2 d\Omega = kq d\Omega \quad (5)$$

Dove abbiamo prima proiettato l'elemento dA lungo la direzione perpendicolare al campo (aggiungendo il fattore $\cos \theta$) e poi usato la definizione di angolo solido². Integrando ora su tutto lo spazio otteniamo il risultato cercato.

Consideriamo ora il caso che la superficie non sia convessa bensì concava, e consideriamo una carica all'interno della superficie, ci chiediamo quale sia il valore del flusso del campo generato dalla carica. Consideriamo ora un cono infinito la cui punta è sulla carica e il cui angolo solido al vertice sia di valore $d\Omega$, noteremo subito che se la carica è interna tale cono attraverserà la superficie un numero dispari di volte: ogni volta che la interseca e poi prosegue dentro la superficie deve poi intersecarla nuovamente per uscire, tranne la prima volta, nel quale non deve intersecarla per entrare perché è già dentro. Se la carica fosse stata esterna, per lo stesso ragionamento l'avrebbe attraversata un numero pari di volte. Ci chiediamo ora quanto valgano gli elementi infinitesimi di flusso sulle porzioni di superficie delimitate dal cono. Applicando lo stesso ragionamento fatto in equazione 5, possiamo notare come per ogni porzione di superficie risultante dall'intersezione del cono con la superficie iniziale otteniamo il valore del flusso infinitesimo uguale e dipendente solo dall'angolo solido e dal verso del versore normale alla superficie. Se il cono attraversa la nostra superficie da fuori verso dentro, il segno del flusso sarà opposto al segno della carica, altrimenti concorde. Pertanto, ogni volta che il nostro cono iniziale attraversa la superficie da una parte all'altra somma e sottrae alternativamente la stessa quantità di flusso. Pertanto, se la carica è interna alla superficie, il contributo netto finale sarà identico a quello che avremmo avuto nel caso la superficie fosse stata convessa. Se invece la carica fosse stata esterna, notiamo che essa non contribuisce in alcun modo al flusso totale.

Per la linearità del campo elettrico e per le proprietà dell'operatore flusso, si può generalizzare questo risultato ad una qualunque distribuzione di cariche (anche continua) ottenendo così la prima legge di Maxwell (anche detta teorema di Gauss):

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad (6)$$

²Estensione tridimensionale dell'angolo piano. Dato un elemento di superficie A tutto a distanza R dal punto a partire dal quale vogliamo calcolare l'angolo, questo si definisce come il rapporto A/R^2 . Si misura in steradiani ed è facile notare che l'angolo sotteso dalla superficie sferica ("l'angolo giro") vale 4π .

(a sinistra abbiamo il flusso del campo prodotto dall'insieme di cariche, che è la somma dei singoli flussi per il principio di sovrapposizione, ma ciascuno di questi flussi è proporzionale alla carica che lo produce, pertanto a secondo membro abbiamo la somma delle cariche).

Notare che in tutta la dimostrazione abbiamo usato solo che il campo è centrale, proporzionale a r^{-2} e gode della proprietà di sovrapposizione lineare, quindi lo stesso risultato vale anche per il campo gravitazionale dove la massa gioca il ruolo della carica.

Filo infinito. Per i ragionamenti visti all'inizio della lezione sappiamo già che il campo è della forma: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$.

Scegliamo come superficie su cui calcolare il flusso un cilindro di raggio r , altezza h e coassiale con il filo (come detto prima, la coordinata z non ci interessa).

$$\frac{\lambda h}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \Phi_S(\mathbf{E}) = \Phi_{S_l}(\mathbf{E}) + \Phi_{B_1}(\mathbf{E}) + \Phi_{B_2}(\mathbf{E})$$

I contributi $\Phi_{B_1}(\mathbf{E})$ e $\Phi_{B_2}(\mathbf{E})$ delle due basi sono nulli, in quanto il campo elettrico è parallelo alle basi. Il campo sulla superficie laterale è radiale (dunque perpendicolare alla superficie) e di modulo costante, per cui:

$$\Phi_{S_l}(\mathbf{E}) = |\mathbf{E}(\mathbf{r})|S_l = E_r(r)2\pi r h \implies \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r(r)\hat{\mathbf{r}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}$$

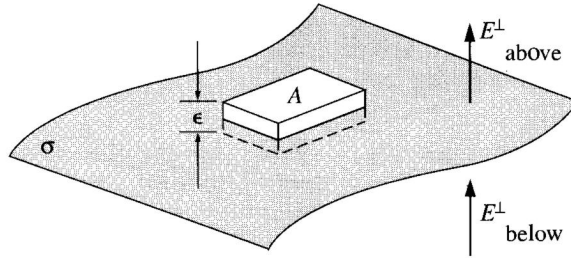
Piano infinito. Si chiede di calcolare il campo generato da un piano infinito con densità superficiale di carica σ e posto sul piano $z = 0$.

Come prima, facciamo alcune osservazioni: la simmetria per traslazioni in x e in y e l'invarianza per trasformazioni $x \rightarrow -x$ e $y \rightarrow -y$ implicano $\mathbf{E}(x, y, z) = E_z(z)\hat{\mathbf{z}}$, inoltre l'invarianza per $z \rightarrow -z$ ci fa concludere $\mathbf{E}(x, y, z) = \text{sgn}(z)E_z(|z|)\hat{\mathbf{z}}$.

Scegliamo come superficie un parallelepipedo di altezza $\varepsilon = 2h$, area di base A e posto con le facce parallele al piano infinito, tale che il piano lo bisechi (confronta 2a). Il contributo delle facce laterali è nullo in quanto il campo è diretto lungo z , e le due basi danno lo stesso contributo perché sia \mathbf{E} che $\hat{\mathbf{n}}$ cambiano verso mantenendo invariato modulo e direzione.

$$\frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \Phi_S(\mathbf{E}) = 2AE_z(h) \implies \mathbf{E}(x, y, z) = \text{sgn}(z)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Con un procedimento analogo, si può ottenere un risultato che sarà molto utile quando si parlerà di conduttori: una superficie con densità di carica non nulla (non necessariamente uniforme) causa una discontinuità a salto nella



(a) Flusso infinitesimo.

Figura 2: Flusso infinitesimo sulla superficie di un conduttore (presa dal [Gri17]).

componente della campo elettrico perpendicolare alla superficie stessa in un punto, proporzionale alla densità superficiale di carica in quel punto: basta infatti applicare la legge di Gauss al parallelepipedo in figura (2a), tale che $\sqrt{A} \gg \varepsilon$ e tale che A sia così piccolo che le facce del parallelepipedo possano essere considerate parallele al piano tangente alla superficie nel punto in cui voglio calcolare $\Delta \mathbf{E}_\perp$. Mandando al limite $A \rightarrow 0$ i contributi delle facce laterali saranno trascurabili per la condizione su ε , che è ancora più piccolo di A , mentre quelli sulle basi saranno $\pm A E_{1,2\perp}(\mathbf{r}^\pm)$ in quanto per una regione molto piccola di spazio si può considerare il campo costante (con \mathbf{r}^\pm indico la posizione di un punto appena fuori/dentro la superficie in analisi). Si ottiene pertanto:

$$\Delta \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (7)$$

1.5 Energia elettrostatica

Ci proponiamo di calcolare il lavoro necessario per muovere una carica di prova q all'interno di un campo elettrico \mathbf{E} lungo una curva γ . Per definizione³ di lavoro L si ha:

$$L := \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

da cui si nota che la quantità rilevante da calcolare è l'integrale di linea del campo elettrico.

Iniziamo a considerare il caso di un campo elettrico generato da una carica Q posta nell'origine di un sistema di coordinate polari, con γ che parte da \mathbf{r}_a e arriva in \mathbf{r}_b .

³Se non avete confidenza con gli integrali di linea, intuitivamente stiamo approssimando il percorso chiuso γ con una spezzata fatta di tanti piccoli $d\mathbf{l}$. Per ogni pezzettino calcolo $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e sommo tutti questi contributi.

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_a}^{r_b} k \frac{Q}{r^2} dr = -kQ \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Usando il principio di sovrapposizione lineare, possiamo concludere che per il campo generato da una distribuzione di N cariche puntiformi q_i in posizioni \mathbf{r}_i vale:

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = -k \left(\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_i|} - \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_i|} \right)$$

Data una distribuzione di carica localizzata definiamo dunque il potenziale scalare $V(\mathbf{r})$:

$$V(\mathbf{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Possiamo quindi riscrivere il risultato precedente nel seguente modo:

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = -(V(\mathbf{r}_b) - V(\mathbf{r}_a))$$

Questo risultato ha delle conseguenze interessanti:

- Poiché il potenziale è una funzione del solo punto in cui la calcolo (e della distribuzione di cariche), l'integrale di linea del campo elettrico non dipende dalla curva ma solo dal punto iniziale e dal punto finale. Inoltre se i due punti coincidono, $\Delta V = 0$. Abbiamo ottenuto una delle leggi di Maxwell: *la circuitazione del campo elettrostatico è nulla, infatti per ogni curva chiusa γ vale⁴:*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{8}$$

- Il potenziale scalare è definito a meno di una costante. Se infatti poniamo $V'(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + C$ si ha $\Delta V' = \Delta V$. Per esprimere il potenziale di una certa distribuzione di cariche sarà necessario fissare tale costante. Nella maggioranza dei casi per convenzione si imporrà $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$.

È però importante sottolineare che questa scelta non è sempre completamente arbitraria e che in particolare non sia sempre possibile porre nullo il potenziale all'infinito. Una condizione sufficiente affinché ciò sia possibile è che le sorgenti del campo siano localizzate ovvero che

⁴ATTENZIONE: questo risultato vale solo in elettrostatica.

non ci siano sorgenti a distanza arbitraria. Un tipico esempio in cui ciò non succede è il condensatore *ideale* a facce piane e parallele in cui le piastre hanno larghezza e altezza infinite: se ci fosse il potenziale a zero su tutti i punti infinitamente lontani dall'origine del nostro sistema di coordinate, spostare carica da una piastra all'altra non richiederebbe lavoro. In tal caso generalmente si pone il potenziale a *zero* su una delle due armature.

- In analogia con la relazione che sussiste tra la primitiva e l'integrale definito nel caso unidimensionale, si ha nel caso generale⁵ $-\nabla V = \mathbf{E}$.

Nel caso di una distribuzione continua di cariche, valgono gli stessi risultati con:

$$V(\mathbf{r}) = k \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio.

Possiamo ora tornare all'obiettivo che ci eravamo posti all'inizio della sezione: calcolare il lavoro compiuto per portare una carica puntiforme q dall'infinito nel punto \mathbf{r} . Se supponiamo che le sorgenti del campo elettrico siano sufficientemente localizzate, così che $V(\infty) = 0$,

$$L = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l} = -q \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l} = q(V(\mathbf{r}) - V(\infty)) = qV(\mathbf{r})$$

Dunque l'energia potenziale di una carica q in un campo elettrico (posta nulla l'energia all'infinito) è

$$U(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r}) \tag{9}$$

Cerchiamo ora di estendere il concetto di energia ad una configurazione di cariche: consideriamo N cariche puntiformi q_1, \dots, q_N poste in $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e, per ogni $1 \leq i, j \leq N$, sia $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$.

L'energia del sistema può essere calcolata nel seguente modo: supponiamo di costruire la configurazione portando dall'infinito una carica per volta. La carica q_1 viene portata dall'infinito a \mathbf{r}_1 senza compiere lavoro. La seconda carica viene portata dall'infinito a \mathbf{r}_2 compiendo un lavoro

$$L_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

⁵ ∇ rappresenta l'operatore gradiente che nello spazio è così definito

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{z}$$

Il lavoro compiuto per spostare q_3 dall'infinito a \mathbf{r}_3 è, per principio di sovrapposizione:

$$L_3 = k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Generalizzando, sulla base del conto sopra, l'energia della configurazione di cariche, che è uguale alla somma dei lavori precedenti, è

$$U_n = k \sum_{i=1}^n \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{k}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (10)$$

Per distribuzioni continue di carica si definisce l'energia potenziale del sistema come

$$U = \frac{k}{2} \iint \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r d^3r'$$

da cui, ricordando l'espressione del potenziale nel caso di distribuzione continua di energia si ottiene

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(r)V(r) d^3r \quad (11)$$

Prima di procedere sottolineiamo come le due formule non siano esattamente una l'estensione dell'altra poiché nel caso continuo stiamo integrando anche dove $r = r'$, ovvero il corrispettivo discreto di $i = j$. Questa discrepanza deriva dal fatto che la Eq. (11) tiene conto anche dell'energia spesa per creare effettivamente la carica puntiforme (ossia per concentrare una carica finita in un solo punto), mentre nella Eq. (10) si suppone che le cariche puntiformi siano preesistenti, e tale equazione esprime solamente l'energia di interazione tra coppie di cariche. Se infatti volessi passare da una distribuzione di carica continua a delle cariche puntiformi dovrei comprimere la carica in una regione di spazio sempre più piccola, e questo costa energia. È possibile inoltre riscrivere l'ultima relazione in funzione del solo campo elettrico \mathbf{E} , con lo scopo di vedere il campo elettrico come lui stesso portatore di energia. Tuttavia far ciò in maniera elementare e rigorosa non è possibile quindi qui ne daremo un'idea intuitiva e svolgeremo il calcolo nell'appendice A. Il risultato è

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})V(\mathbf{r}) d^3r = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d^3r \quad (12)$$

Mostriamo che funziona con un esempio.

Esempio 1.3 (Energia di un condensatore). Consideriamo un condensatore quadrato di carica Q , lato L e distanza tra la facce d . Quanto vale l'energia immagazzinata dal condensatore?

Soluzione 1.1. Calcoliamo l'energia secondo l'equazione Eq. (9).

Essendo il condensatore un conduttore vale $V(q) = \frac{q}{C}$.

L'energia immagazzinata nel condensatore è pari al lavoro fatto per caricarlo:

$$U = L = \int dL = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (13)$$

Ora calcoliamo sempre questa energia integrando il campo elettrico nello spazio, Eq. (12).

Notiamo intanto che fuori dal condensatore il campo è trascurabile, quindi integriamo solo nel volume del condensatore Ω . Trascurando gli effetti di bordo, il campo all'interno è uniforme di intensità $\frac{V}{d}$ e quindi

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} \frac{V^2}{d^2} d^3r = \frac{\epsilon_0 V^2 L^2}{2d} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

ovvero il risultato di prima.

Per concludere, grazie al risultato visto poco sopra

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (14)$$

possiamo mostrare un'ulteriore condizione di raccordo per il campo elettrico, in particolare per la sua componente parallela. Calcoliamo la circuitazione del campo lungo un percorso rettangolare, avente i lati più lunghi paralleli a un piano carico, l'uno da una parte e l'altro dall'altra rispetto al piano, e gli altri due lati, molto più corti dei primi, ortogonali al piano carico.

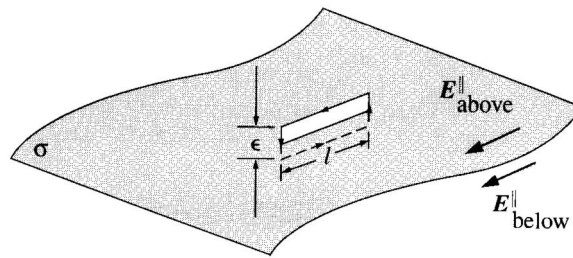


Figura 3: Circuitazione infinitesima usata nella dimostrazione.

In particolare, assumendo che:

- l , lunghezza dei lati lunghi, è molto più piccola della scala su cui varia il campo, pertanto esso può essere considerato costante su un lato;

- ε , lunghezza dei lati corti, è molto più piccola di l , pertanto la parte del percorso perpendicolare al piano può essere trascurata;

otteniamo:

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{\text{in}}^{\parallel} \ell - E_{\text{out}}^{\parallel} \ell = 0 \implies E_{\text{in}}^{\parallel} = E_{\text{out}}^{\parallel}$$

2 Conduttori

2.1 Definizione

Un altro tipo di problema che viene studiato spesso in elettrostatica consiste nel determinare il comportamento dei corpi sottoposti ad un campo elettrico esterno o in presenza di cariche posizionate nelle loro prossimità. I materiali più comuni possono essere classificati come *isolanti* oppure *conduttori*, a seconda della possibilità o meno per le cariche interne di muoversi liberamente. Più formalmente:

Definizione 2.1. Si definisce *isolante perfetto* un materiale nel quale le cariche non si muovono, indipendentemente dall'intensità del campo elettrico.

Definizione 2.2. Si definisce *conduttore perfetto*⁶ che contiene un numero illimitato di cariche di entrambi i segni, libere di muoversi sotto l'azione di un campo elettrico applicato, qualunque sia l'intensità del campo stesso.

Da questa definizione seguono alcune proprietà dei conduttori quando questi si trovano in condizione di equilibrio elettrostatico.

1. **Il campo elettrico è nullo all'interno del conduttore.** Se così non fosse, allora *non* potremmo trovarci in una condizione di equilibrio statico: dato che tutte le cariche presenti nel conduttore possono muoversi liberamente al suo interno, un elettrone che si trovi in un punto all'interno risentirebbe di una forza netta data dal campo interno, $\mathbf{F} = e\mathbf{E}_{\text{int}}$, e dato che non risentirebbe di altre forze per ipotesi, non ci troveremo in condizione di equilibrio. Da questo fatto segue anche che l'intero volume del conduttore è equipotenziale:

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B \mathbf{0} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

dove il percorso che collega A a B è interno al conduttore.

2. **La densità di carica netta all'interno è nulla.** Questo risultato segue dalla legge di Gauss: presa infatti una qualunque superficie chiusa S contenuta all'interno del conduttore, si avrebbe che

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{A} = \oint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{A} = 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

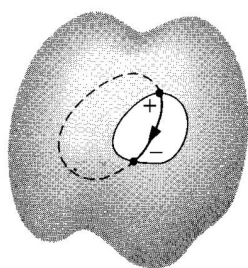
⁶Nella realtà non esiste un conduttore perfetto, ma per i nostri propositi i metalli ne sono una buona approssimazione

e dunque la carica netta interna è sempre nulla. Pertanto, la carica sarà sempre localizzata sulla superficie esterna.

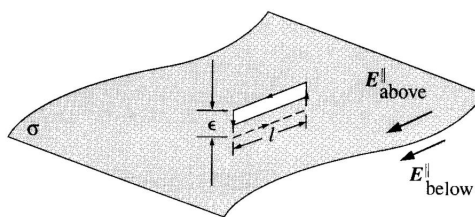
3. **Il campo elettrico esterno, sulla superficie, è perpendicolare alla superficie stessa.** Se in un punto della superficie il campo elettrico avesse una componente tangenziale, allora questa spingerebbe una qualunque carica localizzata in quel punto verso una posizione diversa, contraddicendo il fatto che il conduttore si trova all'equilibrio elettrostatico. Si può giungere allo stesso risultato utilizzando la relazione di continuità della componente parallela del campo elettrico che abbiamo enunciato nel precedente capitolo ($E_{\text{in}}^{\parallel} = E_{\text{out}}^{\parallel}$); infatti, per ipotesi di equilibrio elettrostatico vale $E_{\text{in}}^{\parallel} = 0$ da cui sarà nulla la componente parallela del campo anche all'esterno del conduttore: il campo elettrico sarà solo perpendicolare alla superficie.
4. È utile ricordare un interessante risultato che lega la densità superficiale locale all'intensità del campo elettrico relativa al punto considerato: confrontando infatti l'equazione (7) e ricordando che all'interno del conduttore il campo è nullo e la componente parallela è nulla, allora il campo elettrico in prossimità della superficie vale:

$$\frac{\sigma A}{\epsilon_0} = \Phi_S(\mathbf{E}) = \mathbf{E}_{\text{sup}} \cdot A\hat{\mathbf{n}} = E_{\perp} A$$

$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad E_{\parallel} = 0$$



(a) Conduttore cavo in cui è disegnata la curva per la circuitazione.



(b) Circuitazione infinitesima.

Figura 4: Notare che la curva all'interno della cavità inizia in una carica positiva e termina su una carica negativa.

2.2 Disposizione delle cariche

Tratteremo ora il comportamento dei conduttori in varie situazioni, puntualizzando alcuni risultati notevoli. In particolare, discuteremo come si comporta un conduttore con una cavità all'interno in presenza di carica localizzata all'esterno o all'interno.

Gabbia di Faraday. Considerate la figura 4a. Il conduttore è immerso in un campo esterno, in condizione di equilibrio elettrostatico, al suo interno è presente una cavità priva di carica. Le cariche si dispongono dunque sulla superficie esterna in modo da renderla una superficie equipotenziale. Se è presente una cavità nel conduttore, un osservatore posto al suo interno non percepisce alcun campo elettrico, e sulla superficie interna non compare alcuna densità di carica. Se per assurdo non fosse vero, dato che per Gauss la carica sulla superficie interna è nulla, consideriamo una curva chiusa costruita in questo modo: all'interno della cavità segue una linea di campo che parte dalla parete della cavità in corrispondenza di una carica positiva e termina sulla parete della cavità in corrispondenza di una carica negativa, il resto della curva si trova all'interno del conduttore. Calcolando la circuitazione del campo lungo questa curva, essa sarà non nulla: lungo la linea di campo, per definizione, il campo stesso è parallelo e concorde alla curva e dunque dà contributo solo positivo alla circuitazione, mentre all'interno del conduttore il campo è nullo, e dunque tale è il suo contributo alla circuitazione. Si avrebbe così una curva chiusa su cui la circuitazione del campo è positiva, assurdo.

Questo effetto, a dir poco contro-intuitivo, è alla base della gabbia di Faraday, ed è il motivo per cui se un fulmine colpisce la vostra auto mentre siete al suo interno, la corrente non scorre attraverso di voi ma solo sulla superficie esterna dell'auto, o per cui in ascensore il cellulare “non prende”⁷.

Gabbia di Faraday inversa Ci si può ora chiedere come si distribuirà la carica indotta sulle superfici del conduttore se viene posta una carica puntiforme all'interno di una cavità del conduttore stesso. Notiamo intanto che la quantità di carica totale presente sulla superficie della cavità deve essere uguale e opposta a quella puntiforme posizionata al suo interno. Infatti, consideriamo una superficie chiusa S appena dentro il conduttore che racchiuda

⁷Un'altra applicazione a dir poco elettrizzante di questo principio si può trovare a questo link: <https://www.youtube.com/watch?v=syAwpQBLmng>. In questo video una band suona musica “elettronica” ben al sicuro all'interno di tute metalliche che sfruttano proprio il principio della gabbia di Faraday. Questo video è un estratto di una puntata di “*Te l'avevo detto*”, che potete trovare qui in versione integrale: <https://it.dplay.com/dmax/te-lavevo-detto/strani-poteri/>

la cavità interna del conduttore: il flusso attraverso questa superficie è nullo perché il campo nella parte piena del conduttore è nullo, pertanto dalla legge di Gauss segue che la carica totale racchiusa dalla superficie deve anch'essa essere nulla.

È possibile che sulla parete interna del conduttore all'equilibrio ci siano cariche di entrambi i segni? No: riapplicando infatti lo stesso ragionamento che abbiamo usato per la gabbia di Faraday, se ci sono due cariche di segno opposto sulla parete, esiste una linea di campo che le congiunge. Considerando allora una curva chiusa composta dalla linea di campo e da un arco di curva che la renda chiusa e che passi tutta all'interno del conduttore, avremmo che la circuitazione su questa curva è non nulla, assurdo. Dunque sulla parete interna compaiono solo cariche di segno opposto a quello della carica q posta nella cavità.

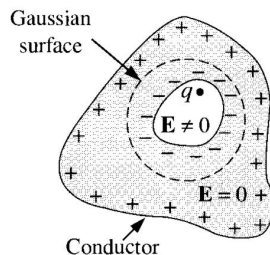


Figura 5: Conduttore cavo, con carica al suo interno

La distribuzione di carica sulla superficie esterna del materiale dipende dalla forma della cavità, oppure dalla posizione della carica posta al cui interno? Come mostreremo, la densità superficiale esterna è indipendente dalla posizione della carica all'interno, o dalla forma della cavità, ma dipende solo dalla forma della superficie esterna, e si dispone come se il conduttore fosse pieno e avesse una carica netta totale q . Consideriamo infatti le seguenti configurazioni:

1. tutto lo spazio è costituito di materiale conduttore, tranne per una cavità vuota, identica a quella del problema originale, con la carica puntiforme q posizionata all'interno;
2. nello spazio c'è solo il conduttore senza cavità dotato di una carica q .

Nella prima delle due configurazioni, la carica si distribuisce sulla superficie in modo tale da produrre fuori della cavità, quindi anche nella parte di spazio che nel problema originale è occupata dal conduttore, un campo elettrico nullo. Considerando invece la seconda delle due configurazioni, la carica

superficiale si dispone in modo che all'interno del materiale conduttore il campo elettrico sia nullo. Ritornando al problema originale, se la densità di carica superficiale interna si disponesse come nella configurazione (1), la carica presente sulla superficie esterna non potrebbe essere influenzata in alcun modo dalla posizione della carica interna. Perciò la carica superficiale esterna si disporrebbe sulla superficie esterna come se si trovasse nella configurazione (2). Questa è sicuramente una soluzione del problema originario per la quale la distribuzione di carica esterna non dipende dalla posizione della carica all'interno né dalla forma interna della cavità.

Si potrebbe ora pensare che questa è sì una soluzione ma che potrebbe non essere l'unica e in particolare che potrebbero esistere altre soluzioni diverse da quella proposta, magari la cui configurazione invece dipende dalla posizione della carica nella cavità. Questo però **non** può accadere, e la soluzione proposta è l'unica possibile per un motivo profondo, ovvero per *l'unicità della soluzione* del problema dell'elettrostatica.

Infatti, la formulazione matematica dell'elettrostatica garantisce quest'unicità a parità di *condizioni al bordo*, che in questo caso sono:

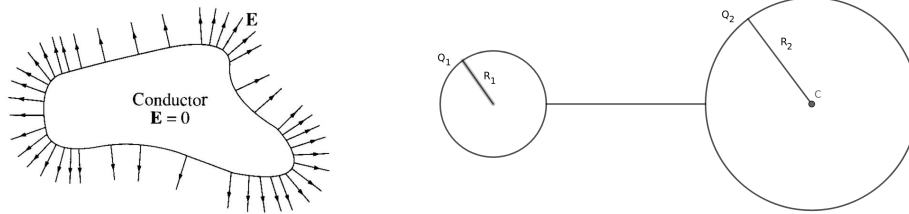
- la carica all'interno della cavità
- la posizione della carica
- la forma del conduttore
- il potenziale nullo all'infinito

Questa unicità ha un chiaro significato fisico di esperienza quotidiana: se si ripete una stessa esperienza, a parità di condizioni iniziali la configurazione finale è una sola, ed è l'unica possibile ⁸. Il teorema di unicità sarà fondamentale per comprendere la prossima sezione: le cariche immagine.

Effetto delle punte. Abbiamo appena mostrato che la disposizione delle cariche in un conduttore dipende dal campo elettrico a cui è sottoposto in modo tale che la superficie del conduttore sia una superficie equipotenziale. Un effetto interessante legato a questo è l'effetto delle punte: la densità superficiale di carica è maggiore in corrispondenza delle parti della superficie più spigolose ⁹.

⁸Vi è un motivo più profondo legato alla parte matematica della determinazione della soluzione.

⁹Questo equivale a dire nei punti della superficie il cui raggio di curvatura è minore: intuitivamente il raggio della sfera che al limite meglio approssima la superficie nel punto che stiamo considerando.



(a) Effetto delle punte su un conduttore generico.

(b) Sfere conduttrici collegate da un filo.

Figura 6: effetto delle punte.

Per dimostrarlo, consideriamo due sfere come in figura di raggio R_1 ed R_2 , rispettivamente con carica Q_1 e Q_2 (confronta la figura 6b). Poniamole ora a contatto tramite un filo sottilissimo conduttore: la carica si distribuirà fra le due sfere in modo da farle avere lo stesso potenziale, per definizione di conduttore. Dopo il contatto, dette le cariche sulle sfere rispettivamente Q'_1 e Q'_2 , si può scrivere:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_2}{R_2} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ricava:

$$Q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2) \Rightarrow \sigma'_1 = \frac{Q'_1}{4\pi R_1^2} \propto \frac{1}{R_1}$$

$$Q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2) \Rightarrow \sigma'_2 = \frac{Q'_2}{4\pi R_2^2} \propto \frac{1}{R_2}$$

Dal risultato si può pensare di dedurre che la carica tende a spostarsi in punti del corpo dove la superficie è “più curva”, più appuntita.

2.3 Metodo delle cariche immagine

Andiamo ora ad analizzare un metodo standard di risoluzione di molti problemi di elettrostatica. In particolare ci poniamo l'obiettivo di studiare l'effetto della presenza di un materiale conduttore sul campo elettrico. Illustriamo il tutto con un semplice esempio.

Esempio 2.1. Calcolare il campo elettrico \mathbf{E} e il potenziale V in presenza di una carica q in $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$ e di un materiale conduttore nel semispazio $x < 0$.

Soluzione 2.1. Raggiunta la configurazione di equilibrio, sul conduttore ci sarà una certa densità di carica superficiale σ tale da schermare la carica q , ossia rendere costante il potenziale sulla frontiera e nullo il campo elettrico all'interno ($x < 0$). Ricordiamo infatti che all'interno dei conduttori nella situazione di equilibrio il campo deve essere nullo.

Calcolare questa densità con un metodo *brute force* partendo dalle condizioni al bordo risulta molto laborioso. Cerchiamo quindi un metodo alternativo per risolvere il problema.

L'idea è quella di sfruttare il teorema di unicità e sostituire il piano conduttore con alcune cariche fittizie (dette cariche immagine) poste nella regione in cui è presente il piano in modo che le condizioni al bordo (in questo caso il potenziale sul piano e all'infinito) siano uguali a quelle del problema originario.

Se poniamo una carica q' in posizione \mathbf{r}' si avrà (posto $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$):

$$V(\mathbf{r}) = k \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + k \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{d})$$

Prima di fare calcoli alla cieca, facciamo qualche considerazione saggia. Sappiamo che la superficie del conduttore è equipotenziale, ma non sappiamo ancora quanto vale tale potenziale (in particolare non abbiamo ancora fissato lo zero). Poniamo lo zero del potenziale all'infinito e, poiché il piano va all'infinito, anch'esso sarà a potenziale nullo (a posteriori si può verificare che la soluzione trovata rispetta queste condizioni poste da noi). Inoltre, data la simmetria del problema per rotazioni attorno all'asse x , tutte le cariche immagine che andremo a mettere saranno poste proprio su questo asse.

Dunque sicuramente sappiamo che le cariche immagine saranno poste lungo l'asse x a coordinate negative, cerchiamo se esiste una soluzione con una sola carica immagine in posizione $(d', 0, 0)$ con $d' < 0$. Calcoliamo in questo caso il potenziale sulla superficie del conduttore e imponiamo che sia uguale a zero:

$$0 = V(0, y, z) = k \frac{q'}{\sqrt{d'^2 + y^2 + z^2}} + k \frac{q}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} \quad (15)$$

È facile notare che $q' = -q$ e $d' = -d$ è una soluzione del problema (e per il

teorema di unicità è anche l'unica). Abbiamo dunque:

$$V(x, y, z) = kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = kq \left(\frac{(x-d)\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x+d)\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

In particolare, sulla superficie del conduttore:

$$\mathbf{E}(0, y, z) = -2k \frac{qd\hat{\mathbf{x}}}{[d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Quindi il campo elettrico è perpendicolare alla superficie, come da aspettarsi dalla sua equipotenzialità. Possiamo ora calcolare la densità di carica ricordandoci che per una superficie $\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ e che il campo elettrico è nullo all'interno di un conduttore.

$$\sigma(0, y, z) = -\frac{qd}{2\pi[d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando tale espressione per la carica superficiale si può verificare che la carica totale sulla superficie del conduttore è pari a $-q$ (da provare a fare come esercizio).

Tale risultato si sarebbe potuto ottenere anche usando la legge di Gauss: consideriamo una calotta emisferica centrata nell'origine e di raggio R . Facendo tendere il raggio a $+\infty$ si nota che il flusso va a 0 (in quanto l'area scala come R^2 , mentre il campo va come R^{-3} essendo quello di un dipolo a grande distanza), e dunque anche la carica interna (che tende alla somma algebrica di q e la carica totale sulla superficie del conduttore) deve essere nulla.

Un occhio attento potrebbe notare che nel sistema *carica + carica immagine*, nella regione dove era posto il conduttore, il campo non è nullo, mentre sappiamo che nella soluzione del problema con il piano conduttore il campo in quella regione sarebbe stato certamente nullo. Questo tuttavia non è un problema: noi stiamo cercando una soluzione che segua tutte le leggi della fisica dove non c'è il conduttore. Una volta trovata la soluzione e calcolata la densità superficiale, sarà questa ad assicurare che per $x > 0$ si abbia lo stesso campo di prima, mentre per $x < 0$ la carica sia totalmente schermata e dunque il campo sia nullo.

Un altro modo di vederlo è che, dal momento che la densità superficiale è concentrata sul piano $x = 0$ (e dunque simmetrica per $x \rightarrow -x$) agirà allo

stesso modo sui due semispazi: se quando consideriamo il semispazio destro possiamo immaginarci una carica immagine a sinistra che genera il campo che abbiamo calcolato prima, quando cerchiamo di risolvere lo stesso problema per il semispazio negativo la carica immagine andrà messa a destra andando a sovrapporsi con la carica reale e generando dunque un campo nullo.

Con un ragionamento simile possiamo giustificare la regola precedentemente solo accennata: *le cariche immagine si possono posizionare solo fuori dalla regione di interesse (ossia solo dove c'è il conduttore)*. Se per assurdo mettessimo una carica immagine fuori dal conduttore, calcolando poi σ e togliendo le cariche immagine, staremmo chiedendo al conduttore di simulare la presenza di una sorgente di campo (per gli amici, una carica puntiforme¹⁰). In altre parole, calcolando il flusso di \mathbf{E} in un volumetto abbastanza piccolo contenente la posizione in cui avevamo messo la carica immagine, otterremmo un flusso non nullo, che secondo il teorema di Gauss implicherebbe una carica interna non nulla dove invece non c'è nulla!

Esempio 2.2. Calcolare il campo elettrico \mathbf{E} e il potenziale V in presenza di una carica q in $(d, 0, 0)$ e di una sfera conduttrice centrata nell'origine e di raggio $a < d$ messa a terra (che equivale a imporre che abbia potenziale nullo).

Soluzione 2.2. Anche qui iniziamo con una sola carica immagine. Sempre per la simmetria cilindrica attorno all'asse delle x , posizioniamo la carica sullo stesso asse, diciamo in $(d', 0, 0)$, e analizziamo il problema ristretto al piano xy . Procediamo ora al calcolo di q' e d' . Dal fatto che la sfera è a terra ($V = 0$ sulla superficie) otteniamo che

$$\frac{r'}{r} = \left| \frac{q'}{q} \right| = \text{cost}$$

dove r e r' sono rispettivamente le distanze di un punto generico della sfera dalla carica reale e immagine. Questo risultato ci rassicura in quanto sappiamo dalla geometria euclidea che il luogo di punti tali che il rapporto delle loro distanze da due punti fissati è costante è proprio una sfera (in due dimensioni prende il nome di Cerchio di Apollonio¹¹). Visto che una sfera è univocamente determinata da due qualsiasi punti antipodali basta imporre l'uguaglianza $V(a, 0, 0) = V(-a, 0, 0) = 0$ che porta al risultato:

$$d' = \frac{a^2}{d} \quad q' = -q \frac{a}{d}$$

¹⁰Per i più formali, una singolarità nel potenziale

¹¹cfr. https://it.wikipedia.org/wiki/Cerchio_di_Apollonio

Se la sfera non fosse messa a terra ma fosse a un potenziale V_0 basterebbe aggiungere una carica $q'' = aV_0/k$ nell'origine (in quanto, per sovrapposizione lineare, il potenziale in tutto lo spazio coincide con la somma dei potenziali delle due distribuzioni e il potenziale della configurazione iniziale si annulla sulla superficie della sfera, mentre il potenziale della carica q'' sulla superficie è proprio V_0), se invece fosse isolata e neutra si avrebbe $q'' = -q'$ sempre nell'origine (in questo modo la sfera è neutra, il potenziale alla superficie del conduttore è sempre costante in quanto somma del potenziale nella situazione originale che era nullo e quello dovuto alla carica q'' che dipendendo solo dalla distanza dalla carica è costante sulla superficie sferica).

In entrambi i casi abbiamo usato il principio di sovrapposizione lineare: una volta trovata la soluzione con condizione a contorno $V = 0$ ci limitiamo a trovare la soluzione a un problema in cui nello spazio c'è solo il conduttore (senza cariche esterne) per poi *sovrapporla* a quella di prima.

Il calcolo della densità superficiale e del campo elettrico nello spazio sono lasciati come esercizio al lettore, così come il calcolo della forza sulla sfera.¹²

A partire da questo risultato si possono analizzare due casi limite interessanti:

- Sfera a terra, $a \rightarrow \infty$ mantenendo fissa la distanza tra la carica e la sfera (che per comodità chiameremo D). Dunque anche $d \rightarrow \infty$ ma $d - a = D$ costante. In questo modo il nostro sistema tende ad assomigliare ad un piano conduttore infinito davanti al quale pongo una carica a distanza D . Con dei semplici conti (ricordandoci che $(1 + \varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon$ per $\varepsilon \ll 1$) si vede che $d' \rightarrow a - D$ e $q' \rightarrow -q$. Questo risultato è effettivamente quello che ci aspettavamo.
- Sfera neutra $d \rightarrow \infty$ ma tenendo $\frac{q}{d^2} = 4\pi\varepsilon_0 E_0$ costante. In questo limite la sfera è immersa in un campo elettrico uniforme pari a $-E_0 \hat{\mathbf{x}}$. Le due cariche immagine si avvicinano (tendono a coincidere) e generano un dipolo

$$\mathbf{p} = q'd'\hat{\mathbf{x}} = -\frac{qa^3}{d^2}\hat{\mathbf{x}} = 4\pi\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 a^3$$

¹²Hint: Usare il principio di azione-reazione.

3 Dipolo elettrostatico

Il potenziale di una distribuzione di carica è formalmente calcolabile con la seguente formula:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (16)$$

dunque di ogni distribuzione di carica si può almeno a livello teorico conoscere il potenziale esatto in ogni punto.

L'applicazione di questa formula è spesso molto complessa, tanto che in pratica risulta difficile calcolare esplicitamente il valore di tale potenziale. In genere verrà richiesta un'approssimazione del potenziale *a grandi distanze*, in modo da renderne più agevole la determinazione. Se la quantità complessiva di carica Q_{tot} è non nulla, un osservatore posto a grande distanza dal sistema¹³ percepirà in prima approssimazione un campo proveniente dal sistema pari a quello generato da una carica puntiforme di valore Q_{tot} posizionata nel baricentro delle cariche: infatti se \mathbf{R} è la distanza dal baricentro delle cariche all'osservatore e \mathbf{r}_i è la distanza della i -esima carica dal baricentro,

$$V(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + r_i^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i}} \approx \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

dove l'approssimazione è giustificata dal fatto che $R \gg r_i$.

Se invece la carica totale è nulla, il valore del potenziale a grande distanza è approssimabile a quello di due cariche, opposte in segno e di valore uguale alla quantità complessiva di carica dello stesso segno, posizionate rispettivamente nel baricentro delle cariche negative e nel baricentro delle cariche positive. Effettueremo qui il calcolo a grande distanza per la configurazione non banale più semplice, ovvero due cariche di segno opposto a distanza d l'una dall'altra: questa configurazione, denominata comunemente *dipolo*, risulta centrale nello studio dell'elettrostatica, ed il risultato che otterremo ha un'applicazione più ampia di quella del semplice problema proposto.

¹³Più formalmente, sia la distanza d_G dell'osservatore dal baricentro (geometrico) delle cariche, e sia r_{min} il minimo raggio di una superficie sferica centrato nel baricentro delle cariche che le contiene tutte. Diremo che il nostro sistema è osservato a grandi distanze quando $d_G \gg r_{\text{min}}$. Inoltre, diremo che le distanze fra le cariche sono considerate trascurabili se nello sviluppo in serie di Taylor del potenziale ci interessa solamente il termine dell'ordine di $\frac{r_{\text{min}}}{d_G}$.

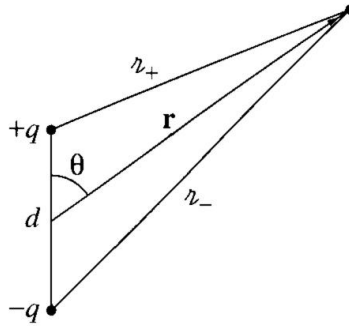


Figura 7: Calcolo del campo di un dipolo in un punto dello spazio.

3.1 Il campo del dipolo.

Come da figura 7, consideriamo due cariche puntiformi di carica $+q$ e $-q$ che si trovano sull'asse \hat{z} rispettivamente in posizione $-a\hat{z}$ e $a\hat{z}$, dove $d = 2a$ è la distanza fra le due cariche e \mathbf{d} il vettore che collega la posizione della carica negativa a quella della carica positiva. Siano ora \mathbf{r}_- ed \mathbf{r}_+ la distanza fra il nostro punto dello spazio e rispettivamente la carica negativa e la carica positiva. Sia \mathbf{r} il vettore distanza dall'origine. Il potenziale in ogni punto dello spazio si può scrivere pertanto come:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} \quad (17)$$

Ma, come possiamo notare, vale che

$$r_+ = \left| \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{d} \right|$$

$$r_- = \left| \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{d} \right|$$

Pertanto, usando la formula trigonometrica di Carnot¹⁴ e chiamato θ l'angolo fra l'asse \hat{z} (parallelo a \mathbf{d}) e il vettore \mathbf{r} , si può scrivere

$$r_+ = \sqrt{r^2 + d^2 - 2\mathbf{r} \cdot \left(-\frac{1}{2}\mathbf{d}\right)} = r\sqrt{1 - \frac{d \cos \theta}{r} + \frac{d^2}{r^2}}$$

e quindi, per $r \gg d$ si può approssimare come segue, utilizzando l'approssimazione al primo ordine in 0 per le potenze di binomio¹⁵ ($(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ se $x \ll 1$):

¹⁴https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_coseno

¹⁵Vedi anche disuguaglianza di Bernoulli:

https://it.wikipedia.org/wiki/Disuguaglianza_di_Bernoulli.

$$\frac{1}{r_+} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d \cos \theta}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d \cos \theta}{2r}\right)$$

dove si sono trascurati i termini di ordine superiore al primo, ovvero quelli dove compaiono potenze di $\frac{r}{d}$ con esponente maggiore di 1.

Facendo lo stesso ragionamento per r_- si ottiene analogamente

$$\frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d \cos \theta}{2r}\right)$$

Sostituendo le due relazioni trovate nell'equazione (16) si ricava che per $r \gg d$:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{d \cos \theta}{2r} - 1 + \frac{d \cos \theta}{2r}\right) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Se indichiamo con $\mathbf{p} = +q\mathbf{d}$, allora si ha che il potenziale può essere riscritto come:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (18)$$

In genere il vettore \mathbf{p} viene chiamato *momento di dipolo*, ha unità di misura della carica moltiplicata per l'unità di lunghezza [Cm] e per una configurazione spaziale di cariche si può calcolare come segue:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3r'$$

Nel caso di cariche puntiformi, questo vettore è nullo se il baricentro delle cariche negative coincide con il baricentro delle cariche positive.

Il potenziale così trovato in generale viene chiamato *potenziale di dipolo*, e in modo più formale si definisce *dipolo perfetto* una configurazione tale che il campo in ogni punto sia proprio uguale a quello espresso dalla (18). Tale potenziale può essere pensato come il risultato di un processo di limite, in cui la distanza fra le due cariche tende a zero, ma tale che si mantiene costante il valore del modulo di \mathbf{p} (dunque $qd = p$ costante, con $d \rightarrow 0$ e $q \rightarrow \infty$). Nella figura 8 possiamo vedere il confronto fra i campi di un dipolo perfetto e di un dipolo reale.

Nella realtà la configurazione di dipolo perfetto è impossibile da ottenere: esistono solo dipoli fisici che però possono bene approssimare i dipoli perfetti. In essi la distanza fra le due cariche è finita ma molto piccola: un esempio è la molecola d'acqua, che ha un momento di dipolo pari a 6.17×10^{-30} Cm.

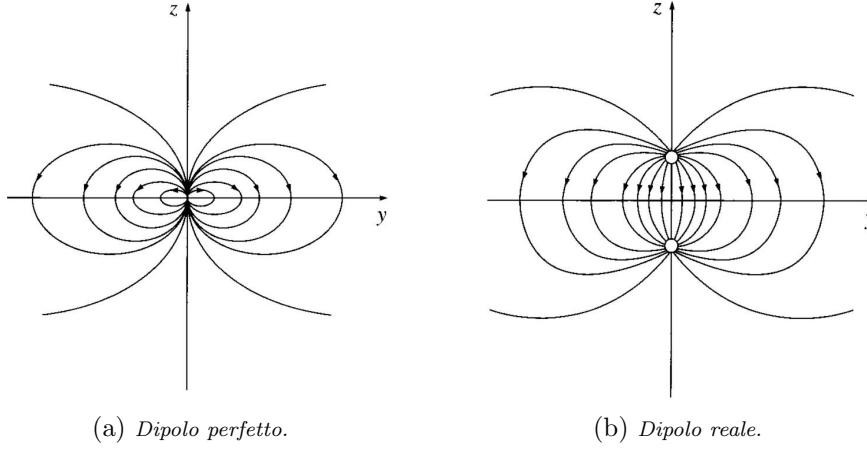


Figura 8: Confronto dei campi di un dipolo perfetto e di un dipolo reale.

3.2 Campo elettrico del dipolo a grande distanza.

Riscrivendo in cartesiane il potenziale di dipolo, si ottiene:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{pz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dove si è supposto che il momento di dipolo fosse diretto nella direzione positiva dell'asse \hat{z} . Ricordando che $\mathbf{E} = -\nabla V$ ¹⁶ si ha allora che:

$$\mathbf{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} x$$

$$\mathbf{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} y$$

$$\mathbf{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} z - \frac{p}{3r^3} \right)$$

da cui segue che il campo vale:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \right) \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] \quad (19)$$

¹⁶Con quest'espressione si intende che il campo elettrico è l'opposto del gradiente del potenziale, dove il gradiente è espresso come $\nabla V = (\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$. In realtà alle stesse espressioni di $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ si può arrivare attraverso un procedimento di limite analogo a quello fatto per ottenere $V(\mathbf{r})$.

3.3 Momento torcente, energia e forza netta su un dipolo.

Supponiamo ora di avere un dipolo costituito da un bilanciere ai cui estremi vi siano due cariche uguali ed opposte separate da una distanza fissa d . Se questo bilanciere si trova immerso in un campo elettrico esterno, su di esso agiscono delle forze esterne. Consideriamo il caso semplice nel quale il campo elettrico esterno è omogeneo. Come si evince dalla figura 9 la somma delle forze agenti sul dipolo è nulla.

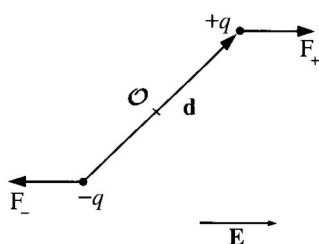


Figura 9: Schema delle forze su un dipolo in campo costante.

Sia ora $\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}$ la forza agente sulla carica negativa e sia $\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}$ la forza agente sulla carica positiva. Se si calcola il momento torcente sul dipolo rispetto al punto medio della distanza fra le due cariche, si ottiene la seguente espressione:

$$\boldsymbol{\tau} = \left(+\frac{\mathbf{d}}{2}\right) \wedge \mathbf{F}_+ + \left(-\frac{\mathbf{d}}{2}\right) \wedge \mathbf{F}_- \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = q\mathbf{d} \wedge \mathbf{E}$$

Che può essere riscritta come

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E} \quad (20)$$

È interessante notare come il momento torcente cerchi di allineare il momento di dipolo con il campo elettrico esterno.

Il dipolo possiederà un'energia potenziale dovuta alla sua disposizione nello spazio: infatti, ricordando che $r \gg d$, se si considera l'energia del dipolo come somma delle energie delle due cariche e si usa la formula (9) si ha:

$$U_{\text{dipolo}} = -qV(\mathbf{r}) + qV(\mathbf{r} + \mathbf{d}) \approx q dV(\mathbf{r}) \quad (21)$$

Ma ora, se la distanza fra due punti è sufficientemente piccola, la variazione del potenziale può essere pensata come una variazione lineare, e dunque si può

scrivere che $dV(\mathbf{r}) = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{d}$. Ricordando anche $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, si ha l'equazione¹⁷ (21)

$$U_{\text{dipolo}} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{p} \quad (22)$$

Fermiamoci ora un attimo a riflettere sul significato fisico delle espressioni (22) e (20). La (22) si può riscrivere anche come $U_{\text{dipolo}} = -Ep \cos \theta$: è evidente che il minimo dell'energia si ha quando il dipolo è allineato nel verso del campo elettrico, mentre il massimo si ha quando il dipolo ha verso opposto a quello del campo elettrico. L'espressione (20) ci dice invece che il campo elettrico tende a torcere il dipolo e a farlo allineare con il campo elettrico esterno. Dunque, tramite il momento torcente, il campo esterno può convertire l'energia potenziale del dipolo in energia cinetica rotazionale dello stesso. Su questo principio si basano i forni a microonde, che utilizzano campi elettrici alternati per aumentare l'energia cinetica delle molecole d'acqua polari all'interno del cibo ed addirittura arrivare a scongelarlo.

¹⁷Si noti che abbiamo assunto che il momento di dipolo \mathbf{p} sia costante in modulo, ipotesi necessaria affinché questa formula sia valida. Un caso lampante è quello del dipolo dipendente linearmente dal campo ($\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$): in quel caso $U_{\text{dipolo}} = -\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}$.

4 Condensatori

Un condensatore piano a due facce consiste di due piastre conduttrici quadrate con facce parallele di area S , a distanza $d \ll \sqrt{S}$, che hanno carica totale nulla. Se una faccia ha carica $Q > 0$, avrà una densità superficiale di carica $\sigma = \frac{Q}{S}$, e l'altra faccia avrà una carica $-Q$ (densità $-\sigma$).

Possiamo trovare il campo elettrico all'interno e all'esterno del condensatore sfruttando la legge di Gauss, assieme al principio di sovrapposizione lineare, come visto precedentemente. Infatti se ci mettiamo sufficientemente lontano dai bordi del condensatore, siccome $d \ll \sqrt{S}$ allora possiamo approssimare le piastre con due piani infiniti di densità superficiale $+\sigma$ e $-\sigma$, che generano rispettivamente un campo \mathbf{E}_+ e \mathbf{E}_- . Prendiamo una terna ortonormale di assi $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ con \hat{x} normale alle piastre che punta verso la piastra carica negativamente, e fisso l'origine degli assi nel centro della piastra positiva, allora

$$\mathbf{E}_+(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
$$\mathbf{E}_-(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, & \text{se } x > d \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, & \text{se } x < d \end{cases}$$

Quindi, sommando i due contributi, si ottiene

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{x}, & \text{se } 0 < x < d \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La differenza di potenziale tra le due piastre del condensatore è

$$\Delta V = \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

Osserviamo che il rapporto $C = Q/\Delta V = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ dipende soltanto dalla costante dielettrica e dalle dimensioni del condensatore, questo rapporto si chiama capacità.

Calcoliamo ora il lavoro che serve per caricare un condensatore piano (superficie delle armature S , distanza tra esse d) scarico portando una carica Q da una piastra all'altra.

Supponiamo che sulle piastre ci sia una carica q , per portare una carica dq dalla piastra negativa a quella positiva devo fare un lavoro $dL = Vdq = \frac{q dq}{C}$ dove V è la differenza di potenziale tra le due piastre quando una delle due

possiede una carica q e l'altra $-q$, e $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ è la capacità. Per trovare il lavoro totale integro da $q = 0$ a $q = Q$

$$U = \int_0^Q V(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Per ora non abbiamo usato nulla sulla geometria del condensatore, e in effetti questa formula vale (facendo lo stesso conto) per un condensatore generico. Passando ora al caso specifico di condensatore piano, sostituendo la capacità in funzione di S e d e sapendo che il campo elettrico vale in modulo $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ all'interno del condensatore carico ed è nullo fuori, riconosco che vale

$$U = \frac{Q^2 \varepsilon_0 S d}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \cdot (Sd)$$

Effettivamente esiste una formula più generale per l'energia elettrostatica di un sistema di cariche, che solitamente si interpreta come energia associata al campo elettrico, questa può fare comodo ma non la dimostreremo, ed è la seguente: $U = \int_V \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV$, dove dV è un elemento di volume infinitesimo e l'integrale è fatto su tutto lo spazio.

Cosa succede se tra le armature del condensatore c'è un materiale (dielettrico) con costante dielettrica relativa ε_r ? Ai fini della nostra trattazione e per gran parte degli esercizi delle olimpiadi basta sapere che la capacità di un condensatore aumenta di un fattore ε_r , così come l'energia. In pratica ogni volta che c'è ε_0 basta metterci $\varepsilon_0 \varepsilon_r$.

5 Magnetostatica

Il campo magnetico \mathbf{B} è un campo vettoriale (così come il campo elettrico), che esercita una forza sulle cariche in movimento e sulle correnti. Infatti una carica q in moto con velocità \mathbf{v} in un campo magnetico \mathbf{B} subisce una forza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Questa è comunemente chiamata forza di Lorentz.

La forza di Lorentz si può generalizzare a fili su cui scorre corrente.

Supponiamo di avere un filo su cui scorre una corrente I , il filo individua una curva γ nello spazio e $d\mathbf{l}$ è uno spostamento 'infinitesimo' nella curva che individua il filo.

Allora per trovare la forza che un campo magnetico \mathbf{B} esercita sul filo bisogna integrare la forza di Lorentz su tutte le cariche che si muovono nel filo.

$$\mathbf{F} = \int_{\gamma} dq\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Ma in un tempo dt su un tratto di filo dl scorre una carica $dq = Idt$, e tutte queste percorrono un tratto di filo $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$. Allora

$$\mathbf{F} = \int_{\gamma} Idt\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \int_{\gamma} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \int_{\gamma} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

dove ho portato I fuori dall'integrale perché è costante lungo il filo.

Si può notare subito che la forza di Lorentz è sempre perpendicolare alla velocità e al campo magnetico, e essendo perpendicolare alla velocità non fa lavoro, cioè l'energia meccanica si conserva.

Infatti il lavoro che fa la forza di Lorentz su un percorso $\gamma(t)$ è

$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^t q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

Perché $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ è perpendicolare a \mathbf{v} e quindi il loro prodotto scalare è 0.

Come si muove una carica in un campo magnetico uniforme?

Considero una carica q che si muove con velocità \mathbf{v} sotto l'azione di un campo magnetico uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$. Come evolverà il suo moto?

Scompongo la velocità in una componente parallela al campo magnetico e una perpendicolare, $\mathbf{v} = v_z\hat{z} + v_n\hat{n}$.

La forza di Lorentz sulla carica è $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qv_nB_0\hat{n} \times \hat{z}$.

Osservo che è perpendicolare alla velocità, e questo è tipico di un moto circolare uniforme. Uguagliando la forza di Lorentz con la forza centripeta ottengo

$$m \frac{v_n^2}{r} = qv_n B_0 \rightarrow r = \frac{mv_n}{qB_0}$$

Mi accorgo inoltre che la forza di Lorentz è sempre perpendicolare anche al campo magnetico (e a \hat{z}), quindi la carica lungo z si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_z . La traiettoria di q è la somma di un moto circolare uniforme nel piano ortogonale al campo di raggio $r_0 = \frac{mv_n}{qB_0}$ con velocità angolare $\omega = \frac{v_n}{r_0} = \frac{qB_0}{m}$, e di un moto rettilineo uniforme lungo z con velocità v_z .

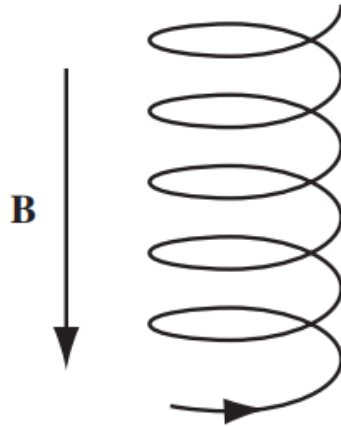


Figura 10: Moto di una carica puntiforme in un campo magnetico costante.

Questo risultato si può dimostrare in modo più preciso scrivendo rigorosamente $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ e risolvendo le equazioni differenziali che escono fuori, ma non è nello spirito di questa lezione.

Il campo magnetico è un campo vettoriale come il campo elettrico, quindi è sensato chiedersi quanto valgano il suo flusso uscente da ogni superficie chiusa e la sua circuitazione lungo ogni curva chiusa. Si osservano i seguenti risultati:

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\int_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Per ogni superficie chiusa S e ogni loop chiuso γ .

I_{enc} è la corrente 'concatenata' alla curva γ , cioè scelta una superficie il cui

bordo è γ , e scelto un verso per la normale entrante a questa, coerente con il verso di percorrenza della curva nella circuitazione, I_{enc} è la corrente che 'entra' nella superficie meno quella che 'esce'.

Quanto vale il campo magnetico prodotto da un filo?

Esempio 5.1 (Campo di un filo infinito). Fisso ora un sistema di coordinate cilindriche $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$. In queste coordinate scrivo

$$\mathbf{B}(r, \phi, z) = B_r(r, \phi, z)\hat{r} + B_\phi(r, \phi, z)\hat{\phi} + B_z(r, \phi, z)\hat{z}$$

Considero un filo infinito su cui scorre una corrente I in direzione \hat{z} , e voglio calcolare il campo magnetico che il filo genera in ogni punto dello spazio. Il filo è infinito, quindi è invariante per traslazioni lungo z . Dunque ci aspettiamo che il campo non dipenda da z . Inoltre il sistema è invariante per rotazioni attorno a \hat{z} , quindi il campo non dipende da ϕ , quindi $\mathbf{B}(r, \phi, z) = \mathbf{B}(r)$. Il filo è anche invariante per simmetrie rispetto al piano passante per il filo e un qualsiasi punto esterno, ma \mathbf{B}_z viene mandato in $-\mathbf{B}_z$ da questa simmetria (in quanto \mathbf{B} è uno pseudovettore, dunque trasforma in maniera opposta per riflessioni rispetto ai comuni vettori), dunque $\mathbf{B}_z = -\mathbf{B}_z$ mi dice che $\mathbf{B}_z = 0$.

Quindi

$$\mathbf{B}(r) = B_r(r)\hat{r} + B_\phi(r)\hat{\phi}$$

Faccio ora il flusso di \mathbf{B} su un cilindro con asse coincidente con z , di altezza h e raggio r , e impongo che sia nullo per la legge di Gauss. L'unica componente del campo che contribuisce al flusso è B_r perché ϕ è sempre tangente alla superficie, e B_z è nullo per l'argomento di prima.

$$\Phi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (2\pi r h \hat{r}) = B_r(r)(2\pi r h) = 0$$

Quindi $B_r = 0$.

Adesso che abbiamo fatto vedere che l'unica componente (potenzialmente) non nulla è quella lungo ϕ , calcolo la circuitazione del campo magnetico su una circonferenza di raggio r .

$$\int_{\gamma} \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi r} B_\phi(r) dl = \mu_0 I$$

Poiché il campo magnetico dipende solo da r e stiamo facendo la circuitazione su una circonferenza (r è costante), allora B_ϕ è costante lungo tutto il percorso

e posso portarlo fuori dall'integrale, e ottengo

$$B_\phi(r) \int_0^{2\pi r} dl = B_\phi(r) \cdot (2\pi r) = \mu_0 I \rightarrow B_\phi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Abbiamo quindi ottenuto in modo abbastanza rigoroso il campo magnetico prodotto da un filo infinito, cioè

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

Il campo è tangenziale e le linee di campo sono circonferenze centrate nel filo, il modulo del campo è proporzionale a $1/r$.

Per distribuzione semplici a volte si riesce a trovare il campo magnetico in tutto lo spazio solamente sfruttando simmetrie varie e il flusso e la circuitazione di \mathbf{B} . Data una distribuzione di corrente generica, esiste una formula (di "Biot-Savart") che a patto di saper fare integrali non sempre bellissimi permette di calcolare il campo magnetico che questa genera in tutto lo spazio:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'$$

Dove \mathbf{J} è la densità di corrente e l'integrale è esteso a tutto lo spazio.

Esercizi

Di seguito trovate alcuni esercizi di elettrostatica. Le soluzioni verranno pubblicate sul sito dello stage.

Energia - Distribuzioni di carica - Campi

Problema P.1 (Carica in campo elettrico a simmetria sferica di modulo costante (Senigallia 2011 P3)). Si considerino due superfici sferiche concentriche di raggi $R_1 = R$ ed $R_2 = 2R$ che delimitano un volume V ; un'opportuna distribuzione di cariche, in posizione determinata, è tale da generare un campo elettrico radiale uscente, il cui modulo (E_0 noto) è uguale in tutti punti del volume V .

Il campo elettrico è nullo nei punti interni alla prima superficie (quella di raggio minore) e nei punti esterni alla seconda superficie. Per ottenere questo è necessario porre una distribuzione di carica positiva sulla superficie interna, una negativa sulla superficie esterna ed un'ulteriore distribuzione volumetrica nello spazio tra le due superfici, in modo tale che la carica totale sia nulla.

1. Quanto valgono le densità di carica superficiale (uniformi) sulle due superfici sferiche di raggio R_1 ed R_2 ?
2. Quanto vale la densità media di carica spaziale tra le due superfici sferiche di raggio R_1 ed R_2 ?

Si può facilmente verificare (per esempio considerando due corone sferiche di uguale volume) che la densità di carica spaziale non può essere uniforme; essa sarà quindi funzione della distanza dal centro: $\rho = \rho(r)$.

1. Determinare l'andamento della densità volumetrica di carica $\rho(r)$ al variare della distanza dal centro.
2. Tracciare i grafici del campo elettrico $E(r)$, della densità di carica (volumetrica) $\rho(r)$ e del potenziale elettrostatico $V(r)$, con $V_\infty = 0$, per ogni r compreso nell'intervallo $[0, 5R]$.

Una particella di massa m e carica $q > 0$, lanciata radialmente dall'esterno verso il centro della distribuzione sferica, riesce ad attraversare la sfera se la sua velocità iniziale ha un valore qualunque maggiore di v_0 (e la conservazione dell'energia mostra che $v_0^2 = 2qE_0R/m$). La stessa particella viene lanciata, da fuori, con velocità di modulo v_0 in modo che nel punto di ingresso la direzione sia ruotata di 45° rispetto a quella radiale; la particella raggiunge una distanza minima dal centro della distribuzione (r_{\min}) per poi uscire di nuovo all'esterno.

1. Spiegare perchè la traiettoria della particella è certamente una curva piana.
2. Scrivere l'equazione che dà il valore di r_{\min} e risolverla in termini della variabile $z = r/R$ con un'opportuna tecnica numerica e con l'approssimazione dell' 1%.

Problema P.2 (Potenziale in un cubo (200 More Physics Puzzling Problems 141) (*)). Considera un cubo con densità di carica volumica uniforme ρ . Prendendo lo 0 del potenziale all'infinito ($V(\infty) = 0$) trova il rapporto fra il potenziale al centro del cubo e quello su uno dei vertici.

Problema P.3 (Esplosione Coulombiana (*)). Una nube sferica uniformemente carica di raggio R e carica totale Q inizia a espandersi al tempo $t = 0$ a causa della repulsione coulombiana. Mostrare che se per due particelle vale $r_1(0) < r_2(0)$ allora varrà $r_1(t) < r_2(t)$ sempre (confronta la figura 11). Trovare inoltre l'equazione differenziale del moto e dimostrare che la densità di carica rimane uniforme durante l'espansione.

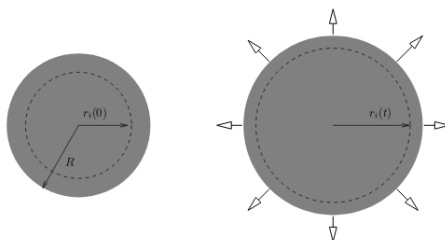


Figura 11: esplosione coulombiana.

Energia - Conduttori - Cariche immagine

Problema P.4 (Cariche immagine). Trovare l'espressione del potenziale e della carica superficiale nei seguenti casi:

1. Una carica q è posta in posizione $(d, 0, 0)$ davanti a un conduttore la cui superficie coincide in parte con il piano yz ma che presenta una sporgenza semisferica centrata nell'origine e di raggio $a < d$. E se la carica fosse in posizione generica $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con $\bar{x} > 0$ e $\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} > a$
2. Una carica q è posta in posizione $(a, b, 0)$ con $a, b > 0$ ed è presente un conduttore nella regione di spazio $x < 0 \vee y < 0$. E se invece il conduttore fosse in $x < 0 \wedge y < 0$?

3. (*) Usando ora un sistema di coordinate cilindriche, studiare il sistema il cui è presente un conduttore nella regione di spazio $\theta \in [\alpha, 2\pi]$ con $\alpha = \pi/2n$ per qualche $n \in \mathbb{N}^+$ e una carica q in posizione $(r, \alpha/2, z = 0)$. Studiare lo stesso sistema di prima dove però q è in posizione $(r, \bar{\theta}, z = 0)$ con $\bar{\theta} \in [0, \alpha]$ qualunque¹⁸.
4. Due cariche q sono poste rispettivamente in posizione $(a, b, 0)$ e in posizione $(-a, -b, 0)$ con $a, b > 0$ ed è presente un conduttore (messo a terra) nella regione di spazio $-d < x < d$ (ovviamente con $d < a$)

Problema P.5 (Sfere conduttrici nello spazio). Due sfere conduttrici di raggio a distano $d \gg a$ l'una dall'altra. Su entrambe le sfere è presente una carica di ugual modulo Q ma segno opposto. Calcolare al primo ordine in a/d la forza di interazione elettrostatica.

Problema P.6 (Cilindri conduttori nello spazio (*)). Due cilindri infiniti conduttori di raggio R sono posti in modo tale da avere gli assi paralleli e distanti d l'uno dall'altro (ovviamente con $d > 2R$). Sapendo che la differenza di potenziale tra di essi è V_0 , calcolare la forza di interazione elettrostatica (per unità di lunghezza).

[*Hint*: può essere utile dimostrare che, chiamate r ed r' le distanze di un punto P da due punti fissati nel piano, il luogo dei punti per cui $r/r' = K$ con K una costante arbitraria, è una circonferenza.]

Problema P.7 (Facciamo scontrare palline! (*)). Si ponga una carica q e massa m ferma a distanza d da un semispazio conduttore. Calcolare il tempo che impiega a collidere con il piano.

Considera ora tre piccole palline caricate positivamente che giacciono una ad ogni vertice di un triangolo. Le loro masse sono m_1, m_2 e m_3 e le loro cariche sono rispettivamente Q_1, Q_2 e Q_3 . Quando le perle vengono rilasciate dal riposo, ognuna si muove lungo una diversa linea retta (il tutto si svolge nel vuoto e si possono trascurare gli effetti gravitazionali). Quali condizioni speciali devono essere soddisfatte affinché ciò accada? Trova gli angoli del triangolo formato dalle perle, se i rapporti carica-massa delle tre palline sono nella proporzione:

$$\frac{Q_1}{m_1} : \frac{Q_2}{m_2} : \frac{Q_3}{m_3} = 1 : 2 : 3$$

Problema P.8 (L'attrazione dell'induzione elettrostatica (Senigallia 2013 P2)). Una sferetta di massa m possiede una carica q ed è appesa ad un lungo filo. Se si dispone la sferetta vicino ad una lastra conduttrice scarica,

¹⁸Hint: si osservi cosa succede per $\alpha' = 2\alpha$.

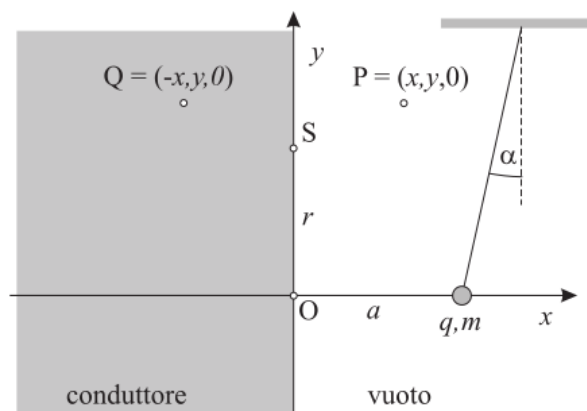


Figura 12: *Senigallia 2013, P3*: una carica davanti ad un piano conduttore.

si osserva che la sferetta viene attratta dalla lastra; questo accade perché, per induzione, sulla superficie della lastra si forma una distribuzione di cariche di segno opposto a q . Si supponga che, all'equilibrio, la sferetta si trovi ad una distanza a dalla lastra e che il filo formi un angolo α con la verticale. Rispetto alla distanza a tra carica e lastra le dimensioni della sferetta sono molto piccole cosicché la carica q può essere sempre considerata **puntiforme**; inoltre le dimensioni della lastra, molto maggiori di a , possono essere considerate **infinite**. Si può quindi considerare un piano (di equazione $x = 0$) come superficie di separazione tra un mezzo conduttore nel semispazio $x < 0$ e il vuoto nel semispazio $x > 0$, entro cui si trova la sferetta. Nella figura è indicato anche il sistema di coordinate consigliato, in modo che la sferetta si trovi sull'asse \hat{x} , quindi nel punto di coordinate $(a, 0, 0)$, che l'asse \hat{y} sia verticale e orientato verso l'alto e l'asse \hat{z} perpendicolare al piano della figura ed uscente. Relativamente alla distribuzione delle cariche indotte, sarà sufficiente studiare la situazione lungo l'asse $y > 0$. Infatti, per simmetria, la densità di carica, σ , dipenderà solo dalla distanza r del punto considerato dall'origine ($r^2 = y^2 + z^2$).

1. Per determinare il campo elettrostatico in un generico punto $P = (x, y, 0)$ nel semispazio vuoto $x > 0$ si consideri inizialmente il punto $Q = (-x, y, 0)$ all'interno del materiale conduttore e simmetrico di P rispetto al piano di separazione tra i due mezzi. Si scrivano il vettore campo e.s. $\mathbf{E}(Q)$ prodotto da tutte le cariche presenti e il vettore $\mathbf{E}_1(Q)$ prodotto dalle sole cariche indotte che si formano sulla superficie della lastra (piano $x = 0$).
2. Si scriva adesso il campo e.s. \mathbf{E}_1 (prodotto dalle sole cariche indotte presenti sulla superficie della lastra) nel punto P nel semispazio $x > 0$,

mostrando che, limitatamente a questo semispazio, il campo \mathbf{E}_1 è identico a quello generato da una singola carica puntiforme q di cui si chiede il valore e la posizione.

3. A titolo d'esempio, si scriva il campo e.s. (totale) \mathbf{E} , nel punto $A = (a, a, 0)$.
4. Si scriva il campo e.s. (totale) \mathbf{E} , in prossimità del punto $S = (0, r, 0)$ nel semispazio vuoto, cioè in un punto vicinissimo alla superficie della lastra, a distanza r dall'origine O ; in altri termini, il limite dell'espressione del campo per $x \rightarrow 0^+$, $y = r$, $z = 0$.
5. Si calcoli la densità di carica indotta $\sigma(r)$ nel punto S e si dica quanto vale nel punto della superficie della lastra dove il suo modulo è massimo.
6. Si calcoli il valore della carica q in funzione di m , a ed α .
7. Si calcoli la quantità totale di carica indotta sul piano conduttore.

Problema P.9 (Carica immagine in un oggetto metallico (IPhO 2010 P1) (*)). Una particella puntiforme di carica elettrica q è posizionata nelle vicinanze di una superficie sferica metallica collegata elettricamente a terra e di raggio R . Di conseguenza, sulla sfera viene indotta una distribuzione superficiale di carica. Riuscire a calcolare il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico prodotti dalla distribuzione della carica superficiale è un compito assai improbo. Tuttavia tale calcolo può essere considerevolmente semplificato utilizzando un metodo matematico chiamato metodo delle immagini. In questo metodo il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico prodotti dalla carica distribuita sulla sfera sono equivalenti a quelli prodotti da una singola carica puntiforme q' posta dentro la sfera (non devi dimostrare ciò).

Nota: Il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico di questa carica immagine q' riproducono il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico solamente all'esterno della sfera (compresa la sua superficie).

- **Parte 1 – La carica immagine.** Per la simmetria del sistema la carica q' si trova sulla linea congiungente la carica puntiforme q e il centro della sfera (confronta la figura 13).
 1. Qual è il valore del potenziale elettrostatico della sfera? (0.3 punti)
 2. Esprimi q' e la distanza d' della carica q' dal centro della sfera, in funzione di q , d e R . (1.9 punti)
 3. Trova l'espressione dell'intensità della forza che agisce sulla carica q . Si tratta di una forza repulsiva? (0.5 punti)

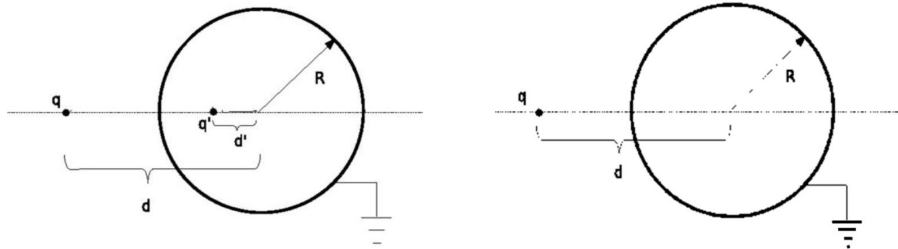


Figura 13: Sfera messa a terra

- **Parte 2**– *Schermaggio di un campo elettrostatico.* Considera una particella puntiforme di carica q posizionata a distanza d dal centro di una sfera metallica di raggio R collegata elettricamente a terra (confronta la figura 14). Siamo interessati a come la presenza della sfera

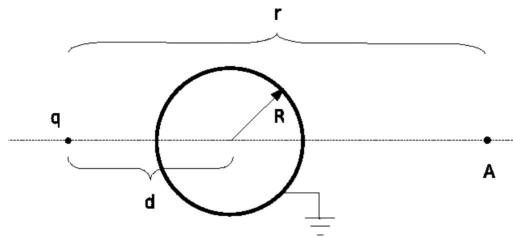


Figura 14: Schermo alla carica.

metallica collegata elettricamente a terra modifica il campo elettrico in un punto A posizionato sul lato opposto della sfera. Il punto A è sulla retta che unisce la carica q al centro della sfera; la distanza di A dalla carica puntiforme q è r .

1. Trova il vettore campo elettrico totale nel punto A . (0.6 punti)
 2. Se la distanza r è molto maggiore di d , trova l'espressione approssimata per il campo elettrico nel punto A utilizzando l'approssimazione $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$, dove $a \ll 1$. (0.6 punti)
 3. A che limite deve tendere d perché la sfera metallica collegata elettricamente a terra schermi completamente il campo generato dalla carica q , in modo che il campo elettrico totale in A sia esattamente nullo? (0.3 punti)
- **Parte 3**– *Piccole oscillazioni nel campo elettrico generato dalla sfera metallica.* Una particella puntiforme di carica q e massa m è legata

a un filo di lunghezza L che ha l'altra estremità fissata a un muro nelle vicinanze della sfera metallica collegata elettricamente a terra (confronta la figura 15). Nelle tue considerazioni, ignora tutti gli effetti

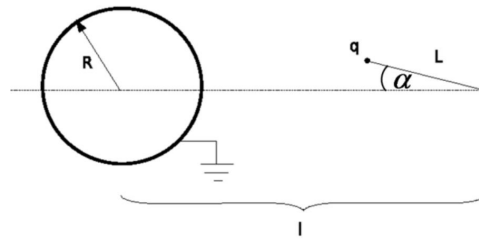


Figura 15: Oscillazioni della carica.

elettrostatici prodotti dal muro. La particella puntiforme si comporta come un pendolo matematico. Il punto al quale il filo è fissato al muro si trova a distanza l dal centro della sfera. Trascura gli effetti della gravità.

1. Trova il modulo della forza elettrica che agisce sulla carica puntiforme q per un certo angolo α e indicane chiaramente la direzione in un disegno (0.8 punti)
 2. Per questa forza, esprimi la componente perpendicolare al filo in funzione di l , L , R , q e α . (0.8 punti)
 3. Trova la frequenza delle piccole oscillazioni del pendolo. (1.0 punti)
- **Parte 4– L'energia elettrostatica del sistema.** Data una distribuzione di cariche elettriche, è importante calcolare l'energia elettrostatica del sistema. Nel nostro problema, c'è interazione elettrostatica tra la carica q esterna alla sfera e le cariche indotte sulla superficie della sfera ed è presente un'interazione elettrostatica anche tra le cariche indotte sulla sfera (fai riferimento alla seconda delle figure 13). In funzione della carica q , del raggio R della sfera e della distanza d determina le seguenti energie elettrostatiche:
 1. l'energia elettrostatica dovuta all'interazione tra la carica q e le cariche indotte sulla sfera; (1.0 punti)
 2. l'energia elettrostatica dovuta all'interazione tra le cariche indotte sulla sfera; (1.2 punti)
 3. l'energia elettrostatica totale del sistema dovuta all'interazione. (1.0 punti)

Hints

1.

$$\int_d^\infty \frac{x \, dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}$$

2. Una famiglia di N cariche puntiformi q_i posizionate nei punti \mathbf{r}_i , l'energia elettrostatica è la semisomma su tutte le coppie di cariche diverse:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Problema P.10 (Aureola bella carica (200 More Physics Puzzling Problems 151)). Considero un anello e una sfera conduttori di raggi rispettivamente R e r . L'anello è caricato in modo che al suo centro il potenziale sia V_0 , mentre la sfera è messa a terra. Ora avvicino l'anello alla sfera in modo tale che il piano in cui giace l'anello sia tangente nel centro dell'anello alla sfera. Calcola la carica totale indotta sulla sfera.

Problema P.11 (Methane is so mundane (200 More Physics Puzzling Problems 152) (*)). Quattro piccole sfere identiche conduttrici A, B, C e D sono posizionate ai vertici di un tetraedro regolare. Se metto q su A questa ha potenziale V . La sfera A ha potenziale V anche se metto $3q/4$ su A e su una delle altre sfere.

1. Calcola la carica che va messa su A e altre due sfere per avere nuovamente il potenziale di A uguale a V (nel senso che su ciascuna delle tre sfere ci deve essere la stessa carica).
2. Stessa domanda di sopra ma utilizzando tutte le sfere.

Dipolo

Problema P.12 (Interazioni tra dipoli). Si considerino due dipoli perfetti: $\mathbf{p}_1 = p_1 \hat{\mathbf{y}}$ posto nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane e $\mathbf{p}_2 = p_2 \hat{\mathbf{x}}$ posto in $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$.

1. Qual è il momento torcente su \mathbf{p}_1 rispetto al suo centro, dovuto a \mathbf{p}_2 ? E quello su \mathbf{p}_2 dovuto a \mathbf{p}_1 ? Perché i due risultati non sono opposti?
2. Calcolare la forza che \mathbf{p}_1 esercita su \mathbf{p}_2 e la forza che \mathbf{p}_2 esercita su \mathbf{p}_1 .
3. Calcolare il momento torcente totale su \mathbf{p}_2 rispetto al centro di \mathbf{p}_1 e confrontarlo con il momento torcente su \mathbf{p}_1 rispetto allo stesso punto. Dovrebbero ora risultare chiari i due diversi (non opposti) risultati ottenuti al primo punto.

Problema P.13 (4.31 Griffiths (*)). Su una circonferenza sono presenti due cariche che formano un dipolo, che sono vincolate a muoversi su di essa e nell'istante $t = 0$ hanno velocità parallela a \mathbf{p} e concorde in verso. Al centro di questa c'è invece una carica Q (confronta la figura 16). Trova la forza sul dipolo e spiega qualitativamente perché questo non può essere un moto perpetuo.

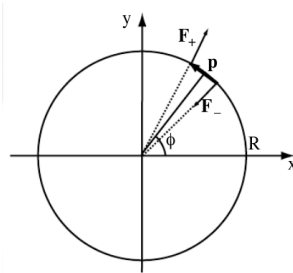


Figura 16: esercizio 4.31 del Griffiths [Gri17].

Problema P.14 (Condensatore semicircolare (Febbraio 2018)). Si consideri un condensatore piano a facce parallele le cui armature hanno la forma di semicerchi di raggio R , ad una distanza $d = \eta R$ con $\eta \ll 1$ (confronta la figura 17a): le due armature sono in aria ($\epsilon_r \approx 1$). Una delle due armature è fissa ed è disposta con il diametro orizzontale, mentre l'altra, di massa m , può ruotare di un angolo θ attorno ad un asse perpendicolare alla faccia e passante per il centro del cerchio C . Poiché la distanza d tra le armature è molto minore del raggio R di queste, si può ritenere - con sufficiente approssimazione - che, quando il condensatore è carico, il campo elettrico tra le armature sia non nullo solo nella parte in cui le due superfici sono affacciate, che sia perpendicolare alle armature e uniforme.

1. Determinare la capacità del condensatore in funzione dell'angolo θ , di R e di η .
2. Se il condensatore viene caricato con un generatore di f.e.m. V_0 nella posizione $\theta = 0$, e successivamente isolato, qual è l'energia elettrostatica U_{es} immagazzinata nel condensatore in funzione dell'angolo θ nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$? Rappresentare schematicamente in un grafico la funzione $U_{es}(\theta)$.
3. Utilizzando la risposta precedente, spiegare perché l'armatura mobile del condensatore rimane in equilibrio solo per $\theta = 0$ sia che il condensatore sia carico sia che sia scarico.

All'armatura mobile viene ora fissato un filo sottile al quale viene appeso un corpo di massa m pari a quella dell'armatura, come mostrato in figura 17b.

4. Determinare l'angolo θ_0 di equilibrio del sistema quando il condensatore è scarico, sapendo che il centro di massa di un semicerchio si trova a distanza $h = \frac{4R}{3\pi}$ dal centro del cerchio.
5. Spiegare perché, se il condensatore è carico, la posizione di equilibrio si ha per un angolo θ^* minore di θ_0 trovato al punto precedente.
6. Nel caso particolare di un condensatore descritto dai valori dati qui di seguito, e calcolando l'energia totale del sistema a partire dalla posizione θ_0 con passo pari a 1° , stimare il valore di θ^* .
 $R = 25 \text{ cm}$, $\eta = 0.004$, $V_0 = 1500 \text{ V}$, $m = 5 \text{ g}$.

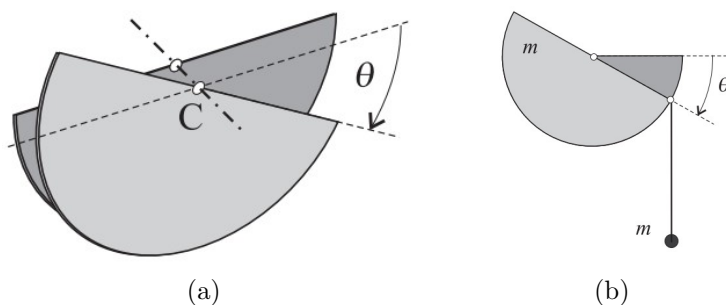


Figura 17: Configurazioni del condensatore semicircolare

Dielettrici

Problema P.15 (Condensatori e dielettrici (*)). Un condensatore piano avente armature quadrate di lato a poste a distanza $h \ll a$ è riempito da due lastre di materiali dielettrici differenti, aventi permeabilità ε_1 e ε_2 con $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. La superficie di contatto tra le due lastre si trova in posizione x . Sulle due armature si trovano le cariche $\pm Q$ rispettivamente.

1. Calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore, trascurando gli effetti di bordo.
2. Determinare la forza che tende a spostare le due lastre di dielettrico.
3. Ripetere il calcolo per la superficie di separazione tra i dielettrici parallela alle armature del condensatore e a metà del suo spessore.

Problema P.16 (Capacitors suck! (IPHO 1972 P3) (**)). Un condensatore piano con armature rettangolari di altezza H è fissato in posizione verticale e produce inizialmente un campo elettrico E . Alla base è in contatto con un liquido dielettrico di permeabilità relativa ε_r e densità ρ . Assumi che la distanza tra le armature sia molto minore delle dimensioni lineari delle stesse. Trascurando effetti di capillarità, trova l'altezza dalla base del condensatore h di cui il liquido è risalito nella condizione di equilibrio.

Magnetostatica

Problema P.17 (Interazioni tra fili). Si considerino due fili infiniti paralleli, posti a distanza d e percorsi da una corrente I : quanto vale la forza che un filo esercita sull'altro? Considerare i casi in cui le correnti sono parallele e antiparallele.

Soluzioni

Soluzione S.1 (problema P.2). Sia Q la carica totale del cubo e l il suo lato. Costruiamo il cubo originale sovrapponendo 8 cubi che hanno uno spigolo $l/2$ e carica totale q . Indico con $V_c(a, p)$ e $V_v(a, p)$ il potenziale al centro e su un vertice in un cubo di lato a e carica totale p (con a e p generici). Dal principio di sovrapposizione allora ottengo $V_c(l, Q) = 8V_v(\frac{l}{2}, q)$. Se la densità di carica ρ è uniforme la carica q in uno dei cubi piccoli sarà $q = \rho(\frac{l}{2})^3 = Q/8$. Per linearità il potenziale può dipendere solo linearmente dalla carica, allora per analisi dimensionale troviamo che $V_v(a, p) = kp/a$, da cui $V_v(l, Q) = kQ/l = \frac{4kq}{l/2} = 4V_v(\frac{l}{2}, q)$. Il risultato cercato è $\frac{V_c(l, Q)}{V_v(l, Q)} = 2$.

Soluzione S.2 (Problema P.3). Calcoliamo il campo elettrico. Notando la simmetria radiale si ha $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$. Dove il valore di $E(r)$ si può trovare con il teorema di Gauss (scegliendo come superficie una sfera centrata nell'origine di raggio r): $4\pi r^2 E(r) = Q_{int}(r)/\epsilon_0$, dove $Q_{int} = Q \cdot r/R$ per $r < R$ e $Q_{int}(r) = Q$ per $r > R$. Otteniamo, infine:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} & (r < R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & (r > R) \end{cases}$$

Al tempo $t = 0$ il campo elettrico all'interno della nube sferica aumenta con r . Così, le particelle "esterne" situate a r più grandi avranno un'accelerazione più alta che le particelle "interne" situate a r più piccole, e dopo un intervallo di tempo infinitesimale le particelle "esterne" avranno una velocità più elevata (supponendo che tutte le particelle abbiano velocità nulla a $t = 0$) e non saranno superate dalle "interne". Inoltre, l'accelerazione ha anche una simmetria radiale e quindi qualsiasi strato sferico conserva la sua forma. Questi argomenti possono essere iterati per qualsiasi tempo successivo, in modo che le particelle non si superino l'un l'altra e la simmetria sferica sia preservata.

Poiché le particelle non si capovolgono tra loro, la carica all'interno di una sfera di raggio $r_i(t)$, cioè la superficie delimitata dallo strato di particelle che a $t = 0$ si trovavano a $r = r_{i0} = r_i(t = 0)$ ¹⁹, è una costante. Quindi, applicando il teorema di Gauss alla superficie sferica di tale raggio, si ha:

$$4\pi r_i^2 E(r_i) = \frac{Q}{\epsilon_0} \left(\frac{r_{i0}}{R}\right)^3$$

¹⁹Sostanzialmente è come se dipingessimo di rosso le cariche che all'istante $t = 0$ erano a un raggio fissato r_{i0} e a ogni istante temporale guardassimo la sfera delimitata dalle particelle rosse in quel momento

Da cui:

$$m \frac{d^2 r_i}{dt} = qE(r_i) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \left(\frac{r_{i0}}{R}\right)^3$$

La forza sulle particelle, e quindi la loro accelerazione, aumenta con r_{i0} , il che è coerente con l'ipotesi del "non sorpasso".

Introducendo ora una nuova variabile $x(t) = r_i(t)/r_{i0}$, l'equazione differenziale appena trovata può essere riscritta come:

$$m \frac{d^2 x}{dt} = qE(r_i) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3 x^2}$$

Dove r_{i0} non compare più; questo significa che la soluzione $x(t)$ con $x(0) = 1$ descrive il moto di tutti gli strati. Come conseguenza si ha la definitiva conferma dell'ipotesi che se per due strati $r_2(0) > r_1(0)$, allora vale $r_2(t) > r_1(t) \forall t$.

Infine il numero di particelle contenute tra gli strati 1 e 2 è costante ed è dato da:

$$\delta N_{12} = N \left[\left(\frac{r_2(0)}{R}\right)^3 - \left(\frac{r_1(0)}{R}\right)^3 \right]$$

E quindi la densità tra i due strati al tempo t è data da:

$$n(t) = \frac{\delta N_{12}}{(4\pi/3)[r_2^3(t) - r_1^3(t)]} = \frac{(N/r)[r_2^3(0) - r_1^3(0)]}{(4\pi/3)[r_2^3(t) - r_1^3(t)]x^3(t)} = \frac{n(0)}{x^3(t)}$$

Con $n(0) = N/(4\pi R^3/3)$ la densità iniziale. Questo risultato non dipende dalla scelta particolare dei due strati, quindi la densità è uniforme a qualsiasi t e diminuisce con il tempo come $x^{-3}(t)$.

Soluzione S.3 (Problema P.4). In tutti i problemi ci limiteremo a trovare la disposizione delle cariche immagine in quanto da lì in poi è un semplice problema di conti. Infatti basta usare il principio di sovrapposizione per avere $E = \sum E_i$ con E_i sono i campi delle cariche puntiformi q_i in posizioni x_i (immagini e reale) con $E_i(\mathbf{x}) = \frac{kq_i \hat{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^2}$ e $\sigma = \epsilon_0 E$.

1. L'idea di base è di provare a mettere insieme i due risultati che abbiamo ottenuto per i problemi di cariche immagini con solo il piano e con solo la sfera (immaginando di continuare la semisfera dentro al conduttore, magari solo tratteggiandola).

Partiamo con il caso facile in cui la carica è posta in posizione $(d, 0, 0)$ e proviamo a mettere solo la carica immagine dovuta alla sfera, ossia $q_1 = -q \cdot \frac{a}{d}$ in posizione $(\frac{a^2}{d}, 0, 0)$ e guardiamo cosa otteniamo: la superficie della sfera (se immaginiamo di continuare la semisfera anche

dentro al conduttore) è effettivamente a terra ma il piano assolutamente no!

Fino ad ora abbiamo considerato solo la presenza della sfera, adesso dimentichiamoci un attimo di questa e consideriamo la sola presenza del piano, mettendo le cariche immagini corrispondenti alle due cariche finora presenti (quella reale e quella immagine q_1 che è anch'essa a destra del piano).

Dobbiamo quindi aggiungere due cariche $q_2 = -q$ in posizione $(-d, 0, 0)$ e $q_3 = -q_1$ in posizione $(\frac{a^2}{d}, 0, 0)$.

Convinciamoci di aver effettivamente ottenuto la soluzione: il piano è a terra in quanto il contributo di q è cancellato dal quello della sua immagine rispetto al piano q_2 mentre quello di q_1 è cancellato da q_3 ; la sfera è a terra in quanto il contributo di q è cancellato dal quello della sua immagine rispetto al piano q_1 mentre quello di q_3 è cancellato da q_2 (qui sto usando il principio di sovrapposizione lineare: divido il sistema fisico come due sistemi ciascuno con solo due cariche e dico che il potenziale totale è la somma dei potenziali nei due casi). Inoltre se avessimo tentato di fare lo stesso giochetto di prima non avremmo comunque ottenuto nulla di fatto: provando a fare la carica immagine di una qualsiasi delle quattro cariche presenti rispetto al piano o alla sfera otterrei solo un'altra delle quattro cariche (in particolare la sfera manda $q \rightarrow q_1$ $q_2 \rightarrow q_3$ e viceversa, mentre il piano manda $q \rightarrow q_2$ $q_1 \rightarrow q_3$ e viceversa).

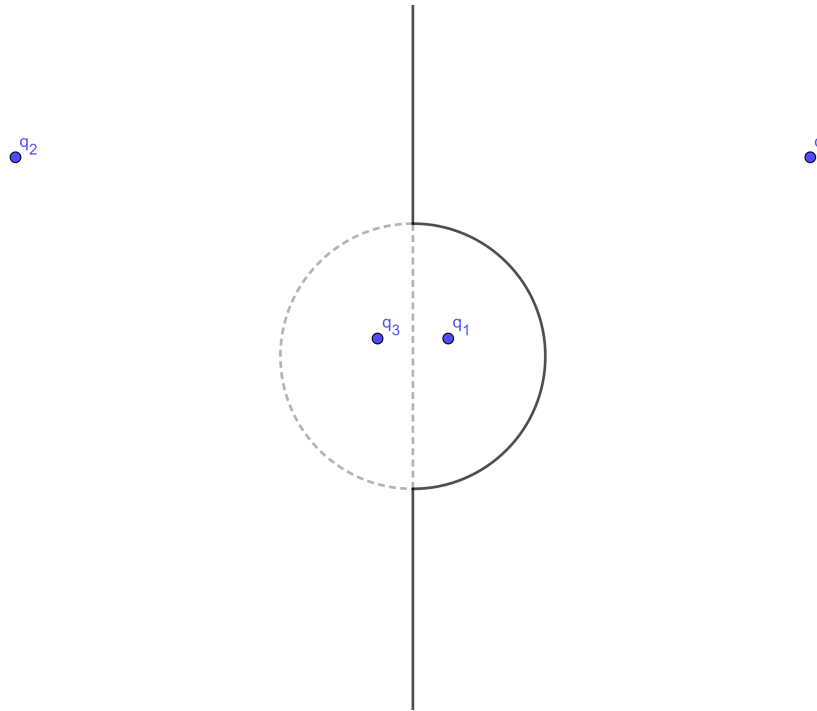
Facciamo ora il caso con la carica in posizione generica. Il concetto è lo stesso: continuare a fare riflessioni e inversioni circolari²⁰ fino a che non ne posso fare più e verificare che ottengo effettivamente la soluzione.

Inizio riflettendo la mia carica rispetto al piano, poi faccio l'inversione circolare di entrambe le cariche rispetto alla sfera. Un rapido controllo mi convince di aver finito.

Una piccola osservazione: in questo caso non ho problemi, ma in teoria dovrei sempre controllare che tutte le cariche immagine siano nella zona conduttrice.

2. Come prima immagino di continuare i due semispazi che delimitano la superficie del conduttore e faccio le cariche immagine della mia carica rispetto ai due piani, ottenendo così $q_1 = q_2 = -q$ rispettivamente in posizioni $(-a, b, 0)$ e $(a, -b, 0)$ e riflettendole ciascuna rispetto all'altro piano (non quello usato per ottenerle a partire dalla carica originale) si

²⁰È semplicemente un modo fancy per chiamare la trasformazione che data una carica mi dice dove si trova la sua carica immagine rispetto alla sfera. [Qui](#) potete trovare qualche informazione in più e convincervi di quanto ho appena detto



ottiene $q_3 = q$ in posizione $(-a, -b, 0)$. Osservando che per ciascun piano esistono due coppie di cariche (diverse per i due piani) in cui il contributo di una carica è annullato da quello dell'altra carica della coppia, ci si convince di aver finito (sempre per principio di sovrapposizione lineare). Consideriamo ora il caso analogo in cui il conduttore occupa solo uno dei quattro quadranti e la carica è posta nel quadrante opposto. Saremmo tentati di fare lo stesso ragionamento di prima e ottenere le stesse quattro cariche disposte a rettangolo. Effettivamente questa soluzione rende la superficie del conduttore equipotenziale, tuttavia avrei due cariche immagine fuori dalla zona conduttrice e quindi è da scartare. Questo è un esempio di problema non risolvibile con questo metodo.

3. Immaginiamo di suddividere lo spazio "a spicchi di torta" ossia inserendo dei piani contenenti l'asse delle z e ciascuno ottenuto da quello precedente ruotandolo di α rispetto all'asse stesso e iterativamente la carica immagine q_{i+1} la si ottiene riflettendo la carica immagine q_i rispetto al piano successivo (osserviamo che questa operazione coincide con una rotazione di un angolo α). Il processo termina grazie all'ipotesi $\frac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{N}^+$ inoltre l'ipotesi che il denominatore sia pari serve perché ogni riflessione cambia il segno della carica e voglio che la prima carica

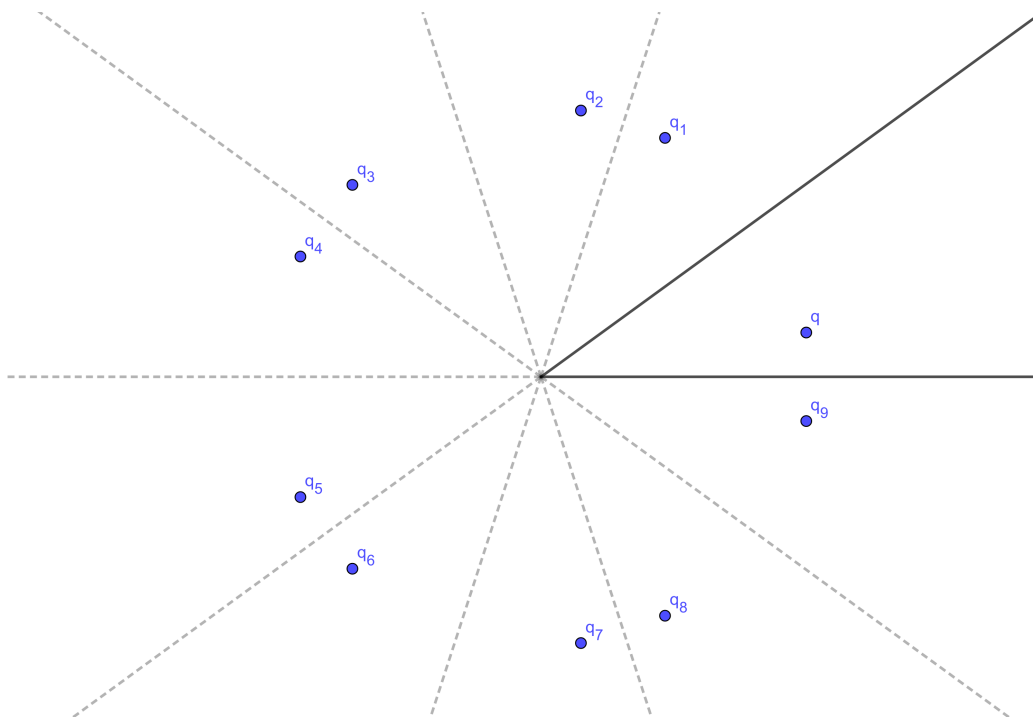


immagine in senso orario abbia lo stesso segno della prima in senso antiorario (entrambi opposti alla carica reale perché ottenute con una sola riflessione a partire dalla reale, ossia rispetto ai piani effettivamente esistenti).

Ancora una volta ci convinciamo di aver ottenuto il risultato perché i contributi delle cariche si cancellano a vicenda.

Lo stesso metodo vale anche quando la carica è posta in una posizione generica (ma in questo caso l'ipotesi sul denominatore serve anche per non avere più di una carica per ogni "fetta" di spazio)

4. Il primo istinto porterebbe a riflettere le cariche rispetto ai piani e continuare questo processo con le cariche immagini. Tuttavia, questa soluzione è problematica per vari motivi tra cui il fatto che dovrei calcolare il campo generato da un numero infinito di cariche puntiformi (che oltre a essere difficile, non so neanche se converge) e tutte nella zona fuori dal conduttore. Proviamo a guardare al problema come alla sovrapposizione di due casi più semplici: un semispazio conduttore nella zona $x \leq d$ davanti al quale c'è una carica q in posizione $(a, b, 0)$ e il problema simmetrico con il conduttore in $x \geq -d$ e carica q in $(-a, -b, 0)$.

Come abbiamo già visto, le soluzioni sono rispettivamente:

$$V_1 = \begin{cases} kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a-2d)^2+(y-b)^2+z^2}} \right) & \text{per } x \geq d \\ 0 & \text{per } x < d \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{cases} kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a+2d)^2+(y+b)^2+z^2}} \right) & \text{per } x \leq -d \\ 0 & \text{per } x > -d \end{cases}$$

che sommate danno come soluzione al problema originale:

$$V = \begin{cases} kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a-2d)^2+(y-b)^2+z^2}} \right) & \text{per } x \geq d \\ 0 & \text{per } -d < x < d \\ kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a+2d)^2+(y+b)^2+z^2}} \right) & \text{per } x \leq -d \end{cases}$$

Questa soluzione è valida perché soddisfa sia le leggi di Maxwell che le condizioni dati dalla presenza dei conduttori (che in realtà sono solo una conseguenza di Maxwell). Chiariamo qualche dubbio che potrebbe sorgere: perché la soluzione è legale anche se quando guardo il sistema nel complesso mi sembra ci siano delle cariche immagine in $(-a + 2d, b, 0)$ e $(a - 2d, -b, 0)$, ossia fuori dal conduttore? In realtà quando guardando l'espressione del potenziale noto che l'effetto della prima carica immagine "si sente" solo nella regione $x > d$ in cui però non c'è la carica stessa e viceversa l'effetto della seconda carica immagine "si sente" solo nella regione $x < -d$. Quindi non c'è nessun punto in cui facendo Gauss posso ottenere un assurdo (si veda pag TOT). Detto in un altro modo, la densità di carica che c'è su una delle due superfici schermo completamente la carica e quindi l'altra superficie è ignara della sua presenza.

Soluzione S.4 (Problema P.5). Risolveremo il problema iterativamente, considerando all'inizio una soluzione grezza e migliorandone via via il grado di approssimazione. Inoltre, vale l'assunzione che la forza che una sfera esercita sull'altra all'ordine di approssimazione scelto è pari alla forza totale che agisce sulle cariche immagine posta dentro la sfera che subisce la forza, come sarà spiegato meglio in fondo a questa soluzione. Di seguito si farà riferimento alla figura (19).

Nell'approssimazione all'ordine costante, le due sfere possono essere approssimate come due cariche $+Q$ e $-Q$ centrate nei centri delle rispettive

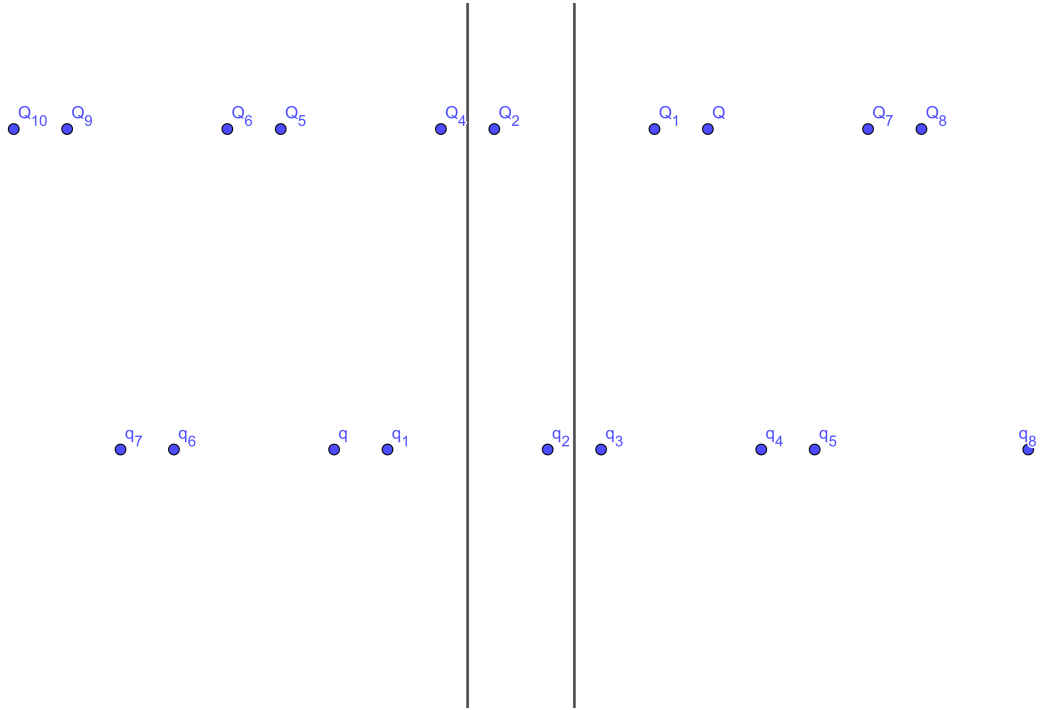


Figura 18: come NON risolvere il problema

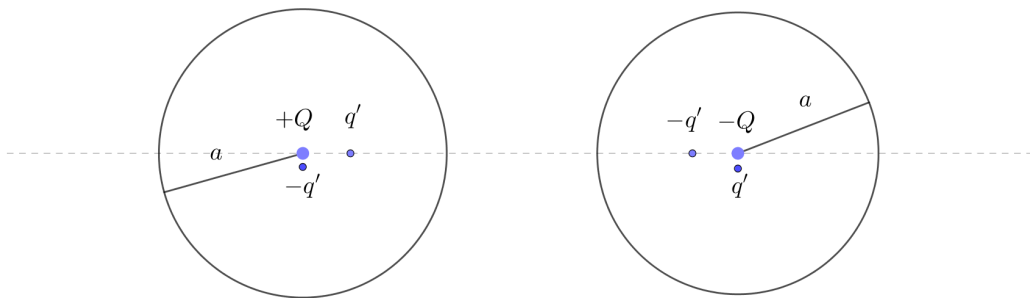


Figura 19: Immagine del problema P.5.

sfere a distanza d l'una dall'altra. La forza fra le due sfere, a questo ordine di approssimazione, vale $F = \frac{Q^2}{d^2}$ in modulo ed è diretta lungo la congiungente dei centri, con verso attrattivo.

Consideriamo ora la sfera di destra. La disposizione delle cariche nel centro delle due sfere non lascia il potenziale costante sulla superficie della sfera, come invece dovrebbe essere dato che la sfera è conduttrice. Per rendere il potenziale costante sulla superficie della sfera di destra, se supponiamo che l'unica carica esterna sia quella posta nel centro della sfera di sinistra, allora richiamando il risultato ottenuto a lezione (confronta 2.2) posizioneremo due nuove cariche, $q_1 = q' = Q\frac{a}{d}$ e $q_2 = -q' = -Q\frac{a}{d}$, rispettivamente nel centro e a distanza $d' = \frac{a^2}{d}$ dal centro. Per la simmetria del problema, se avessimo fatto le stesse considerazioni per la sfera di sinistra, avremmo ottenuto altre due cariche $q'_1 = -q_1 = -q'$ e $q'_2 = -q_2 = q'$ posizionate nel centro della seconda sfera e a distanza $d' = \frac{a^2}{d}$. In questo caso, il modulo della forza vale

$$F = k_e \left(\frac{(Q - q')^2}{d^2} + 2 \frac{(Q - q')q'}{(d - d')^2} + \frac{q'^2}{(d - 2d')^2} \right) \quad (23)$$

Se ora chiamiamo $x = \frac{a}{d}$, allora $q' = Qx$ e $d' = dx^2$, perciò, sviluppando i conti in (23) e sostituendo, possiamo scrivere:

$$F = \frac{Q^2}{d^2} \left((1 - x)^2 + 2 \frac{x(1 - x)}{(1 - x^2)^2} + \frac{x^2}{(1 - 2x^2)^2} \right) \quad (24)$$

e ricordando lo sviluppo di Taylor $(1 - x^2)^{-2} \approx 1 + 2x^2$ si ha che (23) diventa

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{Q^2}{d^2} \left(1 - 2x + x^2 + 2x(1 + 2x^2) - 2x^2(1 + 2x^2) + x^2(1 + 4x^2) \right) \\ &\approx \frac{Q^2}{d^2} (1 + 4x^3) \end{aligned}$$

dove si è trascurato tutti i termini dello sviluppo di ordine superiore al terzo (dipendenti pertanto da x^3). Notiamo che in tal modo la forza è già oltre l'ordine richiesto, e che dunque non è più necessario andare avanti nell'approssimazione. Puntualizziamo che la forza totale fra le due forze non è esattamente quella in (23), e la formula ricavata è solo l'approssimazione dovuta alla prima iterazione del procedimento delle cariche immagine. Questo ci garantisce che approssimare le sfere come cariche puntiformi è un'approssimazione più che buona per la maggior parte dei problemi incontrati.

Perché la forza fra le sfere è proprio la forza fra le cariche immagine? Le cariche immagine sono un costrutto che realizzano il campo elettrico

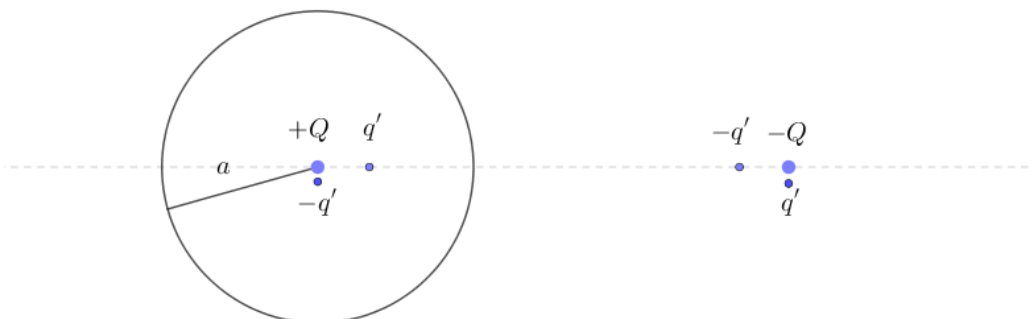
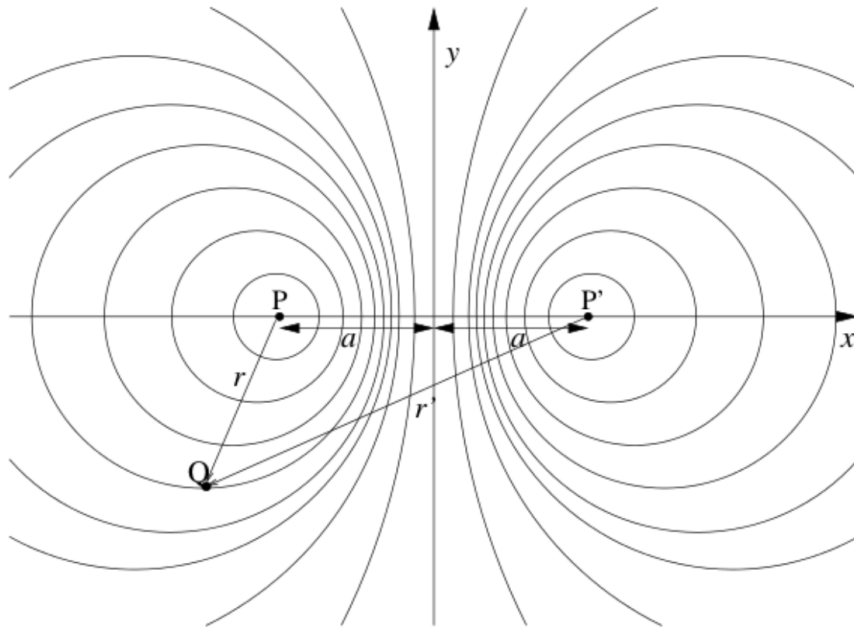


Figura 20: Problema P.5, sostituzione della sfera conduttrice con le cariche immagine.

all'esterno dei conduttori. Ora, consideriamo una nuova configurazione, per cui abbiamo nello spazio che esiste solamente una delle due sfere conduttrici, per esempio quella di sinistra, ed al posto dell'altra poniamo solo le cariche immagini nelle stesse posizioni di figura (19), come mostrato in figura 20. A questo punto, dato che le cariche immagine della sfera rimanente sono un modo comodo per rappresentare una distribuzione di carica che genera lo stesso campo elettrico che la sfera produce. Pertanto, la forza esercitata sulle cariche che sostituiscono l'altra sfera è proprio la forza di interazione fra queste e le cariche immagine. Per la terza legge di Newton (principio di azione e reazione) questa forza è anche la stessa che le cariche immagine esercitano sulla sfera. Sostituiamo nuovamente le cariche con la sfera conduttrice. Il campo elettrico che agisce sulla sfera di destra, nelle due configurazioni, è lo stesso, pertanto la forza che agisce sulla sfera *deve* essere la stessa. Del resto, si è supposto che il campo generato dalla sfera sia lo stesso, in prima approssimazione, di quello generato dalle cariche immagine, pertanto per la sfera di destra il fatto che ci siano cariche come in figura (20) o una sfera come in figura (19) è ininfluenza, l'importante è il campo elettrico che essa percepisce.

Soluzione S.5 (Problema P.6). Iniziamo dimostrando l'hint. Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano e poniamo i due punti fissi in posizioni $(-a, 0)$ e $(a, 0)$, dunque, indicando con (x, y) le coordinate di P si ottiene $r = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ e $r' = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$. Elevando al quadrato entrambi i lati dell'equazione $r/r' = K$ e riarrangiando qualche termine si ha:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{1+K^2}{1-K^2}ax = -a^2$$



da cui, completando il quadrato, si ottiene l'equazione di una circonferenza di centro $(\frac{1+K^2}{1-K^2}a, 0)$ e raggio $\frac{2Ka}{|K^2-1|}$.

Passiamo ora al problema vero e proprio. Notando l'analogia con il problema precedente vorrei iniziare a mettere qualche carica immagine, ma vista la simmetria del problema sotto traslazioni lungo z opto per dei fili immagine paralleli all'asse z .

Da adesso in poi il problema è sostanzialmente diventato due dimensionale: devo solo dividere le coordinate x e y dei fili.

Iniziamo calcolando la forma del potenziale generato da due fili di densità di carica opposta λ e $-\lambda$ posti in posizioni $(-a, 0)$ e $(a, 0)$. Se per il teorema di Gauss il potenziale di un filo vale:

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

dove r è la distanza dal filo (sto implicitamente usando una sorta di sistema di coordinate cilindriche) e r_0 è una costante arbitraria, corrispondente alla distanza in cui abbiamo posto $V = 0$; allora il potenziale di due fili vale:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r'}{r'_0}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r'}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r'_0}{r_0}\right)$$

con r' la distanza dal secondo filo e r'_0 analoga a r_0 . A questo punto però possiamo imporre il termine $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log(\frac{r'_0}{r_0})$ pari a zero, intanto r_0 e r'_0 sono

costanti che posso scegliere arbitrariamente: sto semplicemente fissando lo zero del potenziale (che è infatti definito a meno di una costante) e in questo caso il luogo degli zeri coinciderà con il piano $x = 0$.

L'equazione che caratterizza le superfici equipotenziali diventa:

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r'}\right) = V \quad \equiv \quad \frac{r}{r'} = e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda}$$

che, usando il risultato dell'hint, ci fa concludere che le superfici equipotenziali sono cilindri di centro e raggio rispettivamente:

$$x_0 = \frac{e^{4\pi\epsilon_0 V/\lambda} + 1}{e^{4\pi\epsilon_0 V/\lambda} - 1} a, \quad y_0 = 0 \quad R = \frac{2e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda}}{e^{4\pi\epsilon_0 V/\lambda} - 1} a$$

Moltiplicando numeratore e denominatore di x_0 e R per $e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}$ si ottiene:

$$x_0 = \frac{e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda} + e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}}{e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda} - e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}} a, \quad y_0 = 0 \quad R = \frac{2}{e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda} - e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}} a$$

Che si può riscrivere in termine di funzioni iperboliche come:

$$x_0 = a \coth\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}\right) \quad R = \frac{a}{\sinh\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}\right)}$$

Ora dobbiamo solo scegliere λ e a in modo che il cilindro equipotenziale a potenziale $V_0/2$ abbia raggio R e sia centrato in $(d/2, 0)$ mentre quello a potenziale $-V_0/2$ abbia raggio R e sia centrato in $(-d/2, 0)$. Dividendo membro a membro l'espressione del centro per quella del raggio otteniamo:

$$\frac{d}{2R} = \cosh\left(\frac{\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\pi\epsilon_0 V_0}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{d}{2R}\right)}$$

e quindi sostituendo nell'espressione del raggio (sapendo che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ e quindi $\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$):

$$a = R\sqrt{(d/2R)^2 - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4R^2}$$

dove la radice è ben definita perché, per evitare compenetrazioni, $d > 2R$. Come già spiegato per il problema sopra, la forza (per unità di lunghezza) percepita da uno dei cilindri è la stessa che c'è tra i due fili immagine:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0(2a)} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0\sqrt{d^2 - 4R^2}}$$

Soluzione S.6 (Problema P.7). Per il primo punto, il problema è analogo a quello di due pianeti che si schiantano nel loro centro di massa a causa della forza gravitazionale che attrae i due pianeti. Nel nostro caso, invece, le equazioni del moto si scriveranno come segue. Ponendoci nel sistema di riferimento con assi \hat{y} e \hat{z} sul piano e con l'asse \hat{x} ortogonale al piano e passante per la carica, la forza che agisce sulla carica a distanza x dal piano è esattamente quella che la carica immagine provocherebbe se fosse realmente esistente, ovvero (confronta 2.1)

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4x^2}\hat{x} \quad (25)$$

In questa configurazione, per il solo moto della carica a distanza x dal piano è come se ci fosse, posta nell'origine del nostro sistema di riferimento, una carica $q' = -\frac{q}{4}$, che appunto esercita una forza pari a quella di equazione 25. Questa configurazione è praticamente identica a quella di un pianeta che ruota intorno ad un "sole" fermo nell'origine del sistema. L'analogo della legge di Keplero per questa configurazione è:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k_e q^2}{16\pi^2 m} \Rightarrow T = \pi \sqrt{\frac{16ma^3}{k_e q^2}} \quad (26)$$

dove m è la massa della particella e a è il semiasse dell'orbita. Se supponiamo ora che l'orbita della particella è fortemente eccentrica, ovvero che il fuoco dell'ellisse intorno a cui orbita coincide praticamente con l'origine del nostro sistema di coordinate, allora possiamo scrivere che il tempo che la particella ci impiega ad arrivare nell'origine è pari a metà di tutto il periodo. Inoltre, dato che l'orbita è fortemente eccentrica, il semiasse principale dell'orbita sarà la semidistanza della carica dall'origine, dunque $a = \frac{1}{2}d$. Il tempo di caduta sul piano τ sarà pertanto

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{md^3}{2k_e q^2}} \quad (27)$$

Consideriamo ora il problema delle tre palline²¹.

In assenza di forze esterne, il centro di massa (CM) del sistema fatto dalle tre palline cariche rimane fermo (o si muove a velocità costante, che è equivalente). Perciò è un buon punto da scegliere come origine del sistema di riferimento di un sistema di coordinate, in cui \mathbf{r}_i sono le posizioni delle palline nel sistema di riferimento. Si chiamino le distanze d_i fra le palline come in figura.

²¹Liberamente ispirato al problema 130 di [HRG01].

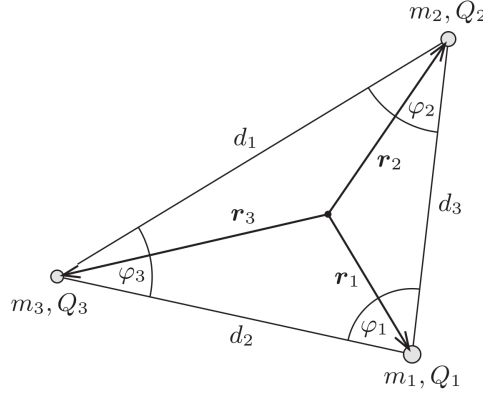


Figura 21: Figura del Problema P.7, ispirato al Problema 130 di [HRG01].

La forza totale che agisce sulla prima particella è la somma delle forze elettrostatiche esercitate dalle altre due cariche:

$$\mathbf{F} = m_1 \mathbf{a}_1 = k_e \frac{Q_1 Q_2}{d_3^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + k_e \frac{Q_1 Q_3}{d_2^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \quad (28)$$

In conseguenza della scelta dell'origine nel centro di massa si ha che

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0$$

E sostituendo \mathbf{r}_3 in (28) dà l'equazione del moto per la prima pallina:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = k_e Q_1 \left(\frac{Q_2}{d_3^3} + \frac{Q_3}{d_2^3} \left[\frac{m_1}{m_3} + 1 \right] \right) \mathbf{r}_1 + k_e Q_1 \left(\frac{Q_3}{d_2^3} \frac{m_2}{m_3} + \frac{Q_2}{d_3^3} \right) \mathbf{r}_2 \quad (29)$$

La condizione per cui la traiettoria della prima pallina sia una linea retta è che l'accelerazione deve essere allineata ad ogni istante al vettore posizione. Pertanto, il fattore che moltiplica \mathbf{r}_2 deve annullarsi, ovvero $Q_2 d_2^3 / m_2 = Q_3 d_3^3 / m_3$. Similmente, data la simmetria del problema se si scambiano gli indici in modo ciclico, si ottiene che

$$\frac{Q_1}{m_1} d_1^3 = \frac{Q_2}{m_2} d_2^3 = \frac{Q_3}{m_3} d_3^3 = \lambda \quad (30)$$

Dove λ ha lo stesso valore per tutti e tre i corpi. Il valore di λ **non** è una costante del moto, ma cambia col tempo dato che la distanza fra le palline aumenta.

Se le uguaglianze in (30) sono soddisfatte, allora l'accelerazione di ogni pallina può esprimersi come (segue dai conti):

$$\mathbf{a}_i = k_e \frac{Q_1 Q_2 Q_3 (m_1 + m_2 + m_3)}{\lambda m_1 m_2 m_3} \mathbf{r}_i \quad (31)$$

Perciò, ad ogni tempo fissato la proporzione del modulo dell'accelerazione è la stessa di quella dei moduli della posizione rispetto al CM. Di conseguenza, il rapporto delle distanze dall'origine delle tre palline rimane *costante nel tempo!*

Questi rapporti possono essere trovati dalla condizione (30 e dalla proporzione massa-carica delle tre palline data nel testo:

$$d_1 : d_2 : d_3 = \sqrt[3]{\frac{m_1}{Q_1}} : \sqrt[3]{\frac{m_2}{Q_2}} : \sqrt[3]{\frac{m_3}{Q_3}} = 1 : \frac{1}{\sqrt[3]{2}} : \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad (32)$$

Con questo rapporto distanza e massa-carica, le tre palline si muovono in modo tale che in ogni momento il triangolo che formano è simile al triangolo iniziale, e usando il Teorema di Carnot so possono ricavare gli angoli del triangolo.

Soluzione S.7 (problema P.10). Detta Q la carica dell'anello, quando questo è molto lontano dalla sfera, il potenziale al suo centro è $V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \implies Q = 4\pi\epsilon_0 R V_0$. Quando dispongo l'anello come descritto nel testo, sulla sfera (che è connessa a terra) viene indotta una carica di polarizzazione. Il potenziale nel centro dell'anello, che ora appartiene alla sfera conduttrice, deve essere nullo. Sia $-q$ la carica totale sulla sfera (il segno meno è coerente con la scelta di $Q > 0$), voglio trovare un modo per utilizzare solamente le cariche totali su anello e sfera senza passare dalle loro distribuzioni superficiali. A questo scopo cerco un punto equidistante da tutti i punti della sfera e dell'anello. Il punto cercato è il centro della sfera, per principio di sovrapposizione il suo potenziale è somma di quello dato dalle cariche dell'anello e quello delle cariche della sfera. Il potenziale dato dalla carica sull'anello per equidistanza di tutti gli elementini di carica è $V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + R^2}}$, e come voluto dipende solo dalla carica totale sull'anello. Analogamente il potenziale al centro della sfera causato dalle cariche sulla sfera è $V_s = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$. La sfera è conduttrice dunque il suo potenziale al centro è uguale a quello sulla superficie, ovvero è nullo. Imponendo $V_a + V_s = 0$ si ottiene $q = 4\pi\epsilon_0 V_0 \frac{rR}{\sqrt{r^2 + R^2}}$.

NOTA: questo problema si poteva risolvere anche con il metodo delle cariche immagine. Il risultato del problema di una carica davanti a una sfera è nota (vedere la lezione), disponendo le cariche immagine per ogni elemento di carica dell'anello ottengo un anello immagine interno alla sfera. Con qualche calcolo si giunge allo stesso risultato trovato tramite il principio di sovrapposizione.

Soluzione S.8 (problema P.11). Anzitutto notiamo che una configurazione di cariche in equilibrio, rimane in equilibrio se moltiplichiamo tutte le cariche

per un fattore λ , e in tal caso per linearità campi elettrici e potenziali sono moltiplicati per λ . Vogliamo ottenere A al potenziale V mettendo una carica uguale su WLOG A, B e C. Chiamiamo il caso in cui si pone q su A configurazione 1, e configurazione 2 e 3 i casi in cui si pone $3q/4$ su rispettivamente A e B e su A e C. Vogliamo ottenere la nuova situazione di equilibrio per sovrapposizione delle vecchie configurazioni, sovrapponendo λ_1 volte la 1 e λ_2 volte la 2 e la 3 (che per simmetria devono contribuire in maniera uguale) abbiamo come condizioni:

$$q\lambda_1 + 2\frac{3}{4}q\lambda_2 = \frac{3}{4}q\lambda_2$$

$$\lambda_1 V + 2\lambda_2 V = V$$

Da cui si ottiene $\lambda_1 = -3/5$, $\lambda_2 = 4/5$, dunque la carica che bisogna mettere su A, B e C è $3q\lambda_2/4 = 3q/5$. Per il secondo punto si procede allo stesso modo aggiungendo anche la configurazione 4 in cui si dispone $3q/4$ su A e D. Come sopra le condizioni 2, 3, e 4 devono contribuire in modo uguale per simmetria, allora si hanno le condizioni:

$$q\lambda_1 + 3\frac{3}{4}q\lambda_2 = \frac{3}{4}q\lambda_2$$

$$\lambda_1 V + 3\lambda_2 V = V$$

Da cui si ottiene $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2/3$, dunque la carica da mettere su tutte le sfere è $3/4\lambda_2 q = q/2$

Soluzione S.9 (Problema P.13). Ruotiamo gli assi in modo che uno dei due (diciamo quello delle ascisse) divida in due l'angolo sotteso dal dipolo (che chiameremo $d\theta$). Il campo elettrico è radiale e di modulo kQ/R^2 uniforme sulla guida.

Scomponiamo le due forze mostrate in figura 16 lungo le due componenti (immaginiamo per semplicità il dipolo \mathbf{p} effettivamente composto da due cariche di modulo q e distanti D , con ovviamente $p = qD$):

$$F_x = qE \cos(d\theta/2) - qE \cos(d\theta/2) = 0$$

$$F_y = qE \sin(d\theta/2) + qE \sin(d\theta/2) = 2qE \sin(d\theta/2) \approx qE d\theta \approx \frac{qED}{R} = \frac{pQ}{R^3}$$

Quindi sembrerebbe quasi ci fosse una forza tutta diretta lungo la guida (e dunque non contrastabile con la reazione vincolare, che è solo radiale) che causerebbe un moto perpetuo! Tuttavia, sebbene la reazione vincolare è solo radiale, anche la forza elettrica lo è. Inoltre, per far mantenere il moto circolare

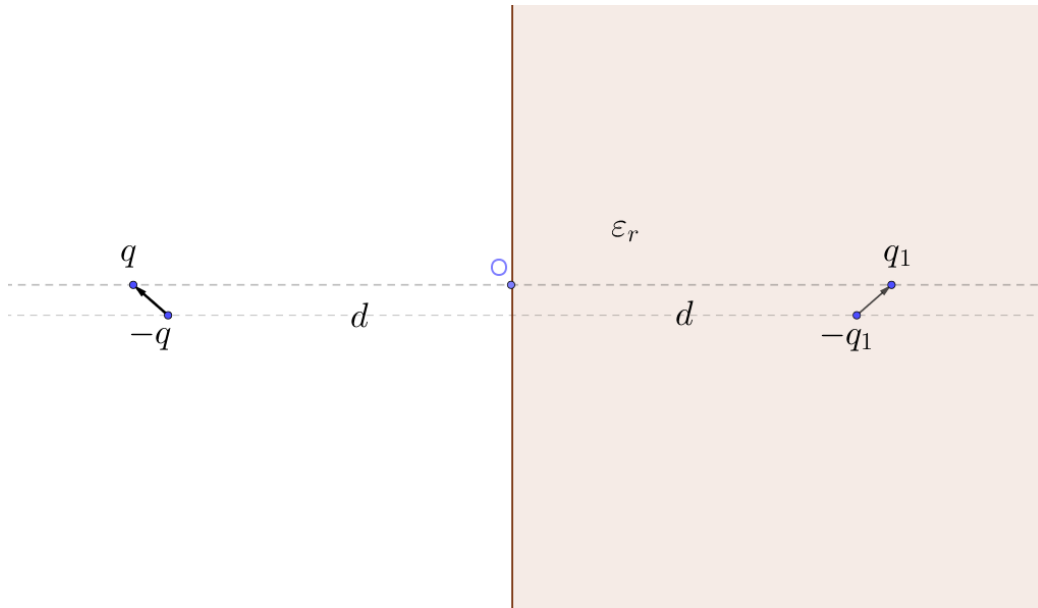


Figura 22: Dipolo davanti ad un dielettrico.

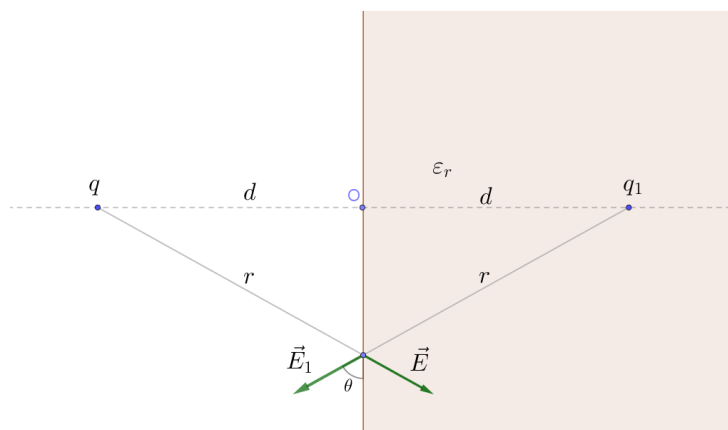
serve anche un momento torcente che tiene il dipolo orientato tangenzialmente alla guida. Come si vede dalla figura il momento torcente dovuto a Q è in senso orario mentre la rotazione del dipolo dev'essere antioraria, quindi le forze vincolari devono essere più grandi delle forze esercitate da Q e in particolare saranno frenanti per il dipolo.

Soluzione S.10 (Problema P.15). Utilizzando la conservatività del campo elettrostatico nella sua espressione globale, ovvero circuitazione nulla, intorno a un cammino rettangolare con due lati paralleli all'interfaccia otteniamo $E_1 = E_2$ (con E_i i campi elettrici nei due diversi dielettrici). Inoltre sappiamo che vale $E_i h = V = Q/C$, ma qual è questa C ?

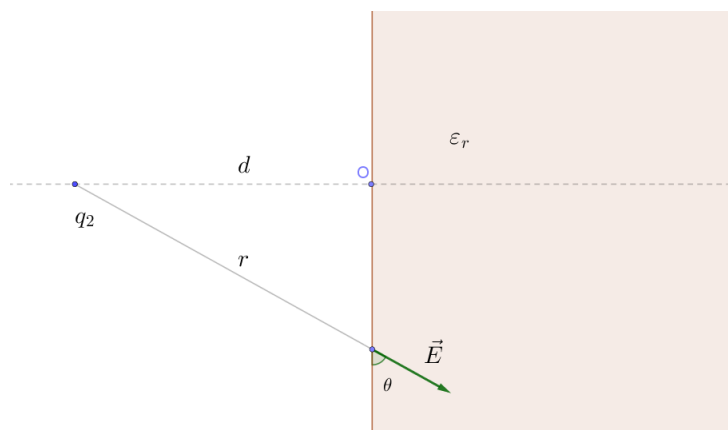
Si può facilmente osservare che, immaginando di vedere il condensatore come due condensatori appiccicati (dove la distinzione tra i due viene fatta in base al dielettrico che c'è tra le piastre), questi possono essere considerati come se fossero collegati in parallelo (infatti la d.d.p. è la stessa, visto che hanno le piastre in comune e queste sono equipotenziali). Quindi $C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 x a}{h} + \frac{\epsilon_2 a(a-x)}{h}$.

Per calcolare la forza sugli strati dielettrici utilizziamo un approccio energetico $F = -\frac{dU}{dx}$ dove $U = \frac{Q^2}{2C}$ ed è quindi interessante notare che il dielettrico con ϵ_i più alta viene tirato dentro, allo scopo di minimizzare l'energia del sistema. Nel caso dei due strati consecutivi con superficie di separazione parallela alle facce del condensatore ci basta usare il teorema di Gauss che ci dice che la componente perpendicolare all'interfaccia di D si conserva e quindi $\epsilon_1 E_1 =$

$\varepsilon_2 E_2$. Inoltre in questo caso abbiamo anche l'equazione $E_1 \frac{h}{2} + E_2 \frac{h}{2} = V = Q/C$ dove però C è data dalla serie di C_1 e C_2 e quindi $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.



(a) Carica immagine all'esterno del dielettrico.



(b) Carica immagine all'interno del dielettrico.

Figura 23: Carica immagine davanti ad un dielettrico.

Riferimenti bibliografici

- [Bog18] Giuseppe Bogna. *Elettrodinamica classica*. 2018. Reperibile [qui](#).
- [Gri17] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics Fourth Edition*, page 312. Cambridge University Press, 2017.
- [HRG01] Gyula Honyek, K. F. Riley, and Péter Gnädig. *200 Puzzling Physics Problems*. 2001.