Calcolo Vettoriale

Luca Vantaggio[*], Antonio Matteri[†]

6 febbraio 2023

Sommario

Lo scopo di questa lezione è quello di trattare la nozione matematica di vettore. Si definiranno le usuali operazioni di prodotto scalare e prodotto vettore, e se ne analizzeranno le proprietà. Verranno studiati sistemi di coordinate diversi da quelle cartesiane, in particolare polari, sferiche e cilindriche. Più in generale si discuteranno i cambi di base. Si vedranno, infine, le rotazioni di vettori e versori.

[*]luca.vantaggio@sns.it
[†]antonio.matteri@sns.it

Indice

1 Cos'è un vettore?

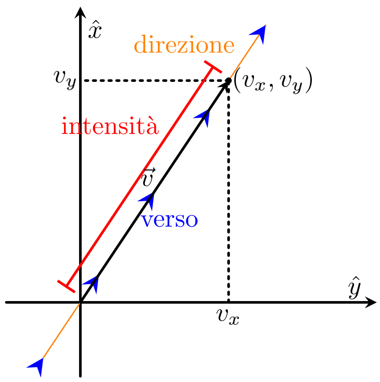
I vettori sono degli enti matematici usati per descrivere numerose grandezze fisiche. Degli esempi di queste sono la posizione di un corpo, la sua velocità e le forze che agiscono su di esso. Si distinguono da altre grandezze come la temperatura o la pressione per il fatto che la loro descrizione è subordinata all'informazione di *una direzione* e *un verso*. In sintesi a caratterizzare un vettore sono

- la sua *intensità* o *modulo*, ovvero un numero che li "quantifichi";
- una *direzione*, ovvero una retta su cui agisce;
- un *verso* di azione sulla retta che ne definisce la direzione.

Fisicamente i vettori sono *applicati* in un qualche punto. Tuttavia per le operazioni che definiremo sarà opportuno pensare che traslare un vettore non lo modifica in alcun modo, ovvero *rimane lo stesso identico oggetto*.

Se fissiamo un sistema di riferimento cartesiano, possiamo pensare che tutti i vettori siano applicati nell'origine. Per questa ragione è possibile descrivere un vettore in maniera alternativa con una n-upla di valori, dove n sarà dettato dalla geometria del problema, come mostrato nella figura 1.

Figura 1: Un vettore può essere identificato da una n-upla di numeri.



Nel caso più frequente di vettori in 3 dimensioni $\mathbf{v} = (x, y, z)$ si avrà che

- l'intensità è descritta dalla *norma euclidea*, ovvero $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- la direzione e il verso sono descritti dal *versore* (cioè un vettore di modulo 1) $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$.

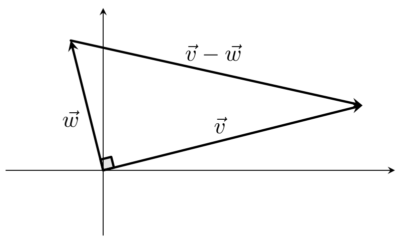
L'unico caso patologico è quello del vettore nullo, per cui non sono definiti direzione, verso e conseguentemente un versore associato. Per tutti gli altri vettori $\mathbf{v}$ ha perfettamente senso scrivere $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \, \hat{\mathbf{v}}$ o $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{v}}$.

Per semplicità nel seguito descriveremo i vettori con *terne* di numeri, salvo indicazione contraria. Inoltre nel definire un dato vettore $\mathbf{v}$ intenderemo sempre $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, con le dovute eccezioni ove specificato diversamente.

2 Prodotto scalare

Per comprendere l'origine del prodotto scalare, ci sembra opportuno risolvere un problema preliminare di centrale importanza.

Figura 2: Esempio di vettori ortogonali.



Problema 2.1. Dati due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, determinare quando questi sono ortogonali in termini delle rispettive componenti.

Soluzione 2.1. Per il teorema di Pitagora, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali se e solo se (vedi figura 2)

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$$

che può essere espressa come

$$\sum_{i=1}^{3} (v_i - w_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} (v_i^2 + w_i^2)$$

Espandendo i quadrati al primo membro e semplificando otteniamo la condizione necessaria e sufficiente

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

che conclude.

Ad un primo sguardo la condizione trovata può sembrare un po' strana. Tuttavia l'espressione al primo membro ha un significato ben preciso, come vedremo. Investighiamone le proprietà.

Definizione 2.1 (Prodotto scalare)**.** Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, definiamo il loro *prodotto scalare* come

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Le seguenti proprietà sono di immediata verifica:

- $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$, ovvero il prodotto scalare è commutativo.
- $((\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}) \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) + \lambda(\mathbf{w} \cdot \mathbf{z})$, dove λ è un numero.
- $\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq 0$.

Una conseguenza molto importante delle precedenti proprietà è il teorema di Carnot.

Teorema 2.1. *Dati due vettori* $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ *risulta che*

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \frac{\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2}{2}$$

Dimostrazione. Segue immediatamente da

$$((\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \qquad \square$$

Una conseguenza importante del teorema di Carnot è che le rotazioni attorno ad un'asse passante per l'origine *conservano* il prodotto scalare.

Consideriamo due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Con un'opportuna rotazione R si può dirigere $\mathbf{v}$ lungo il semiasse positivo delle ascisse, ovvero $R\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Con una successiva rotazione R' attorno all'asse x è possibile portare $R\mathbf{w}$ sul piano xy. Di conseguenza $R'R\mathbf{v} = R\mathbf{v}$, $R'R\mathbf{w} = (w\cos\theta, w\sin\theta, 0)$, dove θ è l'angolo compreso fra i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (poiché le rotazioni *conservano* gli angoli). Di conseguenza

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = (R\mathbf{v}\cdot R\mathbf{w}) = (R'R\mathbf{v}\cdot R'R\mathbf{w}) = vw\cos\theta \tag{1}$$

Otteniamo così che il prodotto scalare che abbiamo definito coincide con quello studiato usualmente a scuola.

Problema 2.2. Siano $\mathbf{a} = (1, 4, 7)$ e $\mathbf{b} = (2, 3, 0)$. Calcolare $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Determinare il valore di $\cos(\theta)$, dove θ è l'angolo compreso fra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Soluzione 2.2. Per la prima parte basta scrivere

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot 2 + 4\cdot 3 + 7\cdot 0 = 14$$

Per calcolare $\cos(\theta)$ basterà scrivere $\cos(\theta) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab}$.

$$\begin{cases} a = \sqrt{1^2+4^2+7^2} = \sqrt{66} \\ b = \sqrt{2^2+3^2+0^2} = \sqrt{13} \\ \cos(\theta) = \frac{14}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{13}} \end{cases}$$

Problema 2.3. Dimostrare che $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Soluzione 2.3. Consideriamo i versori $\hat{\mathbf{v}} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $\hat{\mathbf{w}} = (\cos\beta, \sin\beta)$. L'angolo compreso fra di essi è $\alpha-\beta$, a meno di un segno irrilevante per parità del coseno. Quindi per l'identità (1) risulta che

$$\cos(\alpha-\beta) = (\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{w}}) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

3 Determinante

In questa sezione parleremo del determinante di una matrice quadrata A. Ci limiteremo a introdurlo, darne qualche proprietà algebrica importante e fare dei conti espliciti per calcolarlo.

Definizione 3.1. Il determinante n-esimo è *l'unica* funzione dalle matrici di taglia $n \times n$ a valori negli scalari che rispetti le seguenti proprietà:

- è *multilineare* nelle colonne, ovvero

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} A^{11}+\lambda A^{12} & A^2 & \dots & A^n\end{pmatrix} &= \\ &= \det\begin{pmatrix} A^{11} & A^2 & \dots & A^n\end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} A^{12} & A^2 & \dots & A^n\end{pmatrix}\end{aligned} \quad (2)$$

  e analogamente se ad essere fissate sono $n-1$ colonne qualsiasi (non necessariamente le ultime).

- se A ha due colonne uguali allora $\det A = 0$.

- $\det I_n = 1$.

Ci rendiamo conto che la precedente definizione è *molto* calata dal cielo. Tuttavia negli esercizi sarà più chiaro da dove nasce e per quali ragioni elementari una tale funzione è utile.

Valgono le seguenti proprietà algebriche:

1. scambiare due colonne fa cambiare segno al determinante;

2. se una colonna è nulla allora lo è anche il determinante;

3. se A e B sono matrici *quadrate* della stessa taglia allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

4. sommare ad una colonna un multiplo di un'altra colonna non altera il valore del determinante;

5. $\det A = \det A^t$, cioè tutto quello che vale per le colonne vale anche per le righe;

6. $\det A \neq 0$ se e solo se la matrice A è invertibile.

Facciamo degli esempi.

Esempio 3.1. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice 2×2. Allora

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} =$$

$$= ab \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + ad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ad$$

e analogamente

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & c \end{pmatrix} = -bc$$

Perciò si ha che

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Esempio 3.2. Calcoliamo il determinante di una matrice 3×3. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ e si immagini mentalmente cosa accade se si espandono tutte le colonne come somma di vettori diretti lungo gli assi e si espande usando la multilinearità. Ci si convinca che vale il seguente:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + ahf \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ dbi \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + dhc \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ gbf \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + gec \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ognuna delle matrici al secondo membro si ottiene dalla matrice identità scambiando delle colonne. Se il numero di scambi è pari allora il determinante verrà 1, altrimenti verrà -1. Di conseguenza

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - ahf - dbi + dhc + gbf - gec$$

Riordinando si ottiene la formula di Sarrus per il calcolo del determinante delle matrici 3×3:

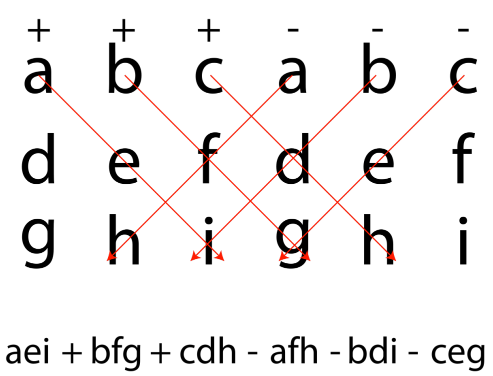
$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Vediamo ora come si calcolano *realmente* i determinanti di matrici 3×3. Ad esempio calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Regola di Sarrus

Un primo modo è con la regola di Sarrus, ovvero con il risultato del conto precedente. Sembra difficile da ricordare, ma si rappresenta molto bene con uno schemino:



Nel nostro caso, affiancando la matrice A a se stessa si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando le diagonali della figura precedente, si nota che solo la prima non contiene uno 0 e dunque sarà l'unica a contribure. Il risultato è quindi $\det A = 1$.

NOTA: la regola di Sarrus funziona solamente per le matrici 3×3!

3.2 Regola di Laplace

Un secondo modo è con gli sviluppi per riga o per colonna, detto anche regola di Laplace.

Per prima cosa assegnamo a scacchiera dei segni $+$ o $-$ a ogni entrata della matrice, partendo con il $+$ in alto a sinistra:

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & +0 \\ -0 & +1 & -0 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Procediamo scegliendo una riga o una colonna della nostra matrice. La scelta non influenza il risultato, ma è molto comodo scegliere una riga o una colonna contenente molti 0. Per la nostra matrice è comoda la terza colonna.

A questo punto si procede sommando il contributo di ciascun elemento della riga (o colonna) scelta, ottenuto moltiplicando il valore di quella entrata per il segno scritto prima e per il determinante della matrice più piccola ottenuta eliminando la riga e la colonna contenenti quell'elemento.

Il procedimento può essere lungo e difficile da comprendere, per cui svolgiamo tutti i passaggi per la nostra matrice A, ricordando che abbiamo scelto la terza colonna:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} +1 & -1 & +0 \\ -0 & +1 & -0 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} = +0 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} -0 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} +1 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dovrebbe essere chiaro perché è meglio scegliere una riga (o colonna) con molti 0, infatti 2 dei 3 termini sopra sono moltiplicati per 0 e quindi non ha nemmeno senso preoccuparsi di calcolarli. Ora serve ricordarsi la formula del determinante di una matrice 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Per la matrice A si ottiene:

$$\det A = +1 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Come detto più volte, il risultato non dipende dalla riga o colonna scelta e corrisponde anche con quello trovato tramite la regola di Sarrus (altrimenti uno dei due sarebbe sbagliato).

A differenza della regola di Sarrus, quella di Laplace vale in dimensione generica, ovvero anche per le matrici $n \times n$ con $n \neq 3$. Il problema è che può essere un calcolo molto lento (è ricorsivo) e alla peggio i termini da calcolare sono $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$. Se mai doveste calcolare il determinante di una matrice grossa a mano (altamente improbabile in una gara), questo sarebbe il metodo più facile da ricordare.

4 Prodotto vettore

Definizione 4.1. Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ due vettori con *tre* componenti, ovvero $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Definiamo il prodotto vettore di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ come

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

dove $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2$ e $\hat{\mathbf{x}}_3$ denotano i vettori $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Poiché scambiare due righe cambia di segno al determinante, è chiaro che $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. É altrettanto chiaro che è *bilineare*, ovvero $(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \lambda \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ e analogamente a destra. Investighiamo le altre proprietà del prodotto vettore.

Problema 4.1. Calcolare il prodotto vettore di $\mathbf{a} = (1, 0, 1), \mathbf{b} = (0, 2, 3)$.

Soluzione 4.1. Basta calcolare

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Per fare questo conto in maniera efficiente conviene sviluppare rispetto alla prima riga, ottenendo

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_2 + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_3 = \\ = (-2, -3, 2)$$

4.1 Prodotto misto

Si può verificare che dati tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ risulta

$$(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Poiché un numero pari di scambi di righe non altera il determinante, risulta che

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza vale che

$$(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})) = (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \tag{5}$$

Una diretta applicazioni delle precedenti è che

$$(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a})) = 0$$

in quanto $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$. Analogamente $(\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = 0$. Abbiamo dunque dimostrato il teorema seguente.

Teorema 4.1. *Il prodotto vettore* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *è* ortogonale *sia ad* $\mathbf{a}$ *che a* $\mathbf{b}$.

Vediamo subito un esempio.

Problema 4.2. Calcolare il prodotto misto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ di $\mathbf{a} = (1, 3, 4), \mathbf{b} = (0, 2, 1), \mathbf{c} = (1, 1, 1)$.

Soluzione 4.2. Dalla Eq. (4) si ottiene che il risultato cercato è:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det A$$

Purtroppo non abbiamo molti 0, quindi è più diretto utilizzare la regola di Sarrus. Scriviamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

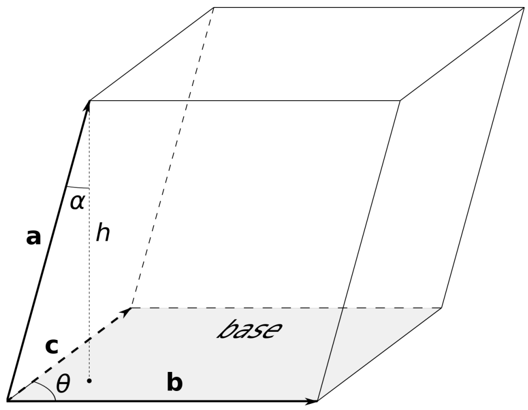
E ricordiamo di partire dalle prime 3 colonne verso destra con il segno $+$ e dalle ultime 3 verso sinistra con il segno $-$:

$$\det A = +2 + 3 + 0 - 1 - 0 - 8 = -4$$

Un modo di interpretare il prodotto misto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ è il seguente: è il volume con segno del prisma che ha per base il parallelogramma avente per lati $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ e per altezza $\mathbf{a}$. La dicitura "con segno" indica solamente che se la terna di vettori non rispetta la regola della mano destra, allora il volume avrà segno negativo. Per una dimostrazione grafica, si veda Fig. 3.

Questa identificazione è dovuta al fatto che $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ è il vettore area del parallelogramma, ovvero il vettore ortogonale ad esso (con un opportuno verso) che ha modulo pari all'area.

Figura 3: Prisma generato dal prodotto misto di 3 vettori.



4.2 Modulo e orientazione

Teorema 4.2. *Il modulo di* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *è* $ab|\sin\theta|$*, dove* θ *denota l'angolo compreso fra* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$.

Dimostrazione. Per definizione si ha che

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\mathbf{x}}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{\mathbf{x}}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{\mathbf{x}}_3$$

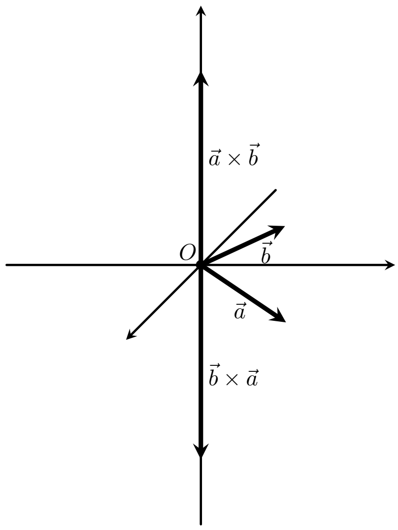
Di conseguenza

$$\begin{gathered}
\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\
= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 = \\
= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) - 2a_2b_3a_3b_2 - 2a_3b_1a_1b_3 - 2a_1b_2a_2b_1 = \\
= a^2b^2 - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 + 2a_2b_2a_3b_3) = \\
a^2b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2b^2(1 - \cos^2\theta) = a^2b^2\sin^2\theta
\end{gathered}$$

che conclude la dimostrazione. □

Osservazione. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ se e solo se $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sono *collineari*, ovvero se e solo se sono allineati.

Figura 4: La regola della mano destra identifica il verso del prodotto vettore.



L'usuale regola della mano destra identifica il verso del prodotto vettore. Questo perché se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$ allora la terna *ordinata* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ è *orientata* o ha la stessa *chiralità* della terna di vettori $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$.

Verificheremo negli esercizi che una terna di vettori $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ è orientata come $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$ se e solo se

$$(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} > 0$$

Di conseguenza $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ è orientata come $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$ in quanto se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$ allora $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 > 0$. Abbiamo provato il seguente.

Teorema 4.3. *Siano* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *vettori non allineati. Allora* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *è quell'*unico vettore *che gode delle seguenti proprietà:*

- *è ortogonale sia ad* $\mathbf{a}$ *che a* $\mathbf{b}$*;*
- *ha modulo* $ab|\sin\theta|$ *dove* θ *è l'angolo compreso fra* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$*;*
- *soddisfa la regola della mano destra.*

4.3 Prodotto triplo

Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ vettori. Ci chiediamo qual è il risultato di $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Questo conto si può fare in più modi. Noi ne riportiamo uno, che però necessita di una minima conoscenza del prodotto di matrici.

Facciamo una digressione. Fissiamo un vettore $\mathbf{b}$ e consideriamo l'applicazione che al generico vettore $\mathbf{v}$ associa $\mathbf{b}\times\mathbf{v}$. Questa è un'applicazione lineare, in quanto $\mathbf{b}\times(\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w}) = \mathbf{b}\times\mathbf{v}+\lambda\mathbf{b}\times\mathbf{w}$. Di conseguenza esiste una matrice $A_{\mathbf{b}}$ tale che $\mathbf{b}\times\mathbf{v} = A_{\mathbf{b}}\mathbf{v}$. Verificheremo negli esercizi che tale matrice è $A_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix}$, dove abbiamo posto $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Di conseguenza

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = A_{\mathbf{a}}A_{\mathbf{b}}\mathbf{c}$$

Calcoliamo il valore del prodotto $A_{\mathbf{a}}A_{\mathbf{b}}$.

$$A_{\mathbf{a}}A_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(a_zb_z + a_yb_y) & a_yb_x & a_zb_x \\ a_xb_y & -(a_zb_z + a_xb_x) & a_zb_y \\ a_xb_z & a_yb_z & -(a_yb_y + a_xb_x) \end{pmatrix}$$

Se utilizziamo nuovamente la notazione con i pedici numerici, completando il prodotto scalare nei termini diagonali otteniamo

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (b_ia_j)_{1\leq i,j\leq 3}\,\mathbf{c} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

Osserviamo ora che

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} (a_x, a_y, a_z) = \begin{pmatrix} b_xa_x & b_xa_y & b_xa_z \\ b_ya_x & b_ya_y & b_ya_z \\ b_za_x & b_za_y & b_za_z \end{pmatrix} = (b_ia_j)_{1\leq i,j\leq 3}$$

Di conseguenza

$$(b_ia_j)_{1\leq i,j\leq 3}\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} (a_x, a_y, a_z) \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$$

Si ottiene così la seguente relazione

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

La precedente identità è nota con il nome di *bac meno cab*.

Enunciamo di seguito il risultato ottenuto.

Teorema 4.4 (bac meno cab)**.** *Dati tre vettori* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *e* $\mathbf{c}$ *risulta che*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{6}$$

Osserviamo come l'identità (6) ci permette di dimostrare in maniera più agevole che il modulo di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è $ab|\sin\theta|$. Infatti

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}))) = \\ &= (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}))) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \\ &= a^2 b^2 (1 - \cos^2\theta) = a^2 b^2 \sin^2\theta\end{aligned}$$

5 Rappresentazioni comode di vettori

In questa sezione analizzeremo varie maniere in cui è possibile rappresentare i vettori. Vedremo inoltre cosa accade se abbiamo un vettore $\mathbf{r}(t)$ variabile nel tempo (quale può essere il vettore posizione di un corpo, ad esempio) e ne vogliamo esprimere le derivate.

Ricorda! *Scegliere la giusta rappresentazione può semplificare notevolmente la risoluzione di un problema.*

Come usuale, indicheremo la derivata prima di $\mathbf{r}$ con $\dot{\mathbf{r}}$ e la derivata seconda con $\ddot{\mathbf{r}}$, e una notazione del tutto analoga varrà per le quantità scalari.

5.1 Coordinate cartesiane

Per un vettore $\mathbf{r}$ nel piano si ha $\mathbf{r} = (r_x, r_y)$. Ponendo $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_1 = (1, 0)$ e $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}_2 = (0, 1)$, si ha che

$$\mathbf{r} = r_x \hat{\mathbf{x}} + r_y \hat{\mathbf{y}}$$

Poiché $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ sono costanti nel tempo, si ha

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}_x \hat{\mathbf{x}} + \dot{r}_y \hat{\mathbf{y}}$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}_x \hat{\mathbf{x}} + \ddot{r}_y \hat{\mathbf{y}}$$

Per vettori nello spazio non cambia nulla: ponendo $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_1 = (1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}_2 = (0, 1, 0)$ e $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}_3 = (0, 0, 1)$ si ha

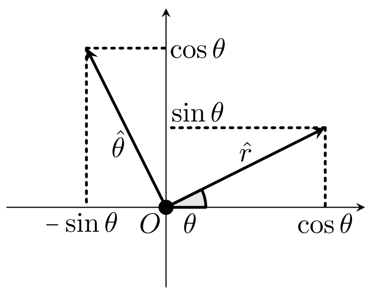
$$\mathbf{r} = r_x \hat{\mathbf{x}} + r_y \hat{\mathbf{y}} + r_z \hat{\mathbf{z}}$$
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}_x \hat{\mathbf{x}} + \dot{r}_y \hat{\mathbf{y}} + \dot{r}_z \hat{\mathbf{z}}$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}_x \hat{\mathbf{x}} + \ddot{r}_y \hat{\mathbf{y}} + \ddot{r}_z \hat{\mathbf{z}}$$

5.2 Coordinate polari di vettori nel piano

Dato un vettore $\mathbf{r} = r(\cos\theta\, \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\, \hat{\mathbf{y}})$ non nullo e variabile nel tempo, definiamo

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\, \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\, \hat{\mathbf{y}}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\, \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\, \hat{\mathbf{y}}$$

Figura 5: Versori delle coordinate polari.



Osserviamo che

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{\theta}\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{r}}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{r}} \\
\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

5.3 Coordinate cilindriche di vettori dello spazio

Le coordinate cilindriche sono una naturale estensione delle polari per vettori nello spazio. L'idea è la seguente: dato un vettore $\mathbf{r}$ si scrive $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + r_z\hat{\mathbf{z}}$ dove $\boldsymbol{\rho}$ è un vettore (variabile nel tempo) che giace sul piano xy. Di conseguenza $\boldsymbol{\rho}$ si può rappresentare in coordinate polari in termini dei versori $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ definiti analogamente. Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + r_z\hat{\mathbf{z}} \\
\dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}_z\hat{\mathbf{z}} \\
\ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{r}_z\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

Si noti infine che $\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{z}}$ e relazioni analoghe *permutando ciclicamente* i versori.

5.4 Coordinate sferiche di vettori dello spazio

Sia $\mathbf{r}$ un vettore non nullo variabile nel tempo. Denotiamo con θ l'angolo che $\mathbf{r}$ forma con il semiasse positivo delle $\hat{\mathbf{z}}$. Denotiamo con ϕ l'angolo che la proiezione di $\mathbf{r}$ forma con il semiasse positivo delle $\hat{\mathbf{x}}$. Si ha che

$$\mathbf{r} = r(\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}})$$

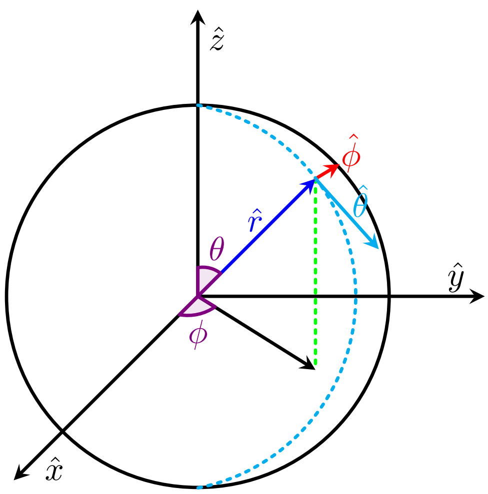
I versori di riferimento per le coordinate sferiche sono

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

Si noti che $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ e relazioni analoghe valgono permutando ciclicamente i versori.

Un primo passo per derivare $\mathbf{r}$ è quello di capire come si derivano i versori. Sconsigliamo di fare davvero questo conto a mano, perché potrebbe essere così atroce da allontanare dall'insegnamento della fisica (*semicit.*). Piuttosto

Figura 6: Versori delle coordinate sferiche.



facciamo prima a ragionare. Innanzitutto un versore ha modulo *costante*, quindi la derivata non può che essere ortogonale, perché altrimenti si avrebbe una variazione al primo ordine del modulo. In un lasso di tempo $\delta t \ll 1$ lo spostamento di $\hat{\mathbf{r}}$ lungo la direzione $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ è al primo ordine pari a $\delta\theta \approx \dot{\theta}\delta t$. Analogamente lo spostamento al primo ordine lungo la direzione $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ non è altro che $\sin\theta\delta\phi \approx \sin\theta\,\dot{\phi}\,\delta t$. Tali spostamenti sono coerenti con i segni, da cui

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Si raccomanda al lettore di fare ragionamenti analoghi per ricavare le altre derivate. Il risultato che si ottiene è il seguente

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\mathbf{r}} - \cos\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Portando avanti i conti si giunge alle seguenti relazioni:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\theta}} +$$
$$+(r\sin\theta\,\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

6 Rotazione di un vettore

In questa sezione ci preoccupiamo di determinare una formula vettoriale concisa per esprimere le rotazioni di vettori dello spazio.

Per descrivere una rotazione sono necessari un asse di rotazione, identificato da un versore $\hat{\mathbf{n}}$, e un angolo di rotazione ϕ. Sia dunque $\mathbf{v}$ un vettore: questo si scrive come

$$\mathbf{v} = v\cos\theta\,\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{v}_\perp$$

dove θ è l'angolo compreso fra $\mathbf{v}$ e $\hat{\mathbf{n}}$, mentre $\mathbf{v}_\perp$ è ortogonale a $\hat{\mathbf{n}}$. Sia R la rotazione che intendiamo descrivere. Allora la componente di $\mathbf{v}$ parallela a $\hat{\mathbf{n}}$ rimane invariata, da cui

$$R\mathbf{v} = v\cos\theta\,\hat{\mathbf{n}} + R\mathbf{v}_\perp$$

È chiaro che risulta che

$$R\mathbf{v}_\perp = \cos\phi\,\mathbf{v}_\perp + \sin\phi\,\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}_\perp$$

Notiamo che $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}_\perp = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{v} - v\cos\theta\,\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}$. Se ne deduce che

$$R\mathbf{v} = v\cos\theta\,\hat{\mathbf{n}} + \cos\phi\,\mathbf{v}_\perp + \sin\phi\,\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}$$

Notando che $v\cos\theta = (\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})$, da cui

$$\begin{aligned} R\mathbf{v} &= (\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \cos\phi\,(\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}) + \sin\phi\,\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v} = \\ &= \cos\phi\,\mathbf{v} + (1-\cos\phi)(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v} \end{aligned} \tag{7}$$

7 Derivata di un versore

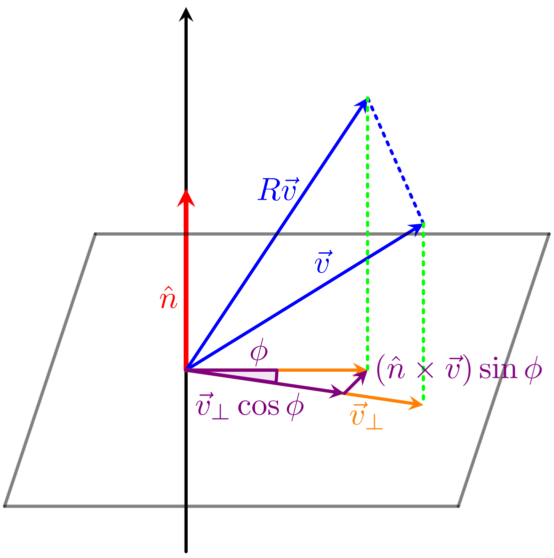
Sia $\hat{\mathbf{v}}(t)$ un versore variabile nel tempo e supponiamo di volerne calcolare le derivate. Approcciamo questo problema in più modi.

7.1 Rotazioni infinitesime

Intuitivamente, per intervalli di tempo trascurabili δt, un versore non può far altro che ruotare attorno ad un asse istantaneo di rotazione di un angolo $\delta\phi$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(t+\delta t) = \cos(\delta\phi)\,\hat{\mathbf{v}}(t) + (1-\cos(\delta\phi))(\hat{\mathbf{v}}(t)\cdot\hat{\mathbf{n}}(t))\hat{\mathbf{n}}(t) + \sin(\delta\phi)\,\hat{\mathbf{n}}(t)\times\hat{\mathbf{v}}(t) \approx \\ \approx \hat{\mathbf{v}}(t) + \dot{\phi}\,\delta t\,\hat{\mathbf{n}}(t)\times\hat{\mathbf{v}}(t) \end{aligned}$$

Figura 7: Rotazione di vettori.



dove l'analisi fatta è un'analisi al primo ordine, in cui di conseguenza $\cos(\delta\phi) \approx 1$ e $\sin(\delta\phi) \approx \delta\phi \approx \dot{\phi}\,\delta t$. Se definiamo $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\phi}\hat{\mathbf{n}}(t)$ si ha che

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{v}}(t) \tag{8}$$

Si osservi che l'asse di rotazione può essere scelto in maniera abbastanza arbitraria, purché il secondo membro di (8) rimanga lo stesso.

7.2 Variazioni al primo ordine del modulo

Un versore $\hat{\mathbf{v}}(t)$ ha modulo costante. Imponiamo questa condizione nei seguenti termini: *il modulo di* $\hat{\mathbf{v}}(t)$ *si conserva al primo ordine di espansione attorno ad ogni istante di tempo* t. Studiamo quindi che proprietà deve avere la derivata per far sì che non vi siano variazioni al primo ordine nel modulo.

Per il teorema di Carnot risulta che

$$\left\|\hat{\mathbf{v}}(t+\delta t)\right\|^2 \approx \left\|\hat{\mathbf{v}}(t) + \dot{\hat{\mathbf{v}}}(t)\delta t\right\|^2 = \left\|\hat{\mathbf{v}}(t)\right\|^2 + \left\|\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t)\right\|^2 \delta t^2 + 2(\hat{\mathbf{v}}(t) \cdot \dot{\hat{\mathbf{v}}}(t))\delta t$$

Di conseguenza il modulo di $\hat{\mathbf{v}}(t)$ si conserva al primo ordine se e solo se $\hat{\mathbf{v}}$ e $\dot{\hat{\mathbf{v}}}$ sono ortogonali. A questo punto il risultato dell'equazione (8) è pienamente giustificato dal fatto che dati due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ortogonali esiste sempre un vettore $\mathbf{c}$ tale che $\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{b}$.

7.3 Derivazione

Sia $\hat{\mathbf{v}}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$. Sappiamo per ipotesi che

$$v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2 = 1$$

Derivando ambo i membri rispetto al tempo si ottiene

$$(\hat{\mathbf{v}}(t) \cdot \dot{\hat{\mathbf{v}}}(t)) = v_x(t)\dot{v}_x(t) + v_y(t)\dot{v}_y(t) + v_z(t)\dot{v}_z(t) = 0$$

Si conclude come in 7.2.

8 Appendici

8.1 Perché le applicazioni lineari?

Per capire l'importanza delle applicazioni lineari, vale la pena discutere un esempio. Studiamo il moto di un pendolo semplice nel regime di piccole oscillazioni. Impostiamo le equazioni del moto:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T\sin\theta \\ m\ddot{y} = T\cos\theta - mg \\ x = \ell\sin\theta \\ y = \ell\cos\theta \end{cases}$$

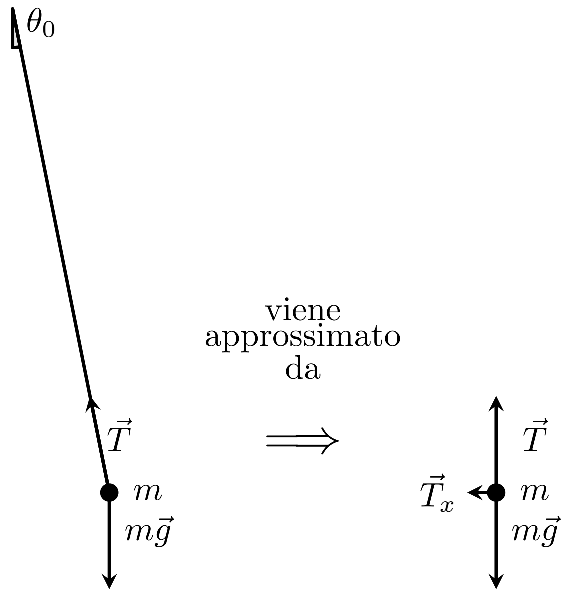
Nel regime di piccole oscillazioni possiamo *linearizzare* le equazioni differenziali, ottenendo un sistema più semplice da risolvere. In particolare se $|\theta| \leq \theta_0 << 1$ possiamo scrivere $\cos\theta \approx 1$, nel senso che $|\cos\theta - 1| \leq \beta\theta^2$ per un'opportuna costante β. Al nostro ordine di espansione uno scarto del genere è *davvero* trascurabile. Di conseguenza risulta che $y \approx \ell$. Fisicamente è chiaro che se $y \approx \ell$ allora le derivate della y devono essere trascurabili. Questo tuttavia andrebbe verificato, e la verifica consiste nel determinare delle espressioni per $\dot{y}, \ddot{y}$ e valutarne l'ordine. Per brevità lasciamo questa verifica al lettore.

Il risultato della linearizzazione è dunque il seguente

$$\begin{cases} T = mg \\ \ddot{x} = -\frac{g}{\ell}x \\ y = \ell \end{cases}$$

Nella sostanza siamo partiti da un sistema di equazioni differenziali la cui risoluzione non è così chiara per poi ricavarne uno *lineare* nelle variabili di interesse.

Figura 8: Approssimazione nel regime di piccole oscillazioni.



In termini delle derivate seconde di x, y il sistema linearizzato corrisponde a

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{\ell}x \\ \ddot{y} = 0 \end{cases}$$

Più in generale ci saremmo potuti aspettare un sistema del tipo

$$\begin{cases} \ddot{x} = ax + by \\ \ddot{y} = cx + dy \end{cases}$$

nel quale ai secondi membri delle equazioni ci sono delle espressioni *lineari* nelle variabili x, y a priori più complicate.

Già questo rappresenta un motivo sensato per essere interessati allo studio delle applicazioni lineari. Ma c'è di più. Dalla conservazione dell'energia meccanica risulta che $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta =$ costante. Derivando rispetto al tempo e semplificando $\dot{\theta}$ si ottiene $m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$, ovvero

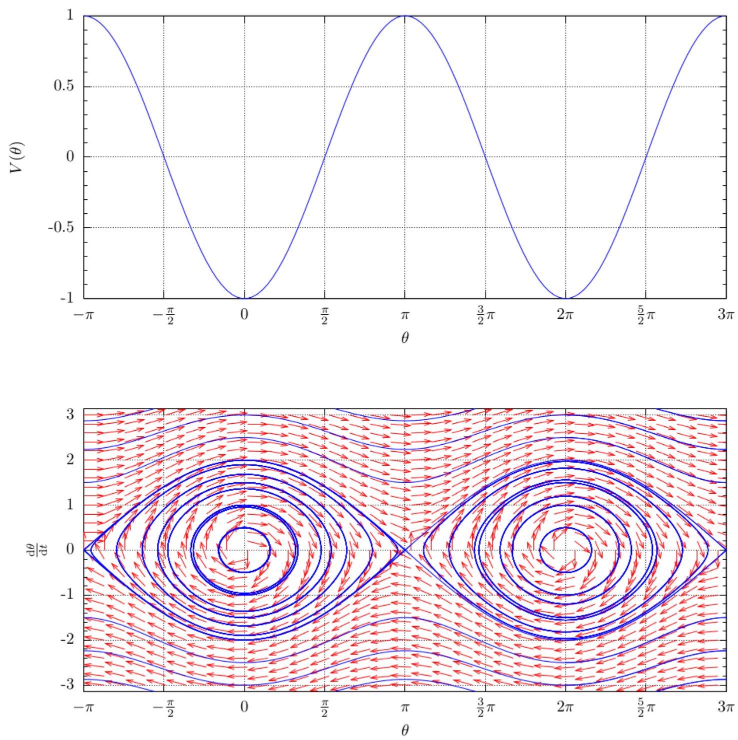
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \tag{9}$$

Definiamo il vettore $\gamma(t) = (\theta(t), \dot{\theta}(t)) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Questo verifica l'equazione differenziale

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\gamma_2(t), -\frac{g}{\ell}\sin\gamma_1(t)\right)$$

Di conseguenza $\gamma(t)$ descrive la curva planare tangente in ogni istante al campo di vettori $\mathbf{F}(x,y) = (y, -\sin x)$.

Figura 9: Rappresentazione del campo $\mathbf{F}$ e delle soluzioni del moto.



La geometria di $\mathbf{F}$ è tutto sommato abbastanza complicata, come si evince dalla figura 9. Nel regime di piccole oscillazioni risulta che $\left|\gamma_1(t)\right| = \left|\theta(t)\right| \leq \theta_0 << 1$, ovvero nella regione di interesse di $\gamma(t)$ il campo $\mathbf{F}$ è ben approssimato dal campo $\mathbf{G}(x,y) = (y, -\frac{g}{\ell}x)$. Di conseguenza possiamo approsimare $\gamma(t)$ con la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{\ell}x \end{cases} \tag{10}$$

Per semplicità continueremo a indicare la soluzione del sistema (10) con $\gamma(t)$. [1]
A questo punto segnaliamo più modi di procedere.

8.1.1 Primo metodo

Consideriamo il sistema (10). Moltiplichiamo la prima equazione per $\frac{g}{\ell}x$, la seconda per y e sommiamo le equazioni così ottenute. Si ottiene così la condizione $\frac{g}{\ell}x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ che integrata rispetto al tempo risulta essere equivalente a

$$\frac{g}{\ell}x^2 + y^2 = \text{costante} \tag{11}$$

che in sostanza ci dice che la traiettoria della soluzione è contenuta in un'ellisse, e in effetti $\gamma(t)$ ne definisce una parametrizzazione.

Problema 8.1. A cosa corrisponde la condizione (11)? Si sarebbe potuta ricavare sin dall'inizio?

8.1.2 Secondo metodo

Definiamo $\omega = \sqrt{g/\ell}$ e riscriviamo il sistema (10) come

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x \end{cases} \tag{12}$$

Il nostro obiettivo è quello di disfarci del coefficiente ω^2 nella seconda equazione. Definiamo $t' = \omega t$ e $z = \frac{y}{\omega}$. Allora la prima equazione del sistema (12) si riscrive come

$$\omega\frac{dx}{dt'} = \frac{dx}{dt} = y = \omega z$$

$$\frac{dx}{dt'} = z \tag{13}$$

Invece la seconda equazione del sistema (12) si riscrive come

$$\omega^2\frac{dz}{dt'} = \omega\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x$$

$$\frac{dz}{dt'} = -x \tag{14}$$

[1] Si noti che adesso x, y indicano delle generiche variabili. Non sono le coordinate della massa m del pendolo.

Mettendo assieme le equazioni (13) e (14) si ottiene il nuovo sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt'} = z \\ \frac{dz}{dt'} = -x \end{cases} \tag{15}$$

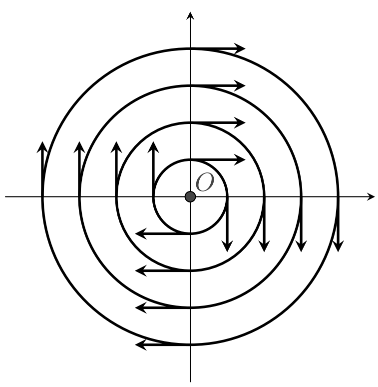
Quindi $\delta(t') = (x(t'), z(t'))$ descrive una curva che tange in ogni punto il campo di vettori $\mathbf{H}(x, y) = (y, -x)$. La rappresentazione di questo campo è estremamente semplice, visto che

- $\mathbf{H}(x, y) \cdot (x, y) = 0$, ovvero (x, y) e $(-y, x)$ sono ortogonali;
- $\|\mathbf{H}(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$;
- il campo descritto da $\mathbf{H}$ si avvolge in senso orario attorno all'origine.

A questo punto è chiaro che a patto di scegliere opportunamente l'origine dei tempi risulta che $\delta(t') = R(\cos t', -\sin t')$, dove R è una costante. Questo significa che $\theta(t) = x(t) = R\cos(\omega t)$ e $\dot{\theta} = y(t) = \omega z(t) = -\omega R \sin(\omega t)$. Dalla condizione iniziale $\theta(0) = \theta_0$ si ottiene

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \cos(\omega t) \\ \dot{\theta} = -\omega\theta_0 \sin(\omega t) \end{cases}$$

Figura 10: Rappresentazione del campo **H** e delle soluzioni del moto.



8.1.3 Conclusioni

Cosa abbiamo imparato da questo esempio? Le equazioni differenziali si possono sempre osservare con un occhio geometrico, associando loro dei *campi di vettori*. Le geometrie di questi campi possono essere anche *molto più complicate* di quelle dell'esempio considerato. *Linearizzare* le equazioni differenziali attorno ai punti di equilibrio permette di semplificare la geometria dei campi e facilita notevolmente la comprensione di ciò che accade.

È per questo che con grande trepidazione ci lanciamo nello studio delle applicazioni lineari!

8.2 Le applicazioni lineari

Prima di cominciare, chiariamo le notazioni. Spesso ci ritroveremo a scrivere i vettori in verticale, o per ragioni di spazio o perché le operazioni che definiremo lo necessitano. È chiaro che scriverli in orizzontale o verticale non cambia la sostanza, quindi non ci si ponga un'attenzione eccessiva.

Definizione 8.1. Un'applicazione lineare è una funzione che associa al vettore $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ il vettore

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

dove gli a_{ij} sono costanti.

Si verificherà negli esercizi che un'applicazione $\mathcal{L}$ è lineare se e solo se per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ e λ reale si ha $\mathcal{L}(\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) + \lambda\mathcal{L}(\mathbf{w})$. Per ora ci si limiti a tenerlo a mente in vista delle prossime sezioni.

Un'applicazione lineare è determinata dai coefficienti a_{ij}, ovvero è identificata dalla *matrice* di *taglia* $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si può scrivere anche $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$. Dato un vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, un'applicazione lineare $\mathcal{L}$ e la corrispondente matrice, si scrive che

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \mathcal{L}(\mathbf{x}) =$$

$$= A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La somma di due matrici della stessa taglia è definita entrata per entrata, ovvero se A, B sono matrici $m \times n$ si ha $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$. Analogamente $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.

Sia A un matrice e indichiamo con $A_1, A_2, \dots, A_m$ le sue righe, ovvero $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ per definizione abbiamo che $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (A_1 \cdot \mathbf{x}) \\ (A_2 \cdot \mathbf{x}) \\ \vdots \\ (A_m \cdot \mathbf{x}) \end{pmatrix}$. In un certo senso quest'operazione definisce una moltiplicazione fra una matrice e un vettore. Adesso definiremo una moltiplicazione fra matrici di cui la precedente sarà un caso particolare (se vediamo un vettore come una matrice di taglia $n \times 1$).

Siano $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ due applicazioni lineari. Non dovrebbe stupire che la loro composizione $\mathcal{L} \circ \mathcal{M}$, se ben definita, rimane un'applicazione lineare. Qual è la matrice associata ad essa? Siano A, B le matrici associate a $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ rispettivamente. Restringiamoci al caso in cui A, B siano matrici di taglia 2×2, ovvero $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Sia $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \circ \mathcal{M}(\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = A \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \\ a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se indichiamo con A_1, A_2 le righe di A e con B^1, B^2 le *colonne* di B, abbiamo ottenuto che

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (A_1 \cdot B^1) & (A_1 \cdot B^2) \\ (A_2 \cdot B^1) & (A_2 \cdot B^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Poniamo per definizione AB uguale alla matrice al secondo membro. Più in generale, date due matrici A, B di taglia $m \times p$ e $p \times n$ rispettivamente, indicate le righe di A con $A_1, A_2, \dots, A_m$ e le colonne di B con $B^1, B^2, \dots, B^n$, poniamo

$$AB = \begin{pmatrix} (A_1 \cdot B^1) & (A_1 \cdot B^2) & \dots & (A_1 \cdot B^n) \\ (A_2 \cdot B^1) & (A_2 \cdot B^2) & \dots & (A_2 \cdot B^n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (A_m \cdot B^1) & (A_m \cdot B^2) & \dots & (A_m \cdot B^n) \end{pmatrix}$$

Per la sua definizione peculiare, questa moltiplicazione fra matrici ha il nome di *prodotto riga per colonna.* Valgono le seguenti proprietà algebriche:

- $(AB)C = A(BC)$, ovvero è *associativo.*
- $(A+B)C = AC+BC$, ovvero *distribuisce la somma a sinistra.* Analogamente $A(B + C) = AB + AC$;
- ammette come elemento neutro la matrice identità I di taglia $n \times n$, le cui entrate sono della forma

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  In buona sostanza risulta che $A\,I = I\,A = A$ per ogni matrice A *di taglia* $n \times n$.

Purtroppo non è commutativo. Infatti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e malauguratamente questo non è un caso patologico. Non c'è davvero nessuna ragione per cui dovremmo aspettarci che due matrici commutino!

Data una matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ di taglia $m \times n$, definiamo $A^t = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq m}}$ la matrice A *trasposta*, le cui colonne sono esattamente le righe di A. L'aver definito la trasposizione risolve innanzitutto dei problemi notazionali, in quanto se scriviamo il vettore riga $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, il corrispondente vettore colonna sarà $\mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, e viceversa. La trasposizione gode inoltre di proprietà di calcolo importanti, la cui verifica lasciamo al lettore. In particolare:

- date due matrici A, B della stessa taglia, risulta che $(A+B)^t = A^t + B^t$.
- per ogni matrice A risulta che $A^{tt} = A$, ovvero ogni matrice è la trasposta della sua trasposta;
- se A, B sono matrici di taglia $m \times p$ e $p \times n$ rispettivamente allora $(AB)^t = B^t A^t$.

Infine, data una matrice *quadrata* A(cioè di taglia $n \times n$ per un qualche n), diremo che è *invertibile* se esiste una matrice quadrata B tale che $AB = BA = I_n$, dove I_n denota la matrice identità di taglia $n \times n$. Tale matrice B, se esiste, si indica con A^{-1}. Se A è una matrice quadrata invertibile, risulta che

- $(A^{-1})^{-1} = A$, ovvero ogni matrice invertibile è l'inversa della sua inversa;
- A^t è invertibile e vale che $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Molte proprietà delle matrici verranno investigate meglio negli esercizi che si raccomanda al lettore di risolvere.

8.3 Rotazioni infinitesime

In questa sezione ci poniamo la seguente domanda: quando l'applicazione lineare $I + \delta\phi\, N$ è un'isometria al primo ordine in $\delta\phi$? Dato un vettore $\mathbf{v}$, osserviamo che

$$(I + \delta\phi N)\mathbf{v} = \mathbf{v} + \delta\phi N\mathbf{v}$$

Per quanto detto in 7.2 si ha la conservazione del modulo al primo ordine se e solo se $(\mathbf{v} \cdot N\mathbf{v}) = 0$. Definiamo $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = (\mathbf{x} \cdot N\mathbf{y})$ e osserviamo che è bilineare nei suoi argomenti. Abbiamo detto che per ogni vettore $\mathbf{v}$ risulta che $\langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = 0$, da cui per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ risulta

$$0 = \langle x + y|x + y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle = \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle$$

ovvero $(\mathbf{x} \cdot N\mathbf{y}) = -(\mathbf{y} \cdot N\mathbf{x})$. Quindi se $I + \delta\phi N\mathbf{v}$ è un'isometria al primo ordine *implica* che $(\mathbf{x} \cdot N\mathbf{y}) = -(\mathbf{y} \cdot N\mathbf{x})$. Tuttavia ponendo $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ è chiaro che tale condizione è anche sufficiente. Osserviamo ora che

$$(\hat{\mathbf{x}}_i \cdot N\hat{\mathbf{x}}_j) = \hat{\mathbf{x}}_i \cdot N^j = N_{ij}$$

da cui la condizione necessaria e sufficiente si scrive come $N_{ji} = -N_{ij}$ oppure $N^t = -N$, ovvero

$$I + \delta\phi\, N = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi\, N_{12} & \delta\phi\, N_{13} \\ -\delta\phi\, N_{12} & 1 & \delta\phi\, N_{23} \\ -\delta\phi\, N_{13} & -\delta\phi\, N_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

Se definiamo $\mathbf{n} = (-N_{23}, N_{13}, -N_{12})$, per quanto vedremo negli esercizi avremo che per ogni $\mathbf{v}$ risulta

$$(I + \delta\phi\, N)\mathbf{v} = \mathbf{v} + \delta\phi\, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \tag{16}$$

ovvero, come ci si aspettava, una tale applicazione lineare non è altro che una rotazione di angolo "infinitesimo" $\delta\phi\|\mathbf{n}\|$ attorno all'asse definito da $\mathbf{n}$ (si confronti con l'espansione al primo ordine di (7)).

Si noti che due rotazioni in generale non commutano, ma due rotazioni infinitesime commutano al primo ordine! Infatti

$$(I + \delta\phi\, N)(I + \delta\theta\, M) = I + \delta\phi\, N + \delta\theta\, M + \delta\phi\, \delta\theta N M \approx I + \delta\phi\, N + \delta\theta\, M$$

e chiaramente avremmo ottenuto il medesimo risultato scambiando i due fattori al primo membro.

9 Esercizi base

Esercizio 9.1. Definiamo $\mathbf{a} = (1, -5, 3), \mathbf{b} = (0, 3, 9), \mathbf{c} = (2, 2, -1), \mathbf{d} = (3, 0, -2)$.

1. Calcolare i prodotti scalari di tutte le possibili coppie di vettori.
2. Calcolare $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$.
3. Calcolare $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ sia utilizzando il risultato precedente che direttamente.
4. Calcolare $\mathbf{d} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ e $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))$.

Esercizio 9.2. Trova il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & -4 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & -4 \\ 10 & 35 & 10 & 25 \\ 742 & 1523.1 & -42\pi & 33 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.3. Dati $\mathbf{a} = (1, 1, 1), \mathbf{b} = (4, -2, 3), \mathbf{c} = (7, 3, -1)$, calcolare:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$;
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{c} \times \mathbf{b}$;
- $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$;
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Esercizio 9.4. Trovare in funzione di n il determinante della matrice $n \times n$ formata da 1 sull'antidiagonale e 0 in tutte le altre entrate. Per esempio con $n = 3$ la matrice è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.5. Date:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Trovare $\det A$, $\det B$, $\det C$, $\det(A+B)$, $\det(A+B+C)$.

Esercizio 9.6. Dati $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$ e $\mathbf{b} = (6, 1, -5)$, calcolare $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e il determinante della matrice che ha per righe i tre vettori. Tale determinante può essere interpretato come prodotto misto di 3 vettori, come può semplificare il conto notare questa cosa?

Esercizio 9.7. Calcolare il determinante della seguente matrice (sconsiglio di usare subito Laplace):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 & 51 \\ 2 & 3 & 10 & 7 & 29 \\ 3 & -4 & 15 & -8 & 30 \\ 4 & 7 & 20 & 14 & 2 \\ 5 & -2 & 25 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.8. Consideriamo un triangolo nel piano cartesiano che ha per lati adiacenti $\mathbf{a} = (2, 3)$ e $\mathbf{b} = (1, 4)$.

1. Trovare l'area del triangolo, in particolare ricordando come è legata alla lunghezza di due lati adiacenti e al valore dell'angolo tra di essi.

2. Generalizzare a due vettori qualsiasi.

3. Considerando i due vettori nel piano come appartenenti allo spazio tridimensionale (con la terza componente nulla), trovare un terzo vettore per cui l'area del triangolo sarà, a meno di un segno, uguale al prodotto misto opportuno dei 3 vettori.

10 Esercizi

Esercizio 10.1. Una massa m è vincolata a muoversi su una sfera con centro fisso nell'origine e raggio R. Siamo in presenza di un'accelerazione di gravità $\mathbf{g} = -g\hat{z}$.

1. Trovare, usando le formule delle coordinate sferiche, le condizioni per cui essa può restare a θ costante.

2. Scrivere le generiche equazioni del moto con condizioni iniziali arbitrarie. Ci sono quantità conservate? Quali?

Esercizio 10.2. Una massa m si trova nel punto (x, y, z) e si muove con velocità (v_x, v_y, v_z). Trovare tutte le componenti del momento angolare della massa rispetto a un generico punto (x_0, y_0, z_0).

Esercizio 10.3. Un corpo di massa m oscilla nello spazio secondo la legge $\mathbf{r}(t) = (x_0, y_0 \cos \omega t, 0)$. Trovare il momento angolare del corpo rispetto all'origine e il momento torcente necessario a generare un tale moto.

Esercizio 10.4. Una lastrina di metallo a forma di parallelepipedo è percorsa da una corrente **I** parallela ai 4 spigoli più lunghi. La lastra è immersa in un campo magnetico **B** ortogonale a **I** e a due facce del parallelepipedo. Spiegare perché tra le facce non ortogonali nè a **I** nè a **B** si genera una differenza di potenziale. Cambia qualcosa se la corrente è generata da un flusso di elettroni o di protoni? Questo fenomeno è detto effetto Hall.

Esercizio 10.5. Una particella di massa m orbita intorno a una stella di massa $M \gg m$. Il momento angolare della particella rispetto al centro di massa del sistema ha modulo L.

1. Trovare l'equazione differenziale che descrive l'accelerazione radiale in funzione della distanza dalla stella.

2. Se la particella si muove di moto circolare uniforme, qual è il raggio r_0 dell'orbita?

3. Trovare il potenziale radiale $V(r)$ tale che $\ddot{r}(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$.

Esercizio 10.6. Consiglio svolgere il problema 7.4 del libro [Mor08].

Esercizio 10.7. Consideriamo un pianeta di massa m in orbita intorno a una stella di massa $M \gg m$. L'orbita sarà in generale ellittica e si può ricavare (lo vedrete nell'opportuna lezione) che si conserva (ovvero non varia lungo un'orbita) il vettore di Lenz:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - GMm^2 \hat{r}$$

dove $\mathbf{p}$ è la quantità di moto del pianeta, $\mathbf{L}$ il suo momento angolare rispetto alla stella e $\hat{r}$ è il versore che dal pianeta punta verso la stella.

Dando per assodato che è una quantità conservata, trovare direzione e verso del vettore di Lenz.

Esercizio 10.8. Consideriamo un corpo puntiforme di massa m soggetto a una forza

$$\mathbf{F} = \alpha \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Dove α è una costante opportunamente dimensionata.

1. Dimostrare che il modulo della velocità è una costante del moto.

2. Dimostrare che la grandezza

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}$$

   è una costante del moto.

Scegliamo ora un sistema di coordinate sferiche (r, θ, ϕ) con $\hat{Q}$ versore dell'asse polare.

3. Calcolare $\mathbf{Q} \cdot \hat{\phi}$ e mostrare che anche θ è una costante del moto. Di conseguenza, m si muove lungo la superficie un cono.

4. Calcolare $\mathbf{Q} \cdot \hat{r}$ e $|\mathbf{Q}|$.

5. Calcolare $\mathbf{Q} \cdot \hat{\theta}$ e mostrare che

$$\dot{\phi} = \frac{k}{r^2}$$

   Determinare inoltre la costante k.

6. Determinare $r(\phi)$. (Suggerimento: scrivere esplicitamente v^2 e un'opportuna equazione differenziale della forma $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = f(r)$).

Esercizio 10.9. Consiglio svolgere il problema 3.23 del libro [Mor08].

Esercizio 10.10. Siano $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ rispettivamente un campo elettrico e un campo magnetico uniformi e ortogonali. Una particella di carica q parte da ferma e su di essa agisce la forza elettrica $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ e la forza di Lorentz $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Che forma assume la traiettoria del moto? (*Soluzione*: è una Cicloide)

Esercizio 10.11. Una palla viene lanciata in aria con una certa velocità iniziale $\mathbf{v}_0$. Sapendo che $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$ descrive l'attrito dovuto all'aria, determina posizione e velocità in funzione del tempo.
(Esercizio 5.128 del libro [Cel18])

Esercizio 10.12. Vogliamo calcolare le forze apparenti subite da un corpo in un sistema non inerziale. Le forze apparenti sono quelle forze che non corrispondono a un'interazione tra corpi o a un potenziale, ma al fatto che noi stiamo osservando da un sistema non inerziale un fenomeno. Sono sostanzialmente dovute al fatto che la seconda legge di Newton presenta dei termini aggiuntivi.

Per iniziare, consideriamo un corpo che non subisce forze. Osservato dal sistema inerziale O, esso compie un moto descritto da $\mathbf{r}(t)$. Supponiamo di osservarlo ora da un sistema O' accelerato linearmente di $\mathbf{a}_0$ rispetto al sistema O.

1. Trovare la forza apparente che subisce il corpo nel sistema O'.

Supponiamo ora che il sistema O', oltre ad essere accelerato, ruoti anche con velocità angolare ω.

2. Trovare le forze apparenti che subisce il corpo nel sistema O'.

Esercizio 10.13. Un'onda elettromagnetica piana è costituita da campi elettrici e magnetici oscillanti che rispondono alle equazioni di Maxwell. In questo esercizio non è richiesto sapere nulla di elettromagnetismo.

Il campo elettrico di un'onda nello spazio è $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ con $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{k}$ e ω costanti opportune. Le equazioni di Maxwell nel vuoto, nel sistema cgs (di nuovo, non serve sapere cosa sia), sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}}{\mathrm{d}t}$$

dove ∇ può essere pensato come il vettore $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)$.

1. Dalla prima equazione, dedurre una relazione tra $\mathbf{k}$ e $\mathbf{E}_0$.

2. Con un opportuno guess, trovare il campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

3. Trovare una relazione tra $\mathbf{k}$ e ω necessaria affinché risultino valide tutte le equazioni.

11 Esercizi di approfondimento

Esercizio 11.1. Siano $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$ e $\mathbf{b} = (3, 4, 0)$. Si determini il valore di $\cos\theta$, dove θ è l'angolo compreso fra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Si stimi il valore di θ.

Esercizio 11.2. Si determini nuovamente $\cos\theta$ per $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ come nell'esercizio precedente. Per farlo, si ruotino preliminarmente i vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ per portare uno dei due sull'asse x e l'altro sul piano xy.

Esercizio 11.3. Siano $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_n$ versori a due a due ortogonali. Si dimostri che se

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

allora ogni α_i è nullo. Si dice che i $\hat{\mathbf{v}}_i$ sono *linearmente indipendenti*.

Esercizio 11.4. Sia A una matrice di taglia 3×3. Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo e Π il piano ortogonale a $\mathbf{v}$. Si dimostri che se $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$ per un qualche α allora $A^t\Pi \subseteq \Pi$ e viceversa.

Esercizio 11.5. Determina un piano invariante (cioè che viene applicato in se stesso) per l'applicazione lineare definita dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 11.6. Dato un set di n vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ e un vettore $\mathbf{w}$, si dice $\mathbf{w}$ è una *combinazione lineare* di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ se e solo se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tali che

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Si dimostri che $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ non è una combinazione lineare di $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{c} = (2, 3, 5)$.

Esercizio 11.7. Sia n un naturale fissato (di solito 2 o 3). Per ogni $1 \leq k \leq n$, denotiamo con $\hat{\mathbf{x}}_i$ il vettore $(\delta_{k1}, \delta_{k2}, \ldots, \delta_{kn})$, cioè con un 1 nella posizione k-esima e 0 altrove. Sia A una matrice di taglia $m \times n$. A cosa corrispondono le colonne di A in termini dei versori $\hat{\mathbf{x}}_k$?

Esercizio 11.8. Si dimostri che un'applicazione lineare $\mathcal{L}$ verifica

$$\mathcal{L}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) + \mathcal{L}(\mathbf{w}) \tag{17}$$

$$\mathcal{L}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathcal{L}(\mathbf{v}) \tag{18}$$

Si verifichi che le precedenti condizioni sono equivalenti a

$$\mathcal{L}(\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) + \lambda\mathcal{L}(\mathbf{w}) \tag{19}$$

Se ne deduca che se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ allora

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i A^i \tag{20}$$

Esercizio 11.9. Si dimostri che se l'applicazione $\mathcal{L}$ soddisfa le condizioni (17) e (18) allora è lineare.

Esercizio 11.10. Si verifichi che un'applicazione lineare definita dalla matrice A è iniettiva se e solo se $A\mathbf{v} = 0$ implica $\mathbf{v} = 0$.

Esercizio 11.11. Si dimostri che un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se *conserva* la lineare indipendenza.

Esercizio 11.12. Calcola il prodotto delle matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 11.13. Sia $\mathbf{v} = (1, 1)$. Si determinino α, β tali che $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ con $\mathbf{a} = (1, 2)$ e $\mathbf{b} = (2, 5)$.

Esercizio 11.14. Abbiamo scoperto che le colonne di una matrice A sono le immagini dei versori $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_n$ dove n è il numero di colonne di A. Tuttavia, come abbiamo visto nell'esercizio precedente e anche nella teoria, noi possiamo esprimere un vettore anche usando degli altri vettori di riferimento. In particolare si potrebbe dimostrare che una buona rappresentazione si può ottenere *solamente* con *n vettori linearmente indipendenti*. Un tale set di vettori è detto *base*.

Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ vettori linearmente indipendenti e denotiamo con $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ il vettore delle *coordinate secondo la base* $\mathcal{B}$, ovvero tale che

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i$$

Si dimostri che la mappa che a $\mathbf{v}$ associa $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ è lineare. Si definisca inoltre

$$A_\mathcal{B}^\mathcal{B} = ([A\mathbf{a}_1]_\mathcal{B}, [A\mathbf{a}_2]_\mathcal{B}, \ldots, [A\mathbf{a}_n]_\mathcal{B})$$

Cosa rappresenta intuitivamente $A_\mathcal{B}^\mathcal{B}$? Cosa fa nello specifico? Che legame matriciale c'è fra A e $A_\mathcal{B}^\mathcal{B}$?

Esercizio 11.15. Si faccia un disegno qualitativo del campo di vettori che a $\mathbf{v} = (x, y)$ associa $A\mathbf{v}$, con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Suggerimento 11.1. Si noti che $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ sono una l'inversa dell'altra.

Esercizio 11.16. Data una matrice A di taglia 2×2, è noto che si può scrivere come SDS^{-1} dove la matrice D è di una delle seguenti forme:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Dare delle condizioni necessarie e sufficienti affinché A sia del primo tipo, del secondo o del terzo.

Esercizio 11.17. In questo esercizio diamo una definizione alternativa di numero complesso.

Definiamo $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Si dimostri che

- è chiuso per somma di matrici;
- è chiuso per prodotto di matrici;
- i numeri complessi *commutano* per prodotto;
- Si dimostri che $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ con

$$\begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

- se definiamo $1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ allora $i^2 = -1$;
- ogni numero complesso si scrive come $a + ib = a \cdot 1 + b \cdot i$ in maniera unica;
- l'usuale norma di un numero complesso z corrisponde a $\sqrt{\det z}$;
- ogni numero complesso $z \neq 0$ è una *rotoomotetia* del piano.

Esercizio 11.18. Si risolva il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by \\ \dot{y} = bx + ay \end{cases}$$

Esercizio 11.19. In riferimento agli esercizi 16 e 18, ci si assicuri di saper risolvere tutti i seguenti problemi differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by \\ \dot{y} = bx + ay \end{cases}$$

Esercizio 11.20. Sia A una matrice quadrata e λ uno scalare. Si dimostri che esiste $\mathbf{v} \neq 0$ tale che $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ se e solo se

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Il polinomio nella variabile λ definito da $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ è detto *polinomio caratteristico di A.*

Esercizio 11.21. Si dimostri il teorema di *Cayley-Hamilton*, secondo cui $p_A(A) = 0$, dove $p_A(x)$ è il polinomio caratteristico di A matrice quadrata.

Suggerimento 11.2. Si proceda per induzione sulla taglia della matrice. Si dimostri preliminarmente che il polinomio caratteristico non dipende dalla base di rappresentazione, ovvero $p_{A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}}(x) = p_A(x)$.

Esercizio 11.22. Sia A una matrice quadrata di taglia 2×2 e diversa da un multiplo dell'identità. Allora il polinomio caratteristico identifica univocamente il "tipo" di A. In particolare:

1. se $p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reali allora esiste una matrice S invertibile tale che

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

2. se $p_A(x) = (x - \lambda)^2$ con λ reale allora esiste una matrice S invertibile tale che

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} S^{-1}$$

3. se $p_A(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ con α complesso non reale allora esiste una matrice S invertibile tale che

$$A = S \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} S^{-1}$$

Esercizio 11.23. Determina il tipo delle seguenti matrici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11.24. Sia A una matrice $n \times n$. Ci si convinca del fatto che vale

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

dove A_{ij} si ottiene da A cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima.

Esercizio 11.25. In questo esercizio diamo una formula esplicita per la matrice inversa di una matrice quadrata A. Come sappiamo risulta che $AA^{-1} = I$, ovvero che

$$A(A^{-1})^i = A(A^{-1}\hat{\mathbf{x}}_i) = \hat{\mathbf{x}}_i$$

Ovvero la colonna i-esima della matrice inversa è la soluzione di $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_i$, che a ben vedere è un sistema di n equazioni in n incognite.

Si supponga di voler risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove A è una matrice quadrata invertibile. Sia $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la soluzione del sistema. Si determini una formula chiusa per $\mathbf{x}$. Se ne deduca la formula per il calcolo dell'inversa di A.

Esercizio 11.26. Calcola l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ usando la formula trovata nell'esercizio precedente.

Esercizio 11.27. Fissato un vettore $\mathbf{b}$, si osservi che la mappa che al generico vettore $\mathbf{v}$ associa $\mathbf{b} \times \mathbf{v}$ è lineare.

Si determini la matrice associata a tale applicazione. Essa risulterà antisimmetrica. Perché?

Suggerimento 11.3. Si veda la sezione sulle rotazioni infinitesime, con particolare riferimento all'antisimmetria della matrice N.

12 Soluzioni esercizi base

Soluzione 12.1. Si riportano solo le risposte numeriche:

1.:

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 12 \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -11 \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} = -3 \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = -3 \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} = -18 \quad \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} = 8$

2.:

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} == (-54, -9, 3) \quad \mathbf{c}\times\mathbf{d} = (-4, 1, 6) \quad \mathbf{a}\times\mathbf{c} = (-1, 7, 12)$

3.:

$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -129$

4.:

$\mathbf{d}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = (-11, 34, -21) \quad \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})) = (-231, 198, -66)$

Soluzione 12.2.

$$\det\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & 2\end{pmatrix} = 22 \qquad \det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -3 \qquad \det\begin{pmatrix}6 & 5\\ 12 & 10\end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 7\end{pmatrix} = 58$$

$$\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -4 & 2\\ 6 & 3 & 9\end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix} = 11$$

$$\det\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 4 & 9\\ 1 & -4 & -1 & 6\\ 2 & 0 & 1 & -5\end{pmatrix} = -176 \qquad \det\begin{pmatrix}2 & 7 & 2 & 5\\ 1 & 2 & 5 & -4\\ 10 & 35 & 10 & 25\\ 742 & 1523.1 & -42\pi & 33\end{pmatrix} = 0$$

Soluzione 12.3.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5 \quad \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} = 25 \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 9$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (5, 1, -6) \quad \mathbf{c} \times \mathbf{b} = (7, -25, -26)$$
$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -44$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (1, -33, 32)$$

Soluzione 12.4. La soluzione si può trovare considerando i casi con n piccolo:
$$\det \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$
Si nota che per ogni n si può utilizzare il metodo di Laplace sull'ultima colonna. In particolare, si ottiene che il risultato è $(-1)^n$ per il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ e ci si può ricondurre al caso con una matrice più piccola.

Intuitivamente, o più formalmente impostando un'induzione, si ottiene che il determinante dipende dal resto nella divisione per 4 di n: se esso è 0 o 1 il determinante è 1, altrimenti è -1.

Soluzione 12.5. Abbiamo
$$\det A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1)) = 55$$
dove il senso è che ho usato Laplace sulla seconda colonna. Per gli altri determinanti si può benissimo usare la formula di Sarrus ove non siano presenti altri metodi di risoluzione. I risultati sono
$$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -26$$
$$\det C = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 12$$

dove abbiamo usato la multilinearità del determinante rispetto alle righe e alle colonne.

$$\det(A+B) = \det \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} = -77$$

$$\det(A+B+C) = \det \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & 7 & -3 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 18 & 0 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} = 18 \cdot 6 = 108$$

dove abbiamo usato la multilinearità rispetto alle righe e Laplace. Da notare che *non è vero* che il determinante di una somma di matrici è la somma dei determinanti delle matrici.

Soluzione 12.6. $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} = (-2, 8, 4)$ e quindi

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & 5 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 84$$

Il precedente determinante si può interpretare come

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (-2)^2 + 8^2 + 4^2 = 84$$

Soluzione 12.7.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 6 & 4 & 51\\ 2 & 3 & 10 & 7 & 29\\ 3 & -4 & 15 & -8 & 30\\ 4 & 7 & 20 & 14 & 2\\ 5 & -2 & 25 & -4 & 5\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 4 & 51\\ 2 & 3 & 0 & 7 & 29\\ 3 & -4 & 0 & -8 & 30\\ 4 & 7 & 0 & 14 & 2\\ 5 & -2 & 0 & -4 & 5\end{pmatrix} =$$

perché abbiamo sottratto 5 volte la prima colonna alla terza. Usando Laplace sulla prima riga ne deduciamo che

$$= \det\begin{pmatrix}2 & 3 & 7 & 29\\ 3 & -4 & -8 & 30\\ 4 & 7 & 14 & 2\\ 5 & -2 & -4 & 5\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2 & 3 & 7 & 29\\ 3 & -4 & -8 & 30\\ 0 & 1 & 0 & -56\\ 5 & -2 & -4 & 5\end{pmatrix} =$$

perché ho sottratto 2 volte la prima riga alla terza. Se ora sommiamo la prima e la terza riga alla seconda otteniamo

$$= \det\begin{pmatrix}2 & 3 & 7 & 29\\ 5 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -56\\ 5 & -2 & -4 & 5\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2 & 3 & 7 & 29\\ 5 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -56\\ 0 & -2 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

dove abbiamo sottratto la seconda riga alla quarta. Usiamo Laplace sulla prima colonna ottenendo

$$= 2\det\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -56\\ -2 & -3 & 2\end{pmatrix} - 5\det\begin{pmatrix}3 & 7 & 29\\ 1 & 0 & -56\\ -2 & -3 & 2\end{pmatrix} =$$

A questo punto per entrambi i determinanti usiamo Laplace sulla seconda riga, ottenendo

$$= -2\det\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix} + 112\det\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -3\end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix}7 & 29\\ -3 & 2\end{pmatrix} +$$

$$- 280\det\begin{pmatrix}3 & 7\\ -2 & -3\end{pmatrix} = -14 - 224 + 505 - 1400 = -1133$$

Soluzione 12.8. Sappiamo dalla geometria che l'area di un triangolo è $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ dove γ è l'angolo compreso fra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Di conseguenza l'area del triangolo sarà $\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$. Inoltre questo risponde anche al terzo punto dell'esercizio, perché basterà prendere come vettore $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|}$. Nel caso del triangolo dell'esercizio abbiamo

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \det\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix} = (0, 0, 5)$$

e quindi l'area è $\frac{5}{2}$.

13 Soluzioni esercizi

Soluzione 13.1. 1.: Dalle formule riportate a lezione, in coordinate sferiche vale:

$$\begin{gathered}\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ +(r\sin\theta\,\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}\end{gathered}$$

che, nel nostro caso, si semplifica usando che r è fissato e che la traiettoria è a θ costante:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (-r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{r}} + (-r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r\sin\theta\,\ddot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Imponendo ora la seconda legge di Newton abbiamo (R_V è la reazione arbitraria che impedisce al pendolo di allungarsi):

$$\mathbf{F} = -g\hat{\mathbf{z}} + R_V\hat{\mathbf{r}} = -g(\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) + R_V\hat{\mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

che ci porta alle condizioni richieste:

$$\begin{gathered}mr\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = -g\sin\theta \\ mr\sin\theta\,\ddot{\phi} = 0\end{gathered}$$

ovvero o $\sin\theta = 0$ o:

$$mr\cos\theta\dot{\phi}^2 = -g$$
$$\ddot{\phi} = 0$$

2.: Le equazioni del moto in coordinate sferiche si ottengono sempre imponendo la seconda legge di Newton, anche se questa volta non abbiamo il vincolo di θ costante:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m(-r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{r}} + m(r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\theta}} +$$
$$+m(r\sin\theta\,\ddot{\phi} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

da cui, usando la formula di $\mathbf{F}$ riportata sopra, abbiamo:

$$mr(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) = g\sin\theta$$
$$mr(\sin\theta\,\ddot{\phi} + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta) = 0$$

Per quanto riguarda le quantità conservate, consideriamo che la seconda equazione è equivalente a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr\sin\theta\dot{\phi}\right) = 0$$

Che è la conservazione del momento angolare lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$. L'altra quantità che si deve conservare è l'energia:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + mgr\cos\theta = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) + mgr\cos\theta$$

Che, se derivata, diventa:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}mr^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\sin\theta\,\dot{\phi}(\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + \sin\theta\ddot{\phi})) - mgr\sin\theta\dot{\theta}$$

imponendo la seconda legge del moto (conservazione del momento angolare):

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}mr^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta} - 2\sin\theta\,\dot{\phi}\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}) - mgr\sin\theta\dot{\theta} =$$
$$= mr\dot{\theta}(r(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) - g\sin\theta)$$

Che è 0 dalla prima equazione del moto, dunque anche l'energia si conserva. Non ci sono altre quantità conservate in quanto le due che abbiamo trovato sono indipendenti e dunque equivalenti alle 2 equazioni del moto.

Soluzione 13.2. Il momento angolare è definito come:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

dove $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ sono la posizione e la velocità relative al polo considerato.

Nel nostro caso il polo è un punto fisso diverso dall'origine, dunque vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v} = \\ &= m \begin{pmatrix} (y - y_0)v_z - (z - z_0)v_y \\ (z - z_0)v_x - (x - x_0)v_z \\ (x - x_0)v_y - (y - y_0)v_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soluzione 13.3. Il momento angolare è definito come:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

ovvero (usando $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$):

$$\mathbf{L} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_0 y_0 \omega \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Ricordando che il momento torcente rispetta $\tau = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$ si ha:

$$\tau = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_0 y_0 \omega^2 \cos \omega t \end{pmatrix}$$

In alternativa si poteva notare che il moto è armonico, ricavare la forza che lo genera e calcolare il momento torcente della forza rispetto all'origine.

Soluzione 13.4. La corrente che scorre nella lastra è dovuta al moto dei portatori di carica. Questi hanno una piccola velocità media (detta di deriva) che genera la corrente macroscopica. Poiché è presente un campo magnetico, ogni portatore di carica sentirà la forza di Lorentz ($\mathbf{F}_L$) corrispondente. L'effetto complessivo della forza può essere ottenuto considerando solo la velocità di deriva dei portatori di carica.

In particolare, chiamando n la densità numerica dei portatori di carica, q la loro carica, $\mathbf{v}$ la loro velocità di deriva e A l'area della sezione della lastra ortogonale a $\mathbf{v}$ si ha:

$$\mathbf{I} = nqA\mathbf{v} \qquad \mathbf{F}_L = nqA\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

da cui:

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{I} \times \mathbf{B}$$

ovvero tutti i portatori di carica sentono una forza netta diretta come il prodotto vettore $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$. Questo spostamento di cariche porta alla generazione di una differenza di potenziale tra le due facce della lastra che può essere misurata.

Notando che la forza ha verso indipendente dalla carica dei portatori, si nota che cambiando il segno della carica dei portatori cambia il segno della differenza di potenziale, infatti in un caso sono le cariche positive (se i protoni sono i portatori) a subirla, nell'altro quelle negative (gli elettroni).

Sperimentalmente questo effetto è stato usato per dimostrare che i portatori di carica hanno solitamente carica negativa.

Soluzione 13.5. 1.: Considerando un sistema di coordinate polari con origine posta nel Sole, si ha che il moto (che è planare) della particella può essere descritto come un generico moto con $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ e:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Imponendo che la forza sulla particella sia quella gravitazionale si ottiene:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -G\frac{M}{r^2}$$
$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

Usando anche il fatto che il momento angolare è $L = mr^2\dot{\theta}$:

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2r^3} - G\frac{M}{r^2}$$

2.: Se il moto è circolare uniforme, allora $\ddot{r} = 0$ e si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{L^2}{m^2 r_0^3} - G\frac{M}{r_0^2} \\ 0 &= L^2 - GMm^2 r_0 \\ r_0 &= \frac{L^2}{GMm^2} \end{aligned}$$

3.: Il potenziale richiesto si ottiene, a meno di un fattore additivo arbitrario, integrando la funzione riportata sopra:

$$V(r) = -\int \frac{L^2}{m^2 r^3} - G\frac{M}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{L^2}{2m^2 r^2} - G\frac{M}{r} + c$$

Questo, se moltiplicato per la massa m, è anche detto potenziale efficace.

Soluzione 13.6. La soluzione può essere trovata sul libro [Mor08].

Soluzione 13.7. Sapendo che il vettore è conservato, possiamo calcolarlo in dei punti comodi dell'orbita. In particolare sceglieremo l'afelio: la direzione si trova immediamente essere parallela all'asse maggiore dell'orbita, dato che entrambi i termini della definizione gli sono paralleli.

Per quanto riguarda il verso, serve calcolare il modulo dei due termini, in particolare il primo:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \times \mathbf{L} &= m\dot{\theta}r\hat{\boldsymbol{\theta}} \times (r\hat{\mathbf{r}} \times m\dot{\theta}r\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \\ &= m^2 r^2 \dot{\theta}^2 \hat{\boldsymbol{\theta}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) = m^2 r^2 \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Questo va sommato all'altro termine:

$$\mathbf{A} = (m^2 r^2 \dot{\theta}^2 - GMm)\hat{\mathbf{r}} = \left(\frac{L^2}{r^2} - GMm\right)\hat{\mathbf{r}}$$

Da cui otteniamo che il vettore è diretto dal Sole verso l'afelio e, siccome è conservato, questo vale lungo tutta l'orbita.

Soluzione 13.8. Questo problema è un riadattamento del problema 5.43 di "Introduction to electrodynamics" di Griffiths. In particolare, il problema originale studiava il moto di una carica elettrica nel campo di un ipotetico monopolo magnetico.

1.: Detta K l'energia cinetica, si ha:

$$\dot{K} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Dato che $\mathbf{F}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali, K (e di conseguenza $|\mathbf{v}|$) si conserva.

2.: Derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{\mathbf{Q}} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + m\mathbf{r} \times \mathbf{a} - \alpha\frac{\mathbf{v}}{r} + \alpha\frac{\mathbf{r}}{r^2} = \frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) - \alpha\frac{\mathbf{v}}{r} + \alpha\frac{\mathbf{r}}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Usando l'identità vettoriale suggerita si ottiene:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\alpha}{r^3}[\mathbf{v}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})] - \alpha\frac{\mathbf{v}}{r} + \alpha\frac{\mathbf{r}}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \alpha\frac{\mathbf{r}}{r^2}(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} - \hat{\mathbf{r}})$$

A questo punto, si ha:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\hat{r}}$$

Dato che $\dot{\hat{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$, si ottiene:

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \dot{r}$$

Dunque $\dot{\mathbf{Q}} = 0$, e $\mathbf{Q}$ è una costante del moto.

3.: Dato che $\mathbf{Q}$ è lungo l'asse polare, si ha $\mathbf{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0$. D'altro canto usando l'espressione di $\mathbf{Q}$ si ha:

$$\mathbf{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} - \alpha\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = -m(\mathbf{r} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}) \cdot \mathbf{v} = mr\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{v} = mr^2\dot{\theta}$$

Si ricava $\dot{\theta} = 0$, ossia θ è costante durante il moto.

4.: Si ha:

$$\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\alpha$$

D'altro canto $\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}} = |\mathbf{Q}| \cos\theta$, quindi

$$|\mathbf{Q}| = -\frac{\alpha}{\cos\theta}$$

5.: Si ha:

$$\mathbf{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = -m(\mathbf{r} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \mathbf{v} = -mr\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \mathbf{v} = -mr^2 \sin\theta\dot{\phi}$$

D'altro canto $\mathbf{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = -|\mathbf{Q}| \sin\theta$, e usando il punto precedente si ottiene:

$$\dot{\phi} = -\frac{\alpha}{mr^2 \cos\theta}$$
$$k = -\frac{\alpha}{m \cos\theta}$$

6.: Abbiamo:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + \sin^2\theta\frac{k^2}{r^2}$$

Usando la derivazione della composta si ha inoltre:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{k}{r^2}$$

Allora si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = r\sqrt{\frac{v^2r^2}{k^2} - \sin^2\theta}$$
$$\phi - \phi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'\sqrt{\frac{v^2r'^2}{k^2} - \sin^2\theta}} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\sec^{-1}\frac{vr}{k\sin\theta} - \sec^{-1}\frac{vr_0}{k\sin\theta}\right)$$

Di conseguenza:

$$r(\phi) = \frac{k\sin\theta}{v\cos(\phi-\phi_0)\sin\theta + \sec^{-1}\frac{vr_0}{k\sin\theta}}$$

Soluzione 13.9. La soluzione può essere trovata sul libro [Mor08].

Soluzione 13.10. Prendiamo $\mathbf{E} = E\hat{x}$ e $\mathbf{B} = B\hat{z}$. L'equazione del moto $m\ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$ diventa il sistema di due equazioni:

$$\ddot{x} = \frac{qE}{m} + \frac{qB}{m}\dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}$$

Ora è possibile derivare la prima equazione e sostituire a destra $\ddot{y}$ con la seconda equazione:

$$\dddot{x} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \dot{x},$$

da cui $\dot{x} = A\sin(\omega t)$, dove si definisce $\omega = \frac{qB}{m}$ (è un seno e non un coseno perché la velocità all'inizio è nulla per ipotesi).

Nella prima equazione possiamo calcolare $\ddot{x}$ e trovare agevolmente $\dot{y} = A\cos(\omega t) - \frac{E}{B}$. Imponendo che la velocità iniziale sia nulla si ottiene $A = \frac{E}{B}$.

Integrando $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e imponendo che la posizione iniziale sia l'origine, si ottiene:

$$x = R(1 - \cos\omega t)$$

$$y = R(\sin\omega t - \omega t)$$

Effettuando la sostituzione $R = \frac{Em}{qB^2}$. Questa si vede essere l'equazione di una cicloide.

Soluzione 13.11. Soluzione annessa all'esercizio 5.128 del libro [Cel18].

Soluzione 13.12. **1.**: Se osservato dal sistema O', il moto della particella sarà uniformemente accelerato con accelerazione $-\mathbf{a}_0$. In particolare, se nel sistema O vale $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, allora nel sistema O' varrà $\mathbf{F}' = \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_0)$.

2.: Nel caso di un'ulteriore rotazione, la questione si fa più delicata. Si ha infatti che:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}$$

Dove il primo termine è dovuto al fatto che il sistema O' sta ruotando intorno alla propria origine (questo termine è stato ricavato a lezione), il secondo è la velocità nel sistema O' e il terzo è il termine dovuto al moto relativo delle origini.

Se si deriva l'equazione rispetto al tempo, notando che quando si deriva un vettore "primato" si deve anche inserire il termine dovuto alla rotazione, si ottiene:

$$a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega \times \mathbf{r}') + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_{O'} = \dot{\omega} \times \mathbf{r}' + \omega \times (\mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}') + \mathbf{a}' + \omega \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}_0$$

Da cui:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}' + \dot{\omega} \times \mathbf{r}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') + 2\omega \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}_0)$$

I 3 termini aggiuntivi, rispetto al caso senza rotazione, sono spesso riportati all'altro lato dell'equazione e chiamati "forze apparenti". In particolare, il secondo diventa la forza centrifuga e il terzo la forza di Coriolis.

Soluzione 13.13. **1.**: Riscrivendo nel nostro caso la prima equazione si ottiene:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = 0$$

Che vale ovunque e per ogni tempo se e solo se $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$.

2-3.: Il guess più ragionevole è qualcosa di simile al campo elettrico, in particolare, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ funziona. Come per il campo elettrico, la terza equazione equivale a $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$.

La seconda equazione ci dice che:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = -\frac{1}{c}(-\omega) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

ovvero $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}_0$.

La quarta equazione ci dice che:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \frac{1}{c}(-\omega) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

ovvero $\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega}{c}\mathbf{E}_0$.

Dunque abbiamo che anche $\mathbf{B}_0$ e $\mathbf{E}_0$ sono ortogonali tra loro. In particolare, se moltiplichiamo vettorialmente la prima per $\mathbf{k}$, otteniamo:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = \frac{\omega}{c}\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}_0$$

che ci dà la condizione $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. Questa condizione, se inserita nelle formule precedenti, ci dice infine che i moduli di $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$ sono uguali.

14 Soluzioni esercizi di approfondimento

Soluzione 14.1. Da $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = ab\cos\theta$ si deduce che

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{ab} = \frac{11}{15}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{104}}{15}$$

Di conseguenza i valori di $\cos\theta$ e $\sin\theta$ sono ragionevolmente simili, da cui ci possiamo aspettare che $\theta \approx \frac{\pi}{4}$. Sia $\theta = \frac{\pi}{4} + \delta\theta$ e notiamo che

$$\frac{11}{15} = \cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta\theta\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \delta\theta)$$

da cui

$$\delta\theta \approx 1 - \frac{11\sqrt{2}}{15} \approx -0.0371$$

da cui $\theta \approx 0.7483\,\mathrm{rad}$. In effetti $\theta = 0.74758\ldots\mathrm{rad}$.

Soluzione 14.2. Chiaramente ci sono più modi per soddisfare la richiesta. Ci limiteremo ad esporre un'unica soluzione. Determiniamo una rotazione di asse $\hat{\mathbf{b}}$ che porti $\mathbf{a}$ sul piano xy. Cerchiamo ϕ tale che

$$(\hat{\mathbf{z}}\cdot R\mathbf{a}) = (\hat{\mathbf{z}}\cdot(\cos\phi\,\mathbf{a} + (1-\cos\phi)(\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{b}})\hat{\mathbf{b}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{b}}\times\mathbf{a})) = 0$$

La condizione da soddisfare è perciò

$$2\cos\phi + \sin\phi\,(\hat{\mathbf{z}}\cdot(\hat{\mathbf{b}}\times\mathbf{a})) = 0$$

con

$$(\hat{\mathbf{z}}\cdot(\hat{\mathbf{b}}\times\mathbf{a})) = \det\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}$$

Otteniamo così la condizione $\tan\phi = -5$. Di conseguenza, ponendo $\cos\phi = 1/\sqrt{26} = \alpha$ e $\sin\phi = -5\alpha$ si ottiene

$$R\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha + \big(1-\alpha\big)\frac{11\cdot 3}{25} - 5\alpha\cdot\frac{8}{5} \\ 2\alpha + \big(1-\alpha\big)\frac{11\cdot 4}{25} + 5\alpha\cdot\frac{6}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 33 - 208\alpha \\ 44 + 156\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora una rotazione del piano xy che porti $\mathbf{b}$ sull'asse x. Una che lo fa è

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui $R'R\mathbf{b} = (5, 0, 0)$, mentre

$$R'R\mathbf{a} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} \frac{3}{5}(33 - 208\alpha) + \frac{4}{5}(44 + 156\alpha) \\ -\frac{4}{5}(33 - 208\alpha) + \frac{3}{5}(44 + 156\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{52}{5}\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{2\sqrt{26}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se poniamo $\hat{\mathbf{v}} = (\frac{11}{15}, \frac{2\sqrt{26}}{15}, 0)$ abbiamo che $\cos\theta = \hat{\mathrm{v}}_x = \frac{11}{15}$.

Soluzione 14.3. Proponiamo due metodi simili ma diversi.

Primo metodo. Per il teorema di Pitagora (o per bilinearità del prodotto scalare) risulta che

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{\mathbf{v}}_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

da cui se il primo membro è nullo, affinché lo sia anche il secondo deve valere che $\alpha_i = 0$ per ogni i.

Secondo metodo. Per ogni j notiamo che

$$0 = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{\mathbf{v}}_i\right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_j\right) = \alpha_j$$

da cui la tesi.

Soluzione 14.4. Dimostriamo la prima implicazione. Sia $\mathbf{v}$ tale che $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$ per un qualche α e sia $\mathbf{w} \in \Pi$. Allora

$$(A^t\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) = (A^t\mathbf{w})^t\mathbf{v} = \mathbf{w}^t A\mathbf{v} = (\mathbf{w} \cdot A\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) = 0$$

Si conseguenza $A^t\mathbf{w} \in \Pi$, da cui $A^t\Pi \subseteq \Pi$ come voluto.

Supponiamo ora invece che $A^t\Pi \subseteq \Pi$. Con verifiche del tutto analoghe alle precedenti si trova che $A\mathbf{v} = A^{tt}\mathbf{v}$ è ortogonale a Π. Ma i vettori ortogonali a Π sono della forma $\alpha\mathbf{v}$, da cui la tesi.

Soluzione 14.5. Usiamo il risultato dell'esercizio precedente. Determiniamo prima un $\mathbf{v}$ tale che $A^t\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$ per un qualche α. Abbiamo che

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

In questo caso siamo fortunati, visto che un vettore $\mathbf{v}$ che vada bene non è troppo difficile da scovare: basta prendere $\mathbf{v} = (-1, -1, 1)$ va bene. Infatti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza il piano Π dei vettori $\mathbf{w} = (v, y, z)$ tali che

$$(\mathbf{w} \cdot (-1, -1, 1)) = 0 \quad \text{ovvero} \quad z = x + y$$

è invariante per l'azione di A. A posteriori se $\mathbf{w} = (x, y, x + y)$ allora

$$A\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

e quindi anche $A\mathbf{w}$ sta nell'ortogonale, visto che $y + (x + y) = x + 2y$.

Soluzione 14.6. Proponiamo più modi di procedere.

Primo metodo. Se per assurdo $\mathbf{a} = \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ allora

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \beta \det(\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \gamma \det(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$$

per multilinearità del determinante. Quindi è sufficiente verificare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \neq 0$$

Il determinante precedente vale $5 + 9 + 4 - 6 - 3 - 10 = -1 \neq 0$ che conclude.

Secondo metodo. Se per assurdo $\mathbf{a} = \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ allora

$$(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = ((\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = \beta(\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) + \gamma(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = 0$$

Di conseguenza ci basta verificare che $(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \neq 0$, riconducendoci in tutto e per tutto al calcolo precedente.

Osservazione. Si noti che anche se il secondo metodo sembra avere un'interpretazione più geometrica, i due metodi non sono soltanto equivalenti bensì *identici*.

Soluzione 14.7. La colonna k-esima di A corrisponde ad $A\hat{\mathbf{x}}_k$. Poniamo $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = (A^1, A^2, \ldots, A^n)$ e notiamo che

$$A\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{pmatrix} (A_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_k) \\ (A_2 \cdot \hat{\mathbf{x}}_k) \\ \vdots \\ (A_m \cdot \hat{\mathbf{x}}_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = A^k$$

che conclude.

Soluzione 14.8. Le condizioni (17) e (18) sono delle semplici verifiche di proprietà delle matrici, ed è chiaro che queste implicano la (19). Mostriamo che (19) implica (17) e (18). Per la (17) è sufficiente considerare $\lambda = 1$. Per la (18) si ponga $\mathbf{v} = 0$, ottenendo

$$\mathcal{L}(\lambda \mathbf{w}) = \mathcal{L}(0) + \lambda \mathcal{L}(\mathbf{w})$$

Se dimostriamo che $\mathcal{L}(0) = 0$ abbiamo concluso: del resto

$$\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(0+0) = \mathcal{L}(0) + \mathcal{L}(0) \quad \text{che implica} \quad \mathcal{L}(0) = 0$$

Mostriamo la (20). Da $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \hat{\mathbf{x}}_i$ segue che

$$A\mathbf{x} = A \sum_{i=1}^n x_i \hat{\mathbf{x}}_i \overset{(17)}{=} \sum_{i=1}^n A x_i \hat{\mathbf{x}}_i \overset{(18)}{=} \sum_{i=1}^n x_i A \hat{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=1}^n x_i A^i$$

dove l'ultima uguaglianza discende dall'esercizio precedente.

Osservazione. Una verifica diretta di (20) sarebbe stata più semplice ma meno espressiva. É bene che ci si distacchi un po' dalla definizione operativa del prodotto fra matrici per poter comprendere il significato geometrico che ci sta dietro e che esploreremo nei prossimi esercizi.

Soluzione 14.9. Sia $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \hat{\mathbf{x}}_i$. Allora

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_i) = A\hat{\mathbf{x}}$$

dove $A = (\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_1), \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_2), \ldots, \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_n))$, che conclude.

Soluzione 14.10. É chiaro che se A è iniettiva allora 0 è l'unico vettore $\mathbf{v}$ per cui $A\mathbf{v} = 0$.

Mostriamo quindi che se A=0 implica $\mathbf{v} = 0$ allora l'applicazione lineare definita da A è iniettiva. In effetti, dati due vettore $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ si ha

$$A\mathbf{b} = A\mathbf{c} \iff A\mathbf{b} - A\mathbf{c} = 0 \iff A(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$$

Per ipotesi $A(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ implica $b - c = 0$, ovvero $b = c$. L'iniettività è dunque dimostrata.

Soluzione 14.11. Supponiamo che A sia iniettiva e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ linearmente indipendenti. Supponiamo che

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A\mathbf{v}_i = 0$$

Allora

$$\begin{aligned} A(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}_i) = 0 &\quad \text{per linearità} \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}_i = 0 &\quad \text{per iniettività} \\ \alpha_i = 0 &\quad \text{per ogni } i \text{ per lineare indipendenza} \end{aligned}$$

Supponiamo ora che A conservi la lineare indipendenza. Sia n il numero di colonne di A e siano $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_n$ definiti usualmente. Essi sono chiaramente linearmente indipendenti, da cui $A\hat{\mathbf{x}}_1, A\hat{\mathbf{x}}_2, \ldots, A\hat{\mathbf{x}}_n$ lo sono a loro volta. Dunque

$$A\mathbf{x} = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i A\hat{\mathbf{x}}_i = 0 \iff x_i = 0 \quad \text{per ogni i}$$

Questo conclude per l'esercizio precedente.

Soluzione 14.12. Per quanto visto possiamo fare i conti calcolando $AB\hat{\mathbf{x}}_i$

e per poi scrivere $AB = (AB\hat{\mathbf{x}}_1, AB\hat{\mathbf{x}}_2, AB\hat{\mathbf{x}}_3)$. Abbiamo dunque

$$\hat{\mathbf{x}}_1 \xrightarrow{B} \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_3 \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 \xrightarrow{B} \hat{\mathbf{x}}_3 \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_3 \xrightarrow{B} \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

da cui

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Soluzione 14.13. La maniera più semplice e veloce per risolvere questo esercizio è quella di risolvere il sistema 2×2

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + 5\beta = 1 \end{cases}$$

Tuttavia notiamo che avremmo potuto ragionare come segue: calcoliamo $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ tali che

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per poi ottenere

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}$$

Sviluppiamo entrambi i metodi parallelamente. In ogni caso è richiesta la risoluzione di uno o più sistema della forma

$$\begin{cases} x + 2y = A \\ 2x + 5y = B \end{cases}$$

Gli associamo la matrice

$$A_0 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & A \\ 2 & 5 & B \end{array}\right)$$

dove la barra verticale è stata aggiunta solo per chiarezza.

Come sappiamo, nella risoluzione di un sistema ci è consentito moltiplicare ambo i membri per una quantità non nulla o sottrarre ad un'equazione un multiplo di un'altra.

Tali semplici tecniche di risoluzione si traducono in operazioni sulle righe della matrice A_0. In particolare è possibile:

- scambiare l'ordine delle righe;
- moltiplicare una riga per uno scalare non nullo;
- sottrarre ad una riga un multiplo di un'altra.

Semplifichiamo il sistema con le operazioni suddette.

$$A_0 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & A \\ 2 & 5 & B \end{array}\right)$$

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & A \\ 0 & 1 & B - 2A \end{array}\right)$$

$$A_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5A - 2B \\ 0 & 1 & B - 2A \end{array}\right)$$

ovvero $x = 5A - 2B$ e $y = B - 2A$. Discutiamo ora i due metodi separatamente.

Primo metodo. In questo caso avremmo ottenuto direttamente $\alpha = 3$ e $\beta = -1$.

Secondo metodo. In questo caso avremmo ottenuto

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$$

Osservazione. Si osservi che con il secondo metodo abbiamo determinato *l'inversa* della matrice A_0. Infatti

$$\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Soluzione 14.14. Il fatto che $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ esista e sia unico lo diamo come fatto di teoria non dimostrato. Sapendo che la scrittura $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ è ben definita, dimostriamo la linearità.

Siano $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i$ e $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{a}_i$. Allora

$$\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \lambda\beta_i)\mathbf{a}_i \quad \text{da cui}$$

$$[\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\alpha_1 + \lambda\beta_1\\ \alpha_2 + \lambda\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n + \lambda\beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} + \lambda[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$$

Essendo la mappa $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ lineare è rappresentata da una matrice S tale che

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = S\mathbf{v}$$

Per definizione di $[\cdot]_{\mathcal{B}}$, se definiamo $T = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ abbiamo

$$TS\mathbf{v} = T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{v}$$

da cui $TS = I_n$. Analogamente se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ abbiamo che

$$ST\mathbf{v} = S\bigg(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{a}_i\bigg) = \bigg[\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{a}_i\bigg]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \mathbf{v}$$

da cui $ST = I_n$. Quindi S e T sono l'una l'inversa dell'altra, come già notato in un caso particolare nell'esercizio precedente.

Per quanto riguarda $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, intuitivamente questa sarebbe la matrice che codifica l'applicazione lineare A se i vettori $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_n$ venissero sostituiti da $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Più formalmente per ogni $\mathbf{v}$ si ha che

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [A\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

Infatti

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = ([A\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}}, [A\mathbf{a}_2]_{\mathcal{B}}, \ldots, [A\mathbf{a}_n]_{\mathcal{B}}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [A\mathbf{a}_i]_{\mathcal{B}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i A\mathbf{a}_i]_{\mathcal{B}} = [\sum_{i=1}^{n} A\alpha_i \mathbf{a}_i]_{\mathcal{B}} = [A\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i]_{\mathcal{B}} = [A\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

La precedente equazione si esprime in termini matriciali come

$$\begin{gathered} A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} S\mathbf{v} = SA\mathbf{v} \\ A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} S = SA \\ A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = SAS^{-1} = SAT \\ A = S^{-1} A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} S = TA_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} S \end{gathered}$$

Osservazione. Il senso di questo esercizio è quello di far capire che i versori $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_n$ non hanno nulla di speciale, a parte la semplicità della loro definizione. Capita quasi sempre che un'applicazione lineare sia meglio rappresentarla in un'altra base, come vedremo negli esercizi successivi.

Soluzione 14.15. Possiamo riciclare il risultato dell'esercizio precedente per dire che $\mathbf{a} = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e $\mathbf{b} = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ sono tali che

$$A\mathbf{a} = 2\mathbf{a} \quad \text{e} \quad A\mathbf{b} = 3\mathbf{b}$$

Una maniera di procedere indipendente dall'esercizio precedente consiste nello scrivere $A = S^{-1}DS$ e osservare che

$$\begin{aligned} AS^{-1}\hat{\mathbf{x}}_1 &= S^{-1}DSS^{-1}\hat{\mathbf{x}}_1 = 2S^{-1}\hat{\mathbf{x}}_1 \\ AS^{-1}\hat{\mathbf{x}}_2 &= S^{-1}DSS^{-1}\hat{\mathbf{x}}_2 = 3S^{-1}\hat{\mathbf{x}}_1 \end{aligned}$$

Notato questo la rappresentazione di tale applicazione lineare non dovrebbe essere complicata.

Soluzione 14.16. Usiamo i risultati dell'esercizio 14 per dire che il primo caso si presenta quando si hanno due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ non collineari tali che

$$A\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} \quad \text{e} \quad A\mathbf{b} = \lambda_2\mathbf{b}$$

Nel secondo caso abbiamo che esiste un vettore $\mathbf{a}$ tale che $A\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$ ma non esiste un $\mathbf{b}$ tale che $A\mathbf{b} = \mu\mathbf{b}$ per un qualche μ.

Nel terzo caso non ci sono vettori $\mathbf{a}$ per cui $\mathbf{a}$ e $A\mathbf{a}$ siano collineari.

Soluzione 14.17. Sono tutte semplici verifiche. Una maniera rapida di procedere è la seguente.

1. Per definizione ogni matrice di $\mathbb{C}$ si scrive per definizione come $a + ib = aI + bi$, dove l'unicità discende immediatamente dal fatto che due matrici sono uguali se e solo se lo sono le loro entrate.
2. $\mathbb{C}$ è chiuso per somma in quanto $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$.
3. $i^2 = -1$ è un'immediata verifica algebrica.
4. $\mathbb{C}$ è chiuso per prodotto in quanto $(a+ib)(c+id) = ac+i(ad+bc)+i^2bd = (ac-bd)+i(ad+bc)$ con $\begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

5. Per il punto precedente il fatto che due numeri complessi commutino per prodotto è una semplice verifica;
6. L'usuale norma di un numero complesso $a + ib$ è $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}$.
7. il numero complesso $a + ib$ si scrive come

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \\ = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Riconosciamo che $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ è la *rotazione* di angolo θ (con segno). Infatti le rotazioni sono lineari (fare un disegnino per convincersene) e la rotazione di angolo θ manda $\hat{\mathbf{x}}_1$ in $(\cos\theta, \sin\theta)$ e $\hat{\mathbf{x}}_2$ in $(-\sin\theta, \cos\theta)$.

Osservazione. Si poteva dedurre che il prodotto di numeri complessi è commutativo dal fatto che sono rotoomotetie, visto che le rotazioni con lo stesso asse commutano. Si osserva inoltre che i numeri complessi di norma 1 sono esattamente le rotazioni del piano.

Soluzione 14.18. Definiamo $\lambda = a + ib$ e $z(t) = x(t) + iy(t)$ dove $(x(t), y(t))$ è una soluzione del sistema. Per quanto visto nell'esercizio precedente, da

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

segue che

$$\dot{z} = \lambda z$$

è una riformulazione *equivalente* del problema differenziale. Di conseguenza $z(t) = z_0 e^{\lambda t} = z_0 e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$. Da $z_0 = x_0 + iy_0$ si ottiene che

$$
\begin{aligned}
x(t) + iy(t) &= (x_0 + iy_0)e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) = \\
&= e^{at}((x_0\cos(bt) - y_0\sin(bt)) + i(x_0\sin(bt) + y_0\cos(bt)))
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
\begin{cases}
x(t) = e^{at}(x_0\cos(bt) - y_0\sin(bt)) \\
y(t) = e^{at}(x_0\sin(bt) + y_0\cos(bt))
\end{cases}
$$

Soluzione 14.19. Il primo problema differenziale è immediato, in quanto le due equazioni differenziali non si influenzano. Dunque $x(t) = x_0e^{\lambda_1 t}$ e $y(t) = y_0e^{\lambda_2 t}$.

Il secondo problema differenziale è solo leggermente più complesso. Sappiamo che $y = y_0e^{\lambda t}$, da cui

$$
\begin{gathered}
\dot{x} - \lambda x = y_0e^{\lambda t} \\
e^{-\lambda t}\dot{x} - \lambda e^{-\lambda t}x = y_0 \\
\dot{\overline{e^{-\lambda t}x}} = y_0 \\
e^{-\lambda t}x = y_0t + x_0 \\
x = e^{\lambda t}(x_0 + y_0t)
\end{gathered}
$$

Il terzo problema differenziale è stato risolto nell'esercizio precedente.

Soluzione 14.20. Sia $\mathbf{v} \neq 0$ tale che $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Allora $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$. Di conseguenza $A - \lambda I$ non può essere una matrice invertibile e dunque $\det(A - \lambda I) = 0$. L'altra implicazione segue ripercorrendo all'indietro i ragionamenti fatti.

Soluzione 14.21. Facciamolo per induzione sulla taglia di A.

- se A è di taglia 1×1 allora $A = (a)$ per un qualche scalare a. Dunque $p_A(x) = a - x$, da cui $p_A(A) = aI - A = 0$ chiaramente.

- supponiamo che la tesi sia vera per $0 \leq k < n$ e dimostriamola per le matrici di taglia $n \times n$. Sia α una radice (possibilmente complessa) del polinomio caratteristico. Allora esiste un $\mathbf{v} \neq 0$ vettore complesso tale che $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$. Rappresentando A in una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ dove $\mathbf{v}$ è il primo vettore, si ha che

  $$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{b} \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

  dive $\mathbf{b}$ è un vettore riga di taglia $1 \times (n-1)$. Sapendo il polinomio caratteristico non dipende dalla base di rappresentazione (esercizio!) e notando che

  $$p_A(A) = 0 \iff p_A(A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = 0$$

  si ha che è sufficiente verificare $p_{A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}(A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = 0$. Osserviamo che espandendo il determinante rispetto alla prima riga risulta

  $$p_{A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}(x) = (\alpha - x) p_N(x)$$

  Osserviamo che per ipotesi induttiva risulta

  $$p_N(A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} p_N(\lambda) & \mathbf{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  dove $\mathbf{c}$ è ancora un vettore riga di taglia $(n-1) \times 1$. Questo vuol dire che per ogni $\mathbf{x}$ esiste un $\beta_{\mathbf{x}}$ per cui

  $$p_N(A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \beta_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$$

  Dando per buono la compatibilità fra il prodotto di matrici e quello dei polinomi, si ha di conseguenza che per ogni $\mathbf{x}$ risulta

  $$p_{A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}(A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})\mathbf{x} = (A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \alpha I) p_N(A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})\mathbf{x} = 0$$

  ovvero la tesi per le matrici di taglia $n \times n$.

Il teorema è dunque dimostrato per induzione.

Soluzione 14.22. Analizziamo i vari casi uno ad uno.

- se $p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vuol dire che esistono due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ non nulli, non collineari e tali che
$$A\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a} \quad \text{e} \quad A\mathbf{b} = \lambda_2 \mathbf{b}$$
Questo significa che ponendo $\mathcal{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ risulta che $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

- se $p_A(x) = (x-\lambda)^2$ vuol dire che esiste $\mathbf{a}$ tale che $A\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$. Tuttavia la precedente relazione vale solo per i multipli di $\mathbf{a}$: per un qualsiasi altro $\mathbf{b} \neq 0$ si ha
$$(A - \lambda I)\mathbf{b} \neq 0 \quad \text{ma} \quad (A - \lambda I)^2 \mathbf{b} = 0$$
Questo significa che $\mathbf{v} = (A - \lambda I)\mathbf{b}$ è un vettore non nullo tale che $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Di conseguenza $\mathbf{v} = \beta\mathbf{a}$ con $\beta \neq 0$. Considerando come base $\mathcal{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}/\beta)$ si ha $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

- se $p_A(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ vuol dire che esiste un vettore $\mathbf{v} \neq 0$ a coefficienti *complessi* tale che ponendo $\mathcal{B} = (\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}})$ risulta $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$. Per ricondursi al caso di matrici e vettori reali, basta considerare la base $\mathcal{B}' = (\Re\mathbf{v}, \Im\mathbf{v})$, nella quale la matrice A si esprime nella forma desiderata (facile verifica).

Soluzione 14.23. 1. Il polinomio caratteristico della prima matrice è $(x - 1)(x - 2)$, che ha per radici 1 e 2. Queste sono reali distinte, da cui la matrice si può esprimere rispetto ad una qualche base (esercizio: quale?) come la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Il polinomio caratteristico della seconda è $(x-1)^2$, che ha una radice reale doppia. Quindi la matrice si potrà esprimere in una qualche

base come $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Il polinomio caratteristico della terza matrice è $(x-1)(x-2)-9 = x^2 - 3x - 7$ che ha discriminante positivo. Dunque la terza matrice si potrà esprimere in forma diagonale, ovvero come $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, dove λ_1 e λ_2 sono le radici del polinomio caratteristico.

4. Il polinomio caratteristico della quarta matrice è $(x-1)(x-2)+30 = x^2 - 3x + 32$ che ha discriminante negativo. Dunque la matrice si potrà esprimere come $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, dove a è la parte reale di una radice e b è la sua parte immaginaria.

Soluzione 14.24. Usiamo la multilinearità del determinante per scrivere

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det M_{ij}$$

dove M_{ij} coincide con A ovunque tranne che sulla colonna j-esima, dove ha un 1 in posizione i e 0 altrove. Siccome il determinante non cambia se si sottrae ad una colonna un multiplo di un'altra colonna, possiamo scrivere

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det N_{ij}$$

dove $N_{ij} = (n_{kl})_{1 \leq k,l \leq n}$ con $n_{kl} = a_{kl}$ se $k \neq i, l \neq j$ e l'unica entrata non nulla sulla riga i e sulla colonna j è $n_{ij} = 1$.

Data una matrice B di taglia $(n-1) \times (n-1)$, definiamo $\tilde{B}$ come la matrice di taglia $n \times n$ tale che

- se si cancellano la riga i-esima e la colonna j-esima di $\tilde{B}$ si ottiene B;
- l'unica entrata non nulla sulla riga i-esima e sulla colonna j-esima di $\tilde{B}$ è $\tilde{b_{ij}} = 1$.

Consideriamo la funzione f che a B generica associa $\det \tilde{B}$. Abbiamo che

- f è multilineare nelle colonne;
- se B ha due colonne uguali allora $f(B) = 0$;
- $f(I) = (-1)^{i+j}$ in quanto con $i + j$ scambi di colonne è possibile ottenere I_n da $\tilde{I}$.

Di conseguenza per unicità del determinante si ha che

$$\det B = \frac{f(B)}{f(I)} = \frac{\det \tilde{B}}{(-1)^{i+j}}$$

Di conseguenza

$$\det A = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} \det N_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det \tilde{A_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

che conclude.

Soluzione 14.25. Riscriviamo il sistema come

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n = \mathbf{b}$$

Sia M_i la matrice che si ottiene sostituendo la i-esima colonna di A con $\mathbf{b}$. Allora per multilinearità del determinante si ha che

$$\begin{aligned}\det M_i &= \det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, \mathbf{b}, A^{i+1}, \ldots, A^n) = \\ &= \det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j A^j, A^{i+1}, \ldots, A^n) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, A^j, A^{i+1}, \ldots, A^n) = x_i \det A\end{aligned}$$

da cui $x_i = \frac{\det M_i}{\det A}$ (si noti che se A è invertibile allora $\det A \neq 0$). Ne segue che

$$(a^{-1})_{ji} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ij}}{\det A}$$

dove A_{ij} è la matrice che si ottiene cancellando l'i-esima riga e l'j-esima colonna di A.

Siamo giunti alla seguente formula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{cof}A)^t$$

dove $\mathrm{cof}A = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

Soluzione 14.26. Un semplice calcolo mostra che

$$\mathrm{cof}A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione 14.27. La matrice associata è

$$A_{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}\times\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{b}\times\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{b}\times\hat{\mathbf{z}})$$

Da

$$\mathbf{b}\times\hat{\mathbf{x}} = \det\begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \\ 1 & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = b_z\hat{\mathbf{y}} - b_y\hat{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_z \\ -b_y \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{b}\times\hat{\mathbf{y}} = \det\begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \\ 0 & 1 & 0 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = -b_z\hat{\mathbf{x}} + b_x\hat{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} -b_z \\ 0 \\ b_x \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{b}\times\hat{\mathbf{z}} = \det\begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = b_y\hat{\mathbf{x}} - b_x\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} b_y \\ -b_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

segue che

$$A_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix}$$

La ragione essenziale per cui $A_{\mathbf{b}}$ risulta essere una matrice antisimmetrica è che $(\mathbf{x} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{x})) = 0$ (in sostanza le forme bilineari alternanti sono sempre antisimmetriche). Possiamo verificare l'antisimmetria in maniera diretta usando le proprietà del prodotto vettore:

$$(\mathbf{x} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{y})) = (\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{b})) = -(\mathbf{y} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{x}))$$

e si conclude notando che $(\hat{\mathbf{x}}_i \cdot (\mathbf{b} \times \hat{\mathbf{x}}_j)) = a_{\mathbf{b}ij}$.

Riferimenti bibliografici

[Cel18] Giancarlo Cella. *Un esercizio al giorno*. 2018. Reperibile qui.

[Mor08] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2008.