

# Modulo di Analisi avanzato

Luca Vantaggio \*

6 febbraio 2023

## Sommario

La lezione del secondo livello si prefigge i seguenti due obiettivi: far acquisire familiarità con il calcolo in più variabili e rivedere e approfondire le equazioni differenziali ordinarie.

Nello specifico, nella prima parte della lezione verranno introdotte le nozioni di gradiente di una funzione scalare e di derivata di una curva. Se ne descriveranno l'intuizione e le proprietà attraverso immagini ed esempi tratti dalla fisica. Successivamente verranno introdotte le nozioni di integrale di linea, di superficie e di volume, e se ne discuteranno le loro connessioni con il nabla calcolo (teorema di Stokes e della divergenza).

Nella seconda parte della lezione si parlerà di equazioni differenziali ordinarie. In primis si vedranno delle tecniche standard per risolverle esattamente ove possibile. Secondariamente ci si soffermerà su aspetti di carattere qualitativo utili per la comprensione della fisica.

---

\*luca.vantaggio@sns.it

# Indice

<b>1</b>	<b>Calcolo Differenziale</b>	<b>4</b>
1.1	Gradiente di una funzione scalare . . . . .	4
1.2	Derivata di una curva . . . . .	9
1.2.1	Il vettore velocità . . . . .	9
1.2.2	La velocità scalare . . . . .	9
1.2.3	Guardare componente per componente . . . . .	9
1.2.4	Risultati . . . . .	10
1.3	Chain Rule . . . . .	11
1.4	Caso generale . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Calcolo Integrale</b>	<b>12</b>
2.1	Integrali di linea . . . . .	12
2.2	Integrali di superficie . . . . .	14
2.3	Integrali di volume . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Connessioni fra calcolo differenziale e calcolo integrale</b>	<b>18</b>
3.1	Teorema della divergenza . . . . .	18
3.2	Teorema di Stokes . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>23</b>
4.1	Equazioni differenziali alle variabili separabili . . . . .	23
4.1.1	Metodo classico . . . . .	24
4.1.2	Con la chain rule . . . . .	24
4.1.3	Con i campi conservativi . . . . .	25
4.1.4	Conclusioni . . . . .	25
4.2	Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti . . . . .	26
4.3	Applicazione: sistemi meccanici con potenziali omogenei . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Esercizi</b>	<b>33</b>
5.1	Legenda . . . . .	33
5.2	Basic . . . . .	33
5.3	Ordini e Limiti . . . . .	33
5.4	Derivate e Integrali . . . . .	34
5.5	Equazioni differenziali . . . . .	36
5.6	Fisica . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Problemi</b>	<b>39</b>

<b>7</b>	<b>Soluzioni</b>	<b>40</b>
7.1	Ordini e Limiti . . . . .	40
7.2	Derivate e Integrali . . . . .	41
7.3	ODE e PDE . . . . .	44
7.4	Fisica . . . . .	46
<b>8</b>	<b>Soluzioni problemi</b>	<b>48</b>

# 1 Calcolo Differenziale

## 1.1 Gradiente di una funzione scalare

In questa sezione ci occuperemo di generalizzare la nozione di *derivata* al caso di funzioni  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Per semplicità considereremo solo le funzioni  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Queste hanno infatti il pregio di poter essere rappresentate con il disegno del loro *grafico*, ovvero l'insieme delle terne  $(x, y, V(x, y))$  al variare di  $x, y \in \mathbb{R}$ . Rappresentiamone qualcuna. Procedendo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso troviamo  $z = x + y$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = \cos x$ ,  $z = xe^{-y^2}$ .

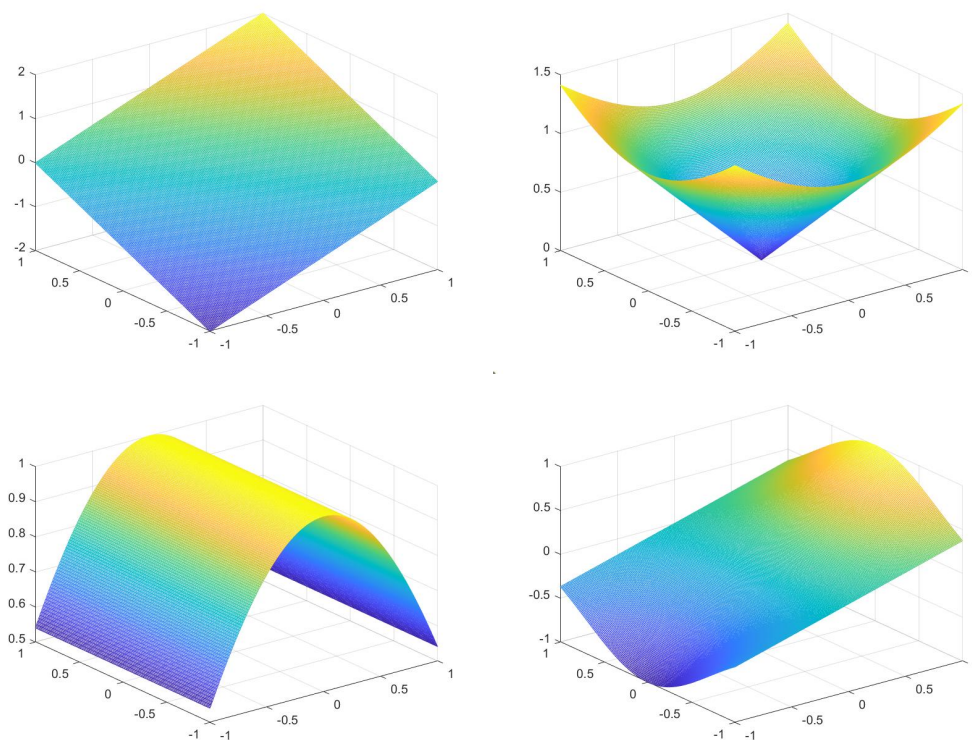


Figura 1: Esempi di grafici di funzioni.

Come per il calcolo in una variabile, vediamo cosa si ottiene se proviamo a calcolare il primo ordine di  $dV = dV(x, y) = V(x + dx, y + dy) - V(x, y)$ :

- per  $V(x, y) = x + y$  abbiamo  $dV = dx + dy$ .

- per  $V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  abbiamo

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{(x + dx)^2 + (y + dy)^2} - \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2x dx + 2y dy} - \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \end{aligned}$$

dove evidentemente ci sono dei problemi se  $(x, y) = (0, 0)$ . Ci torneremo in seguito.

- per  $V(x, y) = \cos x$  abbiamo  $dV = -\sin x dx$ .
- per  $V(x, y) = xe^{-y^2}$  abbiamo

$$\begin{aligned} dV &= (x + dx)e^{-(y+dy)^2} - xe^{-y^2} = (x + dx)e^{-y^2-2y dy} - xe^{-y^2} = \\ &= (x+dx)e^{-y^2}(1-2y dy) - xe^{-y^2} = xe^{-y^2} + e^{-y^2} dx - 2xye^{-y^2} dy - xe^{-y^2} = \\ &= e^{-y^2} dx - 2xye^{-y^2} dy \end{aligned}$$

Cosa abbiamo imparato da questi esempi? Abbiamo scoperto che generalmente una funzione  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ammette *un'espansione al primo ordine* attorno al punto  $(x, y)$  del tipo

$$dV = a(x, y) dx + b(x, y) dy \quad (1)$$

dove  $a(x, y), b(x, y)$  sono dei numeri che in generale dipendono dal punto  $(x, y)$ . Come abbiamo ricavato in generale questi numeri  $a(x, y)$  e  $b(x, y)$ ? Essenzialmente abbiamo usato tutte le espansioni al primo ordine in una variabile che conoscevamo e lì dove le operazioni ci generavano dei termini  $(dx)^2$  o  $(dy)^2$  o ancora  $dx dy$  li abbiamo buttati via. In effetti se avessimo considerato l'espressione  $V(x + dx, y) - V(x, y)$  avremmo ottenuto

$$V(x + dx, y) - V(x, y) = a(x, y) dx \quad (2)$$

che a posteriori torna perché corrisponde a considerare  $dy = 0$  in (1). Di conseguenza sappiamo calcolare  $a(x, y)$ , visto che

$$V(x + dx, y) - V(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad (3)$$

dove  $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y)$  è la derivata di  $V$  rispetto a  $x$  *tenendo fissata*  $y$ , altresì detta *derivata parziale di  $V$  rispetto a  $x$* . Eguagliando (2) e (3) si ottiene  $a(x, y) dx = \frac{\partial V}{\partial x} dx$  e di conseguenza  $a(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}$ .

**Teorema 1.1.** *Sia  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sufficientemente regolare. Allora attorno ad ogni suo punto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ammette un'espansione al primo ordine del tipo*

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n \quad (4)$$

dove  $\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  denota la derivata parziale  $i$ -esima, ovvero la derivata di  $V$  nella variabile  $x_i$  a fisse le altre.

L'interpretazione grafica dell'espansione (1) è che in un intorno del punto  $(x, y)$  la funzione  $V$  è ben approssimata da un piano, detto *piano tangente* al grafico. Il problema che avevamo riscontrato con la funzione  $V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  in  $(0, 0)$  si spiega geometricamente con l'assenza di un piano tangente, matematicamente con la non esistenza delle derivate parziali nell'origine.

Osserviamo ora che la relazione (4) si può riscrivere in termini di un *prodotto scalare* come

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \cdot ds = \nabla V \cdot ds \quad (5)$$

dove abbiamo posto  $ds = (dx, dy)$  lo spostamento vettoriale infinitesimo,  $\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)$  e per semplicità ci siamo ristretti al caso  $n = 2$ . Il vettore  $\nabla V = \nabla V(x, y)$  è detto *gradiente* della funzione  $V$  in  $(x, y)$ . Dalla relazione (5) si ricava equivalentemente che

$$dV = |\nabla V| ds \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato da  $\nabla V$  e  $ds$ . Una conseguenza di questo fatto è che  $\nabla V$  punta nella direzione di massima crescita della funzione  $V$ . Un'altra conseguenza è che il primo ordine di espansione di  $V$  si annulla solo per  $\theta = 90^\circ$ , ovvero il gradiente è *ortogonale* alle direzioni lungo cui  $V$  è stabile al primo ordine.

Quanto visto è sufficiente per giustificare molti risultati matematici elementari utili per la fisica. Vediamone uno per esempio.

**Esempio 1.1** (Campi conservativi). Sia  $\mathbf{F}$  un campo di forze conservativo. Sappiamo che per un tale campo di forze è possibile parlare di un *potenziale*, ossia una funzione  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che per ogni percorso  $\gamma$

$$L = -\Delta V \quad (6)$$

dove  $L$  è il lavoro fatto dal campo  $\mathbf{F}$  lungo il percorso  $\gamma$ . Per percorsi infinitesimali la precedente relazione diventa

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = dL = -dV = -\nabla V \cdot d\mathbf{s}$$

ricavando così l'identità  $\mathbf{F} = -\nabla V$ . Abbiamo quindi verificato che un campo conservativo è sempre il gradiente di una funzione scalare. È proprio poiché il gradiente di una funzione è ortogonale alle direzioni di stabilità al primo ordine, le superfici equipotenziali devono risultare ortogonali a  $\mathbf{F}$  in ogni loro punto.

Con un minimo di conoscenza del calcolo integrale, sarebbe immediato verificare che

- un campo è conservativo *se e solo se* è il gradiente di una funzione scalare;
- una superficie connessa è equipotenziale *se e solo se* è in ogni punto ortogonale al campo gradiente.

Come per le funzioni in una variabile, ha senso parlare di *punti critici* per una funzione  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Questi sono i punti  $(x, y)$  per cui  $\nabla V(x, y) = 0$ , ovvero quei punti per cui il corrispondente piano tangente è parallelo al piano  $xy$ . Sono questi i punti in cui possiamo avere una qualche speranza di trovare dei massimi e minimi locali per la funzione  $V$ . Come al solito un punto critico può non essere né di massimo né di minimo. Come per le funzioni in una variabile, per discriminare fra i vari scenari possibili, è spesso sufficiente espandere al secondo ordine e studiare il segno dello scarto. Espandiamo dunque  $dV$  al secondo ordine nelle variabili  $x, y$ .

$$\begin{aligned} V(x+dx, y+dy) - V(x, y) &= V(x+dx, y+dy) - V(x+dx, y) + V(x+dx, y) - V(x, y) = \\ &= \frac{\partial V}{\partial y}(x+dx, y) dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, y) dx^2 = \\ &= \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) dy + \frac{\partial \partial V}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy + \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) dx + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) dy^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy^2 \right)$$

Prima di continuare con lo studio dei punti critici, facciamo un'osservazione a parte. I conti appena conclusi dimostrano che  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$ .

Tornando ai punti critici, osserviamo che la natura del punto critico è dettata dal segno del polinomio

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} t^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} t + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

In particolare avremo un punto di minimo se  $\Delta < 0$  e  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$ , un punto di massimo se  $\Delta > 0$  e  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0$ , i cosiddetti punti di sella se  $\Delta > 0$  e nulla si può dire se  $\Delta = 0$  o se  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$  senza guardare anche gli ordini successivi. Nelle figure seguenti troviamo riassunti i quattro casi.

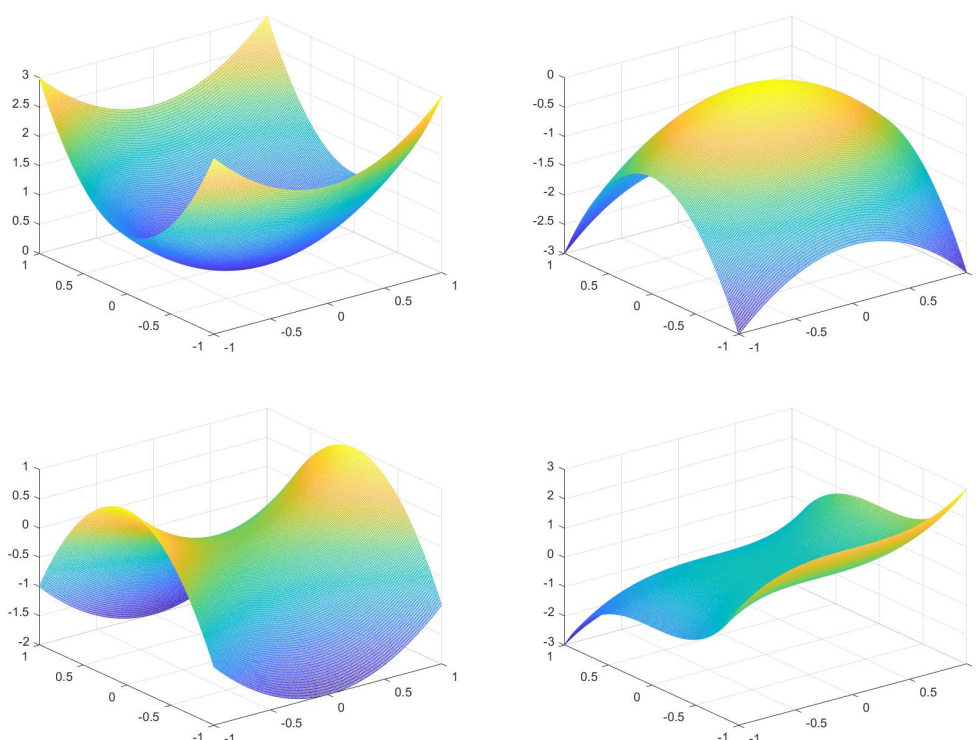


Figura 2: Procedendo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso, troviamo delle funzioni con punto critico nell'origine di tipo minimo, massimo, sella e nessuno dei precedenti.

Le funzioni rappresentate sono nell'ordine  $z = -x^2 - 2y^2$ ,  $z = x^2 + 2y^2$ ,  $z = x^2 - 2y^2$ ,  $z = x^3 - 2y^3$ .

## 1.2 Derivata di una curva

In questa sezione ci occuperemo di generalizzare la nozione di derivata al caso di funzioni  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ovvero le cosiddette curve. Supporremo per semplicità che  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Potremmo immaginare che  $\gamma$  descriva la legge oraria di una particella newtoniana: in quest'ottica la rappresentazione di  $\gamma$  come una traiettoria con delle frecce che ne indichino il verso di percorrenza è più che sufficiente. Proprio alla luce di questa interpretazione meccanica diremo che  $\gamma$  è funzione della variabile indipendente  $t$  che evochi la nozione di *tempo*.

Come nel caso in una variabile, siamo interessati ad espandere la funzione  $\gamma$  al primo ordine di  $dt$ . Ci sono più modi matematicamente equivalenti di arrivare alle medesime conclusioni.

### 1.2.1 Il vettore velocità

Un primo modo consiste nel farsi guidare dall'intuizione fisica: se  $\gamma$  descrive la legge oraria di una particella, può risultare abbastanza chiaro che

$$d\gamma = \mathbf{v} dt$$

dove  $d\gamma = d\gamma(t) = \gamma(t + dt) - \gamma(t)$  è lo spostamento vettoriale infinitesimo lungo la curva e  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  è la velocità istantanea della particella all'istante  $t$ .

### 1.2.2 La velocità scalare

Un secondo modo per arrivare allo stesso tipo di espansione è osservare che in ogni punto  $t$  una curva civile ammette un versore tangente  $\hat{\mathbf{u}}$  che punta nella direzione del moto e che

$$d\gamma = \frac{d\ell}{dt} \hat{\mathbf{u}} dt$$

dove  $\frac{d\ell}{dt} = \frac{d\ell}{dt}(t)$  è la velocità scalare della particella nell'istante  $t$ .

### 1.2.3 Guardare componente per componente

L'ultimo modo che presentiamo per ottenere un'espansione al primo ordine della funzione  $\gamma$  è vederla come una terna di funzioni  $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di una variabile a valori reali, ovvero scriveremo che

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

e quindi

$$d\gamma = (d\gamma_1, d\gamma_2, d\gamma_3) = \left( \frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right) dt$$

#### 1.2.4 Risultati

L'equivalenza dei metodi presentati ci conduce alle seguenti identità:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\ell}{dt} \hat{\mathbf{u}} = \left( \frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right)$$

Per comodità di notazione si suole scrivere  $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$ . L'ultimo dei tre metodi si basa sul fatto che la variazione infinitesima di  $\gamma$  si esprime in termini delle variazioni di  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Di conseguenza è abbastanza chiaro che per le curve vale Taylor all'ordine  $n$  nella sua forma usuale, ovvero

$$d\gamma = \dot{\gamma} dt + \frac{1}{2} \ddot{\gamma} (dt)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n \gamma}{dt^n} (dt)^n$$

Vediamo ora un esempio molto semplice dove intervengono tutti i concetti appena visti.

**Esempio 1.2** (Moto circolare uniforme). Sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$\gamma(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t))$$

la legge oraria di un moto circolare uniforme di frequenza  $\omega$  e raggio  $r$ . Determiniamo con considerazioni geometriche il vettore velocità. A meno di rotazione possiamo supporre che  $t = 0$ . In questo caso

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &= (r \cos(\omega dt), r \sin(\omega dt)) - (r, 0) = (r (\cos(\omega dt) - 1), r \sin(\omega dt)) = \\ &= (0, r\omega dt) = r\omega(0, 1) dt \end{aligned}$$

Nel caso generale avremo che  $\mathbf{v}(t) = r\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$ , in quanto  $\|v(t)\| = r\omega$  e  $\hat{\mathbf{v}}(t)$  deve essere un versore ortogonale a  $\gamma(t)$  e  $\hat{\gamma}(t) \times \hat{\mathbf{v}}(t) = \hat{\mathbf{z}}$  (se li vediamo come vettori sul piano  $xy$  in  $\mathbb{R}^3$ ). Chiaramente la velocità scalare è la stessa in ogni istante di tempo  $t$ . Se la denotiamo con  $\dot{s}$ , risulta che

$$\dot{s} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \dot{s}T = 2\pi r$$

da cui segue che  $\dot{s} = r\omega$ . Inoltre  $\hat{\mathbf{v}}(t)$  è in ogni istante tangente alla traiettoria. Notiamo infine che le componenti del vettore  $\mathbf{v}(t)$  sono le derivate delle rispettive componenti  $\gamma(t)$ .

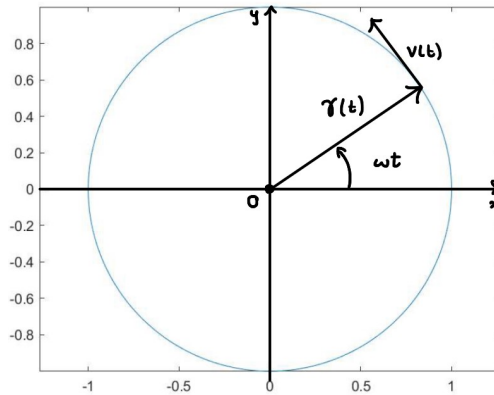


Figura 3: Moto circolare uniforme.

### 1.3 Chain Rule

In questa sezione ci occupiamo di generalizzare la regola della derivata composta nel suo caso più semplice. Sia  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva e  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione scalare. A titolo di esempio possiamo pensare che  $\gamma$  sia la legge oraria di una particella e  $V$  l'energia potenziale gravitazionale. Ci chiediamo quale sia la derivata di  $V(\gamma(t))$ . Analogamente a quanto fatto nelle sezioni precedenti, interpretiamo questo problema come *determiniamo l'espansione al primo ordine di  $V(\gamma(t))$* . La risposta è un facile conto:

$$dV(t) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot ds(t) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt} dt = \nabla V \cdot \dot{\gamma} dt$$

da cui otteniamo  $\frac{dV(\gamma(t))}{dt} = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}$ , la cosiddetta chain rule. Quanto appena trovato ha una semplice interpretazione fisica. Infatti sappiamo che  $dV = -dL = -\mathbf{F} \cdot d\gamma = \nabla V \cdot \dot{\gamma} dt$  dove  $dL$  è il lavoro infinitesimo fatto dalla forza di gravità  $\mathbf{F}$ . In definitiva abbiamo scoperto che

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (7)$$

Perché abbiamo scritto  $dV(t)$  e non  $dV(\gamma(t))$ ? Da un punto di vista matematico la notazione usata è impropria e sarebbe più corretto scrivere  $dV(\gamma(t))$ . Da un punto di vista fisico invece ha un significato ben preciso. Noi ci stiamo ponendo il problema di capire come varia l'energia potenziale della nostra particella al variare del tempo  $t$ . Chiaramente quello che vorremmo chiamare  $V(t)$  corrisponde formalmente alla funzione  $V$  valutata nel punto  $\gamma(t)$ , però

questa precisione formale non deve sviarci dalla comprensione della chain rule. Del resto, la filosofia è la stessa di quando scriviamo

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (8)$$

per funzioni di una variabile. Siamo ben consapevoli che la funzione che noi deriviamo rispetto alla  $y$  è *matematicamente* diversa da quella che deriviamo per la  $x$ . Il senso è che però leggiamo la  $y$  come un'altra variabile naturale in cui una stessa quantità fisica  $z$  (quale un'energia, una distanza, ecc.) può essere espressa, e con quest'ottica diamo il giusto significato alle derivate al membro di destra della (8).

## 1.4 Caso generale

In questa sezione discutiamo il caso generale di funzioni  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Il problema è sempre quello di determinare un'espansione al primo ordine della funzione  $F$  rispetto alle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Come nel caso delle curve, un'idea che funziona è quella di scrivere

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$$

e di conseguenza

$$dF = (dF_1, dF_2, \dots, dF_m)$$

Se denotiamo con  $ds = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ , per quanto visto sulle funzioni scalari possiamo scrivere

$$dF = (\nabla F_1 \cdot ds, \nabla F_2 \cdot ds, \dots, \nabla F_m \cdot ds)$$

Ricaviamo ora la chain rule in generale: sia  $G: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con variabili indipendenti  $y_1, y_2, \dots, y_l$ . Se lavoriamo sulle componenti del campo  $F$  otteniamo

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_k}$$

dove abbiamo usato l'espressione (7).

## 2 Calcolo Integrale

### 2.1 Integrali di linea

In questa sezione ci occupiamo di generalizzare la nozione di integrale al caso di curve. Siamo interessati a calcolare l'integrale di una funzione

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  lungo una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , mantenendo inalterata l'intuizione di passaggio al continuo dell'operazione di somma. L'operazione matematica a cui siamo interessati è

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

Non abbiamo fatto altro che scrivere  $ds = \frac{ds}{dt} dt = \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ . In maniera analoga si definisce il lavoro di un campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lungo la curva  $\gamma$ : esso corrisponde a

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt$$

Semplicemente abbiamo scritto  $ds = \frac{ds}{dt} dt = \dot{\gamma} dt$ . Vediamo degli esempi.

**Esempio 2.1** (Lunghezza di una curva). Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva e supponiamo di volerne calcolare la lunghezza. Questa non sarà altro che

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

ovvero l'integrale di linea della funzione identicamente 1. Ad esempio se  $\gamma(t) = (t, f(t), 0)$  è un grafico di una funzione  $f$ , abbiamo trovato che la lunghezza di  $\gamma$  è  $\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt$ .

**Esempio 2.2** (Teorema della forze vive). Sia  $\mathbf{r} : [t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la legge oraria di un corpo di massa  $m$  per i tempi  $t_0 \leq t' \leq t$ . Da  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$  si deduce che

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\gamma(t')) \cdot \dot{\gamma}(t') \, dt' = \int_{t_0}^t m\ddot{\gamma}(t') \cdot \dot{\gamma}(t') \, dt'$$

Poiché  $\frac{d}{dt'} \|\dot{\gamma}(t')\|^2 = \frac{d}{dt'} (\dot{\gamma}(t') \cdot \dot{\gamma}(t')) = 2\ddot{\gamma}(t') \cdot \dot{\gamma}(t')$ , dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la regola della derivata del prodotto, ne segue che

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} \|\dot{\gamma}(t')\|^2 \, dt' = \frac{1}{2} m \|\dot{\gamma}(t)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\dot{\gamma}(t_0)\|^2$$

Se scriviamo  $v = \|\dot{\gamma}(t)\|$  e  $v_0 = \|\dot{\gamma}(t_0)\|$  otteniamo la più caratteristica

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

ovvero il teorema delle forze vive.

## 2.2 Integrali di superficie

In questa sezione ci occupiamo di generalizzare la nozione di integrale al caso di superfici. Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie e supponiamo di voler integrare una funzione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , nuovamente mantenendo intatta l'intuizione di passaggio al continuo dell'operazione di somma. L'operazione matematica a cui siamo interessati è

$$\int_{\Sigma} f \, dS$$

dove  $dS$  è l'elemento infinitesimo di area della superficie  $\Sigma$ . Purtroppo per dare un'espressione esplicita e calcolabile dobbiamo fare qualche step in più rispetto al caso degli integrali di linea.

Supponiamo preliminarmente che la nostra superficie sia un certo sottoinsieme  $D$  del piano  $xy$ . In questo caso l'elemento infinitesimo di area è  $dx \, dy$ , e quindi l'integrale cercato diventa

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy$$

Immaginiamo ora di quadrettare l'insieme  $D$  con una griglia di rettangoli di centro  $(x_i, y_j)$ , con lati paralleli ai due assi e di lunghezza  $\Delta x_i$  e  $\Delta y_j$ . Supponiamo che la quadrettatura sia sufficientemente fine da poterci permettere di pensare che la funzione  $f$  sia circa costante su ogni quadretto. Allora

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy \approx \sum_{\text{quadretti}} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Per calcolare la somma al membro di destra possiamo prima fare la somma sulle righe e infine sommare i risultati sulle colonne o viceversa. Passando al limite ne deduciamo che

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \int_{D \cap \{x\} \times \mathbb{R}} dy f(x, y) \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left( \int_{D \cap \mathbb{R} \times \{y\}} dx f(x, y) \right) \end{aligned}$$

Prima di passare al caso generale, vediamo prima un esempio di calcolo di questi integrali, detti anche *integrali doppi*.

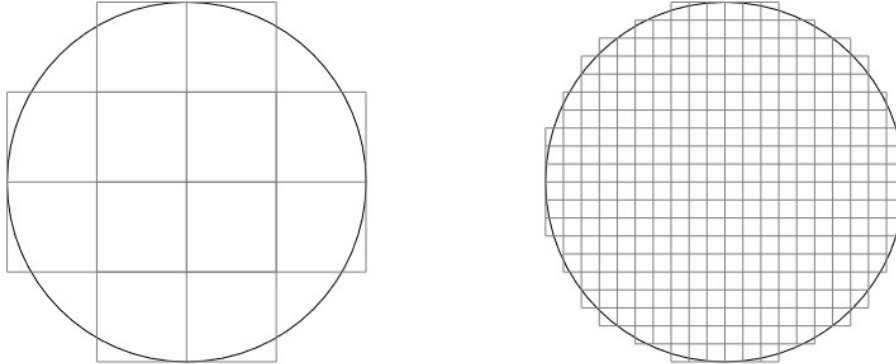


Figura 4: Esempi di quadrettature che ricoprono (parte di) un cerchio.

**Esempio 2.3** (Area del cerchio unitario). Sia  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  e calcoliamo  $\int_D dS$ . Abbiamo essenzialmente due modi per procedere:

- *metodo furbo*: usiamo l'elemento d'area infinitesimo in coordinate polari, ovvero  $r dr d\theta$ . Intuitivamente stiamo tassellando il cerchio con tanti "archi" di corone circolari a distanza  $r$  e spessore  $dr$ . Quindi

$$\int_D dS = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \cdot r = \int_0^1 r dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

- *metodo non così furbo*: per quanto visto sappiamo che

$$\begin{aligned} \int_D dS &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \\ &= \int_0^\pi 2\sqrt{1-\sin^2\theta} \cos\theta d\theta = \int_0^\pi 2\cos^2\theta d\theta = \int_0^\pi 1 + \cos(2\theta) d\theta = \\ &= \pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = \pi \end{aligned}$$

Per calcolare gli integrali di superficie nel caso generale quello che si fa è ricondursi al calcolo di integrali doppi. Anche se è possibile arrivare alla "ricetta" generale con non troppo sforzo, ci limiteremo a vedere degli esempi dove questa non è necessaria per brevità.

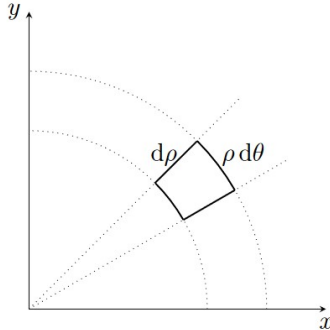


Figura 5: Elemento infinitesimo di area in coordinate polari.

**Esempio 2.4** (Calcolo dell'area della superficie laterale di un cilindro). Consideriamo il cilindro  $C$  con asse  $z$ , altezza  $h$  e raggio di base  $r$ . Per farlo vengono comode le variabili naturali delle coordinate cilindriche, ovvero  $\rho, \theta, z$  (in questo caso  $\rho$  è costante). L'area della sua superficie laterale sarà

$$\int_{\text{Sup.lat}} dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} r d\theta dz = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \cdot r = 2\pi r h$$

dove abbiamo usato che  $dS = r d\theta dz$ .

**Esempio 2.5** (Area di una superficie sferica). Calcoliamo l'area di una superficie sferica  $\Sigma_r$  di raggio  $r$ . Per farlo vengono comode le variabili naturali delle coordinate sferiche, ovvero  $r, \theta, \phi$  (in questo caso  $r$  è costante). Questa è

$$\int_{\Sigma_r} dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\phi d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta = 4\pi r^2$$

dove abbiamo usato che  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi = r^2 d\Omega$ . L'elemento infinitesimo di area della sfera unitaria  $d\Omega$  è detto *angolo solido*.

Un'altra nozione importante di integrale di superficie è quella di flusso di

un campo di vettori  $\mathbf{F}$  lungo una superficie  $\Sigma$ . Questo corrisponde a calcolare

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

dove  $d\mathbf{S}$  è il vettore di area  $dS$  e puntualmente ortogonale alla superficie. Questo è determinato a meno del segno, e quindi il segno dell'integrale dipende dall'orientazione di  $d\mathbf{S}$ . Convenzionalmente se  $\Sigma$  è una superficie chiusa il vettore  $d\mathbf{S}$  è orientato esternamente rispetto al volume racchiuso dalla superficie. Vediamo un esempio.

**Esempio 2.6** (Conservazione della carica in forma globale). Sia  $V$  una regione di  $\mathbb{R}^3$  racchiusa dalla superficie  $\Sigma$ . Sia  $Q(t)$  la quantità di carica racchiusa nel volume  $V$  e sia  $\mathbf{J}$  la densità di corrente per unità di superficie. Allora la conservazione della carica si esprime dicendo che

$$\dot{Q} + \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ovvero le variazioni di  $Q$  sono dovute *sempre e solo* da un flusso netto di cariche attraverso la superficie  $\Sigma$ .

## 2.3 Integrali di volume

Trattiamo molto brevemente il caso degli integrali di volume. Sia  $V$  una porzione di volume in  $\mathbb{R}^3$  e  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora l'operazione matematica che stiamo cercando è

$$\int_V f dV$$

dove  $dV$  rappresenta l'elemento infinitesimo di volume. In cartesiane si scrive come  $dx dy dz$ , in cilindriche è  $\rho d\rho d\theta dz$  e infine in sferiche è  $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ . Come nel caso degli integrali doppi gli integrali di volume (detti anche integrali tripli) si possono ricondurre al calcolo di tre integrali innestati in una variabile.

### 3 Connessioni fra calcolo differenziale e calcolo integrale

#### 3.1 Teorema della divergenza

In questa sezione ci occupiamo di offrire una prima generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo di vettori e siano  $F_x, F_y, F_z$  le sue componenti, ovvero  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ . Definiamo la *divergenza* di  $\mathbf{F}$  come

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

La notazione sottointende che la divergenza è funzione del punto  $(x, y, z)$  in cui la calcoliamo. Il senso della seconda notazione è che pensiamo la divergenza come prodotto scalare tra l'operatore  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  e  $\mathbf{F}$ .

Vediamo subito il teorema della divergenza.

**Teorema 3.1** (Teorema della divergenza). *Sia  $\mathbf{F}$  un campo di vettori e sia  $V$  un volume in  $\mathbb{R}^3$  che ha per bordo la superficie chiusa  $\Sigma$ . Risulta che*

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

dove  $d\mathbf{S}$  è orientato esternamente rispetto al volume  $V$ . Il cerchietto attorno all'integrale sta a ricordare che la superficie  $\Sigma$  su cui integriamo è chiusa.

*Dimostrazione.* Immaginiamo di tagliare internamente la regione  $V$  con una parete  $\Pi$ . Allora  $V$  si spezza in due regioni  $V_1, V_2$  con bordi  $\Sigma_1, \Sigma_2$ . Verifichiamo che

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (9)$$

Questo segue dal fatto che

$$\oint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma \cap \Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Pi,1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (10)$$

$$\oint_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma \cap \Sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Pi,2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (11)$$

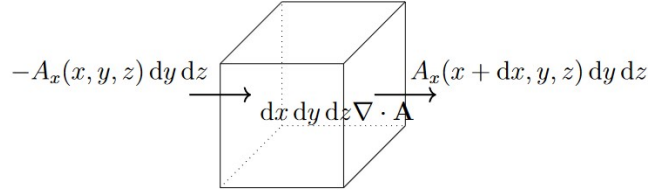


Figura 6: Rappresentazione grafica del conto per un parallelepipedo (in figura il campo di vettori si chiama  $\mathbf{A}$ )

dove i pedici 1, 2 si riferiscono al fatto che le orientazioni sono diverse. In particolare abbiamo  $\int_{\Pi,1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{\Pi,2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ . Quindi sommando (10) e (11) otteniamo la (9). Alla luce di quanto dimostrato possiamo pensare di tagliare il volume  $V$  con tanti piani paralleli ai piani coordinati  $xy, xz, yz$  e di sommare gli integrali di flusso lungo i parallelepipedotti ottenuti. Calcoliamo ora il flusso uscente da un parallelepipedo di lati  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  e vertice con componenti minime  $(x_0, y_0, z_0)$ . Siano  $F_{x,y,\text{inferiore}}, F_{x,y,\text{superiore}}$  le due facce parallele ai piani  $xy$ . Il flusso uscente da queste due facce è

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} F_z(x, y, z_0+\Delta z) - F_z(x, y, z_0) &\approx \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta z \approx \\ &\approx \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

dove le approssimazioni sono giustificate dall'assunzione che il parallelepipedo sia sufficientemente piccolo. Infatti in tal caso possiamo sia approssimare le variazioni di  $F_z$  con una semplice espansione al primo ordine, sia supporre che  $\frac{\partial F_z}{\partial z}$  sia circa costante nella regione di interesse.

Conti analoghi per le altre facce mostrano che

$$\int_{\text{bordo parallelepipedo}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \approx \nabla \cdot \mathbf{F} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Sommando i contributi ottenuti e passando al limite per partizioni di  $V$  sempre più fini si ottiene l'uguaglianza cercata.  $\square$

Vediamo qualche esempio di applicazione del teorema della divergenza.

**Esempio 3.1** (Conservazione della carica in forma locale). Sia  $V$  un volume in  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\Sigma$  il suo bordo. Se denotiamo con  $\mathbf{J}$  il vettore densità di corrente per unità di area e con  $Q$  la carica totale racchiusa in  $V$ , abbiamo visto che

$$\dot{Q} + \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Grazie al teorema della divergenza possiamo riscrivere questa relazione come

$$\dot{Q} + \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = 0$$

Sia  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  la densità di carica. Allora

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Abbiamo scoperto che per ogni volume  $V$  risulta che

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} dV = 0$$

Ne deduciamo l'equazione di continuità, ovvero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

**Esempio 3.2** (1<sup>a</sup> equazione di Maxwell). Sia  $\mathbf{E}$  il campo elettrico,  $V$  un volume in  $\mathbb{R}^3$  e  $\Sigma$  il suo bordo. Se denotiamo con  $Q$  la quantità di carica racchiusa nel volume  $V$ , per il teorema di Gauss sappiamo che

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Con conti analoghi ai precedenti deduciamo che per ogni volume  $V$  risulta

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = 0$$

Ne deduciamo la 1<sup>a</sup> equazione di Maxwell, ovvero

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

**Esempio 3.3** (3<sup>a</sup> equazione di Maxwell). La non esistenza di monopoli magnetici si esprime come

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

per ogni superficie chiusa  $\Sigma$ . Usando il teorema della divergenza ne deduciamo in maniera analoga a prima la 3<sup>a</sup> equazione di Maxwell, ovvero

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

### 3.2 Teorema di Stokes

In questa sezione ci occupiamo di dare brevemente una seconda generalizzazione al teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo di vettori e siano  $F_x, F_y, F_z$  le sue componenti, ovvero  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ . Definiamo il *rotore* di  $\mathbf{F}$  come

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Anche in questo caso la notazione sottintende che il rotore è funzione del punto  $(x, y, z)$  in cui lo calcoliamo. Il senso della seconda notazione è che pensiamo il rotore come il prodotto vettoriale tra l'operatore  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  e  $\mathbf{F}$ .

Vediamo subito il teorema di Stokes o teorema del rotore.

**Teorema 3.2** (Teorema di Stokes). *Sia  $\mathbf{F}$  un campo di vettori e sia  $\Sigma$  una superficie che ha per bordo la curva chiusa  $\gamma$ . Risulta che*

$$\int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

*dove il vettore infinitesimo  $d\mathbf{S}$  deve essere orientato in maniera da rispettare la regola della mano destra con l'orientazione del bordo  $\gamma$ . Anche in*

*questo caso il cerchietto sull'integrale sta a significare che al membro di destra è presente una circuitazione, ovvero un integrale lungo una curva chiusa.*

La dimostrazione di questo fatto è del tutto analoga a quella fatta per il teorema della divergenza. Vediamo qualche esempio di applicazione del teorema di Stokes.

**Esempio 3.4** (Campo conservativo se e solo se chiuso). Sappiamo che un campo  $\mathbf{F}$  è conservativo se e solo se per ogni curva chiusa  $\gamma$  il campo  $\mathbf{F}$  ha circuitazione nulla su  $\gamma$ , ovvero

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Grazie al teorema di Stokes sappiamo che se un campo  $\mathbf{F}$  è chiuso (o irrotazionale), ovvero verifica che  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , allora è anche conservativo. Infatti se prendiamo una qualsiasi superficie  $\Sigma$  che ha per bordo  $\gamma$  si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Se invece  $\mathbf{F}$  è un campo conservativo allora  $\mathbf{F} = -\nabla V$  dove  $V$  è il suo potenziale. Quindi

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} = \\ &= - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \hat{\mathbf{z}} = 0 \end{aligned}$$

in quanto abbiamo visto che le derivate parziali commutano. Quindi un campo  $\mathbf{F}$  è conservativo se e solo se è irrotazionale.

**Osservazione:** l'equivalenza è vera per campi definiti ovunque. La freccia vera in generale è che conservativo implica irrotazionale. Per dire che anche l'altra freccia è vera è sufficiente che presa una qualsiasi curva chiusa  $\gamma$  in cui  $\mathbf{F}$  è definito esista almeno una superficie  $\Sigma$  che ha per bordo  $\Gamma$  e in cui  $\mathbf{F}$  sia definito. Questa proprietà così semplice può non essere vera: ad esempio se  $\mathbf{F}$  è definito solo nell'insieme dei punti  $(x, y, z)$

tali che  $x^2 + y^2 > 1$ . Seguendo la logica esposta vale ancora l'equivalenza se consideriamo un campo irrotazionale  $\mathbf{F}$  definito su tutto  $\mathbb{R}^3$  eccetto che al più in un punto.

**Esempio 3.5** (2<sup>a</sup> equazione di Maxwell per l'elettrostatica). Sappiamo che il campo elettrostatico è conservativo. Per quanto appena visto si esprime dicendo che è irrotazionale, ovvero

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Abbiamo così ottenuto la 2<sup>a</sup> equazione di Maxwell per l'elettrostatica.

**Esempio 3.6** (4<sup>a</sup> equazione di Maxwell per la magnetostatica). La legge di Ampère ci dice che se  $\mathbf{B}$  è il campo magnetostatico e  $\Sigma$  è una superficie che ha per bordo  $\gamma$  allora

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

con le orientazioni in accordo alla regola della mano destra. Usando il teorema di Stokes ne deduciamo che per ogni superficie  $\Sigma$  si ha

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Ne deduciamo la 4<sup>a</sup> equazione di Maxwell per la magnetostatica, ovvero

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

## 4 Equazioni differenziali ordinarie

### 4.1 Equazioni differenziali alle variabili separabili

In questa sezione analizziamo in dettaglio un primo caso di equazioni differenziali, le cosiddette *equazioni differenziali alle variabili separabili*. Siano  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni e ci poniamo il problema di determinare una funzione  $x: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (12)$$

Osserviamo preliminarmente che se  $g(x_0) = 0$  allora la funzione  $x(t) \equiv x_0$  è soluzione. Di conseguenza ci restringeremo al caso in cui  $g(x_0) \neq 0$ . Ci sono più modi per procedere.

#### 4.1.1 Metodo classico

Un primo modo consiste nello scrivere

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t) dt$$

Integrando si ottiene

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{g(x')} = \int_{t_0}^t f(t') dt'$$

#### 4.1.2 Con la chain rule

Un secondo modo consiste nel riscrivere l'equazione differenziale come

$$\frac{1}{f(t)g(x)} \cdot \frac{dx}{dt} = 1$$

Adesso facciamo un lavoro di interpretazione. Siano  $G(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{g(x')}$  e  $\tau(t) = \int_{t_0}^t f(t') dt'$ : queste due funzioni ci permettono di vedere il membro di sinistra della precedente equazione come

$$\frac{dG}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = 1$$

ovvero se consideriamo la funzione  $h(\tau) = G(x(t(\tau)))$  si ha

$$\frac{dh}{d\tau} = 1$$

cioè  $h(\tau) = \tau + h(0) = \tau$ , da cui

$$G(x(t)) = \tau(t)$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{g(x')} = \int_{t_0}^t f(t') dt'$$

### 4.1.3 Con i campi conservativi

Un ultimo modo per dedurre il risultato precedente è scrivere

$$\frac{dx'}{g(x')} - f(t) dt = 0$$

Sia  $\gamma$  il grafico della soluzione dell'equazione differenziale tra  $t_0$  e  $t$ . Sappiamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \frac{dx'}{g(x')} - f(t') dt' = \int_{\gamma} \nabla(G(x') - F(t')) \cdot ds = \\ &= G(x(t)) - F(t) - G(x(t_0)) + F(t_0) = G(x(t)) - F(t) \end{aligned}$$

ovvero

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{g(x')} = \int_{t_0}^t f(t') dt'$$

### 4.1.4 Conclusioni

La relazione che in alcuni casi ci permette di risolvere l'equazione differenziale è

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{g(x')} = \int_{t_0}^t f(t') dt'$$

Vediamo un esempio di equazione differenziale alle variabili separabili.

**Esempio 4.1.** Consideriamo un oscillatore armonico: l'equazione della conservazione dell'energia si scrive come

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

Restringiamo la ricerca di una soluzione a un intervallo di tempo  $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$  in cui  $\dot{x} \geq 0$ . Allora la precedente equazione si riscrive come

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}E - \frac{k}{m}x^2}$$

che è alle variabili separabili. Osserviamo che se il radicando è nullo allora la costante  $x_0$  è soluzione. Tuttavia sappiamo che non è quella che stiamo cercando. Dunque

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}E - \frac{k}{m}x'^2}} = t - t_0$$

Rimane da computare l'integrale al membro di sinistra. Procediamo al calcolo:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}E - \frac{k}{m}x'^2}} &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x'^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \cdot \sqrt{\frac{2E}{k}} \int_{\sqrt{\frac{k}{2E}x_0}}^{\sqrt{\frac{k}{2E}x(t)}} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \left( \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{2E}x(t)} \right) - \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{2E}x_0} \right) \right) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \left( \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{2E}x(t)} \right) - \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{2E}x_0} \right) \right) = t - t_0$$

ovvero

$$\sqrt{\frac{k}{2E}x(t)} = \cos \left( \sqrt{k}m(t - t_0) + \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{2E}x_0} \right) \right)$$

e quindi

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{2E}x_0} \right) \right)$$

A questo punto si potrebbe verificare che la funzione ottenuta è soluzione per ogni istante di tempo  $t$ , il che risolve il problema.

## 4.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

In questa sezione tratteremo brevemente le equazioni differenziali lineari costanti, perlopiù con degli esempi esplicativi.

Un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è un'equazione del tipo

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = f(t)$$

dove gli  $a_i$  sono delle costanti e  $x^{(i)}$  denota la derivata  $i$ -esima rispetto alla variabile temporale  $t$ . Essendo un'equazione dell' $n$ -esimo ordine (di derivazione), dobbiamo aspettarci che la soluzione sia unica a patto di specificare i valori di  $x$  e delle sue derivate fino alle  $(n - 1)$ -esima nell'istante iniziale  $t_0$ .

Se  $f(t) \equiv 0$  l'equazione differenziale si dice *omogenea*. Questa ha la proprietà che se  $x_1, x_2$  sono soluzioni allora anche  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$  è una soluzione. L'idea vincente è saper fare dei claim sulle soluzioni. Un metodo standard è quello di *guessare* soluzioni esponenziali, ovvero funzioni del tipo  $e^{\lambda t}$  con  $\lambda$  possibilmente anche un numero complesso. Troveremo che  $x$  risolve l'omogenea se e solo se  $\lambda$  è una radice del polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

Se questo polinomio ha radici *distinte*  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  allora tutte le soluzioni si scriveranno come

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

Se invece una radice  $\lambda$  compare in  $p(x)$  con molteplicità  $k$  avremo le soluzioni  $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$ . Con questo abbiamo risolto il caso generale per le equazioni differenziali omogenee.

Per le equazioni differenziali non omogenee possiamo notare che è sufficiente conoscere *una* soluzione particolare  $x_{\text{part}}$  per ricavare tutte le altre. Infatti ogni soluzione si scriverà come  $x_{\text{part}} + x_{\text{omog}}$  dove  $x_{\text{omog}}$  è una qualsiasi soluzione dell'omogenea. A questo punto si tratta di capire come trovare una soluzione particolare. Per far ciò esiste il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, che vedremo con un esempio perché formalizzarlo per bene richiederebbe del lavoro.

**Esempio 4.2** (Oscillatore armonico forzato). Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \cos(\alpha t)$$

L'equazione omogenea associata è quella dell'oscillatore armonico, di cui due soluzioni indipendenti sappiamo essere  $e^{i\omega t}$  e  $e^{-i\omega t}$ . Cerchiamo una soluzione particolare del tipo  $x(t) = A(t)e^{i\omega t} + B(t)e^{-i\omega t}$ . Chiaramente  $A(t)$  e  $B(t)$  non possono essere costanti perché altrimenti la funzione scritta sarebbe soluzione dell'omogenea. Deriviamo  $x(t)$ .

$$\dot{x}(t) = \dot{A}e^{i\omega t} + i\omega A e^{i\omega t} + \dot{B}e^{-i\omega t} - i\omega B e^{i\omega t}$$

Imponiamo che  $\dot{A}e^{i\omega t} + \dot{B}e^{-i\omega t} \equiv 0$ , ovvero che anche se  $A, B$  non sono costanti si comportino come delle costanti quando deriviamo una volta la funzione  $x(t)$ . Se deriviamo ulteriormente otteniamo

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= i\omega\dot{A}e^{i\omega t} - \omega^2 A e^{i\omega t} - i\omega\dot{B}e^{-i\omega t} - \omega^2 B e^{-i\omega t} = \\ &= i\omega\dot{A}e^{i\omega t} - i\omega\dot{B}e^{-i\omega t} - \omega^2 x\end{aligned}$$

da cui  $x$  sarà soluzione se e solo se vale la condizione ulteriore

$$i\omega\dot{A}e^{i\omega t} - i\omega\dot{B}e^{-i\omega t} = \cos(\alpha t)$$

Abbiamo trovato così le condizioni

$$\begin{cases} \dot{A}e^{i\omega t} + \dot{B}e^{-i\omega t} = 0 \\ i\omega\dot{A}e^{i\omega t} - i\omega\dot{B}e^{-i\omega t} = \cos(\alpha t) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\cos(\alpha t)e^{-i\omega t}}{2i\omega} \\ \dot{B} = \frac{\cos(\alpha t)e^{i\omega t}}{-2i\omega} \end{cases}$$

Determiniamo  $A$  e  $B$  che risolvano il precedente sistema.

$$A = \int_0^t \frac{\cos(\alpha t')e^{-i\omega t'}}{2i\omega} dt' = \int_0^t \frac{e^{i(\alpha-\omega)t'}}{4i\omega} dt' + \int_0^t \frac{e^{-(\alpha+\omega)t'}}{4i\omega} dt'$$

e similmente per  $B$ . Ora andrebbero distinti i casi in cui  $\alpha = \pm\omega$  e  $\alpha \neq \pm\omega$ , che conducono a risultati diversi negli integrali. Lasciamo al lettore l'onere di portare a termine i conti rimasti.

### 4.3 Applicazione: sistemi meccanici con potenziali omogenei

In questa sezione ci proponiamo di indagare le proprietà di un sistema meccanico in cui agiscono solo forze di interazione conservative con potenziali omogenei e dello stesso grado di omogeneità. Per semplicità tratteremo solo il caso del moto unidimensionale di una particella, ma tutte le relazioni che scriveremo varranno per moti con un numero arbitrario di gradi di libertà. La nostra semplificazione ci permette di dire che l'intera dinamica può essere

descritta da una sola equazione, ovvero la *conservazione dell'energia*

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + V(x_0) = E \quad (13)$$

a cui andrebbe aggiunta la condizione iniziale sul *segno* di  $\dot{x}_0$ , che non è deducibile dalla precedente equazione. Denotiamo con  $k$  il grado di omogeneità del potenziale, ovvero  $V(\alpha x) = \alpha^k V(x)$  per  $\alpha > 0$ . Vista l'omogeneità del potenziale, possiamo chiederci cosa succede se consideriamo il moto di una particella di massa  $m$ , posizione iniziale  $\alpha x_0$  e energia meccanica  $\alpha^k E$ . Denoteremo con  $y(t)$  la legge oraria della suddetta particella. Supponiamo inoltre che  $\dot{x}_0$  e  $\dot{y}_0$  abbiano lo stesso segno. L'equazione che dovremo risolvere è

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + V(y) = \alpha^k E$$

Sia  $y(t) = \alpha z(t)$  e determiniamo la corrispondente equazione differenziale per la  $z$ . Sostituendo nella precedente si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\alpha^2\dot{z}^2 + \alpha^k V(z) &= \alpha^k E \\ \frac{1}{2}m\alpha^{2-k}\dot{z}^2 + V(z) &= E \end{aligned} \quad (14)$$

che somiglia molto alla (13). Osserviamo che se non ci fosse  $\alpha^{2-k}$ , visto che  $z_0 = x_0$  e  $\dot{z}_0, \dot{x}_0$  hanno lo stesso segno, sapremmo che  $z(t) = x(t)$  per ogni istante di tempo  $t$ . Quanto fatto basterebbe a dire che se  $V$  è un potenziale quadratico allora tutte le orbite sono fra loro omotetiche e hanno lo stesso periodo. Tuttavia possiamo dire molto anche nel caso in cui  $k \neq 2$ . Infatti per trasformare la (14) nella (13) è sufficiente *manipolare il tempo*. Se poniamo  $t = \beta(t' - t_0) + t_0$  otteniamo

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^{2-k}}{\beta^2} \left( \frac{dz}{dt'} \right)^2 + V(z) = E$$

Se poniamo  $\beta = \alpha^{1-\frac{1}{2}k}$  otteniamo proprio l'equazione (13) con le medesime condizioni iniziali. Questo significa che

$$y(t) = \alpha x(t') = \alpha x \left( t_0 + \frac{t - t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right)$$

Facciamo una verifica a posteriori di quanto ottenuto.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + V(y) &= \frac{1}{2}m\alpha^2\dot{x}^2 \left( t_0 + \frac{t-t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right) \cdot \frac{1}{\alpha^{2-k}} + \alpha^k V \left( x \left( t_0 + \frac{t-t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right) \right) = \\ &= \alpha^k \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \left( t_0 + \frac{t-t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right) + V \left( x \left( t_0 + \frac{t-t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right) \right) \right] = \alpha^k E \end{aligned}$$

$$y(t_0) = \alpha x_0 = y_0$$

$$\dot{y}(t_0) = \alpha \dot{x} \left( t_0 + \frac{t-t_0}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} \right) \Big|_{t=t_0} \cdot \frac{1}{\alpha^{1-\frac{1}{2}k}} = \alpha^{\frac{1}{2}k} \dot{x}_0 = \dot{y}_0$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che  $\dot{y}(t_0)$  e  $\dot{x}_0$  hanno lo stesso segno.

Quanto ottenuto ci dice che le traiettorie  $x(t)$  e  $y(t)$  sono omotetiche, anche se abbiamo visto che per  $k \neq 2$  non è vero che  $y(t) = \alpha x(t)$ . Possiamo dire di più. Siano  $L_x, L_y, T_x, T_y$  delle lunghezze e dei tempi caratteristici dei due moti. Nel caso di una massa  $m$  attaccata a una molla possono essere le ampiezze e i periodi. Le relazioni

$$\begin{cases} y(t_0 + \beta \Delta t) = \alpha x(t_0 + \Delta t) \\ \beta = \alpha^{1-\frac{1}{2}k} \end{cases}$$

ci permettono di dedurre le seguenti relazioni

$$\begin{cases} L_y = \alpha L_x \\ T_y = \beta T_x \\ \beta = \alpha^{1-\frac{1}{2}k} \end{cases}$$

e quindi

$$T_y = \beta T_x = \alpha^{1-\frac{1}{2}k} T_x = \left( \frac{L_y}{L_x} \right)^{1-\frac{1}{2}k} T_x$$

$$\frac{T_y}{T_x} = \left( \frac{L_y}{L_x} \right)^{1-\frac{1}{2}k}$$

ovvero possiamo mettere in relazione il *rapporto di similitudine* delle orbite con il rapporto dei periodi (se sono periodiche: in generale dei loro tempi caratteristici). Ad esempio per  $k = 2$  si ottiene che i periodi sono uguali, in accordo con l'osservazione che l'ampiezza e la frequenza di oscillazione di

un oscillatore armonico sono meccanicamente indipendenti. Nel caso di un potenziale Newtoniano si ha  $k = -1$ , ovvero

$$\frac{T_y}{T_x} = \left( \frac{L_y}{L_x} \right)^{\frac{3}{2}}$$

che è un corollario della terza legge di Keplero. Nel caso del moto di un pendolo siamo in presenza di un potenziale con  $k = 1$ . In tal caso

$$\frac{T_y}{T_x} = \left( \frac{L_y}{L_x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

che è una conseguenza di  $\omega = C(\theta_0)\sqrt{\frac{g}{l}}$ , dove  $C(\theta_0)$  è un'opportuna costante dipendente dalla massima ampiezza angolare  $\theta_0$ .

Concludiamo il nostro studio dei potenziali omogenei con il *teorema del viriale*.

**Teorema 4.1** (Teorema del viriale). *Nelle ipotesi di omogeneità dei potenziali, se inoltre l'orbita del sistema è limitata nello spazio e le velocità sono limitate, denotati con  $\bar{V}$  e  $\bar{K}$  le medie dell'energia potenziale e cinetica del sistema, si ha*

$$\bar{V} = \frac{2}{k+2}E \quad \bar{K} = \frac{k}{k+2}E$$

dove  $E$  è l'energia meccanica del sistema e  $k$  è il grado di omogeneità del potenziale.

*Dimostrazione.* Come sempre dimostriamo il teorema solo nel caso di un moto unidimensionale. Supporremo inoltre che  $V(x) = V_0|x|^k$ , per non dover complicare matematicamente la dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità che  $t_0 = 0$ . Sia  $t > 0$  un istante di tempo. Notiamo che

$$\int_0^t \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t') dt' = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)x(t)\Big|_{t'=0}^{t'=t} - \int_0^t \frac{1}{2}m\ddot{x}(t')x(t') dt' \quad (15)$$

La seconda legge di Newton ci dice che  $m\ddot{x}(t') = -kV_0|x(t')|^{k-1} \text{sgn}(x(t')) = -kV_0 \frac{|x(t')|^k}{x(t')}$ , da cui il secondo integrale nella precedente è

$$\int_0^t \frac{1}{2}m\ddot{x}(t')x(t') dt' = -\frac{k}{2} \int_0^t V_0|x(t')|^k dt' = -\frac{k}{2} \int_0^t V(x(t')) dt' \quad (16)$$

Sostituendo l'espressione ottenuta nell'equazione (16) nell'equazione (15) si ottiene

$$\int_0^t \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t') dt' = \frac{1}{2} m \dot{x}(t) x(t) \Big|_{t'=0}^{t'=t} + \frac{k}{2} \int_0^t V(x(t')) dt'$$

Nelle ipotesi di limitatezza del teorema, dividendo per  $t$  il termine di bordo della precedente equazione diventa trascurabile. Di conseguenza dividendo per  $t$  ambo i membri e prendendo il limite per  $t \rightarrow +\infty$  si ottiene

$$\overline{K} = \frac{k}{2} \overline{V}$$

Combinando il risultato ottenuto con la conservazione nell'energia si deduce che

$$\overline{V} = \frac{2}{k+2} E \quad \overline{E} = \frac{k}{k+2} E$$

che era quello che si doveva dimostrare. □

## 5 Esercizi

Come esercizi si ripresentano quelli dell'anno scorso.

### 5.1 Legenda

Il simbolo ★ indica il livello di difficoltà. Il simbolo ☆ indica quanto ci sembra utile il problema.

### 5.2 Basic

1. ☆ Quanto vale la superficie laterale di una sfera di raggio  $R$ , compresa tra le altezze  $h$  e  $h + dh$  (con  $-R \leq h < R$ )?
2. ☆☆☆ La derivata logaritmica di  $f(x)$  è definita come  $\frac{d}{dx} \ln(f(x))$ . Trovare la derivata logaritmica di  $x^n$  e di  $e^x$  (spesso è più facile calcolare la derivata logaritmica invece che la derivata classica). Calcolare la derivata classica di  $\frac{e^x \arctan(x) \sin(x)}{x^4 \ln(x)}$ .
3. ☆ Calcola la derivata di  $x^x$  nei seguenti due modi:  $x^x = e^{x \ln(x)}$  oppure  $x^x = f(x, x)$  dove  $f(x, y) = x^y$ .
4. ☆☆☆ Se  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  sono funzioni del tempo, calcolate la derivata di  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  e di  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ragionando in termini di espansioni al primo ordine.

### 5.3 Ordini e Limiti

5. ☆☆☆ Sia  $y$  una funzione nella variabile  $x$ . Sapendo che  $y^5(x) - y(x) = x$  e  $y(0) = 0$ , calcola  $y(x)$  fino al quinto ordine non nullo attorno a  $x = 0$ .
6. ☆☆☆ Calcolare i primi sei ordini non nulli di  $e^{x^2 + \alpha x}$  rispetto alla variabile  $x$ .
7. ☆☆☆ Calcolare i primi sei ordini non nulli di  $e^{x^2 + \alpha x}$  rispetto alla variabile  $\alpha$ .
8. ☆☆☆ Calcolare i primi due ordini non nulli di  $e^{x^2 + \alpha x}$  rispetto alle variabili  $x, \alpha$ .
9. ☆☆☆ Calcolare al second'ordine  $\frac{1}{\sqrt{1 - 2x \cos \theta + x^2}}$  in  $x$ .
10. ☆☆☆ Trovare l'espansione al quint'ordine di  $\tan x$ . (*Soluzione:*  $\tan x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 + O(x^9)$ )
11. ☆☆☆ Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$  (MTP2.15)

12. ☆☆☆ L'espressione dell'entropia nell'oscillatore armonico quantistico è  $S = k \left( \frac{x}{e^x - 1} - \log(1 - e^{-x}) \right)$ , dove  $k$  è la costante di Boltzmann e  $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$ . Calcola ai primi ordini il valore dell'entropia nei limiti di temperatura alta e bassa. Cosa significa alta (o bassa) temperatura? Rispetto a cosa?

## 5.4 Derivate e Integrali

13. Calcolare  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ .

14. ☆☆☆ Dimostra la formula ricorsiva

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{nx} \theta \, d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{(n-2)x} \theta \, d\theta.$$

Dimostra che funziona anche con i seni e anche integrando da 0 a  $\pi$ . Calcolare il valore dell'espressione al primo membro per  $n = 8$ . Determina poi  $\int_0^{\pi/2} \cos(5\theta) \, d\theta$ . (*Hint*: usa de Moivre)

15. ☆☆☆ Usare l'integrazione per parti per dimostrare la formula

$$x! = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \, dt$$

Tale espressione è la *funzione Gamma di Eulero*. Calcolare  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$ . (*Suggerimento*: ricondursi a  $(-1/2)!$  con un cambio di variabili)

16. ★ ☆☆☆ Ridimostrare il valore della funzione Gamma di Eulero usando l'integrazione parametrica: per calcolare  $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \, dx$  calcolo  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x \, dt$  e derivo per  $\alpha$  trovando così una formula ricorsiva.
17. ☆☆☆ Ricalcolare  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$  in questo modo: calcolare  $I^2$  (l'integrale di una gaussiana in due dimensioni) e passare in coordinate polari.
18. ☆☆☆ Scrivere  $\sin(\alpha)$  e  $\cos(\alpha)$  in funzione di  $t = \tan(\frac{\alpha}{2})$ . Questa è la sostituzione che permette di risolvere molti integrali trigonometrici.
19. ★★ ☆☆☆ A volte, invece, serve trasformare integrali polinomiali o con radici quadrate in integrali trigonometrici in seni e coseni (o seni e coseni iperbolici). Usare quest'idea per risolvere i seguenti integrali (vi ricordano qualcosa?)

(i)  $\int \frac{du}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$

(ii)  $\int \frac{du}{\sqrt{(u^2-a^2)}}$

- (iii)  $\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+a^2)}}$
- (iv)  $\int \frac{du}{\sqrt{(-u^2-a^2)}}$
- (v)  $\int \frac{du}{a^2+u^2}$
- (vi)  $\int \frac{du}{a^2-u^2}$

20. ★ ☆☆☆ Dimostra il seguente lemma, molto utile in termodinamica: se  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono quantità che soddisfano una relazione del tipo  $f(x, y, z) = 0$ , si ha che

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$$

21. ☆ Campo chiuso ma non conservativo. Sia  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ . Verifica che  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  ma non è conservativo.

22. ☆☆☆ *Formule di Pappo*. Vediamo i Teoremi di Pappo. Il primo afferma che l'area di una superficie di rotazione (ottenuta ruotando la figura bidimensionale di contorno lungo  $l$ ) è uguale alla lunghezza  $l$  per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè  $2\pi r$  con  $r$  distanza del baricentro del contorno dall'asse di rotazione. Il secondo afferma che il volume di un solido di rotazione (ottenuto ruotando la figura bidimensionale di area  $S$ ) è uguale all'area  $S$  per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè  $2\pi r$  con  $r$  raggio del baricentro della superficie dall'asse di rotazione.

(i) Spiega perché i due teoremi sono veri.

(ii) Trova l'area della superficie e il volume di un toro (la figura geometrica, non l'animale).

23. ★★ ☆☆ Determina la formula del raggio di curvatura della funzione  $y = f(x)$  nel punto  $(x_0, y_0)$ , esplicitandolo in funzione di  $y, \dot{y}, \ddot{y}$ .

24. ★ ☆☆☆ Il *momento d'inerzia* è definito come  $I = \int \rho(\mathbf{r})r^2 d^3r$  dove  $\mathbf{r}$  è la distanza dall'asse attorno a cui avviene la rotazione. Calcolare il momento d'inerzia di almeno tre dei seguenti solidi omogenei:

- sfera
- guscio sferico
- lastra rettangolare di spessore trascurabile
- parallelepipedo a basi rettangolari
- asta sottile rispetto al centro
- asta sottile rispetto a un estremo
- cono rispetto all'asse
- insieme di Cantor.

## 5.5 Equazioni differenziali

25. ☆☆ Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha t^5$$

di un oscillatore forzato con forzante  $\alpha t^5$ . Determinane tutte le soluzioni. Per trovare la soluzione particolare scrivi il primo membro come  $(D^2 + \omega_0^2)x$ , dove  $D$  è l'operatore di derivata rispetto a  $t$ . Provate a dividere per  $D^2 + \omega_0^2$ , impegnandovi a trovare un senso a quest'operazione (*perché in generale non ne ha*).

26. ☆☆ Prova a risolvere

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \sin(\omega t)$$

con la stessa tecnica dell'esercizio precedente e chiediti per quali valori di  $\omega, \omega_0$  funziona e per quali no. Aiutandoti con il risultato trovato, determina una soluzione particolare nel caso generale.

27. ★★ ☆☆ Risolvi l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + tx = 0.$$

determinando le soluzioni del tipo  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ . Supponiamo ora  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 1$ : disegna un grafico qualitativo della soluzione per  $t > 0$ . Risolvi daccapo l'esercizio per l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - tx = 0$$

mettendo in luce analogie e differenze con il caso precedente.

28. ☆☆ Risolvi l'equazione differenziale

$$x\dot{x} = t(4 - x^2)$$

29. ★ ☆☆☆ Che equazione ha una *Cicloide*, per intenderci la traiettoria di un punto sul cerchione di una ruota di raggio  $R$ ? Verificare che risolve l'equazione differenziale  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}$ .

30. ★ ☆☆☆ Verifica che l'Equazione delle Onde  $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$  ammette come soluzioni le funzioni che si propagano a velocità costante  $\pm c$  e le loro combinazioni lineari.

## 5.6 Fisica

31. ☆☆☆ Ad una certa ora del mattino inizia a nevicare, e a mezzogiorno uno spalaneve parte per pulire le strade. La neve continua a cadere con intensità costante. Si sa che la velocità con cui procede lo spazzaneve è inversamente proporzionale all'altezza della neve. Nelle prime due ore di lavoro lo spazzaneve riesce a pulire 4 km di strada. Nelle due ore successive invece se ne liberano solo 2 km. A che ora ha iniziato a nevicare? (C3.14)
32. ☆☆☆ Una corda lunga  $l$  di massa  $m$  è distesa orizzontalmente su un tavolo eccetto per l'estremità che pende verticalmente per una lunghezza  $x_0$ . In presenza di gravità, come evolve il sistema? (C5.17)
33. ★ Un punto materiale si muove su una guida parabolica di equazione  $y = -ax^2$ . È possibile che il punto si stacchi dalla guida? (*Suggerimento*: usare la formula per il raggio di curvatura (chiederla se non la si è calcolata) e la conservazione dell'energia).
34. Un proiettile di massa  $m$  viene lanciato da terra con una velocità iniziale di modulo  $v_0$  che forma un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale. Oltre a un campo di gravità costante è presente una forza di attrito viscoso  $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$ . Trovare l'equazione esplicita della traiettoria, e discutere il limite nel quale si può considerare "piccolo" l'attrito, dicendo in modo preciso che cosa si intende con questo. (C5.128)
35. ★ ☆ L'equipaggio di un razzo inizialmente fermo vuole aumentare la propria velocità espellendo una massa  $\eta m$  di gas. La velocità del gas al momento dell'emissione relativa al razzo è sempre  $-v_0$ . La massa iniziale di quest'ultimo è  $m$  e chiaramente  $0 \leq \eta < 1$ . Indicheremo con  $\mu(t)$  la massa espulsa al tempo  $t$ . Calcolare  $\mu(t)$  nei due casi seguenti:
- (i) tutta la massa viene espulsa istantaneamente a  $t = 0$  s;
  - (ii) la massa espulsa per unità di tempo è costante, e viene espulsa tutta in un tempo  $\tau$ .
- Dette  $v_f^1$  e  $v_f^2$  le velocità finali del razzo nel primo e nel secondo caso, stabilire se è vero che  $\lim_{\tau \rightarrow 0} v_f^{(1)} = v_f^{(2)}$ . (C5.133)
36. ★★ ☆☆☆ Una *molla massiva* può essere pensata come tante masse infinitesime separate da molle infinitesime identiche. Indichiamo con  $x$  una coordinata che varia da 0 a 1 e che conta la percentuale di masse infinitesime che distano da un capo della corda. Se la molla massiva viene appesa in verticale al capo con  $x = 0$ , trovare:
- (i) la tensione in funzione di  $x$ .

- (ii) l'altezza  $h(x)$  in funzione della coordinata  $x$
- (iii) l'allungamento totale della molla e la sua lunghezza. (C5.139)
37. Una curva piana senza attrito ha la forma di una funzione i cui estremi sono alla stessa altezza. Una catena di densità lineare uniforme viene adagiata sulla curva da un estremo all'altro. Mostrare, considerando la forza netta di gravità sulla curva, che la catena non si muove. (M1.3)
38. ★ ☆☆☆ Data un'asta semi-infinita (cioè una semiretta) con densità lineare  $\lambda(x)$  che dipende dalla posizione, calcolare  $\lambda(x)$  in modo che abbia la seguente proprietà: se l'asta è tagliata in una posizione arbitraria  $x_0$ , allora la parte semi-infinita rimasta sarà in equilibrio se bilanciata su un perno a distanza fissata  $l$  dall'estremo (cioè nel punto a coordinata  $x_0 + l$ ). (M1.18)
39. ★★ ☆☆☆ Dire esplicitamente quali integrali bisogna fare per risolvere l'equazione  $F = ma$  nei tre casi in cui  $F$  dipende solo da: (i)  $x$ , (ii)  $v$ , (iii)  $t$ . (M2)
40. ☆☆☆ Un razzo di massa  $m$  e a velocità  $v$  ha ugelli con velocità di scarico pari a  $u$ . Trovare l'equazione del razzo che mette in relazione la massa di carburante consumata e il  $\Delta v$ . Trovare la massa corrispondente a  $\Delta v = 3u$ .
41. ★ ☆☆☆ *Strato di ghiaccio su un lago* Supponendo che la temperatura dell'aria sulla superficie di un lago ghiacciato rimanga costantemente pari a  $-5,2$  gradi centigradi per 60 giorni, si formuli un modello per descrivere la rapidità con cui cresce lo spessore del ghiaccio a partire dal suo valore iniziale  $h_0 = 25$  cm. Sapendo, in particolare, che dopo 12 giorni si misura uno spessore di 37 cm e dopo 21 giorni uno spessore di 44 cm, si stimi lo spessore  $h_f$  raggiunto dal ghiaccio dopo 60 giorni. (SNS 2015 1).
42. ☆☆☆ La resistenza elettrica di un resistore a due piastre vicine è  $R = \frac{l}{S\sigma}$  dove  $\sigma$  è la conducibilità. La capacità di un condensatore a due piastre vicine è  $C = \frac{S\epsilon}{l}$  dove  $\epsilon$  è la costante dielettrica del materiale. Se due conduttori con carica  $+Q$  e  $-Q$  rispettivamente sono immersi in un materiale con conducibilità  $\sigma$  e costante dielettrica  $\epsilon$ , trovare  $Q(t)$  sul primo conduttore. Cosa si può dire sul prodotto  $RC$  indipendentemente dalla forma del conduttore?
43. ☆☆☆ Calcolare l'energia potenziale posseduta da una corda di lunghezza  $l$  e massa per unità di lunghezza  $\rho$  appesa per un estremo al soffitto.
44. ★★★ ☆☆☆ Calcolare il tempo impiegato da un'onda a propagarsi sulla corda dell'esercizio precedente, partendo dall'estremo più alto a quello più basso.

45. ★ ☆☆☆ Un corpo è soggetto a una forza di attrito che in modulo è pari a  $F = bv^n$ , dove  $v$  è la velocità e  $b$  un'opportuna costante. Esso viene lanciato con una velocità iniziale pari a  $v_0$ ; trova, **attraverso l'analisi dimensionale**, una stima del tempo impiegato a fermarsi e della distanza che ha percorso dal punto di lancio. Il risultato ha senso? Rispondere alle domande precedenti trovando l'equazione del moto e poi confronta i risultati.
46. ★ ☆☆☆ *Molla massiva*. Si vuole trattare approssimativamente l'effetto della massa non nulla  $\mu$  di una molla sulla frequenza di oscillazione. Per fare questo si scrive l'energia del sistema supponendo che la molla si muova nello stesso modo in cui si muoverebbe se la sua massa fosse nulla. Usando tale metodo si determini la frequenza di oscillazione del sistema dato dal soffitto a cui è appesa la molla alla quale è appesa un oggetto di massa  $M$ , supponendo la molla di lunghezza a riposo nulla (C5.43).
47. ★★★ ☆ Ricavare l'equazione del telegrafista. Si schematizzi la seguente situazione: vi sono due cavi paralleli molto lunghi. A ogni passettino  $dx$ , vi è una resistenza  $r dx$  sul primo cavo, un'induttanza  $l dx$  sul primo cavo, una capacità  $c dx$  tra i due cavi e, in parallelo a questa, una resistenza tra i due cavi di conduttanza  $g dx$ . Ricavare l'equazione differenziale soddisfatta dalla corrente e l'equazione differenziale soddisfatta dalla tensione.

## 6 Problemi

**Problema 6.1.** Determinare il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx$$

al variare del parametro  $t \in \mathbb{R}$ .

## 7 Soluzioni

1. ☆  $2\pi R dh$
2. ☆☆☆  $n/x$ ;  $1$ ;  $1 + \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} + \cot(x) - \frac{4}{x} - \frac{1}{x \ln x}$ . La derivata classica si ottiene moltiplicando per la funzione originaria.
3. ☆  $\frac{\partial}{\partial x} e^{x \ln(x)} = e^{x \ln(x)}(\ln(x) + 1)$ ;  
 $[\frac{\partial}{\partial x} x^y + \frac{\partial}{\partial y} x^y]_{x=y} = [x^y \frac{y}{x} + x^y \ln(x)]_{x=y} = x^x + x^x \ln(x)$

4. ☆☆☆ La definizione di derivata impone che  $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a} + \partial \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} + \partial \mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{b} + \partial \mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{dt}$ , dove si è correttamente eliminato l'ultimo termine perché è infinitesimo.

Il calcolo con il prodotto vettore è uguale, solo che al posto dei prodotti scalari ci sono i prodotti vettori.

Si notino le cose importanti: (1) la derivata di un vettore è un vettore, perché per fare la derivata bisogna fare una differenza e poi una divisione per un numero, (2) le operazioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale sono lineari, cioè “si comportano bene” con la somma.

### 7.1 Ordini e Limiti

5. ☆☆☆ (Soluzione:  $y = -x - x^5 + 5x^9 - 15x^{13} + O(x^{17})$ )
6. ☆☆☆  $e^{x^2 + \alpha x} = e^{x^2} e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + (1 + \frac{\alpha^2}{2!})x^2 + (\alpha + \frac{\alpha^3}{3!})x^3 + (\frac{1}{2!} + \frac{\alpha^2}{2!})x^4 + (\frac{\alpha^4}{4!} + (\frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!})x^5 + (\frac{1}{3!} + \frac{\alpha^2}{2!2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{\alpha^6}{6!})x^6 + o(x^6)$ .
7. ☆☆☆  $e^{x^2 + \alpha x} = e^{x^2}(1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 x^3 + \frac{1}{4}\alpha^4 x^4 + \frac{1}{5}\alpha^5 x^5 + \frac{1}{6}\alpha^6 x^6 + o(\alpha^6))$
8. ☆☆☆ Poiché  $x^2 + \alpha x$  è un secondo ordine nelle variabili  $x, \alpha$  abbiamo  $e^{x^2 + \alpha x} = 1 + x^2 + \alpha x + o(x^2 + \alpha^2)$ .
9. ☆☆☆  $\frac{1}{\sqrt{1 - 2x \cos \theta + x^2}} = 1 + \cos(\theta)x + (\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2})x^2 + o(x^3)$ . Bisogna ricordarsi che  $(1 + \epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\epsilon^2 + \dots$
10. ☆☆☆ Sapendo che la derivata di  $t = \tan(x)$  è uguale a  $1 + t^2$ , si possono calcolare rapidamente le prime sei derivate della funzione e inserirle nell'espansione in Taylor (nell'espansione in Taylor le derivate vanno valutate in 0, quindi bisogna ricordarsi che  $t(0) = \tan(0) = 0$ ) ( $\tan x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 + O(x^9)$ )
11. ☆☆☆  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}) = \frac{1}{3}$  (MTP2.15)

12. ☆☆☆ Per  $T$  alta e bassa si intende rispettivamente  $x$  basso e alto:  $x$  è un numero puro, quindi si intende confrontato rispetto a 1, il che è come chiedere che  $T$  sia confrontato con  $\frac{\hbar\omega}{k}$ , che tra l'altro è l'unica altra temperatura nelle equazioni...  
 Per  $T$  alto si ha  $S \approx k(1 - \log(x))$ .  
 Per  $T$  basso si ha  $S \approx k(xe^{-x} + e^{-x})$ .

## 7.2 Derivate e Integrali

13. L'espressione  $1 + x^2$  è già stata vista quando si calcola la derivata della tangente  $t = \tan(x)$ , ovvero  $\frac{dt}{dx} = 1 + t^2$ , da cui  $\frac{\partial(\arctan(t))}{t} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ . Si ha quindi  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$ .
14. ☆☆☆ Sia che gli estremi siano 0 e  $\pi/2$  oppure 0 e  $\pi$ , è facile verificare che nell'integrale per parti il termine non sotto il segno d'integrale è nullo. Poi basta usare  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ . Sia nel caso dei coseni che dei seni.  $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta d\theta = \frac{1}{5}$ , che tra l'altro viene molto più velocemente con il cambio di variabili  $\alpha = 5\theta$ .
15. ☆☆☆  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = (-1/2)!$  usando il cambio di variabili  $t = x^2$ . In effetti non si sa ancora quanto vale  $(-1/2)!$ ...
16. ★ ☆☆☆  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dx = \frac{1}{\alpha^{x+1}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^x ds$  per cambio di variabili  $s = \alpha t$ .  
 Chiamiamo  $f(x, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dx$ . Si vede che  $f(0, \alpha) = \alpha^{-1}$ . Inoltre  $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dx = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-\alpha t} dx = -f(x+1, \alpha)$ . Questo permette di scoprire che  $f(n, \alpha) = (-\frac{\partial}{\partial \alpha})^n \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{(n+1)}}$ . Ponendo  $\alpha = 1$  si trova  $f(n, 1) = n!$ , che era quello che volevamo.
17. ☆☆☆  $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-s} ds/2 = \pi$  con  $s = r^2$ . Quindi  $I = (-1/2)! = \sqrt{\pi}$
18. ☆☆☆ Se  $t = \tan(\alpha/2)$  si ricavano facilmente  $1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha/2}$  e quindi si trovano  $\cos \alpha/2$  e, moltiplicando per  $t$ ,  $\sin \alpha/2$ . Con le formule di duplicazione del seno e del coseno è facile trovare  $\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$  e  $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ .
19. ★★ ☆☆☆ Convieni sempre effettuare la sostituzione  $x = u/a$ , in modo che al denominatore ci sia  $\pm 1 \pm x^2$  o una sua radice. Ci si aspetta che si troveranno arcoseni, arcotangenti, magari anche iperboliche. Quindi bisogna fare le derivate delle funzioni trigonometriche ed iperboliche per vedere quale corrisponde a quale integrale.  
 Quanto basta sapere di seno iperbolico e coseno iperbolico è che sono l'uno la derivata dell'altro, e che  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ : questo permetterà di

esprimere uno in funzione dell'altro. Ad esempio  $\frac{\partial}{\partial x} \sinh(x) = \cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$ , quindi ho scoperto che  $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arcsinh}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ , che ricorda il terzo integrale dopo un cambio di variabili.

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial u}{\sqrt{(a^2-u^2)}} &= \arcsin(u/a) \\ \int \frac{\partial u}{\sqrt{(u^2-a^2)}} &= \operatorname{arccosh}(u/a) \\ \int \frac{\partial u}{\sqrt{(u^2+a^2)}} &= \operatorname{arcsinh}(u/a) \\ \int \frac{\partial u}{\sqrt{(-u^2-a^2)}} &= \pm i \operatorname{arcsinh}(u/a) \\ \int \frac{\partial u}{a^2+u^2} &= \frac{1}{a} \arctan(u/a) \\ \int \frac{\partial u}{a^2-u^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctanh}(u/a) \end{aligned}$$

20. ★ ☆☆☆  $f(x, y, z) = 0$  localmente al punto di interesse avrà l'equazione di un piano  $Ax + By + Cz = D$ .

Ora, tenendo  $y$  fisso, si ha  $A dx + C dz = 0$ , quindi  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{A}{C}$ , e analogamente si ottiene  $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{B}{C}$  e  $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{A}{B}$ .

Quindi si ha  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{A}{C} = -(-\frac{B}{C})(-\frac{A}{B}) = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$  e si spiega la presenza del segno meno.

21. ☆ La verifica che il campo definito sia chiuso è essenzialmente un conto. Abbiamo

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Chiaramente le prime due componenti del rotore sono nulle. Va verificato che la terza componente è nulla. Abbiamo

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Il calcolo di  $\frac{\partial F_x}{\partial y}$  sarà del tutto analogo, ovvero il risultato sarà l'espressione ottenuta per  $\frac{\partial F_y}{\partial x}$  con al posto della  $x$  la  $y$  e viceversa è un  $-$  a moltiplicare tutto, ovvero avremo

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Questo conclude la verifica che  $\mathbf{F}$  è un campo chiuso. Per dimostrare che non è conservativo, basta osservare che

$$\oint_{S^1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi \neq 0$$

dove  $\mathbb{S}^1$  rappresenta la circonferenza unitaria sul piano  $z = 0$  e con centro l'origine percorsa in senso antiorario una volta. Infatti il campo  $\mathbf{F}$  risulta essere di modulo 1, tangente alla circonferenza in ogni suo punto e diretto in maniera concorde al verso di percorrenza della circonferenza, da cui

$$\oint_{\mathbb{S}^1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathbb{S}^1} \frac{d\mathbf{s}}{ds} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathbb{S}^1} ds = 2\pi$$

22. ☆☆☆ *Formule di Pappo* Un segmento  $\partial l$  a distanza  $r$  dall'asse di rotazione genera un'area  $2\pi r \partial l$  (il fatto che non tutto il segmento è alla stessa distanza dall'asse di rotazione genera correzioni di second'ordine, che quindi si trascurano). L'integrale di  $r \partial l$  sulla superficie è uguale al valore medio di  $r$  per la lunghezza del contorno ( $r_{medio} = \int r \partial l / \int \partial l$  per definizione). Allo stesso modo per il volume: una superficie  $\partial S$  che giace su un piano che viene fatto ruotare genera una superficie  $2\pi r \partial S$ , dove  $r$  è la distanza di  $\partial S$  dall'asse di rotazione. L'integrale è  $2\pi r_{medio} S$ , dove  $r_{medio} = \int r \partial S / \int \partial S$ .

Il toro che si ottiene facendo ruotare una circonferenza di raggio  $r$  attorno a un asse che dista  $R$  dall'origine della circonferenza, ha superficie  $4\pi^2 Rr$  e volume  $2\pi^2 Rr^2$ .

Il toro che si ottiene facendo ruotare un rettangolo di lati  $a$  e  $b$  attorno a un asse che dista  $R$  dal baricentro del toro, ha volume  $2\pi abR$ .

La resistenza di un toro rettangolare di base  $b$  e di altezza  $h$  (quest'ultima parallela all'asse di rotazione) è  $\frac{2\pi\rho}{h \ln(b/a)}$ : è formata da tante fettine di torta messe in serie (ottenute con tagli radiali), ciascuna delle quali è formata da tante resistenze di forma curva messe in parallelo (ottenute con tagli tangenziali), ciascuna delle quali ha resistenza  $\rho l/S$ , con  $l$  e  $S$  infinitesimi e che potete calcolarvi dai dati.

23. ★★ ☆☆☆ L'idea è di considerare l'espansione al second'ordine  $y(x) = y(0) + x\dot{y}(0) + \frac{1}{2}x^2\ddot{y}(0)$ . Ora considero i tre punti di ascisse  $x$ ,  $x + dx$  e  $x + ddx$ , e li collego con due segmenti, che approssimano la funzione. Posso calcolare ora le equazioni degli assi dei due segmenti, e poi calcolare il punto dove le rette si intersecano. Questo è il centro della circonferenza che, vicino a  $(x, y)$ , approssima al meglio la funzione (può anche essere una circonferenza degenera, cioè una retta). Il raggio di curvatura è il raggio di questa circonferenza, che dai conti viene  $R = \frac{(1+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{y}|}$ .

24. ★ ☆☆☆ La pagina di wikipedia sul Momento d'Inerzia è esauriente. L'insieme di Cantor si può ottenere così: si prenda un segmento lungo  $l$  a cui si sottrae il terzo centrale, ottenendo due segmenti uguali lunghi  $l/3$ . A ciascuno di questi si sottragga il loro terzo centrale, e così via per ogni segmento che si ottiene. Se si immagina che l'insieme di Cantor abbia massa  $m$ , si vede che facendolo

ruotare attorno al centro, e immaginando che sia rigido, esso ha momento di inerzia  $aml^2$ , dove  $a$  è un numero reale ignoto. Si sa anche che è uguale al momento d'inerzia di due sbarre decentrate, per cui si può applicare il teorema degli assi paralleli: quindi  $aml^2 = 2(a(m/2)(l/3)^2 + (m/2)(l/3)^2)$ , da cui si ottiene  $a = \frac{1}{8}$ .

### 7.3 ODE e PDE

25. ☆  $\omega_0^2 x + \ddot{x} = 0$  ha come soluzione  $x = e^{\pm i\omega_0 t}$ , così come visto a lezione. Per trovare  $x$  da  $(\omega_0^2 + D^2)y = \alpha t^5$  viene spontaneo portare nel lato destro il membro di parentesi, invertito, ottenendo  $y = \frac{1}{\omega_0^2 + D^2} \alpha t^5$ , che ha senso solo se si interpreta la frazione come una serie di potenze, cioè  $\frac{1}{\omega_0^2 + D^2} \alpha t^5 = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{1 + (D/\omega_0)^2} \alpha t^5 = \frac{1}{\omega_0^2} (1 - (D/\omega_0)^2 + (D/\omega_0)^4 - (D/\omega_0)^6 + \dots) \alpha t^5 = \frac{\alpha}{\omega_0^2} (t^5 - 20t^3/\omega_0^2 + 120t/\omega_0^4)$  poiché tutti gli altri termini fanno zero. Può sembrare assurdo usare un metodo simile quando  $D$  non è un numero, eppure esso diventa un numero dopo essere stato applicato a  $\alpha t^5$ . Inoltre l'approssimazione di  $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$  funziona solo quando a destra si sommano termini via via sempre più trascurabili: in questo caso  $D$ , agendo su  $\alpha t^5$ , diventa in effetti trascurabile (in particolare nullo), quindi la formula è valida. Ciò che fugge ogni possibile dubbio è comunque verificare che la soluzione trovata in effetti sia una soluzione dell'equazione di partenza. La nota era riferita al fatto che quando si porta il termine con  $D$  a destra, bisogna tenerlo a destra (affinché la derivata agisca su  $\alpha t^5$ ), altrimenti non funziona. Il motivo è che quel passaggio si ottiene mettendo, sulla sinistra di ambo i membri, il fattore  $\frac{1}{\omega_0^2 + D^2}$ , che si semplifica con  $\omega_0^2 + D^2$  e che si ritrova quindi sul lato destro, ma a sinistra di  $\alpha t^5$ .
26. ☆ Applicando il metodo dell'esercizio precedente si ottiene la seguente serie

$$\begin{aligned} \alpha \frac{1}{\omega_0^2} (1 - (D/\omega_0)^2 + (D/\omega_0)^4 - (D/\omega_0)^6 + \dots) \sin(\omega t) &= \frac{\alpha}{\omega_0^2} \sum_{k \geq 0} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2k} \sin(\omega t) = \\ &= \frac{\alpha/\omega_0^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

A rigore questa soluzione ha senso solo se  $\omega < \omega_0$ , il che rende le cose piccole abbastanza da far funzionare il ragionamento dell'esercizio precedente. Tuttavia a questo punto basta dimostrare che questa è una soluzione se  $\omega \neq \omega_0$ . Per  $\omega = \omega_0$  si cerca una soluzione del tipo  $At \sin(\omega t) + Bt \cos(\omega t)$  e si spera che funzioni (funziona: verificarlo). Un altro modo di procedere è

il seguente. Per  $\omega \neq \omega_0$  risolviamo l'equazione differenziale imponendo che  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 1$ . Cerchiamo quindi delle costanti  $A_\omega$  e  $B_\omega$  tali che

$$x(t) = A_\omega \cos(\omega_0 t) + B_\omega \sin(\omega_0 t) + \frac{\alpha/\omega_0^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega t)$$

e imponendo che  $x(0) = 0$  si ottiene  $A_\omega = 0$ . Per avere derivata 1 in 0 si ottiene

$$B_\omega \omega_0 + \frac{\alpha\omega/\omega_0^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 0$$

da cui  $B_\omega = -\frac{\alpha k/\omega_0^2}{1-k^2}$  dove  $k = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Abbiamo quindi

$$x(t) = \frac{\alpha/\omega_0^2}{1-k^2} (-k \sin(\omega_0 t) + \sin(\omega t))$$

Vogliamo ora fare un limite per  $k \rightarrow 1$ , buttando via tutto quello che va a 0. Osserviamo che

$$\begin{aligned} -k \sin(\omega_0 t) + \sin(\omega t) &= -k \sin((\omega_0 - \omega)t + \omega t) + \sin(\omega t) = \\ &= (1-k) \sin(\omega t) - k \cos(\omega t)(\omega_0 - \omega)t + O((1-k)^2) = \\ &= (1-k) \sin(\omega t) - k\omega_0(1-k)t \cos(\omega t) + O((1-k)^2) \end{aligned}$$

da cui nel limite di  $k \rightarrow 1$  si ottiene

$$x(t) = \frac{\alpha}{2\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{\alpha t}{2\omega} \cos(\omega t)$$

e in effetti si verifica facilmente che  $-\frac{\alpha t}{2\omega} \cos(\omega t)$  è una soluzione particolare dell'equazione.

27. (*Soluzione:* Per le serie di potenze si trova una ricorrenza e si calcolano i coefficienti iterativamente) (MTP4.20)

Risolviamo lo studio qualitativo. L'idea principale è interpretare l'equazione dinamicamente come l'equazione del moto di una massa unitaria sottoposta ad una forza di richiamo elastica con costante che cresce linearmente nel tempo. Possiamo quindi modellizzare il problema come una successione di oscillazioni con costante crescente ma costante lungo ogni oscillazione. Questa è un'approssimazione, ma per  $t$  grande l'approssimazione è buona, in quanto nel modello approssimato il periodo di un'oscillazione è molto piccolo ( $\propto \frac{1}{\sqrt{t}}$  che è piccolo rispetto alle scale di variazione di  $t$ ). Osserviamo infine che l'ampiezza *reale* di ogni oscillazione è una funzione strettamente decrescente. Infatti la forza "frenante" aumenta con il tempo, quindi la massa ad ogni passaggio si fermerà sempre un po' prima. Con considerazioni elementari ma non semplici sull'evoluzione dell'energia si può dedurre che l'ampiezza tende a

0 (sebbene molto molto lentamente, visto che per  $t$  grandi si può assumere che la costante elastica sia costante per molti periodi di fila).

Per la seconda equazione differenziale la forza non è frenante ma spinge la massa lontano dall'origine.

28. ☆☆☆  $y = \pm \sqrt{4 + ce^{-x^2}}$
29. ★ ☆☆☆  $x(t) = Rt - R \sin t$  e  $y(t) = R - R \cos t$ . Ricavando  $\cos t$  dalla seconda equazione, si calcolano  $\sin t$  e  $t$  e li si inseriscono nella prima equazione, ottenendo  $x = -\sqrt{y(2R - y)} + R \arccos(1 - y/R)$   
(Soluzione:  $\dot{y} = \frac{2R}{y} - 1$ )
30. ★ ☆☆☆ Una funzione che si propaga a velocità costante  $\pm c$  si può scrivere come  $f(x \mp ct)$ , con  $f(x)$  funzione arbitraria. La soluzione generale è dunque  $Af(x + ct) + Bg(x - ct)$ , con  $f$  e  $g$  funzioni arbitrarie.

## 7.4 Fisica

31. ☆☆☆ (C3.14)
32. ☆☆☆ (C5.17)
33. ★ Ovviamente c'è la gravità. Il punto si stacca non appena l'accelerazione gravitazionale ortogonale alla guida  $g \cos(\theta)$  diventa minore dell'accelerazione centripeta di un'orbita circolare (che approssima localmente la traiettoria parabolica).  
Sapendo che  $\tan(\theta) = \left| \frac{dy}{dx} \right| = 2ax$ , si trova  $g \cos(\theta) = \frac{g}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} = \frac{g}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}$ ,  
mentre l'accelerazione centripeta è  $\frac{v^2}{R} = \frac{-2gy}{R} = \frac{-2gy|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{4ga^2x^2}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$ .  
Imponendo l'uguaglianza tra le due accelerazioni si trova che nel punto in cui inizia a staccarsi vale  $1 = \frac{4a^2x^2}{1+4a^2x^2}$  il che non si può verificare.
34. (C5.128)
35. ★ ☆ (C5.133)
36. ★★ ☆☆☆ (C5.139)
37. (M1.3)
38. ★ ☆☆ (M1.18)
39. ★★ ☆☆☆ (M2, nella parte di teoria)

40. ☆☆☆ In un istante il razzo ha massa  $m$  ed è fermo nel suo sistema. Poi la massa del razzo cambia di  $\partial m$  (negativo) e viene eiettato dall'ugello  $-\partial m$  di carburante a velocità  $u$  rispetto al razzo. La conservazione della quantità di moto impone  $0 = -\partial m(-u) + (m + \partial m)\partial v$ . Ignorando il differenziale di second'ordine si trova  $\partial v = -u\frac{\partial m}{m}$ , ed integrando  $\Delta v = -u \ln\left(\frac{m_{fin}}{m_{in}}\right) = u \ln\left(1 + \frac{m_c}{m_0}\right)$ , dove  $m_c$  è la massa del carburante e  $m_0$  è la massa finale, cioè del razzo che ha esaurito il carburante.  
 $\Delta v = 3u$  corrisponde a  $m_c = m_0(e^3 - 1) \approx 19m_0$ .
41. ★ ☆☆☆ *Strato di ghiaccio su un lago* (SNS 2015 1) (si trova online).
42. ☆☆☆ Poiché  $V = R\dot{Q}(t)$  e  $C = \frac{Q(t)}{V}$ , si ha  $\dot{Q}(t) = \frac{1}{RC}Q(t)$ , e quindi  $Q(t) = Q(0)e^{-t/RC}$ .  $RC$  è dunque il tempo caratteristico della decrescita esponenziale (cioè il tempo in cui la carica diminuisce di un fattore  $e$ ).  
 In un conduttore a forma di prisma, le cui facce sono le piastre del condensatore, si vede bene che  $RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$ .  
 Ora consideriamo un conduttore di forma arbitraria con due piastre di forma arbitraria. Posso dividere ogni piastra in tante aree infinitesime e per ciascuna di esse considerare il percorso che fa la corrente per arrivare all'altra piastra. Questo condensatore è localmente un prisma (così come un cavo di alimentazione è localmente un cilindro), e ciascun condensatore è indipendente dagli altri, quindi la carica decresce di un fattore  $\frac{\epsilon}{\sigma}$ . Poiché il valore totale di  $RC$  è uguale al tempo caratteristico, è uguale ancora a  $\frac{\epsilon}{\sigma}$ .
43. ☆☆☆  $U = -\rho gl^2/2$
44. ★★★ ☆☆☆  $v(x) = \sqrt{T(x)/\rho}$  (come viene dall'esercizio di ricavare l'equazione delle onde), dove  $v(x)$  è la velocità dell'onda ad altezza  $x$  dall'alto, e  $T(x)$  è la tensione della corda in quel punto. Poiché la tensione della corda è dovuta al peso della massa sottostante, vale  $T = g\rho(l-x)$ . Quindi  $v(x) = \sqrt{g(l-x)}$ . Il tempo impiegato è  $T = \int dt = \int_l^0 \frac{dx}{v(x)} = \int_l^0 \frac{dx}{\sqrt{g(l-x)}} = [-2\sqrt{\frac{l-x}{g}}]_l^0 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$
45. ★ ☆☆☆ Poiché le uniche grandezze in gioco sono  $m$ ,  $g = [l]/[t^2]$ ,  $v_0 = \frac{[l]}{[t]}$ ,  $b = \frac{[m][l]}{t^2} \frac{[t]^n}{[l]^n}$ , si vede come per ottenere un tempo si potranno usare solo  $g$ ,  $v_0$  e  $\frac{b}{m}$ . Queste sono tre grandezze in  $[l]$  e  $[t]$ , quindi esiste una loro combinazione adimensionale, cioè  $v_0 \sqrt[n]{\frac{b}{mg}}$ . In generale quindi  $v$  si può esprimere come una combinazione a caso che abbia le unità di misura giuste (ad esempio  $\frac{v_0}{g}$ ) moltiplicata per una qualche funzione analitica  $f_n$  (che dipenderà da  $n$  visto che al cambiare di  $n$  le equazioni del moto da integrare cambieranno!) della quantità adimensionale:  $v = \frac{v_0}{g} f_n\left(v_0 \sqrt[n]{\frac{b}{mg}}\right)$ .  
 Fin qui si arriva solo con la Matematica, ora bisogna usare anche la fisica. Se

$b$  tende a 0, il tempo per arrivare al punto più alto deve diventare  $\frac{v_0}{g}$ , quindi  $f_n(+\infty) = 1$ .

Integrando invece le equazioni del moto (ricordandosi che ci si trova nel caso  $F(v)$  affrontato nell'esercizio 52) si trova:

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = F(v) = -mg - bv^n$$

$$t = \int dt = \int_{v_0}^0 \frac{m \partial v}{-mg - bv^n} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{\partial v}{1 + bv^n/mg}$$

Ora, con il cambio di variabili nella variabile adimensionale  $w = \sqrt[n]{\frac{b}{mg}} v$ , ottengo:

$$t = \frac{1}{g} \sqrt[n]{\frac{mg}{b}} \int_{\sqrt[n]{\frac{b}{mg}} v_0}^0 \frac{\partial w}{1+w^n},$$

integrale che può essere fatto con l'analisi complessa (ma probabilmente non con metodi più facili).

In ogni caso si può verificare che per  $b$  che tende a 0, si sta integrando 1, e la soluzione tende effettivamente a  $\frac{v_0}{g}$  come desiderato.

La distanza compiuta orizzontalmente si può calcolare in questo modo: ripetendo i conti dati per velocità verticale  $v_0 \sin(\theta)$  con gravità  $g$ , e per velocità orizzontale  $v_0 \sin(\theta)$  con gravità 0. I metodi utilizzati sono gli stessi.

46. ★ ☆☆☆ (C5.43).

47. ★★★ ☆ Si rimanda alla pagina di wikipedia "Equazioni dei telegrafisti". Si faccia attenzione al fatto che lì si usano  $R$ ,  $L$ ,  $C$  e  $G$  per indicare rispettivamente la resistenza, induttanza, capacità e conduttanza *per unità di lunghezza*, mentre nel testo dell'esercizio si è indicato il valore per unità di lunghezza con le lettere minuscole per sottolineare la differenza.

Si è scelto di usare la conduttanza per il resistore tra i due cavi perché la conduttanza è infinitesima, mentre la resistenza sarebbe stata infinita; inoltre perché la conduttanza  $g dx$  è additiva in  $dx$  (i resistori che collegano i due cavi lunghi sono in parallelo). Quando si usa  $r dx$ , invece, esso è infinitesimo ed è additivo poiché i resistori lungo ciascun cavo sono in serie.

## 8 Soluzioni problemi

**Problema 6.1.** Fissiamo  $0 < L < \infty$  e poniamo  $f_L(t) = \int_{-L}^L \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx$ . Visto che l'intervallo su cui stiamo integrando non è più infinito ma è limitato, è ragionevole che valga

$$f'_L(t) = \frac{d}{dt} \int_{-L}^L \frac{\cos(tx)}{1+x^2} = \int_{-L}^L \frac{\partial}{\partial t} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} = \int_{-L}^L \frac{-x \sin(tx)}{1+x^2}$$

e analogamente

$$f''_L(t) = \int_{-L}^L \frac{\partial}{\partial t} \frac{-x \sin(tx)}{1+x^2} = \int_{-L}^L \frac{-x^2 \cos(tx)}{1+x^2} = -\frac{2 \sin(tL)}{t} + f_L(t)$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione differenziale per  $f_L(t)$ . Due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono  $\cosh(t)$  e  $\sinh(t)$ , mentre una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si può trovare tramite il metodo della variazione delle costanti, ottenendo

$$s_{\text{part}}(t) = \left( \int_0^t \frac{2 \sin(t'L) \sinh(t')}{t'} dt' \right) \cosh(t) - \left( \int_0^t \frac{2 \sin(t'L) \cosh(t')}{t'} dt' \right) \sinh(t)$$

Abbiamo quindi che esistono delle costanti  $A_L, B_L$  tali che

$$f_L(t) = A_L \cosh(t) + B_L \sinh(t) + s_{\text{part}}(t)$$

Poiché  $f_L(0) = 2 \arctan(L)$  si ha  $A_L = 2 \arctan(L)$ . Inoltre è chiaro che  $f_L(t)$  ha un massimo per  $t = 0$ , da cui bisogna porre  $f'_L(0) = 0$ . Poiché

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(tL) \sinh(t)}{t} = 0$$

la condizione di derivata nulla in 0 ci dà  $B_L = 0$ . Abbiamo scoperto che

$$f_L(t) = (2 \arctan(L)) \cosh(t) + \left( \int_0^t \frac{2 \sin(t'L) \sinh(t')}{t'} dt' \right) \cosh(t) + \\ - \left( \int_0^t \frac{2 \sin(t'L) \cosh(t')}{t'} dt' \right) \sinh(t)$$

Noi siamo interessati a calcolare il limite per  $L \rightarrow +\infty$  dell'espressione precedente. Grazie al teorema di Riemann-Lebesgue si ha che

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{2 \sin(t'L) \sinh(t')}{t'} dt' = 0$$

A questo punto, poiché il seguente limite *deve* esistere, grazie a Riemann-Lebesgue deduciamo che esiste una costante  $C$  tale che

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{2 \sin(t'L) \cosh(t')}{t'} dt' = \text{sign}(t)C$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx = \pi \cosh(t) - \text{sign}(t)C \sinh(t)$$

Poiché il membro di sinistra è limitato da  $\pi$  in modulo, l'unica possibilità è che  $C = \pi$ , da cui si ottiene che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx = \pi e^{-|t|}$$

## Riferimenti bibliografici

- [Cel18] Giancarlo Cella. *Un esercizio al giorno*. 2018. Reperibile [qui](#).
- [Mor08] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2008.
- [Nea10] James Nearing. *Mathematical Tools for Physics (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 2010.