

Elettrostatica

Pietro Benotto*, Matteo Pioldi[‡]

22 marzo 2022

Sommario

La lezione inizierà con un'introduzione generale dell'elettrostatica: partendo dalla legge di Coulomb e dal principio di sovrapposizione lineare dimostreremo la legge di Gauss e l'esistenza di un potenziale elettrostatico. Parleremo del metodo delle cariche immagine per la risoluzione di alcune tipologie di esercizi. Approfondiremo il concetto di dipolo e tratteremo brevemente di dielettrici lineari.

*pietro.benotto@sns.it

[‡]matteo.pioldi@sns.it

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Legge di Coulomb	3
1.2	Principio di sovrapposizione	3
1.3	Simmetrie	4
1.4	Legge di Gauss	6
2	Energia	10
2.1	Energia elettrostatica	10
3	Conduttori	16
3.1	Definizione	16
3.2	Disposizione delle cariche	18
4	Metodo delle cariche immagine	21
5	Dipolo elettrostatico	26
5.1	Il campo del dipolo.	27
5.2	Campo elettrico del dipolo a grande distanza.	29
5.3	Momento torcente, energia e forza netta su un dipolo.	30
6	Elettrostatica nei materiali	32
6.1	Polarizzabilità per deformazione	32
6.2	Polarizzabilità per orientazione	33
6.3	Polarizzazione	34
6.4	Leggi di Maxwell in presenza di dielettrici	36
6.5	Dielettrici lineari	36
6.6	Matrice di polarizzabilità	41
A	Complementi	43
A.1	Teorema della divergenza	43
A.2	Calcolo dell'energia potenziale	43
A.3	Calcolo dell'energia di interazione	44
A.4	Legge di Gauss in forma locale	45
A.5	Teorema di unicità di Poisson	46
A.6	Polarizzazione di gas polari	47
A.7	Legame fra polarizzazione e carica	48

1 Introduzione

1.1 Legge di Coulomb

In natura esistono corpi dotati di una certa proprietà, detta carica elettrica. Esistono due tipi di carica elettrica, che per convenzione si identificano come carica positiva e carica negativa. Si può osservare sperimentalmente che due corpi carichi, posti a grande distanza rispetto alle proprie dimensioni (in modo che possano essere trattati a tutti gli effetti come puntiformi) interagiscono tramite una forza. In particolare, se si pone una carica q_1 nella posizione $\mathbf{r}_1$ e una carica q_2 nella posizione $\mathbf{r}_2$, la forza di cui risente la carica q_2 è

$$\mathbf{F}_{2,1} = k \frac{q_1 q_2}{r_{2,1}^2} \hat{\mathbf{r}}_{2,1} \quad (1)$$

dove si è posto $\mathbf{r}_{2,1} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ e $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ è una costante positiva, chiamata costante elettrostatica o costante di Coulomb.

1.2 Principio di sovrapposizione

Un altro risultato sperimentale è che in una configurazione di 3 cariche q_1, q_2, q_3 , la forza sulla terza carica in presenza delle altre due, $\mathbf{F}_{3,12}$, vale

$$\mathbf{F}_{3,12} = \mathbf{F}_{3,1} + \mathbf{F}_{3,2}$$

In particolare, non compaiono altri termini di interazione, come ad esempio un termine $\mathcal{F}(q_1 q_2 q_3)$ dipendente dal prodotto delle cariche. Questo fatto è fondamentale e assolutamente non banale, perché la conoscenza della sola legge di Coulomb non ci fornisce informazioni su come si comporta la forza in presenza di un numero di cariche maggiore di 2. La teoria che andremo a trattare sarà quindi lineare e vedremo che questo sarà di notevole importanza per i metodi matematici che useremo per risolvere gli esercizi.

Dall'equazione sopra deriva anche che se consideriamo varie cariche puntiformi $q_1, \dots, q_N$, posizionate rispettivamente in $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e tenute fisse, allora la forza di cui risente una carica di prova q posta in $\mathbf{r}$ (con $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_j$ per ogni $j = 1, \dots, N$) è

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k \sum_{j=1}^N \frac{q q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = k q \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \equiv q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2)$$

Il vettore $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, chiamato campo elettrico, definisce una proprietà del punto $\mathbf{r}$ che dipende solo dalla distribuzione delle cariche $q_1, \dots, q_N$ ed è indipendente

da q . Questa definizione, che per il momento è una semplice riscrittura in forma compatta della legge di Coulomb, sarà fondamentale nell'interpretazione dell'elettrodinamica come teoria di campo. In particolare, la legge di Coulomb predice un'azione a distanza tra due cariche, mentre la (2) può essere vista come un'interazione tra la carica q e il campo elettrico, che a sua volta interagisce con la collezione di cariche $q_1, \dots, q_N$. Parliamo quindi di $\mathbf{E}$ come un *mediatore* dell'interazione tra cariche.

Possiamo ovviamente considerare distribuzioni di cariche continue, oltre che puntiformi, e quindi introdurre il concetto di densità di carica. Usualmente vengono utilizzate le lettere ρ, σ, λ per la densità di carica rispettivamente volumica, superficiale e lineare. In particolare, il campo elettrico generato da una densità volumica di carica è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'$$

Spieghiamo questa scrittura: in un volume sufficientemente piccolo d^3r' (centrato in un punto $\mathbf{r}'$) la densità di carica $\rho(\mathbf{r}')$ può essere considerata costante, anzi, possiamo equiparare il contenuto di questo volume a una carica puntiforme $q = \rho d^3r'$ posizionata in $\mathbf{r}'$. Questa carica genera nel punto $\mathbf{r}$ un campo infinitesimo

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'$$

Per ottenere il campo totale sommiamo i contributi di tutti i volumetti d^3r' , ma questo, per volumi infinitamente piccoli, significa fare l'integrale. L'integrale è chiaramente esteso a tutti i punti in cui ρ è non nulla, eventualmente tutto lo spazio.

Analogamente, per distribuzioni superficiali e lineari si parte considerando i campi $d\mathbf{E}$ prodotti rispettivamente dalle cariche $\sigma d^2r'$ e $\lambda dr'$.

1.3 Simmetrie

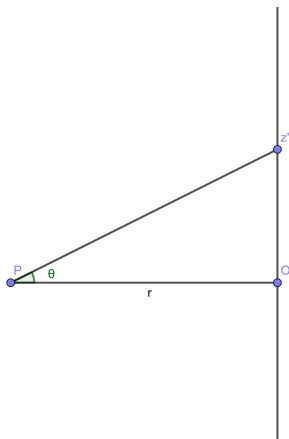
Se una distribuzione di carica gode di una certa simmetria (ad esempio sotto riflessione o rotazione), allora a causa del principio di sovrapposizione lineare, anche il campo elettrico da essa generato deve godere della stessa simmetria. Se infatti abbiamo una distribuzione di carica che rimane invariata sotto una certa trasformazione allora la differenza tra il campo iniziale $\mathbf{E}$ e il campo del sistema risultante dopo la trasformazione $\mathbf{E}'$ è pari al campo prodotto dalla differenza delle cariche che però sono invariate e quindi hanno differenza nulla.

Esempio 1.1 (Filo infinito uniformemente carico). Consideriamo un filo rettilineo con densità di carica uniforme λ , e supponiamo per semplicità che sia infinito. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano in cui l'asse z coincide con il filo. Consideriamo un punto P sull'asse x a distanza D dal filo. Se facciamo una riflessione rispetto al piano xz , sia il filo che P vengono mandati in se stessi. Ciò significa che il vettore campo elettrico in P è contenuto nel piano xz , perché se ci fosse una componente ortogonale a esso, questa cambierebbe di segno sotto tale riflessione. Analogamente, operando una riflessione rispetto a xy arriviamo a concludere che anche la componente z è nulla.

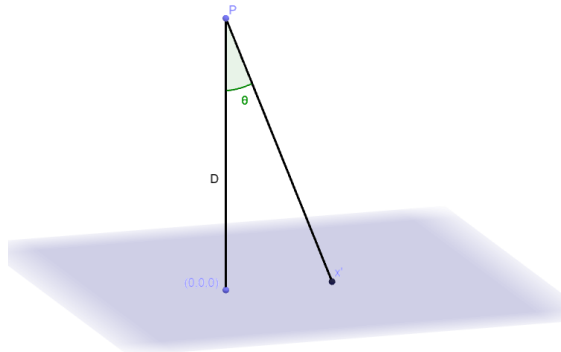
Passiamo ora a un sistema di coordinate cilindriche (z è lo stesso di prima): il risultato precedente si traduce nel fatto che il campo è radiale. Inoltre, data appunto la simmetria cilindrica della distribuzione di cariche e l'invarianza per traslazioni lungo z , non ci potrà essere nessuna dipendenza da z o φ ma solo da r . Infine, usando l'analisi dimensionale, concludiamo che il campo elettrico non può che essere del tipo $Ck\lambda/r$ con C costante adimensionale. Infatti λ è l'unica carica che abbiamo a disposizione e non può che essere presente come termine lineare per il principio di sovrapposizione, e analogamente r è l'unico termine di lunghezza rilevante (per quanto detto prima).

Procediamo ora con il calcolo.

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{r} = k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{r^2 + z'^2} \cos \theta \, dz' = k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{r^2} \cos^3 \theta \, dz' = \\ &= \frac{k\lambda}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = \frac{2k\lambda}{r} \end{aligned}$$



(a) Filo infinito uniformemente carico.



(b) Piano infinito uniformemente carico.

Figura 1: le due situazioni fisiche considerate.

Si è indicato con θ l'angolo mostrato in Fig. 1a e si è fatto il cambio di variabili $z' = r \tan \theta$.

Esempio 1.2 (Piano uniformemente carico). Sia xy un piano uniformemente carico di densità superficiale σ .

Il sistema è invariante sotto traslazioni lungo il piano xy e quindi il campo in un punto P dipende solo dalla sua distanza D dal piano. Supponiamo ora per assurdo che $\mathbf{E}(P)$ abbia una componente non nulla parallela al piano. Facendo ora una riflessione rispetto al piano ortogonale a tale componente e passante per P il sistema rimane invariato ma questa componente del campo cambia di segno, il che è assurdo. Abbiamo così ottenuto $\mathbf{E} = E_z(D)\hat{z}$. Analogamente a quanto detto prima, con ragionamenti di analisi dimensionali si conclude che il modulo è del tipo $Ck\sigma$.

Possiamo ora calcolare il modulo di tale vettore:

$$E_z(D) = k \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma}{D^2} \cos^3 \theta r \, dr \, d\theta = 2k\pi\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

1.4 Legge di Gauss

In questa sezione andremo a dimostrare uno dei teoremi cardine dell'elettrostatica e vedremo come applicarlo in alcuni casi semplici.

Iniziamo presentando uno strumento matematico fondamentale in molti ambiti della fisica: il flusso. Immaginiamo di avere un fluido e una funzione che ci dice qual è il suo vettore velocità in ogni punto dello spazio. Ci chiediamo quanto fluido attraversa una superficie infinitesimale dA in un piccolo intervallo di tempo dt (chiameremo questa quantità $d\Phi$). Sicuramente $d\Phi$ è proporzionale alla velocità del flusso nelle vicinanze della superficie, ed essendo la superficie infinitesima possiamo immaginare la velocità uniforme (e dunque dipendente solo dalla posizione del baricentro della superficie dA). Ma, pensandoci meglio ci interessa solo la componente della velocità perpendicolare alla superficie (le altre componenti fanno muovere il fluido *lungo* la superficie, non *attraverso*). Indicando allora questa direzione con $\hat{n}$ avremo $d\Phi \propto \mathbf{v} \cdot \hat{n} \, dA$ ¹. Se la superficie non fosse infinitesima, si ottiene la grandezza desiderata integrando.

Flusso attraverso una superficie: dato un campo vettoriale $\mathbf{F}$ (ossia un vettore per ogni punto dello spazio e le cui componenti dipendono dalla posizione, e.g. il campo elettrico) e una superficie S , si dice flusso $\Phi_S(\mathbf{F})$ di

¹Talvolta troverete dA al posto di $\hat{n} \, dA$

$\mathbf{F}$ attraverso S

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \quad (3)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie.

Rimanendo all'interno dell'esempio del fluido (incomprimibile) è facile convincersi del fatto che un flusso positivo attraverso una superficie chiusa indica una sorgente (ossia una regione da cui esce più fluido di quanto ne entri), uno negativo un pozzo (ossia una regione in cui entra più fluido di quanto ne esca), mentre il flusso nullo è la condizione di conservazione della materia (ossia una regione in cui entra tanto fluido quanto ne esce).

L'operatore flusso gode di alcune proprietà di linearità (derivanti dalla linearità dell'integrale) che tornano spesso comode e che quindi è utile sapere:

$$\begin{aligned} \Phi_S(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) &= \Phi_S(\mathbf{F}_1) + \Phi_S(\mathbf{F}_2) \\ \Phi_{S_1+S_2}(\mathbf{F}) &= \Phi_{S_1}(\mathbf{F}) + \Phi_{S_2}(\mathbf{F}) \end{aligned}$$

la prima equazione ci dice cosa succede al flusso della somma di due campi vettoriali (dove si intende che ad ogni punto associo la somma dei vettori associati a quel punto da due campi di partenza), mentre la seconda tratta del caso in cui divido la mia area di interesse in due.

Vediamo ora che informazioni ci dà questo nuovo operatore sul campo elettrico. Partiamo dal caso più semplice possibile: prendiamo una superficie sferica di raggio R e mettiamoci una carica puntiforme al centro.

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_S k \frac{q}{R^2} \, dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Dove $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ si calcola facilmente essendo i due vettori paralleli (entrambi radiali) ed essendo il modulo E in funzione della sola distanza tra il punto in cui lo calcolo e la carica sorgente, che nel nostro caso è costante e pari a R . Notare che il flusso attraverso una superficie sferica centrata nella carica non dipende dalle dimensioni della sfera. Complichiamo un attimo le cose, considerando sempre una carica puntiforme q , ma ora come S prendiamo una superficie convessa generica.

Calcoliamo il contributo $d\Phi$ di un singolo elemento dA a distanza R dalla carica:

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = E \cos \theta \, dA = k \frac{q}{R^2} R^2 \, d\Omega = kq \, d\Omega \quad (4)$$

Dove abbiamo prima proiettato l'elemento dA lungo la direzione perpendicolare al campo (aggiungendo il fattore $\cos \theta$) e poi usato la definizione di angolo solido². Integrando ora su tutto lo spazio otteniamo il risultato cercato.

Consideriamo ora il caso che la superficie non sia convessa bensì concava, e consideriamo una carica all'interno della superficie, ci chiediamo quale sia il valore del flusso del campo generato dalla carica. Consideriamo ora un cono infinito la cui punta è sulla carica e il cui angolo solido al vertice sia di valore $d\Omega$, noteremo subito che se la carica è interna tale cono attraverserà la superficie un numero dispari di volte: ogni volta che la interseca e poi prosegue dentro la superficie deve poi intersecarla nuovamente per uscire, tranne la prima volta, nel quale non deve intersecarla per entrare perché è già dentro. Se la carica fosse stata esterna, per lo stesso ragionamento l'avrebbe attraversata un numero pari di volte. Ci chiediamo ora quanto valgano gli elementi infinitesimi di flusso sulle porzioni di superficie delimitate dal cono. Applicando lo stesso ragionamento fatto in equazione 4, possiamo notare come per ogni porzione di superficie risultante dall'intersezione del cono con la superficie iniziale otteniamo il valore del flusso infinitesimo uguale e dipendente solo dall'angolo solido e dal verso del versore normale alla superficie. Se il cono attraversa la nostra superficie da fuori verso dentro, il segno del flusso sarà opposto al segno della carica, altrimenti concorde. Pertanto, ogni volta che il nostro cono iniziale attraversa la superficie da una parte all'altra somma e sottrae alternativamente la stessa quantità di flusso. Pertanto, se la carica è interna alla superficie, il contributo netto finale sarà identico a quello che avremmo avuto nel caso la superficie fosse stata convessa. Se invece la carica fosse stata esterna, notiamo che essa non contribuisce in alcun modo al flusso totale.

Per la linearità del campo elettrico e per le proprietà dell'operatore flusso, si può generalizzare questo risultato ad una qualunque distribuzione di cariche (anche continua) ottenendo così la prima legge di Maxwell (anche detta teorema di Gauss):

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

(a sinistra abbiamo il flusso del campo prodotto dall'insieme di cariche, che è la somma dei singoli flussi per il principio di sovrapposizione, ma ciascuno di questi flussi è proporzionale alla carica che lo produce, pertanto a secondo membro abbiamo la somma delle cariche).

²Estensione tridimensionale dell'angolo piano. Dato un elemento di superficie A tutto a distanza R dal punto a partire dal quale vogliamo calcolare l'angolo, questo si definisce come il rapporto A/R^2 . Si misura in steradiani ed è facile notare che l'angolo sotteso dalla superficie sferica ("l'angolo giro") vale 4π .

Notare che in tutta la dimostrazione abbiamo usato solo che il campo è centrale, proporzionale a r^{-2} e gode della proprietà di sovrapposizione lineare, quindi lo stesso risultato vale anche per il campo gravitazionale dove la massa gioca il ruolo della carica.

Filo infinito. Per i ragionamenti visti all'inizio della lezione sappiamo già che il campo è della forma: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$.

Scegliamo come superficie su cui calcolare il flusso un cilindro di raggio a , altezza h e coassiale con il filo (come detto prima, la coordinata z non ci interessa).

$$\frac{\lambda h}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \Phi_S(\mathbf{E}) = \int_0^h \int_0^{2\pi} \pi E_r(a) a \, d\theta \, dz = 2\pi a h E_r(a)$$

Dove i contributi delle due basi sono nulli il quanto il campo è radiale mentre per quelle due superfici $\hat{\mathbf{n}}$ è diretto lungo z .

Otteniamo così $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r(r)\hat{\mathbf{r}} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$.

Piano infinito. Si chiede di calcolare il campo generato da un piano infinito con densità superficiale di carica σ e posto sul piano $z = 0$.

Come prima, facciamo alcune osservazioni: la simmetria per traslazioni in x e in y e l'invarianza per trasformazioni $x \rightarrow -x$ e $y \rightarrow -y$ implicano $\mathbf{E}(x, y, z) = E_z(z)\hat{\mathbf{z}}$, inoltre l'invarianza per $z \rightarrow -z$ ci fa concludere $\mathbf{E}(x, y, z) = \text{sgn}(z)E_z(|z|)\hat{\mathbf{z}}$.

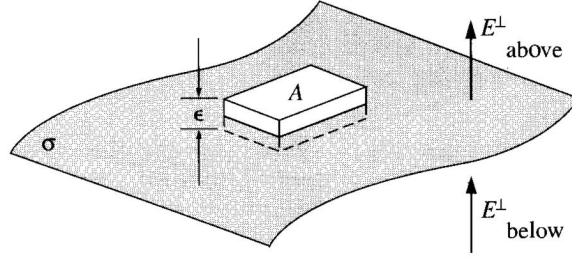
Scegliamo come superficie un qualsiasi prisma retto di altezza $\varepsilon = 2h$ e area di base A e posto con le facce parallele al piano infinito e tale che il piano lo bisechi (confronta 2a).

$$\frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \Phi_S(\mathbf{E}) = 2 \oint_A E_z(h) \, dA = 2AE_z(h)$$

Il contributo delle facce laterali è nullo il quanto il campo è diretto lungo z , e le due basi danno lo stesso contributo perché sia $\mathbf{E}$ che $\hat{\mathbf{n}}$ cambiano verso mantenendo invariato modulo e direzione.

Otteniamo così $\mathbf{E}(x, y, z) = \text{sgn}(z)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$.

Con un procedimento analogo, si può ottenere un risultato che sarà molto utile quando si parlerà di conduttori: una superficie con densità di carica non nulla (non necessariamente uniforme) causa una discontinuità a salto nella componente della campo elettrico perpendicolare alla superficie stessa in un punto, proporzionale alla densità di carica in quel punto: basta infatti applicare la legge di Gauss al parallelepipedo in figura (2a), tale che $A \gg \varepsilon$ e tale che A sia così piccolo che le facce del parallelepipedo possano essere



(a) *Flusso infinitesimo.*

Figura 2: Flusso infinitesimo sulla superficie di un conduttore (presa dal [Gri17]).

considerate parallele al piano tangente alla superficie nel punto in cui voglio calcolare $\Delta \mathbf{E}_\perp$. Mandando al limite $A \rightarrow 0$ i contributi delle facce laterali saranno trascurabili per la condizione su ϵ , che è ancora più piccolo di A , mentre quelli sulle basi saranno $\pm A E_{1,2\perp}(\mathbf{r}^\pm)$ in quanto per una regione molto piccola di spazio si può considerare il campo costante (con $\mathbf{r}^\pm$ indico la posizione di un punto appena fuori/dentro la superficie in analisi). Si ottiene pertanto:

$$\Delta \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (6)$$

2 Energia

2.1 Energia elettrostatica

Ci proponiamo di calcolare il lavoro necessario per muovere una carica di prova q all'interno di un campo elettrico $\mathbf{E}$ lungo una curva γ . Per definizione³ di lavoro L si ha:

$$L := \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

da cui si nota che la quantità rilevante da calcolare è l'integrale di linea del campo elettrico.

Iniziamo a considerare il caso di un campo elettrico generato da una carica Q posta nell'origine di un sistema di coordinate polari, con γ che parte da $\mathbf{r}_a$ e arriva in $\mathbf{r}_b$.

³Se non avete confidenza con gli integrali di linea, intuitivamente stiamo approssimando il percorso chiuso γ con una spezzata fatta di tanti piccoli $d\mathbf{l}$. Per ogni pezzettino calcolo $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e sommo tutti questi contributi.

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_a}^{r_b} k \frac{Q}{r^2} dr = -kQ \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a} \right)$$

Usando il principio di sovrapposizione lineare, possiamo concludere che per il campo generato da una distribuzione di di N cariche puntiformi q_i in posizioni $\mathbf{r}_i$ vale:

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = -k \left(\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_i|} - \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_i|} \right)$$

Data una distribuzione di carica localizzata definiamo dunque il potenziale scalare $V(\mathbf{r})$:

$$V(\mathbf{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Possiamo quindi riscrivere il risultato precedente nel seguente modo:

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = -(V(\mathbf{r}_b) - V(\mathbf{r}_a))$$

Questo risultato ha delle conseguenze interessanti:

- Poiché il potenziale è una funzione del solo punto in cui la calcolo (e della distribuzione di cariche), l'integrale di linea del campo elettrico non dipende dalla curva ma solo dal punto iniziale e dal punto finale. Inoltre se i due punti coincidono, $\Delta V = 0$. Abbiamo ottenuto una delle leggi di Maxwell: *la circuitazione del campo elettrostatico è nulla, infatti per ogni curva chiusa γ vale⁴:*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (7)$$

- Il potenziale scalare è definito a meno di una costante. Se infatti poniamo $V'(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + C$ si ha $\Delta V' = \Delta V$. Per esprimere il potenziale di una certa distribuzione di cariche sarà necessario fissare tale costante. Nella maggioranza dei casi per convenzione si imporrà $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$

È però importante sottolineare che questa scelta non è sempre completamente arbitraria e che in particolare non sia sempre possibile porre nullo il potenziale all'infinito. Una condizione sufficiente affinché ciò sia possibile è che le sorgenti del campo siano localizzate ovvero che

⁴ATTENZIONE: questo risultato vale solo in elettrostatica.

non ci siano sorgenti a distanza arbitraria. Un tipico esempio in cui ciò non succede è il condensatore *ideale* a facce piane e parallele in cui le piastre hanno larghezza e altezza infinite: se ci fosse il potenziale a zero su tutti i punti infinitamente lontani dall'origine del nostro sistema di coordinate, spostare carica da una piastra all'altra non richiederebbe lavoro. In tal caso generalmente si pone il potenziale a *zero* su una delle due armature.

- In analogia con la relazione che sussiste tra la primitiva e l'integrale definito nel caso unidimensionale, si ha nel caso generale⁵ $-\nabla V = \mathbf{E}$.

Nel caso di una distribuzione continua di cariche, valgono gli stessi risultati con:

$$V(\mathbf{r}) = k \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio.

Possiamo ora tornare all'obiettivo che ci eravamo posti all'inizio della sezione: calcolare il lavoro compiuto per portare una carica puntiforme q dall'infinito nel punto $\mathbf{r}$. Se supponiamo che le sorgenti del campo elettrico siano sufficientemente localizzate, così che $V(\infty) = 0$,

$$L = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l} = -q \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l} = q(V(\mathbf{r}) - V(\infty)) = qV(\mathbf{r})$$

Dunque l'energia potenziale di una carica q in un campo elettrico (posta nulla l'energia all'infinito) è

$$U(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r}) \quad (8)$$

Cerchiamo ora di estendere il concetto di energia ad una configurazione di cariche: consideriamo N cariche puntiformi $q_1, \dots, q_N$ poste in $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e, per ogni $1 \leq i, j \leq N$, sia $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$.

L'energia del sistema può essere calcolata nel seguente modo: supponiamo di costruire la configurazione portando dall'infinito una carica per volta. La carica q_1 viene portata dall'infinito a $\mathbf{r}_1$ senza compiere lavoro. La seconda carica viene portata dall'infinito a $\mathbf{r}_2$ compiendo un lavoro

$$L_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

⁵ ∇ rappresenta l'operatore gradiente che nello spazio è così definito

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{z}$$

Il lavoro compiuto per spostare q_3 dall'infinito a $\mathbf{r}_3$ è, per principio di sovrapposizione:

$$L_3 = k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Generalizzando, sulla base del conto sopra, l'energia della configurazione di cariche, che è uguale alla somma dei lavori precedenti, è

$$U_n = k \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{k}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (9)$$

Per distribuzioni continue di carica si definisce l'energia potenziale del sistema come

$$U = \frac{k}{2} \iint \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r d^3 r'$$

da cui, ricordando l'espressione del potenziale nel caso di distribuzione continua di energia si ottiene

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(r) V(r) d^3 r \quad (10)$$

Prima di procedere sottolineiamo come le due formule non siano esattamente una l'estensione dell'altra poiché nel caso continuo stiamo integrando anche dove $r = r'$, ovvero il corrispettivo discreto di $i = j$. Questa discrepanza deriva dal fatto che la Eq. (28) tiene conto anche dell'energia spesa per creare effettivamente la carica puntiforme (ossia per concentrare una carica finita in un solo punto), mentre nella Eq. (9) si suppone che le cariche puntiformi siano preesistenti, e tale equazione esprime solamente l'energia di interazione tra coppie di cariche. Se infatti volessi passare da una distribuzione di carica continua a delle cariche puntiformi dovrei comprimere la carica in una regione di spazio sempre più piccola, e questo costa energia. È possibile inoltre riscrivere l'ultima relazione in funzione del solo campo elettrico $\mathbf{E}$, con lo scopo di vedere il campo elettrico come lui stesso portatore di energia. Tuttavia far ciò in maniera elementare e rigorosa non è possibile quindi qui ne daremo un'idea intuitiva e svolgeremo il calcolo nell'appendice A. Il risultato è

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d^3 r = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d^3 r \quad (11)$$

Mostriamo che funziona con un esempio.

Esempio 2.1 (Energia di un condensatore). Consideriamo un condensatore quadrato di carica Q , lato L e distanza tra la facce d . Quanto vale l'energia immagazzinata dal condensatore?

Soluzione 2.1. Calcoliamo l'energia secondo l'equazione Eq. (8).

Essendo il condensatore un conduttore vale $V(q) = \frac{q}{C}$.

L'energia immagazzinata nel condensatore è pari al lavoro fatto per caricarlo:

$$U = L = \int dL = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (12)$$

Ora calcoliamo sempre questa energia integrando il campo elettrico nello spazio, Eq. (11).

Notiamo intanto che fuori dal condensatore il campo è trascurabile, quindi integriamo solo nel volume del condensatore Ω . Trascurando gli effetti di bordo, il campo all'interno è uniforme di intensità $\frac{V}{d}$ e quindi

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega} \frac{V^2}{d^2} d^3r = \frac{\varepsilon_0 V^2 L^2}{2d} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

ovvero il risultato di prima.

Per concludere, grazie al risultato visto poco sopra

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (13)$$

possiamo mostrare un'ulteriore condizione di raccordo per il campo elettrico, in particolare per la sua componente parallela. Calcoliamo la circuitazione del campo lungo un percorso rettangolare, avente i lati più lunghi paralleli a un piano carico, l'uno da una parte e l'altro dall'altra rispetto al piano, e gli altri due lati, molto più corti dei primi, ortogonali al piano carico.

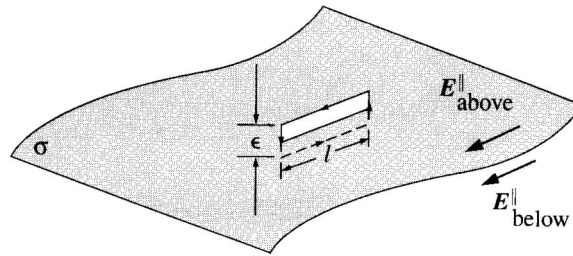


Figura 3: Circuitazione infinitesima usata nella dimostrazione.

In particolare, assumendo che:

- l , lunghezza dei lati lunghi, è molto più piccola della scala su cui varia il campo, pertanto esso può essere considerato costante su un lato;

- ε , lunghezza dei lati corti, è molto più piccola di l , pertanto la parte del percorso perpendicolare al piano può essere trascurata;

otteniamo:

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{\text{in}}^{\parallel} \ell - E_{\text{out}}^{\parallel} \ell = 0 \implies E_{\text{in}}^{\parallel} = E_{\text{out}}^{\parallel}$$

3 Conduttori

3.1 Definizione

Un altro tipo di problema che viene studiato spesso in elettrostatica consiste nel determinare il comportamento dei corpi sottoposti ad un campo elettrico esterno o in presenza di cariche posizionate nelle loro prossimità. I materiali più comuni possono essere classificati come *isolanti* oppure *conduttori*, a seconda della possibilità o meno per le cariche interne di muoversi liberamente. Più formalmente:

Definizione 3.1. Si definisce *isolante perfetto* un materiale nel quale le cariche non si muovono, indipendentemente dall'intensità del campo elettrico.

Definizione 3.2. Si definisce *conduttore perfetto*⁶ un materiale che contiene un numero illimitato di cariche di entrambi i segni, libere di muoversi sotto l'azione di un campo elettrico applicato, qualunque sia l'intensità del campo stesso.

Da questa definizione seguono alcune proprietà dei conduttori quando questi si trovano in condizione di equilibrio elettrostatico.

1. **Il campo elettrico è nullo all'interno del conduttore.** Se così non fosse, allora *non* potremmo trovarci in una condizione di equilibrio statico: dato che tutte le cariche presenti nel conduttore possono muoversi liberamente al suo interno, un elettrone che si trovi in un punto all'interno risentirebbe di una forza netta data dal campo interno, $\mathbf{F} = e\mathbf{E}_{\text{int}}$, e dato che non risentirebbe di altre forze per ipotesi, non ci troveremmo in condizione di equilibrio. Da questo fatto segue anche che l'intero volume del conduttore è equipotenziale:

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B \mathbf{0} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

dove il percorso che collega A a B è interno al conduttore.

2. **La densità di carica netta all'interno è nulla.** Questo risultato segue dalla legge di Gauss: presa infatti una qualunque superficie chiusa S contenuta all'interno del conduttore, si avrebbe che

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{A} = \oint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{A} = 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

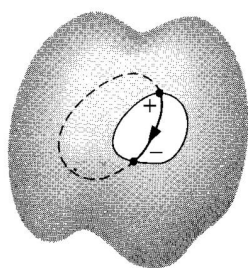
⁶Nella realtà non esiste un conduttore perfetto, ma per i nostri propositi i metalli ne sono una buona approssimazione

e dunque la carica netta interna è sempre nulla. Pertanto, la carica sarà sempre localizzata sulla superficie esterna.

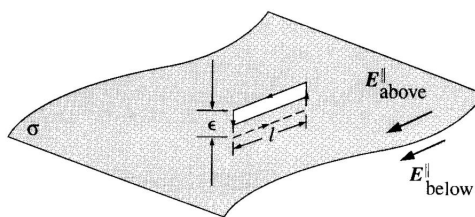
3. **Il campo elettrico esterno, sulla superficie, è perpendicolare alla superficie stessa.** Se in un punto della superficie il campo elettrico avesse una componente tangenziale, allora questa spingerebbe una qualunque carica localizzata in quel punto verso una posizione diversa, contraddicendo il fatto che il conduttore si trova all'equilibrio elettrostatico. Si può giungere allo stesso risultato utilizzando la relazione di continuità della componente parallela del campo elettrico che abbiamo enunciato nel precedente capitolo ($E_{\text{in}}^{\parallel} = E_{\text{out}}^{\parallel}$); infatti, per ipotesi di equilibrio elettrostatico vale $E_{\text{in}}^{\parallel} = 0$ da cui sarà nulla la componente parallela del campo anche all'esterno del conduttore: il campo elettrico sarà solo perpendicolare alla superficie.
4. È utile ricordare un interessante risultato che lega la densità superficiale locale all'intensità del campo elettrico relativa al punto considerato: confrontando infatti l'equazione (6) e ricordando che all'interno del conduttore il campo è nullo e la componente parallela è nulla, allora il campo elettrico in prossimità della superficie vale:

$$\frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = \Phi_S(\mathbf{E}) = \mathbf{E}_{\text{sup}} \cdot A\hat{\mathbf{n}} = E_{\perp} A$$

$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad E_{\parallel} = 0$$



(a) Conduttore cavo in cui è disegnata la curva per la circuitazione.



(b) Circuitazione infinitesima.

Figura 4: Notare che la curva all'interno della cavità inizia in una carica positiva e termina su una carica negativa.

3.2 Disposizione delle cariche

Tratteremo ora il comportamento dei conduttori in varie situazioni, puntualizzando alcuni risultati notevoli. In particolare, discuteremo come si comporta un conduttore con una cavità all'interno in presenza di carica localizzata all'esterno o all'interno.

Gabbia di Faraday. Considerate la figura 4a. Il conduttore è immerso in un campo esterno, in condizione di equilibrio elettrostatico, al suo interno è presente una cavità priva di carica. Le cariche si dispongono dunque sulla superficie esterna in modo da renderla una superficie equipotenziale. Se è presente una cavità nel conduttore, un osservatore posto al suo interno non percepisce alcun campo elettrico, e sulla superficie interna non compare alcuna densità di carica. Se per assurdo non fosse vero, dato che per Gauss la carica sulla superficie interna è nulla, consideriamo una curva chiusa costruita in questo modo: all'interno della cavità segue una linea di campo che parte dalla parete della cavità in corrispondenza di una carica positiva e termina sulla parete della cavità in corrispondenza di una carica negativa, il resto della curva si trova all'interno del conduttore. Calcolando la circuitazione del campo lungo questa curva, essa sarà non nulla: lungo la linea di campo, per definizione, il campo stesso è parallelo e concorde alla curva e dunque dà contributo solo positivo alla circuitazione, mentre all'interno del conduttore il campo è nullo, e dunque tale è il suo contributo alla circuitazione. Si avrebbe così una curva chiusa su cui la circuitazione del campo è positiva, assurdo.

Questo effetto, a dir poco contro-intuitivo, è alla base della gabbia di Faraday, ed è il motivo per cui se un fulmine colpisce la vostra auto mentre siete al suo interno, la corrente non scorre attraverso di voi ma solo sulla superficie esterna dell'auto, o per cui in ascensore il cellulare “non prende”⁷.

Gabbia di Faraday inversa Ci si può ora chiedere come si distribuirà la carica indotta sulle superfici del conduttore se viene posta una carica puntiforme all'interno di una cavità del conduttore stesso. Notiamo intanto che la quantità di carica totale presente sulla superficie della cavità deve essere uguale e opposta a quella puntiforme posizionata al suo interno. Infatti, consideriamo una superficie chiusa S appena dentro il conduttore che racchiuda

⁷Un'altra applicazione a dir poco elettrizzante di questo principio si può trovare a questo link: <https://www.youtube.com/watch?v=syAwqBLmng>. In questo video una band suona musica “elettronica” ben al sicuro all'interno di tute metalliche che sfruttano proprio il principio della gabbia di Faraday. Questo video è un estratto di una puntata di “*Te l'avevo detto*”, che potete trovare qui in versione integrale: <https://it.dplay.com/dmax/te-lavevo-detto/strani-poteri/>

la cavità interna del conduttore: il flusso attraverso questa superficie è nullo perché il campo nella parte piena del conduttore è nullo, pertanto dalla legge di Gauss segue che la carica totale racchiusa dalla superficie deve anch'essa essere nulla.

È possibile che sulla parete interna del conduttore all'equilibrio ci siano cariche di entrambi i segni? No: riapplicando infatti lo stesso ragionamento che abbiamo usato per la gabbia di Faraday, se ci sono due cariche di segno opposto sulla parete, esiste una linea di campo che le congiunge. Considerando allora una curva chiusa composta dalla linea di campo e da un arco di curva che la renda chiusa e che passi tutta all'interno del conduttore, avremmo che la circuitazione su questa curva è non nulla, assurdo. Dunque sulla parete interna compaiono solo cariche di segno opposto a quello della carica q posta nella cavità.

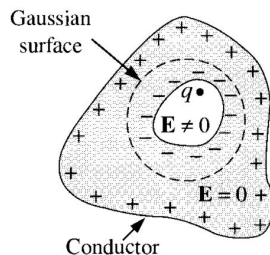


Figura 5: Conduttore cavo, con carica al suo interno

La distribuzione di carica sulla superficie esterna del materiale dipende dalla forma della cavità, oppure dalla posizione della carica posta al cui interno? Come mostreremo, la densità superficiale esterna è indipendente dalla posizione della carica all'interno, o dalla forma della cavità, ma dipende solo dalla forma della superficie esterna, e si dispone come se il conduttore fosse pieno e avente una carica netta totale q . Consideriamo infatti le seguenti configurazioni:

1. tutto lo spazio è costituito di materiale conduttore, tranne per una cavità vuota, identica a quella del problema originale, con la carica puntiforme q posizionata all'interno;
2. nello spazio c'è solo il conduttore senza cavità dotato di una carica q .

Nella prima delle due configurazioni, la carica si distribuisce sulla superficie in modo tale da produrre fuori della cavità, quindi anche nella parte di spazio che nel problema originale è occupata dal conduttore, un campo elettrico nullo. Considerando invece la seconda delle due configurazioni, la carica

superficiale si dispone in modo che all'interno del materiale conduttore il campo elettrico sia nullo. Ritornando al problema originale, se la densità di carica superficiale interna si disponesse come nella configurazione (1), la carica presente sulla superficie esterna non potrebbe essere influenzata in alcun modo dalla posizione della carica interna. Perciò la carica superficiale esterna si disporrebbe sulla superficie esterna come se si trovasse nella configurazione (2). Questa è sicuramente una soluzione del problema originario per la quale la distribuzione di carica esterna non dipende dalla posizione della carica all'interno né dalla forma interna della cavità.

Si potrebbe ora pensare che questa è sì una soluzione ma che potrebbe non essere l'unica e in particolare che potrebbero esistere altre soluzioni diverse da quella proposta, magari la cui configurazione invece dipende dalla posizione della carica nella cavità. Questo però **non** può accadere, e la soluzione proposta è l'unica possibile per un motivo profondo, ovvero per *l'unicità della soluzione* del problema dell'elettrostatica.

Infatti, la formulazione matematica dell'elettrostatica garantisce quest'unicità a parità di *condizioni al bordo*, che in questo caso sono:

- la carica all'interno della cavità
- la posizione della carica
- la forma del conduttore
- il potenziale nullo all'infinito

Questa unicità ha un chiaro significato fisico di esperienza quotidiana: se si ripete una stessa esperienza, a parità di condizioni iniziali la configurazione finale è una sola, ed è l'unica possibile ⁸. Il teorema di unicità sarà fondamentale per comprendere la prossima sezione: le cariche immagine.

Effetto delle punte. Abbiamo appena mostrato che la disposizione delle cariche in un conduttore dipende dal campo elettrico a cui è sottoposto in modo tale che la superficie del conduttore sia una superficie equipotenziale. Un effetto interessante legato a questo è l'effetto delle punte: la densità superficiale di carica è maggiore in corrispondenza delle parti della superficie più spigolose ⁹.

⁸Vi è un motivo più profondo legato alla parte matematica della determinazione della soluzione, che vi invitiamo a guardare nell'appendice [A.5].

⁹Questo equivale a dire nei punti della superficie il cui raggio di curvatura è minore: intuitivamente il raggio della sfera che al limite meglio approssima la superficie nel punto che stiamo considerando.

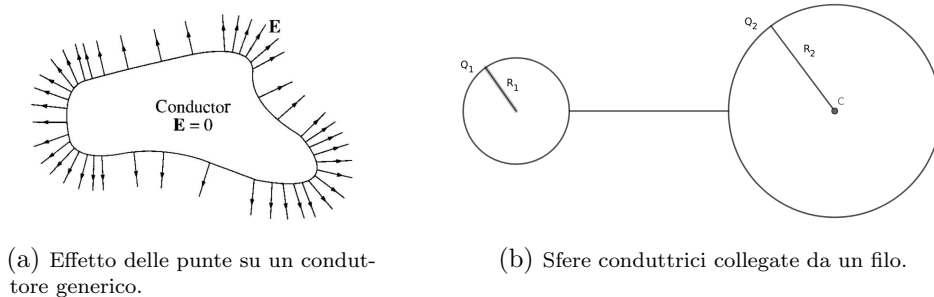


Figura 6: effetto delle punte.

Per dimostrarlo, consideriamo due sfere come in figura di raggio R_1 ed R_2 , rispettivamente con carica Q_1 e Q_2 (confronta la figura 6b). Poniamole ora a contatto tramite un filo sottilissimo conduttore: la carica si distribuirà fra le due sfere in modo da farle avere lo stesso potenziale, per definizione di conduttore. Dopo il contatto, dette le cariche sulle sfere rispettivamente Q'_1 e Q'_2 , si può scrivere:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_2}{R_2} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ricava:

$$\begin{aligned} Q'_1 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2) \Rightarrow \sigma'_1 = \frac{Q'_1}{4\pi R_1^2} \propto \frac{1}{R_1} \\ Q'_2 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2) \Rightarrow \sigma'_2 = \frac{Q'_2}{4\pi R_2^2} \propto \frac{1}{R_2} \end{aligned}$$

Dal risultato si può pensare di dedurre che la carica tende a spostarsi in punti del corpo dove la superficie è “più curva”, più appuntita.

4 Metodo delle cariche immagine

Andiamo ora ad analizzare un metodo standard di risoluzione di molti problemi di elettrostatica. In particolare ci poniamo l'obiettivo di studiare l'effetto della presenza di un materiale conduttore sul campo elettrico. Illustriamo il tutto con un semplice esempio.

Esempio 4.1. Calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}$ e il potenziale V in presenza di una carica q in $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$ e di un materiale conduttore nel semispazio $x < 0$.

Soluzione 4.1. Raggiunta la configurazione di equilibrio, sul conduttore ci sarà una certa densità di carica superficiale σ tale da schermare la carica q , ossia rendere costante il potenziale sulla frontiera e nullo il campo elettrico all'interno ($x < 0$). Ricordiamo infatti che all'interno dei conduttori nella situazione di equilibrio il campo deve essere nullo.

Calcolare questa densità con un metodo *brute force* partendo dalle condizioni al bordo risulta molto laborioso. Cerchiamo quindi un metodo alternativo per risolvere il problema.

L'idea è quella di sfruttare il teorema di unicità e sostituire il piano conduttore con alcune cariche fittizie (dette cariche immagine) poste nella regione in cui è presente il piano in modo che le condizioni al bordo (in questo caso il potenziale sul piano e all'infinito) siano uguali a quelle del problema originario.

Se poniamo una carica q' in posizione $\mathbf{r}'$ si avrà (posto $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$):

$$V(\mathbf{r}) = k \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + k \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{d})$$

Prima di fare calcoli alla cieca, facciamo qualche considerazione saggia. Sappiamo che la superficie del conduttore è equipotenziale, ma non sappiamo ancora quanto vale tale potenziale (in particolare non abbiamo ancora fissato lo zero). Poniamo lo zero del potenziale all'infinito e, poiché il piano va all'infinito, anch'esso sarà a potenziale nullo (a posteriori si può verificare che la soluzione trovata rispetta queste condizioni poste da noi). Inoltre, data la simmetria del problema per rotazioni attorno all'asse x , tutte le cariche immagine che andremo a mettere saranno poste proprio su questo asse.

Dunque sicuramente sappiamo che le cariche immagine saranno poste lungo l'asse x a coordinate negative, cerchiamo se esiste una soluzione con una sola carica immagine in posizione $(d', 0, 0)$ con $d' < 0$. Calcoliamo in questo caso il potenziale sulla superficie del conduttore e imponiamo che sia uguale a zero:

$$0 = V(0, y, z) = k \frac{q'}{\sqrt{d'^2 + y^2 + z^2}} + k \frac{q}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} \quad (14)$$

È facile notare che $q' = -q$ e $d' = -d$ è una soluzione del problema (e per il

teorema di unicità è anche l'unica). Abbiamo dunque:

$$V(x, y, z) = kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = kq \left(\frac{(x-d)\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x+d)\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

In particolare, sulla superficie del conduttore:

$$\mathbf{E}(0, y, z) = -2k \frac{qd\hat{\mathbf{x}}}{[d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Quindi il campo elettrico è perpendicolare alla superficie, come da aspettarsi dalla sua equipotenzialità. Possiamo ora calcolare la densità di carica ricordandoci che per una superficie $\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ e che il campo elettrico è nullo all'interno di un conduttore.

$$\sigma(0, y, z) = -\frac{qd}{2\pi[d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando tale espressione per la carica superficiale si può verificare che la carica totale sulla superficie del conduttore è pari a $-q$ (da provare a fare come esercizio).

Tale risultato si sarebbe potuto ottenere anche usando la legge di Gauss: consideriamo una calotta emisferica centrata nell'origine e di raggio R . Facendo tendere il raggio a $+\infty$ si nota che il flusso va a 0 (in quanto l'area scala come R^2 , mentre il campo va come R^{-3} essendo quello di un dipolo a grande distanza), e dunque anche la carica interna (che tende alla somma algebrica di q e la carica totale sulla superficie del conduttore) deve essere nulla.

Un occhio attento potrebbe notare che nel sistema *carica + carica immagine*, nella regione dove era posto il conduttore, il campo non è nullo, mentre sappiamo che nella soluzione del problema con il piano conduttore il campo in quella regione sarebbe stato certamente nullo. Questo tuttavia non è un problema: noi stiamo cercando una soluzione che segua tutte le leggi della fisica dove non c'è il conduttore. Una volta trovata la soluzione e calcolata la densità superficiale, sarà questa ad assicurare che per $x > 0$ si abbia lo stesso campo di prima, mentre per $x < 0$ la carica sia totalmente schermata e dunque il campo sia nullo.

Un altro modo di vederlo è che, dal momento che la densità superficiale è concentrata sul piano $x = 0$ (e dunque simmetrica per $x \rightarrow -x$) agirà allo

stesso modo sui due semispazi: se quando consideriamo il semispazio destro possiamo immaginarci una carica immagine a sinistra che genera il campo che abbiamo calcolato prima, quando cerchiamo di risolvere lo stesso problema per il semispazio negativo la carica immagine andrà messa a destra andando a sovrapporsi con la carica reale e generando dunque un campo nullo.

Con un ragionamento simile possiamo giustificare la regola precedentemente solo accennata: *le cariche immagine si possono posizionare solo fuori dalla regione di interesse (ossia solo dove c'è il conduttore)*. Se per assurdo mettessimo una carica immagine fuori dal condensatore, calcolando poi σ e togliendo le cariche immagine, staremmo chiedendo al conduttore di simulare la presenza di una sorgente di campo (per gli amici, una carica puntiforme¹⁰). In altre parole, calcolando il flusso di $\mathbf{E}$ in un volumetto abbastanza piccolo contenente la posizione in cui avevamo messo la carica immagine, otterremmo un flusso non nullo, che secondo il teorema di Gauss implicherebbe una carica interna non nulla dove invece non c'è nulla!

Esempio 4.2. calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}$ e il potenziale V in presenza di una carica q in $(d, 0, 0)$ e di una sfera conduttrice centrata nell'origine e di raggio $a < d$ messa a terra (che equivale a imporre che abbia potenziale nullo).

Soluzione 4.2. Anche qui iniziamo con una sola carica immagine. Sempre per la simmetria cilindrica attorno all'asse delle x , posizioniamo la carica sullo stesso asse, diciamo in $(d', 0, 0)$, e analizziamo il problema ristretto al piano xy . Procediamo ora al calcolo di q' e d' . Dal fatto che la sfera è a terra ($V = 0$ sulla superficie) otteniamo che

$$\frac{r'}{r} = \left| \frac{q'}{q} \right| = \text{cost}$$

dove r e r' sono rispettivamente le distanze di un punto generico della sfera dalla carica reale e immagine. Questo risultato ci rassicura in quanto sappiamo dalla geometria euclidea che il luogo di punti tali che il rapporto delle loro distanze da due punti fissati è costante è proprio una sfera (in due dimensioni prende il nome di Cerchio di Apollonio¹¹). Visto che una sfera è univocamente determinata da due qualsiasi punti antipodali basta imporre l'uguaglianza $V(a, 0, 0) = V(-a, 0, 0) = 0$ che porta al risultato:

$$d' = \frac{a^2}{d} \quad q' = -q \frac{a}{d}$$

¹⁰Per i più formali, una singolarità nel potenziale

¹¹cfr. https://it.wikipedia.org/wiki/Cerchio_di_Apollonio

Se la sfera non fosse messa a terra ma fosse a un potenziale V_0 basterebbe aggiungere una carica $q'' = aV_0/k$ nell'origine (in quanto, per sovrapposizione lineare, il potenziale in tutto lo spazio coincide con la somma dei potenziali delle due distribuzioni e il potenziale della configurazione iniziale si annulla sulla superficie della sfera, mentre il potenziale della carica q'' sulla superficie è proprio V_0), se invece fosse isolata e neutra si avrebbe $q'' = -q'$ sempre nell'origine (in questo modo la sfera è neutra, il potenziale alla superficie del conduttore è sempre costante in quanto somma del potenziale nella situazione originale che era nullo e quello dovuto alla carica q'' che dipendendo solo dalla distanza dalla carica è costante sulla superficie sferica).

In entrambi i casi abbiamo usato il principio di sovrapposizione lineare: una volta trovata la soluzione con condizione a contorno $V = 0$ ci limitiamo a trovare la soluzione a un problema in cui nello spazio c'è solo il conduttore (senza cariche esterne) per poi *sovrapporla* a quella di prima.

Il calcolo della densità superficiale e del campo elettrico nello spazio sono lasciati come esercizio al lettore, così come il calcolo della forza sulla sfera.¹²

A partire da questo risultato si possono analizzare due casi limite interessanti:

- Sfera a terra, $a \rightarrow \infty$ mantenendo fissa la distanza tra la carica e la sfera (che per comodità chiameremo D). Dunque anche $d \rightarrow \infty$ ma $d - a = D$ costante. In questo modo il nostro sistema tende ad assomigliare ad un piano conduttore infinito davanti al quale pongo una carica a distanza D . Con dei semplici conti (ricordandoci che $(1 + \varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon$ per $\varepsilon \ll 1$) si vede che $d' \rightarrow a - D$ e $q' \rightarrow -q$. Questo risultato è effettivamente quello che ci aspettavamo.
- Sfera neutra $d \rightarrow \infty$ ma tenendo $\frac{q}{d^2} = 4\pi\varepsilon_0 E_0$ costante. In questo limite la sfera è immersa in un campo elettrico uniforme pari a $-E_0 \hat{\mathbf{x}}$. Le due cariche immagine si avvicinano (tendono a coincidere) e generano un dipolo

$$\mathbf{p} = q'd'\hat{\mathbf{x}} = -\frac{qa^3}{d^2}\hat{\mathbf{x}} = 4\pi\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 a^3$$

¹²Hint: Usare il principio di azione-reazione.

5 Dipolo elettrostatico

Il potenziale di una distribuzione di carica è formalmente calcolabile con la seguente formula:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (15)$$

dunque di ogni distribuzione di carica si può almeno a livello teorico conoscere il potenziale esatto in ogni punto.

L'applicazione di questa formula è spesso molto complessa, tanto che in pratica risulta difficile calcolare esplicitamente il valore di tale potenziale. In genere verrà richiesta un'approssimazione del potenziale *a grandi distanze*, in modo da renderne più agevole la determinazione. Se la quantità complessiva di carica Q_{tot} è non nulla, un osservatore posto a grande distanza dal sistema¹³ percepirà in prima approssimazione un campo proveniente dal sistema pari a quello generato da una carica puntiforme di valore Q_{tot} posizionata nel baricentro delle cariche: infatti se $\mathbf{R}$ è la distanza dal baricentro delle cariche all'osservatore e $\mathbf{r}_i$ è la distanza della i -esima carica dal baricentro,

$$V(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + r_i^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i}} \approx \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

dove l'approssimazione è giustificata dal fatto che $R \gg r_i$.

Se invece la carica totale è nulla, il valore del potenziale a grande distanza è approssimabile a quello di due cariche, opposte in segno e di valore uguale alla quantità complessiva di carica dello stesso segno, posizionate rispettivamente nel baricentro delle cariche negative e nel baricentro delle cariche positive. Effettueremo qui il calcolo a grande distanza per la configurazione non banale più semplice, ovvero due cariche di segno opposto a distanza d l'una dall'altra: questa configurazione, denominata comunemente *dipolo*, risulta centrale nello studio dell'elettrostatica, ed il risultato che otterremo ha un'applicazione più ampia di quella del semplice problema proposto.

¹³Più formalmente, sia la distanza d_G dell'osservatore dal baricentro (geometrico) delle cariche, e sia r_{min} il minimo raggio di una superficie sferica centrato nel baricentro delle cariche che le contiene tutte. Diremo che il nostro sistema è osservato a grandi distanze quando $d_G \gg r_{\text{min}}$. Inoltre, diremo che le distanze fra le cariche sono considerate trascurabili se nello sviluppo in serie di Taylor del potenziale ci interessa solamente il termine dell'ordine di $\frac{r_{\text{min}}}{d_G}$.

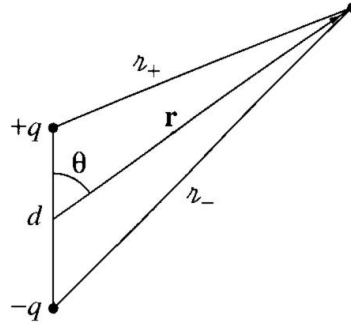


Figura 7: Calcolo del campo di un dipolo in un punto dello spazio.

5.1 Il campo del dipolo.

Come da figura 7, consideriamo due cariche puntiformi di carica $+q$ e $-q$ che si trovano sull'asse $\hat{z}$ rispettivamente in posizione $-a\hat{z}$ e $a\hat{z}$, dove $d = 2a$ è la distanza fra le due cariche e $\mathbf{d}$ il vettore che collega la posizione della carica negativa a quella della carica positiva. Siano ora $\mathbf{r}_-$ ed $\mathbf{r}_+$ la distanza fra il nostro punto dello spazio e rispettivamente la carica negativa e la carica positiva. Sia $\mathbf{r}$ il vettore distanza dall'origine. Il potenziale in ogni punto dello spazio si può scrivere pertanto come:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} \quad (16)$$

Ma, come possiamo notare, vale che

$$r_+ = \left| \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{d} \right|$$

$$r_- = \left| \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{d} \right|$$

Pertanto, usando la formula trigonometrica di Carnot¹⁴ e chiamato θ l'angolo fra l'asse $\hat{z}$ (parallelo a $\mathbf{d}$) e il vettore $\mathbf{r}$, si può scrivere

$$r_+ = \sqrt{r^2 + d^2 - 2\mathbf{r} \cdot \left(-\frac{1}{2}\mathbf{d}\right)} = r\sqrt{1 - \frac{d \cos \theta}{r} + \frac{d^2}{r^2}}$$

e quindi, per $r \gg d$ si può approssimare come segue, utilizzando l'approssimazione al primo ordine in 0 per le potenze di binomio¹⁵ $((1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ se $x \ll 1$):

¹⁴https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_coseno

¹⁵Vedi anche disuguaglianza di Bernoulli:
https://it.wikipedia.org/wiki/Disuguaglianza_di_Bernoulli.

$$\frac{1}{r_+} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d \cos \theta}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d \cos \theta}{2r} \right)$$

dove si sono trascurati i termini di ordine superiore al primo, ovvero quelli dove compaiono potenze di $\frac{r}{d}$ con esponente maggiore di 1.

Facendo lo stesso ragionamento per r_- si ottiene analogamente

$$\frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d \cos \theta}{2r} \right)$$

Sostituendo le due relazioni trovate nell'equazione (15) si ricava che per $r \gg d$:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{d \cos \theta}{2r} - 1 + \frac{d \cos \theta}{2r} \right) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Se indichiamo con $\mathbf{p} = +qd$, allora si ha che il potenziale può essere riscritto come:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (17)$$

In genere il vettore $\mathbf{p}$ viene chiamato *momento di dipolo*, ha unità di misura della carica moltiplicata per l'unità di lunghezza [Cm] e per una configurazione spaziale di cariche si può calcolare come segue:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 r'$$

Nel caso di cariche puntiformi, questo vettore è nullo se il baricentro delle cariche negative coincide con il baricentro delle cariche positive.

Il potenziale così trovato in generale viene chiamato *potenziale di dipolo*, e in modo più formale si definisce *dipolo perfetto* una configurazione tale che il campo in ogni punto sia proprio uguale a quello espresso dalla (17). Tale potenziale può essere pensato come il risultato di un processo di limite, in cui la distanza fra le due cariche tende a zero, ma tale che si mantiene costante il valore del modulo di $\mathbf{p}$ (dunque $qd = p$ costante, con $d \rightarrow 0$ e $q \rightarrow \infty$). Nella figura 8 possiamo vedere il confronto fra i campi di un dipolo perfetto e di un dipolo reale.

Nella realtà la configurazione di dipolo perfetto è impossibile da ottenere: nella realtà esistono solo dipoli fisici che però possono bene approssimare i dipoli perfetti. In essi la distanza fra le due cariche è finita ma molto piccola: un esempio è la molecola d'acqua, che ha un momento di dipolo pari a 6.17×10^{-30} Cm.

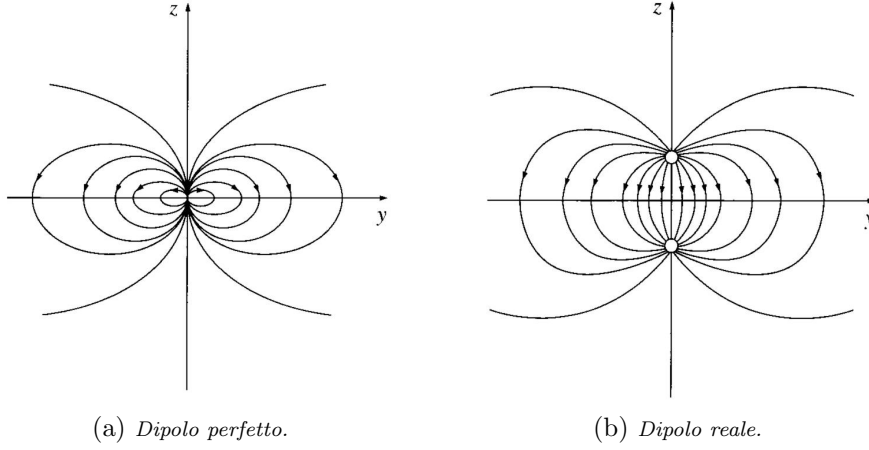


Figura 8: Confronto dei campi di un dipolo perfetto e di un dipolo reale.

5.2 Campo elettrico del dipolo a grande distanza.

Riscrivendo in cartesiane il potenziale di dipolo, si ottiene:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{pz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dove si è supposto che il momento di dipolo fosse diretto nella direzione positiva dell'asse $\hat{z}$. Ricordando che $\mathbf{E} = -\nabla V$ ¹⁶ si ha allora che:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} x \\ \mathbf{E}_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} y \\ \mathbf{E}_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} z - \frac{p}{3r^3} \right) \end{aligned}$$

da cui segue che il campo vale:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \right) \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] \quad (18)$$

¹⁶Con quest'espressione si intende che il campo elettrico è l'opposto del gradiente del potenziale, dove il gradiente è espresso come $\nabla V = (\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$. In realtà alle stesse espressioni di $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ si può arrivare attraverso un procedimento di limite analogo a quello fatto per ottenere $V(\mathbf{r})$.

5.3 Momento torcente, energia e forza netta su un dipolo.

Supponiamo ora di avere un dipolo costituito da un bilanciere ai cui estremi vi siano due cariche uguali ed opposte separate da una distanza fissa d . Se questo bilanciere si trova immerso in un campo elettrico esterno, su di esso agiscono delle forze esterne. Consideriamo il caso semplice nel quale il campo elettrico esterno è omogeneo. Come si evince dalla figura 9 la somma delle forze agenti sul dipolo è nulla.

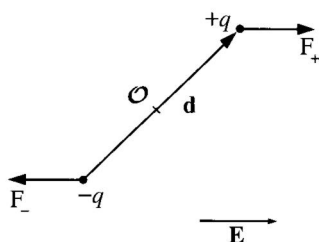


Figura 9: Schema delle forze su un dipolo in campo costante.

Sia ora $\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}$ la forza agente sulla carica negativa e sia $\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}$ la forza agente sulla carica positiva. Se si calcola il momento torcente sul dipolo rispetto al punto medio della distanza fra le due cariche, si ottiene la seguente espressione:

$$\boldsymbol{\tau} = \left(+\frac{\mathbf{d}}{2}\right) \wedge \mathbf{F}_+ + \left(-\frac{\mathbf{d}}{2}\right) \wedge \mathbf{F}_- \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = q\mathbf{d} \wedge \mathbf{E}$$

Che può essere riscritta come

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E} \quad (19)$$

È interessante notare come il momento torcente cerchi di allineare il momento di dipolo con il campo elettrico esterno.

Il dipolo possiederà un'energia potenziale dovuta alla sua disposizione nello spazio: infatti, ricordando che $r \gg d$, se si considera l'energia del dipolo come somma delle energie delle due cariche e si usa la formula (8) si ha:

$$U_{\text{dipolo}} = -qV(\mathbf{r}) + qV(\mathbf{r} + \mathbf{d}) \approx q dV(\mathbf{r}) \quad (20)$$

Ma ora, se la distanza fra due punti è sufficientemente piccola, la variazione del potenziale può essere pensata come una variazione lineare, e dunque si può

scrivere che $dV(\mathbf{r}) = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Ricordando anche $\mathbf{p} = qd\mathbf{l}$, si ha l'equazione¹⁷ (20)

$$U_{\text{dipolo}} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{p} \quad (21)$$

Fermiamoci ora un attimo a riflettere sul significato fisico delle espressioni (21) e (19). La (21) si può riscrivere anche come $U_{\text{dipolo}} = -Ep \cos \theta$: è evidente che il minimo dell'energia si ha quando il dipolo è allineato nel verso del campo elettrico, mentre il massimo si ha quando il dipolo ha verso opposto a quello del campo elettrico. L'espressione (19) ci dice invece che il campo elettrico tende a torcere il dipolo e a farlo allineare con il campo elettrico esterno. Dunque, tramite il momento torcente, il campo esterno può convertire l'energia potenziale del dipolo in energia cinetica rotazionale dello stesso. Su questo principio si basano i forni a microonde, che utilizzano campi elettrici alternati per aumentare l'energia cinetica delle molecole d'acqua polari all'interno del cibo ed addirittura arrivare a scongelarlo.

¹⁷Si noti che abbiamo assunto che il momento di dipolo $\mathbf{p}$ sia costante in modulo, ipotesi necessaria affinché questa formula sia valida. Un caso lampante è quello del dipolo dipendente linearmente dal campo ($\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$): in quel caso $U_{\text{dipolo}} = -\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{p}$.

6 Elettrostatica nei materiali

Nei precedenti capitoli abbiamo modellizzato i conduttori come dotati di una riserva 'illimitata' di cariche libere di muoversi. Questa idealizzazione modella bene la situazione più reale in cui alcuni elettroni (tipicamente 1 o 2 per atomo) non sono vincolati ad un singolo nucleo e vengono chiamati elettroni di conduzione.

Negli isolanti (anche chiamati dielettrici), al contrario, ciascuna carica è vincolata ad uno specifico atomo (o molecola), e dunque non ha la libertà di movimento propria delle cariche dei conduttori. Gli effetti macroscopici causati dal moto vincolato di queste cariche danno luogo al tipico comportamento dei dielettrici che ora ci proponiamo di modellizzare e studiare.

I modi principali in cui un campo elettrico esterno può interagire con la distribuzione microscopica di carica di un dielettrico sono due: *deformazione* ed *orientazione* delle molecole che formano il materiale.

6.1 Polarizzabilità per deformazione

Quando una molecola complessivamente neutra e apolare (priva di un dipolo intrinseco) interagisce con un campo elettrico esterno la nube elettronica carica negativamente tende a muoversi in direzione opposta al nucleo carico positivamente.

Se il campo non è sufficientemente forte da ionizzare l'atomo (liberare uno o più elettroni dalla nube elettronica) quello che succede è che la nube viene leggermente deformata nella direzione del campo elettrico esterno.

Cerchiamo ora di studiare questo comportamento (per ora su un singolo atomo) con un modello tanto semplice quanto dai risvolti interessanti, meglio conosciuto come *modello Thomson*.

Modello Thomson Si consideri un modello atomico semplificato dato da un nucleo puntiforme di carica positiva q , circondato da una sfera di raggio a con densità di carica uniforme e carica totale $-q$, immerso in un campo esterno uniforme $\mathbf{E}$. Cosa succede all'atomo?

Soluzione In presenza del campo esterno il nucleo subisce una forza che lo fa spostare leggermente nello stesso verso del campo, la sfera leggermente nel verso opposto, e per spostamenti piccoli possiamo assumere che mantenga la sua forma.

Detto $\mathbf{E}_s(\mathbf{d})$ il campo elettrico della sfera uniformemente carica nel punto $\mathbf{d}$ in cui si trova la carica puntiforme q , il sistema sarà nuovamente in equilibrio quando $\mathbf{E}_s(\mathbf{d}) = -\mathbf{E}$.

Prendendo come sistema di coordinate uno con origine al centro della sfera allora: $\mathbf{E}_s = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} \mathbf{d}$, da cui

$$\mathbf{d} = 4\pi\epsilon_0 \frac{a^3}{q} \mathbf{E}$$

Si noti che l'atomo nel suo complesso, in origine totalmente neutro, ha ora un momento di dipolo $\mathbf{p} = q\mathbf{d}(\mathbf{E})$, detto dunque dipolo indotto da $\mathbf{E}$. Tipicamente, come in questo caso, p è proporzionale al campo che l'ha indotto, dunque chiamando la costante di proporzionalità α (detta *polarizzabilità atomica*) si ha $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$. Per questo modello atomico si ottiene allora la polarizzabilità dell'atomo come $\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$.

6.2 Polarizzabilità per orientazione

In altri casi le molecole hanno un dipolo elettrico permanente, già esistente per ragioni chimiche. Possiamo per esempio, considerare un gas di anidride carbonica (molecola polare). Si noti che a causa dell'agitazione termica il dipolo intrinseco delle molecole non è necessariamente parallelo ad $\mathbf{E}$.

Gas di molecole polari Supponiamo che il gas sia abbastanza rarefatto, ovvero sia tale per cui si possono trascurare le interazioni tra i vari dipoli. In assenza di campo elettrico ciascuna molecola sarà orientata in modo casuale nello spazio: le medie statistiche dei momenti di dipolo su volumetti (contenenti grande numero di dipoli ma comunque molto più piccoli del volume occupato dal gas) sono $\langle p_x \rangle = \langle p_y \rangle = \langle p_z \rangle = 0$. Cosa succede se a questo gas viene applicato un campo elettrico uniforme?

Soluzione Introducendo $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$, ciascun dipolo sarà soggetto a una forza complessiva nulla ma a un momento torcente non nullo che tenderà a allinearli con la direzione del campo (si ricordino i risultati della sezione 5.3).

In generale a causa dell'agitazione termica i dipoli non si allineeranno tutti con il campo elettrico, ma sicuramente si otterrà che $\langle p_z \rangle \neq 0$.

Si può dimostrare che per campi esterni sufficientemente piccoli vale¹⁸:

$$\langle p_z \rangle = \frac{p_0^2 E}{3k_b T} \Rightarrow \alpha = \frac{p_0^2}{3k_b T}$$

Si noti che c'è una differenza sostanziale tra il caso di molecole apolari (dipolo indotto, polarizzazione per deformazione) e molecole polari (dipolo

¹⁸Riportiamo il conto nei complementi A.6

permanente, polarizzazione per orientamento). Nel primo caso infatti possiamo supporre che *ogni* molecola assuma un momento di dipolo dato da $\alpha \mathbf{E}$, al contrario nei dipoli permanenti è il *valore medio* $\langle p_z \rangle$, ad essere proporzionale ad $\mathbf{E}$ tramite la polarizzabilità.

Si osservi inoltre che la polarizzabilità dipende dalla temperatura come $1/T$. Intuitivamente, questo risultato non dovrebbe sorprenderci: ad alte temperature le molecole hanno molta energia cinetica, pertanto la variazione di energia data dall'orientamento del dipolo risulta praticamente trascurabile rispetto al loro moto nello spazio. Al contrario a basse temperature, ciò che domina nell'energia è l'orientamento del dipolo rispetto al campo piuttosto che l'energia cinetica della molecola: queste sono pertanto spinte ad allinearsi al campo esterno, e perciò la polarizzabilità è più alta.

Ricordiamo che in entrambi i casi il campo considerato è quello locale, ovvero la somma di quello applicato dall'esterno e di quello generato dal materiale, opportunamente mediato come descritto successivamente.

6.3 Polarizzazione

Nelle precedenti sezioni si è discusso cosa succede ai singoli atomi o molecole in presenza di un campo esterno. Possiamo immaginare che l'effetto su un dielettrico di un campo elettrico esterno sia quello di indurre momenti di dipolo su ogni particella del dielettrico nel caso il materiale sia composto da atomi neutri o molecole non polari. Se il materiale fosse invece composto da molecole polari, l'effetto sarebbe di ruotare i dipoli permanenti nel verso di $\mathbf{E}$.

Precisiamo che per molecole polari la polarizzabilità è legata sia all'orientazione del dipolo nella molecola, sia all'effetto di amplificazione o riduzione dei dipoli interni, come succede nel caso del modello Thomson. Quest'ultimo contributo è in genere trascurabile rispetto al primo termine, e pertanto viene di solito ignorato. In entrambi i casi si ottiene l'allineamento di tanti momenti di dipolo in direzione del campo esterno, fenomeno noto come polarizzazione del materiale.

Definiamo la polarizzazione $\mathbf{P}$ come il momento di dipolo medio per unità di volume:

$$\mathbf{P} = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i}{\Delta V} \right\rangle$$

Campo prodotto da un dielettrico polarizzato. Come già detto, un dielettrico polarizzato è costituito da tanti dipoli allineati, di cui sappiamo singolarmente calcolare il potenziale. Se $\mathbf{P}$ fosse uniforme si avrebbe un

accumulo di carica sulla superficie di bordo mentre al centro non si avrebbe carica. Questo è dovuto al fatto che le cariche interne presenti alle estremità di due dipoli vicini si neutralizzano vicendevolmente. Da questo ragionamento rimangono escluse le cariche dei dipoli che si affacciano sulla superficie, le quali non hanno alcuna carica opposta che li neutralizzi.

Se la polarizzazione non fosse uniforme, alcuni dei dipoli interni non saranno controbilanciati, pertanto si creerà anche una densità di carica all'interno del volume del dielettrico. In particolare, se per esempio ci fosse una concentrazione di cariche positive, avremmo che la polarizzazione sarebbe entrante verso quelle cariche. Calcolandone il flusso su un volumetto che le circonda, esso sarebbe non nullo, e si avrebbe una misura di quante cariche sono contenute nel volumetto in esame.

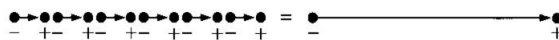


Figura 10: cariche di polarizzazione in un dielettrico monodimensionale.

Per questo (e per altri motivi matematici che appesantirebbero la trattazione) possiamo scrivere quest'importante relazione fra la polarizzazione e la carica generata dalla disposizione dei dipoli interni:

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = -Q_{\text{pol}}$$

dove Q_{pol} è la carica contenuta nel volumetto ΔV contenuto nella superficie ΔS generata dalla polarizzazione¹⁹. Il segno negativo è dovuto alla convenzione di prendere il verso del dipolo come la direzione che va dalla carica negativa alla carica positiva.

Si noti come la carica totale prodotta dalla polarizzazione è sempre nulla, e preso un volume abbastanza grande, il suo flusso sia nullo. Questo è vero perché la carica che si forma è solamente dovuta ad un riposizionamento dei dipoli interni, che creano una maggiore densità di carica dell'uno o dell'altro segno. La carica totale, in ogni caso, è conservata.

Se invece ci fosse una superficie di separazione in cui la polarizzazione è discontinua, si avrebbe una densità superficiale $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ sulla superficie del dielettrico.

Ribadiamo che la carica di polarizzazione non è solamente un artificio, ma ha significato fisico di una reale concentrazione di carica. Nella risoluzione di problemi questo significa che per conoscere i campi generati dal sistema

¹⁹In altri termini: nel materiale si forma una densità volumica $\rho_b = -(\partial_x P_x + \partial_y P_y + \partial_z P_z) = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ al suo interno.

invece di integrare su tutti i dipoli formanti il dielettrico,²⁰ si può risolvere il problema parallelo di trovare il campo in presenza della carica Q_{pol} e dalla densità superficiale σ_b aventi le espressioni scritte precedentemente.

6.4 Leggi di Maxwell in presenza di dielettrici

Legge di Gauss. Ora che abbiamo chiarito la natura del campo interno al dielettrico possiamo combinare gli effetti del campo che causa la polarizzazione e di quello che questa produce.

Chiamiamo Q_{in} la carica totale interna contenuta nel volume di interesse delimitato dalla superficie $\mathcal{S}$, chiamiamo Q_{pol} la carica generata dalla polarizzazione e Q_{lib} la carica *libera*, ovvero la carica che non è un risultato della polarizzazione. Allora, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{in}} = Q_{\text{pol}} + Q_{\text{lib}} = - \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} + Q_{\text{lib}} \\ \Downarrow \\ \oint_{\mathcal{S}} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{lib}} \end{aligned} \quad (22)$$

Sottolineiamo come il campo elettrico considerato nelle equazioni 22 sia il campo elettrico totale, ovvero la sovrapposizione di quello esterno e di quello generato dalla risposta della materia al campo²¹.

6.5 Dielettrici lineari

Per molti materiali e per campi a bassa intensità accade che la polarizzazione sia proporzionale al campo elettrico. Vale dunque che $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$, dove χ_e è detta suscettività elettrica, ed $\mathbf{E}$ è il campo totale presente nel materiale. Questi materiali sono detti *dielettrici lineari*.

I modelli analizzati precedentemente erano effettivamente modelli di dielettrici lineari. Dalla relazione $\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}$ possiamo trovare una relazione tra la polarizzabilità α e la suscettività elettrica, infatti $\chi_e = n\alpha$ dove $n = \frac{N}{V}$ rappresenta la densità numerica di molecole.

²⁰Per maggiore formalità confronta la sezione A.7.

²¹Potrebbe sembrare che nella trattazione si sia trascurata la densità superficiale σ_b , modellizzabile altrimenti come una delta di Dirac https://it.wikipedia.org/wiki/Delta_di_Dirac. Possiamo immaginare di considerare un modello di dielettrico con bordo di spessore non nullo in cui $\mathbf{P}$ decresce a 0 in maniera regolare invece di compiere un salto. In questo modo si giunge allo stesso risultato.

Partendo dall'equazione (22) possiamo ora scrivere una nuova relazione per la legge di Gauss valida nel caso di dielettrici lineari

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_0(1 + \chi_e)} = \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q_{lib}}{\varepsilon} \quad (23)$$

dove $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$ la permittività elettrica del materiale e $\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$ la permittività elettrica relativa.

Si noti la similitudine tra quest'ultima equazione e la legge di Gauss nel vuoto.

Condizioni di raccordo. Per il campo elettrico, abbiamo già trovato come la sua componente parallela sia continua attraverso le superfici dei materiali (si faccia riferimento all'equazione (2.1)). Invece, per la componente perpendicolare, avevamo notato come essa dipendesse dalla densità superficiale di carica, e che ad essa fosse legata dalla relazione (6).

Nel caso di un mezzo polarizzato abbiamo detto che sulla superficie si forma una densità superficiale di carica $\sigma_{pol} = \mathbf{P} \cdot \hat{n}$ e quindi nelle condizioni di raccordo è necessario considerare anche questo contributo.

Pertanto, si potrà scrivere²²

$$\Delta \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = \frac{(\sigma_{lib} + \sigma_{pol})(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

Nel particolare caso in cui ci troviamo in presenza di soli dielettrici lineari ripercorrendo la stessa dimostrazione della relazione(6) e facendo uso dell'equazione (23) si ottiene:

$$\Delta(\varepsilon \mathbf{E}_\perp) = \sigma_{lib} \quad (24)$$

La conservazione della componente parallela del campo elettrico e la condizione sulla componente perpendicolare sono dette *condizioni di raccordo*, e sono molto importanti nella risoluzione di molti problemi pratici.

Energia Anzitutto bisogna specificare cosa si intende per energia del sistema quando siamo in presenza di un dielettrico. Solitamente si intende il lavoro necessario per assemblare il sistema nel seguente modo: partiamo con il

²²Da questa relazione si potrebbe immediatamente ricavare che in generale la quantità conservata è la componente perpendicolare di un campo ausiliario chiamato *spostamento elettrico* e definito come $\mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E}$ https://it.wikipedia.org/wiki/Induzione_elettrica

dielettrico non polarizzato, poi disponiamo la carica libera lasciando rispondere il dielettrico. In questo caso²³ L'energia risulta essere

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int \varepsilon_r E^2 d^3\mathbf{r} \quad (25)$$

Dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio. Si noti che questa espressione non vale per dielettrici non lineari.

Esempio 6.1. Consideriamo ora un condensatore a piastre piane e parallele di area A e a distanza d riempito da un dielettrico di permeabilità $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. Qual è il valore del campo elettrico e della sua capacità se posto ad un potenziale V ? E se invece è posta una carica $\pm Q$ sulle due piastre?

Soluzione 6.1. Per condizioni di simmetria analoghe al caso del problema 1.2, possiamo concludere che $\mathbf{E}$ sia uniforme all'interno del condensatore e perpendicolare alle stesse. Il campo all'esterno è nullo per condizioni al bordo all'infinito.

Analizziamo ora separatamente i due casi di interesse:

- Se le armature hanno una differenza di potenziale ΔV sappiamo che $\Delta V = Ed$, dunque semplicemente:

$$E_{in} = \frac{\Delta V}{d}$$

- Se le armature sono caricate con una carica Q , utilizzando le condizioni di raccordo del campo elettrico si ricava che all'interno del condensatore il campo deve essere pari a $E_{in} = \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon}$, dove ε è la permittività elettrica del materiale inserito nel condensatore. Si ottiene quindi che:

$$E_{in} = \frac{Q}{A\varepsilon}$$

Calcoliamo ora la capacità

$$\Delta V = \frac{Qd}{A\varepsilon} \implies C_r = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} \quad (26)$$

²³Se invece si intende il lavoro per assemblare cariche libere e fisse (non includendo dunque il lavoro per deformare o ruotare i dipoli) allora l'espressione dell'energia è come visto precedentemente $\frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 d^3\mathbf{r}$.

Forze In analogia al caso dei conduttori, le cariche fisse sui dielettrici tendono ad accumularsi nei pressi di cariche libere di segno opposto. Calcolare le forze su un dielettrico può essere tuttavia piuttosto complicato. Esaminiamo allora un problema che vi tornerà spesso utile in futuro.

Esempio 6.2. Si consideri una lastra di dielettrico di spessore ℓ che occupa parte dello spazio fra le lastre di un condensatore piano, il quale ha lastre rettangolari di lati a e b a distanza ℓ fra loro, con carica $\pm q$ sulle piastre. La lastra è solo parzialmente all'interno del condensatore per un tratto di lunghezza x lungo la direzione parallela al lato a . Si trovi la forza esercitata sul dielettrico

Soluzione 6.2. La difficoltà del calcolo delle forze con un approccio dinamico segue dal fatto che le forze sul dielettrico sono causate dagli effetti di bordo del condensatore: se questi sono trascurati otteniamo un campo elettrico perpendicolare alla direzione lungo la quale può muoversi la lastra. Questo problema può essere qui aggirato usando un approccio energetico.

Per trovare l'energia useremo due approcci diversi: il primo consiste nel calcolare i campi all'interno del condensatore trascurando gli effetti di bordo tenendo in considerazione le condizioni di raccordo. Il secondo approccio consiste nel modellizzare le due parti come capacitori messi in parallelo.

Primo approccio. Consideriamo il campo nell'interfaccia fra il dielettrico e il vuoto all'interno del condensatore. Il campo elettrico, trascurando effetti di bordo, deve essere parallelo all'interfaccia, e per le condizioni di raccordo deve essere continuo attraversando l'interfaccia tra vuoto e dielettrico. Chiamiamo E_0 il campo nel vuoto, E_1 il campo nel dielettrico, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ la permittività del mezzo dielettrico. Abbiamo dunque che $E_0 = E_1 = E$. Ricordando l'espressione per l'energia (25), si ha che l'energia totale della configurazione vale

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\int_0 E^2 dV + \int_1 \varepsilon_r E^2 dV \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} (b\ell x \varepsilon_r E^2 + b\ell(a-x)E^2)$$

L'unica incognita che ci rimane per trovare l'energia è il campo elettrico. Chiamiamo q_1 la carica libera posta sulla parte di condensatore a contatto con il dielettrico, q_0 quella a contatto con il vuoto. Utilizzando le condizioni di raccordo si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} q &= q_1 + q_0 \\ q_1 &= \varepsilon_1 E b x \\ q_0 &= \varepsilon_0 b(a-x)E \end{aligned}$$

Da cui ho

$$E = \frac{q}{b\varepsilon_0 (a + (\varepsilon_r - 1)x)}$$

Sostituendo nella formula per l'energia trovata precedentemente si ottiene che:

$$U = \frac{q^2 \ell}{2\varepsilon_0 b (a + (\varepsilon_r - 1)x)}$$

Possiamo ora trovare la forza!

$$F = -\frac{dU}{dx} = \frac{(\varepsilon_r - 1)q\ell}{2\varepsilon_0 b(a + (\varepsilon_r - 1)x)^2}$$

Si noti che F è positiva, dunque per come si è scelto x , vuol dire che il dielettrico viene “risucchiato” all'interno del condensatore. Puntualizziamo come l'espressione per questa forza non sarebbe stata ricavabile solamente dalla conoscenza del campo elettrico e delle cariche, a causa dell'approssimazione che abbiamo fatto di ignorare i termini di bordo. Vi invitiamo a pensare anche al caso in cui sia fisso il potenziale fra le due piastre invece della carica.

Secondo approccio. Modellizziamo la configurazione appena esposta come due condensatori collegati in parallelo, uno vuoto e uno completamente riempito dal dielettrico. Allora dette C_0 e C_1 le loro capacità, e C la capacità del condensatore originale, si ha $C = C_0 + C_1$. Inoltre dalle espressioni per la capacità di un condensatore piano (equazione 26) e del campo in presenza di un dielettrico lineare si ha:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0(a-x)b}{\ell} \quad C_1 = \frac{q_1}{V} = \frac{q_1}{E\ell} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r bx}{\ell}$$

La sua energia potenziale è dunque:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 \ell}{2\varepsilon_0 b(a + (\varepsilon_r - 1)x)}$$

Allora la forza sul dielettrico è data da:

$$F = -\frac{dU}{dx} = \frac{(\varepsilon_r - 1)q\ell}{2\varepsilon_0 b(a + (\varepsilon_r - 1)x)^2}$$

Chè è lo stesso risultato trovato precedentemente.

6.6 Matrice di polarizzabilità

Finora abbiamo solo parlato di atomi a simmetria sferica, ma nel caso di molecole è possibile, a seconda delle asimmetrie, che sia più facile polarizzarle lungo certe direzioni piuttosto che altre. Nel caso generale, ovvero quello di una molecola di cui trascuriamo possibili simmetrie, si ottiene che per le componenti di $\mathbf{p}$ vale $p_i = \sum_{ij} \alpha_{ij} E_j$, dove quindi α è un oggetto con nove componenti (una per ogni coppia di coordinate cartesiane)²⁴. Nel caso generale può esserci una certa dipendenza della componente i -esima del dipolo indotto, dalla componente j -esima del campo elettrico macroscopico:

$$p_i = f(E_x, E_y, E_z)$$

Tuttavia, per il principio di sovrapposizione lineare questa dipendenza non può che essere quella sopra indicata:

$$p_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j$$

Per convincersi di questo si può immaginare di calcolare il dipolo generato da un campo $\mathbf{E}$ generico sommando appunto i dipoli presenti in tre situazioni diverse: quelle in cui c'è solo una delle tre componenti del campo parallela agli assi cartesiani. In questi casi la dipendenza non può che essere lineare proprio per la linearità di tutte le leggi che regolano l'elettrostatica (se amplifico il campo per un fattore β tutte le quantità elettrostatiche, tra cui anche $\mathbf{p}$ non possono che essere anch'esse amplificate per β).

Per snellezza di notazione, scriveremo comunque $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$.

Esempio 6.3. Si consideri un materiale dielettrico composto da strati alternati di due materiali diversi rispettivamente di lunghezza (microscopica) l_1 e l_2 e suscettività scalare χ_1 e χ_2 . Si ricavi la matrice di suscettività macroscopica ($\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$).

Soluzione 6.3. Per prima cosa capiamo cosa ci viene chiesto. In ognuna delle due zone sappiamo dai dati del problema quanto vale la polarizzazione dato un certo campo elettrico. Quello che ci viene chiesto è di supporre di osservare questo materiale a una scala macroscopica molto maggiore dello spessore degli strati e di trovare la matrice suscettività a questa scala, ovvero studiare come reagisce globalmente il materiale ad un campo elettrico macroscopico (che sarà quindi la media dei campo elettrici nei vari strati).

Mettiamoci in un sistema di riferimento cartesiano in cui l'asse z è ortogonale ai piani di separazione tra i due materiali. Prima di addentrarci nei conti,

²⁴Una matrice 3×3 .

ragioniamo sulle simmetrie del problema: c'è invarianza sotto traslazioni parallele al piano xy e sotto rotazioni attorno all'asse z . Per questo motivo se sottoponiamo il sistema a un campo parallelo a z ci può essere solo una risposta lungo z (non c'è nessuna direzione preferenziale nel piano xy) e, analogamente, sottoponendolo a un campo esterno parallelo a x ci può essere solo risposta lungo x (se ce ne fosse una lungo y questa cambierebbe di segno sotto riflessione rispetto a xz mentre il campo e il sistema rimangono invariati; se ce ne fosse una lungo z questa cambierebbe di segno sotto riflessione rispetto a xy mentre il campo e il sistema rimangono invariati). Inoltre ovviamente $\chi_{xx} = \chi_{yy} := \chi_{\parallel}$.

Abbiamo quindi ottenuto:

$$\chi_{ij} = \begin{pmatrix} \chi_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

Siano $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ i campi elettrici nei due strati e $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ le rispettive polarizzazioni. Sappiamo allora che, chiamando $\mathbf{E}$ il campo macroscopico e $\mathbf{P}$ la polarizzazione macroscopica:

$$\mathbf{E} = \frac{l_1 \mathbf{E}_1 + l_2 \mathbf{E}_2}{l_1 + l_2} \quad \mathbf{P} = \frac{l_1 \mathbf{P}_1 + l_2 \mathbf{P}_2}{l_1 + l_2}$$

Troviamo ora la condizione di raccordo per z :

$$\Delta(\chi \mathbf{E}_{\perp}) = \sigma_{\text{lib}} = 0 \implies \chi_1 E_{1,z} = \chi_2 E_{2,z}$$

Perciò le condizioni di raccordo sono, scegliendo per il piano parallelo agli strati la direzione x , indifferentemente potevamo scegliere y :

$$\begin{aligned} \chi_1 E_{1,z} &= \chi_2 E_{2,z} \\ E_{1,x} &= E_{2,x} \end{aligned}$$

Sostituendo nelle equazioni precedenti si può concludere che:

$$\begin{aligned} P_x = \varepsilon_o \chi_{\parallel} E_x = \varepsilon_o \frac{l_1 \chi_1 + l_2 \chi_2}{l_1 + l_2} E_x &\implies \chi_{\parallel} = \frac{l_1 \chi_1 + l_2 \chi_2}{l_1 + l_2} = \langle \chi \rangle \\ E_z = \frac{P_z}{\chi_{zz} \varepsilon_o} = \frac{\frac{l_1}{\chi_1} + \frac{l_2}{\chi_2}}{l_1 + l_2} \frac{P_z}{\varepsilon_o} &\implies \chi_{zz} = \frac{l_1 + l_2}{\frac{l_1}{\chi_1} + \frac{l_2}{\chi_2}} = \langle \chi^{-1} \rangle^{-1} \end{aligned}$$

A Complementi

A.1 Teorema della divergenza

Teorema A.1 (della divergenza). *Consideriamo una superficie chiusa S e sia V_S il volume da essa racchiuso. Allora si ha*

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_{V_S} \nabla \cdot \mathbf{v} d^3r$$

Dimostrazione. Consideriamo una partizione di V_S in n cubetti. Se V_i è il volume dell' i -esimo cubetto si ha per linearità dell'integrale

$$\int_{V_S} \nabla \cdot \mathbf{v} d^3r = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \nabla \cdot \mathbf{v} d^3r$$

Detta S_i la superficie dell' i -esimo cubetto, si ha anche

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

Infatti, se un cubetto ha una faccia interna a V_S , allora c'è un secondo cubetto che ha tale faccia in comune con il primo. Allora i due contributi al flusso si elidono, perché uguali e opposti. Se invece un cubetto ha una faccia appartenente alla superficie S , il suo contributo al flusso non si elide. Se ora consideriamo una suddivisione sufficientemente fitta e un cubetto con un vertice in (x, y, z) e con i lati lunghi $\Delta x, \Delta y$ e Δz , si ha al primo ordine

$$\begin{aligned} \oint_{S_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} &= (v_x(x + \Delta x, y, z) - v_x(x, y, z)) \Delta y \Delta z + \\ &\quad + (v_x(x, y + \Delta y, z) - v_x(x, y, z)) \Delta x \Delta z + \\ &\quad + (v_x(x, y, z + \Delta z) - v_x(x, y, z)) \Delta x \Delta y = \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \nabla \cdot \mathbf{v} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Sommando tutti i contributi si ottiene la tesi. □

A.2 Calcolo dell'energia potenziale

Notiamo preliminarmente che, prese A funzione scalare e $\mathbf{B}$ funzione vettoriale, si ha

$$\nabla \cdot (A\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (AB_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial A}{\partial x_i} + A \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = \mathbf{B} \cdot \nabla A + A \nabla \cdot \mathbf{B}$$

Usando la prima equazione di Maxwell e il teorema della divergenza si ottiene

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{V_S} |\mathbf{E}|^2 d^3r$$

Dato che supponiamo localizzata la nostra distribuzione di carica, ovvero di poter racchiudere tutte le cariche in un volume finito, possiamo supporre che S sia una sfera di raggio R sufficientemente elevato. Allora su tale superficie si ha $V|\mathbf{E}| \propto R^{-3}$, quindi nel limite $R \rightarrow \infty$ il primo integrale si annulla. Pertanto abbiamo

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d^3r \quad (27)$$

L'integrale è esteso a tutto lo spazio.

A.3 Calcolo dell'energia di interazione

Quindi ripartiamo da

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d^3r = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d^3r \quad (28)$$

La Eq. (28) permette anche di interpretare U come l'energia necessaria a creare il campo elettrico stesso. Inoltre, non è del tutto equivalente alla Eq. (9), come si deduce subito considerando una coppia di cariche di segno opposto (infatti l'energia trovata in Eq. (28) è sempre positiva, al contrario della Eq. (9)).

Questa discrepanza deriva dal fatto che la Eq. (28) tiene conto anche dell'energia spesa per creare effettivamente la carica puntiforme (ossia per concentrare una carica finita in un solo punto), mentre nella Eq. (9) si suppone che le cariche puntiformi siano preesistenti, e tale equazione esprime solamente l'energia di interazione tra coppie di cariche. Se infatti volessi passare da una distribuzione di carica continua a delle cariche puntiformi dovrei comprimere la carica in una regione di spazio sempre più piccola, e questo costa energia. Per verificare la coerenza di questa affermazione, consideriamo due cariche puntiformi (il caso generico segue immediatamente per il principio di sovrapposizione). Siano q_1 e q_2 tali cariche, poste rispettivamente in $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$. Allora per il campo elettrico si ha, con ovvio significato dei simboli

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

Di conseguenza usando la Eq. (28) si ottiene

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{V_S} (|\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) d^3r$$

Ora i primi due integrali non sono fisicamente riconducibili all'**interazione** tra le due cariche (poiché ognuno dei due è indipendente dalla presenza dell'altra carica) e quindi non li considereremo. Questi termini vengono detti di "autoenergia". Cerchiamo di interpretare la seconda parte.

Sempre tenendo a mente che

$$\nabla \cdot (AB) = B \cdot \nabla A + A \nabla \cdot B$$

si ha, ignorando gli integrali in $|\mathbf{E}_1|^2$ e $|\mathbf{E}_2|^2$, per il motivo spiegato nella sezione A.3

$$U = -\varepsilon_0 \int_{V_S} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla V_2 d^3r = \varepsilon_0 \int_{V_S} V_2 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 d^3x - \varepsilon_0 \oint_S V_2 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A}$$

Scegliamo ora come V_S una sfera di raggio R che contiene le due cariche, privata di due sfere di raggio R_1 e R_2 centrate rispettivamente nelle due cariche. In tal modo, il primo integrale all'ultimo membro è nullo per la prima equazione di Maxwell ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ che è l'equivalente locale di $\Phi(\mathbf{E}) = Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$). Per il secondo, tenuto conto dei versi dei vettori superficie, si ha

$$U = -\varepsilon_0 \oint_{S_R} V_2 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \oint_{S_{R_1}} V_2 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \oint_{S_{R_2}} V_2 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A}$$

Il primo integrale si annulla quando $R \rightarrow \infty$. Su S_{R_2} il potenziale V_2 è costante, poiché è il potenziale della carica q_2 su una sfera centrata in q_2 , dunque il terzo integrale è nullo per la legge di Gauss. Infine, se R_1 è sufficientemente piccolo V_2 è pressoché costante sulla sfera S_{R_1} , quindi si ha per la legge di Gauss

$$U = \varepsilon_0 \oint_{S_{R_1}} V_2 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A} = q_1 V_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Quindi la (28) e la (9) danno come previsto lo stesso valore per l'energia di mutua interazione.

A.4 Legge di Gauss in forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (29)$$

Dimostrazione Data una regione di spazio V racchiusa da una superficie chiusa ∂V , scriviamo la legge di Gauss ricordandoci che $\int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r$:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \oint_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3r$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il teorema della divergenza. Vista l'arbitrarietà della scelta di V , possiamo mandarne a zero il volume ottenendo in ogni punto la tesi.

Qualche osservazione: la relazione ottenuta è locale, non puntuale in quanto l'operatore di divergenza richiede l'esistenza della funzione in un intorno del punto in cui è applicato (la divergenza è un operatore differenziale, ovvero è una somma di derivate, e quindi agisce sull'andamento locale della funzione, e non sul suo valore in un punto). In secondo luogo, osserviamo che nella dimostrazione si è usato il teorema della divergenza, che richiede la continuità delle derivate del campo elettrico e la regolarità della superficie di integrazione: è quindi possibile costruire controesempi matematici alla forma locale della legge di Gauss, anche se questi non rappresentano delle effettive situazioni fisiche.

A.5 Teorema di unicità di Poisson

Dato il problema di Poisson $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ su una regione di spazio Γ con bordo $\partial\Gamma$, sotto certe condizioni al bordo, se l'equazione ammette soluzione allora questa è unica (a meno di una costante). In particolare le condizioni al bordo che verificano l'unicità sono:

- È noto il valore di V sul bordo $\partial\Gamma$.
- È noto il valore di $\frac{\partial V}{\partial n}$ sul bordo $\partial\Gamma$, dove $\mathbf{n}$ è il versore normale uscente dalla superficie (che è come dire che è noto il valore di $\mathbf{E}_\perp$).
- Una combinazione delle precedenti (ossia, per ogni punto della superficie $\partial\Gamma$ è noto il valore di V oppure quello di $\frac{\partial V}{\partial n}$).

Dimostrazione Useremo la seguente identità vettoriale, ricavata nella sezione A.2 ponendo $A = f$ e $\mathbf{B} = \nabla g$:

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$$

Supponiamo ora di avere due soluzioni V_1 e V_2 ; chiamiamo u la loro differenza ed integriamo su Γ l'identità appena vista ponendo $f = g = u$.

$$\int_{\Gamma} u \nabla^2 u + |\nabla u|^2 d^3r = \int_{\Gamma} \nabla \cdot (u \nabla u) d^3r = \oint_{\partial\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} dA$$

Dove nell'ultimo passaggio si è usato il teorema della divergenza. Se V_1 e V_2 al bordo soddisfano una delle tre ipotesi allora il lato destro è nullo. Inoltre,

essendo entrambe soluzioni del problema dentro a Γ , la loro differenza avrà laplaciano nullo (per linearità dell'operatore). Dunque otteniamo:

$$\int_{\Gamma} |\nabla u|^2 d^3r = 0$$

Ma poiché $|\nabla u|^2 \geq 0$ si ha $\nabla u = 0$ che implica u costante.

A.6 Polarizzazione di gas polari

Un dipolo individuale avrà energia potenziale $U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E} = -p_0 E \cos \theta$, dove θ è l'angolo fra $\mathbf{p}_0$ e l'asse z (si noti che è minima per il dipolo allineato col campo). Utilizzeremo il seguente fatto sulla statistica dei gas: la densità di probabilità $W(U)$ che un dipolo abbia energia U è data dalla distribuzione di Boltzman $W(U) = A e^{\frac{-U}{k_b T}}$, dove A è una costante di normalizzazione. Il nostro obiettivo è quello di trovare la probabilità che il suo momento di dipolo sia orientato in un certo angolo solido infinitesimo $d\Omega' = \sin \theta d\theta d\phi$.

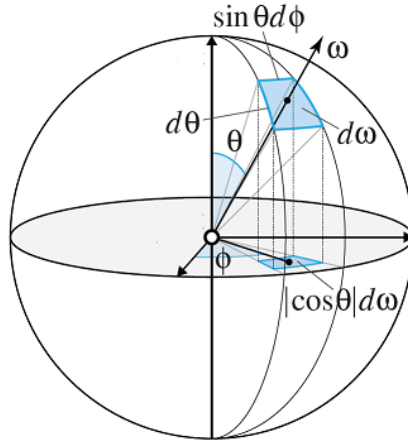


Figura 11: angolo solido infinitesimo in coordinate sferiche, si ricorda che $d\Omega = dA/r^2$, dove dA è l'elemento infinitesimo di area in sferiche $dA \simeq r^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

Notiamo che dato che quello che ci interessa è la componente z del momento di dipolo, ciò che in realtà stiamo cercando è la probabilità che il momento di dipolo abbia una certa componente in z dipendentemente dalla sua energia. Possiamo dunque direttamente considerare l'angolo solido 'dell'anello' $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ (è come aver già integrato in sferiche su ϕ), ed ottenere $dW = 2\pi \sin \theta d\theta W(U)$, che possiamo riscrivere considerando che $U \ll k_b T$ come:

$$dW \approx 2\pi A \sin \theta \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{k_b T} \right) d\theta$$

Per trovare A basta imporre la condizione di normalizzazione per le densità di probabilità $\int_0^\pi dW = 1 \implies A = 1/4\pi$. Infine abbiamo:

$$\langle p_z \rangle = \int p_z dW = \int_0^\pi \frac{1}{2} p_0 \cos \theta \sin \theta \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{k_b T} \right) d\theta$$

Con la sostituzione $x = \cos \theta$:

$$\begin{aligned} \langle p_z \rangle &= \int_0^\pi \frac{1}{2} p_0 \cos \theta \sin \theta \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{k_b T} \right) d\theta = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} p_0 x \left(1 + \frac{p_0 E x}{k_b T} \right) dx = \frac{p_0^2 E}{3k_b T} \end{aligned}$$

Otteniamo così infine una legge di proporzionalità rispetto ad E e la polarizzabilità per orientamento: $\alpha_o = \frac{p_0^2}{3k_b T}$.

A.7 Legame fra polarizzazione e carica

Formalmente supponiamo nota la polarizzazione $\mathbf{P}$; allora integrando sul volume $\mathcal{V}$ dell'oggetto:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Manipolando (sostituzione $\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ e usiamo il teorema di divergenza) si ottiene che il potenziale del dielettrico polarizzato è lo stesso generato da una densità di carica superficiale $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ sulla superficie del dielettrico, e da una densità volumica $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ al suo interno. Dunque posso scrivere il potenziale come:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\oint_{\mathcal{S}} \frac{\sigma_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA' + \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right)$$

Esercizi

Di seguito trovate alcuni esercizi di elettrostatica. Le soluzioni verranno pubblicate sul sito dello stage.

Energia - Distribuzioni di carica - Campi

Problema P.1 (Carica in campo elettrico a simmetria sferica di modulo costante (Senigallia 2011 P3)). Si considerino due superfici sferiche concentriche di raggi $R_1 = R$ ed $R_2 = 2R$ che delimitano un volume V ; un'opportuna distribuzione di cariche, in posizione determinata, è tale da generare un campo elettrico radiale uscente, il cui modulo (E_0 noto) è uguale in tutti punti del volume V .

Il campo elettrico è nullo nei punti interni alla prima superficie (quella di raggio minore) e nei punti esterni alla seconda superficie. Per ottenere questo è necessario porre una distribuzione di carica positiva sulla superficie interna, una negativa sulla superficie esterna ed un'ulteriore distribuzione volumetrica nello spazio tra le due superfici, in modo tale che la carica totale sia nulla.

1. Quanto valgono le densità di carica superficiale (uniformi) sulle due superfici sferiche di raggio R_1 ed R_2 ?
2. Quanto vale la densità media di carica spaziale tra le due superfici sferiche di raggio R_1 ed R_2 ?

Si può facilmente verificare (per esempio considerando due corone sferiche di uguale volume) che la densità di carica spaziale non può essere uniforme; essa sarà quindi funzione della distanza dal centro: $\rho = \rho(r)$.

1. Determinare l'andamento della densità volumetrica di carica $\rho(r)$ al variare della distanza dal centro.
2. Tracciare i grafici del campo elettrico $E(r)$, della densità di carica (volumetrica) $\rho(r)$ e del potenziale elettrostatico $V(r)$, con $V_\infty = 0$, per ogni r compreso nell'intervallo $[0, 5R]$.

Una particella di massa m e carica $q > 0$, lanciata radialmente dall'esterno verso il centro della distribuzione sferica, riesce ad attraversare la sfera se la sua velocità iniziale ha un valore qualunque maggiore di v_0 (e la conservazione dell'energia mostra che $v_0^2 = 2qE_0R/m$). La stessa particella viene lanciata, da fuori, con velocità di modulo v_0 in modo che nel punto di ingresso la direzione sia ruotata di 45° rispetto a quella radiale; la particella raggiunge una distanza minima dal centro della distribuzione ($r_{\min}$) per poi uscire di nuovo all'esterno.

1. Spiegare perchè la traiettoria della particella è certamente una curva piana.
2. Scrivere l'equazione che dà il valore di $r_{\min}$ e risolverla in termini della variabile $z = r/R$ con un'opportuna tecnica numerica e con l'approssimazione dell' 1%.

Problema P.2 (Potenziale in un cubo (200 More Physics Puzzling Problems 141)). Considera un cubo con densità di carica volumica uniforme ρ . Prendendo lo 0 del potenziale all'infinito ($V(\infty) = 0$) trova il rapporto fra il potenziale al centro del cubo e quello su uno dei vertici.

Problema P.3 (Esplosione Coulombiana). Una nube sferica uniformemente carica di raggio R e carica totale Q inizia a espandersi al tempo $t = 0$ a causa della repulsione coulombiana. Mostrare che se per due particelle vale $r_1(0) < r_2(0)$ allora varrà $r_1(t) < r_2(t)$ sempre (confronta la figura 12). Trovare inoltre l'equazione differenziale del moto e dimostrare che la densità di carica rimane uniforme durante l'espansione.

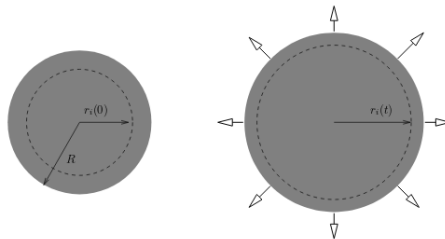


Figura 12: esplosione coulombiana.

Energia - Conduttori - Cariche immagine

Problema P.4 (Cariche immagine). Trovare l'espressione del potenziale e della carica superficiale nei seguenti casi:

1. Una carica q è posta in posizione $(d, 0, 0)$ davanti a un conduttore la cui superficie coincide in parte con il piano yz ma che presenta una sporgenza semisferica centrata nell'origine e di raggio $a < d$. E se la carica fosse in posizione generica $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con $\bar{x} > 0$ e $\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} > a$
2. Una carica q è posta in posizione $(a, b, 0)$ con $a, b > 0$ ed è presente un conduttore nella regione di spazio $x < 0 \vee y < 0$.
E se invece il conduttore fosse in $x < 0 \wedge y < 0$?

3. Usando ora un sistema di coordinate cilindriche, studiare il sistema il cui è presente un conduttore nella regione di spazio $\theta \in [\alpha, 2\pi]$ con $\alpha = \pi/2n$ per qualche $n \in \mathbb{N}^+$ e una carica q in posizione $(r, \alpha/2, z = 0)$. Studiare lo stesso sistema di prima dove però q è in posizione $(r, \bar{\theta}, z = 0)$ con $\bar{\theta} \in [0, \alpha]$ qualunque²⁵.
4. Due cariche q sono poste rispettivamente in posizione $(a, b, 0)$ e in posizione $(-a, -b, 0)$ con $a, b > 0$ ed è presente un conduttore (messo a terra) nella regione di spazio $-d < x < d$ (ovviamente con $d < a$)

Problema P.5 (Sfere conduttrici nello spazio). Due sfere conduttrici di raggio a distano $d \gg a$ l'una dall'altra. Su entrambe le sfere è presente una carica di ugual modulo Q ma segno opposto. Calcolare al primo ordine in a/d la forza di interazione elettrostatica.

Problema P.6 (Cilindri conduttori nello spazio). Due cilindri infiniti conduttori di raggio R sono posti in modo tale da avere gli assi paralleli e distanti d l'uno dall'altro (ovviamente con $d > 2R$). Sapendo che la differenza di potenziale tra di essi è V_0 , calcolare la forza di interazione elettrostatica (per unità di lunghezza).

[*Hint*: può essere utile dimostrare che, chiamate r ed r' le distanze di un punto P da due punti fissati nel piano, il luogo dei punti per cui $r/r' = K$ con K una costante arbitraria, è una circonferenza.]

Problema P.7 (Facciamo scontrare palline!). Si ponga una carica q e massa m ferma a distanza d da un semispazio conduttore. Calcolare il tempo che impiega a collidere con il piano.

Considera ora tre piccole palline caricate positivamente che giacciono una ad ogni vertice di un triangolo. Le loro masse sono m_1 , m_2 e m_3 e le loro cariche sono rispettivamente Q_1 , Q_2 e Q_3 . Quando le perle vengono rilasciate dal riposo, ognuna si muove lungo una diversa linea retta (il tutto si svolge nel vuoto e si possono trascurare gli effetti gravitazionali). Quali condizioni speciali devono essere soddisfatte affinché ciò accada? Trova gli angoli del triangolo formato dalle perle, se i rapporti carica-massa delle tre palline sono nella proporzione:

$$\frac{Q_1}{m_1} : \frac{Q_2}{m_2} : \frac{Q_3}{m_3} = 1 : 2 : 3$$

Problema P.8 (L'attrazione dell'induzione elettrostatica (Senigallia 2013 P2)). Una sferetta di massa m possiede una carica q ed è appesa ad un lungo filo. Se si dispone la sferetta vicino ad una lastra conduttrice scarica,

²⁵Hint: si osservi cosa succede per $\alpha' = 2\alpha$.

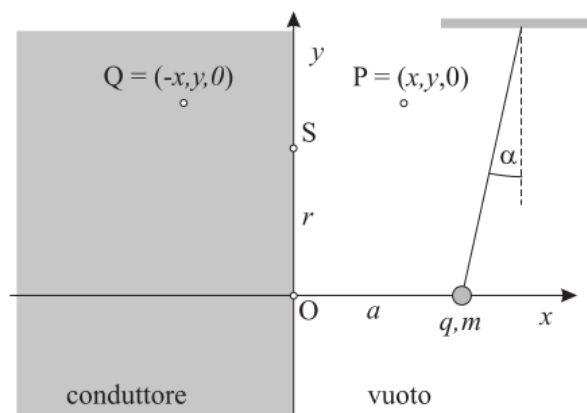


Figura 13: *Senigallia 2013, P3*: una carica davanti ad un piano conduttore.

si osserva che la sferetta viene attratta dalla lastra; questo accade perché, per induzione, sulla superficie della lastra si forma una distribuzione di cariche di segno opposto a q . Si supponga che, all'equilibrio, la sferetta si trovi ad una distanza a dalla lastra e che il filo formi un angolo α con la verticale. Rispetto alla distanza a tra carica e lastra le dimensioni della sferetta sono molto piccole cosicché la carica q può essere sempre considerata **puntiforme**; inoltre le dimensioni della lastra, molto maggiori di a , possono essere considerate **infinite**. Si può quindi considerare un piano (di equazione $x = 0$) come superficie di separazione tra un mezzo conduttore nel semispazio $x < 0$ e il vuoto nel semispazio $x > 0$, entro cui si trova la sferetta. Nella figura è indicato anche il sistema di coordinate consigliato, in modo che la sferetta si trovi sull'asse $\hat{x}$, quindi nel punto di coordinate $(a, 0, 0)$, che l'asse $\hat{y}$ sia verticale e orientato verso l'alto e l'asse $\hat{z}$ perpendicolare al piano della figura ed uscente. Relativamente alla distribuzione delle cariche indotte, sarà sufficiente studiare la situazione lungo l'asse $y > 0$. Infatti, per simmetria, la densità di carica, σ , dipenderà solo dalla distanza r del punto considerato dall'origine ($r^2 = y^2 + z^2$).

1. Per determinare il campo elettrostatico in un generico punto $P = (x, y, 0)$ nel semispazio vuoto $x > 0$ si consideri inizialmente il punto $Q = (-x, y, 0)$ all'interno del materiale conduttore e simmetrico di P rispetto al piano di separazione tra i due mezzi. Si scrivano il vettore campo e.s. $\mathbf{E}(Q)$ prodotto da tutte le cariche presenti e il vettore $\mathbf{E}_1(Q)$ prodotto dalle sole cariche indotte che si formano sulla superficie della lastra (piano $x = 0$).
2. Si scriva adesso il campo e.s. $\mathbf{E}_1$ (prodotto dalle sole cariche indotte presenti sulla superficie della lastra) nel punto P nel semispazio $x > 0$,

mostrando che, limitatamente a questo semispazio, il campo $\mathbf{E}_1$ è identico a quello generato da una singola carica puntiforme q di cui si chiede il valore e la posizione.

3. A titolo d'esempio, si scriva il campo e.s. (totale) $\mathbf{E}$, nel punto $A = (a, a, 0)$.
4. Si scriva il campo e.s. (totale) $\mathbf{E}$, in prossimità del punto $S = (0, r, 0)$ nel semispazio vuoto, cioè in un punto vicinissimo alla superficie della lastra, a distanza r dall'origine O ; in altri termini, il limite dell'espressione del campo per $x \rightarrow 0^+$, $y = r$, $z = 0$.
5. Si calcoli la densità di carica indotta $\sigma(r)$ nel punto S e si dica quanto vale nel punto della superficie della lastra dove il suo modulo è massimo.
6. Si calcoli il valore della carica q in funzione di m , a ed α .
7. Si calcoli la quantità totale di carica indotta sul piano conduttore.

Problema P.9 (Carica immagine in un oggetto metallico (IPhO 2010 P1)).

Una particella puntiforme di carica elettrica q è posizionata nelle vicinanze di una superficie sferica metallica collegata elettricamente a terra e di raggio R . Di conseguenza, sulla sfera viene indotta una distribuzione superficiale di carica. Riuscire a calcolare il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico prodotti dalla distribuzione della carica superficiale è un compito assai improbo. Tuttavia tale calcolo può essere considerevolmente semplificato utilizzando un metodo matematico chiamato metodo delle immagini. In questo metodo il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico prodotti dalla carica distribuita sulla sfera sono equivalenti a quelli prodotti da una singola carica puntiforme q' posta dentro la sfera (non devi dimostrare ciò).

Nota: Il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico di questa carica immagine q' riproducono il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico solamente all'esterno della sfera (compresa la sua superficie).

- **Parte 1 – La carica immagine.** Per la simmetria del sistema la carica q' si trova sulla linea congiungente la carica puntiforme q e il centro della sfera (confronta la figura 14).

1. Qual è il valore del potenziale elettrostatico della sfera? (0.3 punti)
2. Esprimi q' e la distanza d' della carica q' dal centro della sfera, in funzione di q , d e R . (1.9 punti)
3. Trova l'espressione dell'intensità della forza che agisce sulla carica q . Si tratta di una forza repulsiva? (0.5 punti)

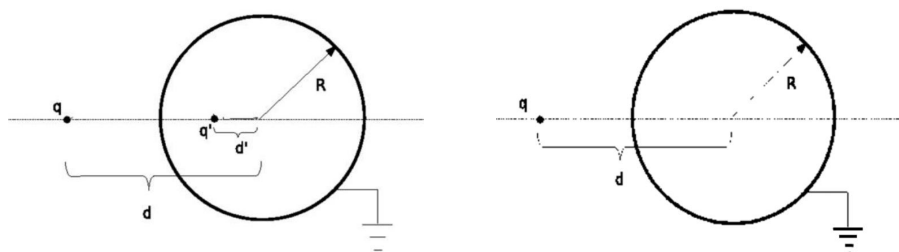


Figura 14: Sfera messa a terra

- **Parte 2– Schermaggio di un campo elettrostatico.** Considera una particella puntiforme di carica q posizionata a distanza d dal centro di una sfera metallica di raggio R collegata elettricamente a terra (confronta la figura 15). Siamo interessati a come la presenza della sfera

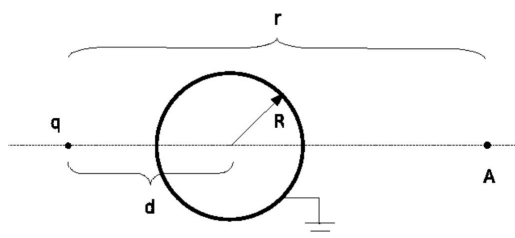


Figura 15: Schermo alla carica.

metallica collegata elettricamente a terra modifica il campo elettrico in un punto A posizionato sul lato opposto della sfera. Il punto A è sulla retta che unisce la carica q al centro della sfera; la distanza di A dalla carica puntiforme q è r .

1. Trova il vettore campo elettrico totale nel punto A . (0.6 punti)
 2. Se la distanza r è molto maggiore di d , trova l'espressione approssimata per il campo elettrico nel punto A utilizzando l'approssimazione $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$, dove $a \ll 1$. (0.6 punti)
 3. A che limite deve tendere d perché la sfera metallica collegata elettricamente a terra schermi completamente il campo generato dalla carica q , in modo che il campo elettrico totale in A sia esattamente nullo? (0.3 punti)
- **Parte 3– Piccole oscillazioni nel campo elettrico generato dalla sfera metallica.** Una particella puntiforme di carica q e massa m è legata

a un filo di lunghezza L che ha l'altra estremità fissata a un muro nelle vicinanze della sfera metallica collegata elettricamente a terra (confronta la figura 16). Nelle tue considerazioni, ignora tutti gli effetti

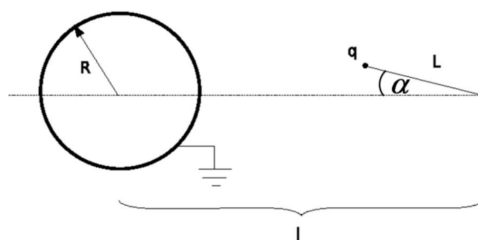


Figura 16: Oscillazioni della carica.

elettrostatici prodotti dal muro. La particella puntiforme si comporta come un pendolo matematico. Il punto al quale il filo è fissato al muro si trova a distanza l dal centro della sfera. Trascura gli effetti della gravità.

1. Trova il modulo della forza elettrica che agisce sulla carica puntiforme q per un certo angolo α e indicane chiaramente la direzione in un disegno (0.8 punti)
2. Per questa forza, esprimi la componente perpendicolare al filo in funzione di l , L , R , q e α . (0.8 punti)
3. Trova la frequenza delle piccole oscillazioni del pendolo. (1.0 punti)

- **Parte 4– L'energia elettrostatica del sistema.** Data una distribuzione di cariche elettriche, è importante calcolare l'energia elettrostatica del sistema. Nel nostro problema, c'è interazione elettrostatica tra la carica q esterna alla sfera e le cariche indotte sulla superficie della sfera ed è presente un'interazione elettrostatica anche tra le cariche indotte sulla sfera (fai riferimento alla seconda delle figure 14). In funzione della carica q , del raggio R della sfera e della distanza d determina le seguenti energie elettrostatiche:

1. l'energia elettrostatica dovuta all'interazione tra la carica q e le cariche indotte sulla sfera; (1.0 punti)
2. l'energia elettrostatica dovuta all'interazione tra le cariche indotte sulla sfera; (1.2 punti)
3. l'energia elettrostatica totale del sistema dovuta all'interazione. (1.0 punti)

Hints

1.

$$\int_d^\infty \frac{x \, dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}$$

2. Una famiglia di N cariche puntiformi q_i posizionate nei punti $\mathbf{r}_i$, l'energia elettrostatica è la semisomma su tutte le coppie di cariche diverse:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Problema P.10 (Aureola bella carica (200 More Physics Puzzling Problems 151)). Considero un anello e una sfera conduttori di raggi rispettivamente R e r . L'anello è caricato in modo che al suo centro il potenziale sia V_0 , mentre la sfera è messa a terra. Ora avvicino l'anello alla sfera in modo tale che il piano in cui giace l'anello sia tangente nel centro dell'anello alla sfera. Calcola la carica totale indotta sulla sfera.

Problema P.11 (Methane is so mundane (200 More Physics Puzzling Problems 152)). Quattro piccole sfere identiche conduttrici A , B , C e D sono posizionate ai vertici di un tetraedro regolare. Se metto q su A questa ha potenziale V . La sfera A ha potenziale V anche se metto $3q/4$ su A e su una delle altre sfere.

1. Calcola la carica che va messa su A e altre due sfere per avere nuovamente il potenziale di A uguale a V (nel senso che su ciascuna delle tre sfere ci deve essere la stessa carica).
2. Stessa domanda di sopra ma utilizzando tutte le sfere.

Problema P.12 (Carica nel condensatore (200 More Physics Puzzling Problems 146)). Considera un condensatore, con le armature messe a terra e distanti d fra loro, e una carica puntiforme q posta a distanza d_1 e d_2 dalle armature. Sia $\delta = d_1 - d/2$, trova la forza sulla carica in funzione di Q , δ e d .

Dipolo

Problema P.13 (Rutherford era un grand'uomo (IPHO 2011 - 3)). Uno ione di massa m e carica Q , inizialmente molto lontano, si muove con velocità iniziale non relativistica v_0 verso un atomo neutro di massa $M \gg m$ e polarizzabilità α . Il parametro di impatto è b come illustrato in figura 17.

L'atomo è istantaneamente polarizzato (dunque acquista momento di dipolo $\mathbf{p}$ dal campo elettrico dello ione che si avvicina. In questo problema si trascuri qualsiasi perdita di energia per radiazione.

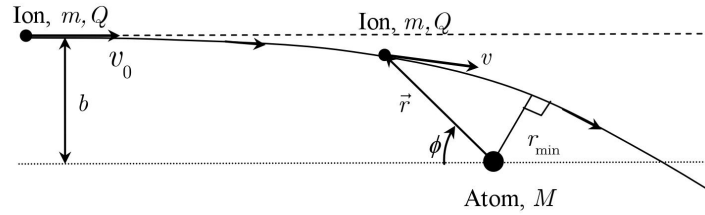


Figura 17: Problema della deviazione coulombiana di un atomo, tratto dalle IPhO 2011.

1. Calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}_p$ ad una distanza r dal dipolo elettrico ideale $\mathbf{p}$ situato nell'origine O , lungo la direzione individuata da $\mathbf{p}$ nella Figura 2.
2. Trovare l'espressione della forza $\mathbf{f}$ che l'atomo polarizzato esercita sull'ione. Dimostrare che la forza è attrattiva indipendentemente dalla carica dello ione.
3. Qual è l'energia potenziale elettrica dell'interazione ione-atomo in funzione di α , Q e r ?
4. Trovare l'espressione di $r_{\min}$, cioè la distanza di massimo avvicinamento (vedi Figura 1).
5. Se il parametro d'urto b è minore di un valore critico b_c , lo ione cadrà sull'atomo descrivendo un percorso a spirale. In tale caso, lo ione sarà neutralizzato e l'atomo, invece, si caricherà. Questo processo è conosciuto con il nome di interazione di "scambio di carica". Qual è l'area della sezione d'urto, $A = \pi b_c^2$, dello "scambio di carica" della collisione tra atomo e ione?

Problema P.14 (Dipolo di fronte ad un dielettrico). Pongo nella regione $x < 0$ un dielettrico con permeabilità relativa ε_r , il resto dello spazio è vuoto.

1. Considera una carica puntiforme q a distanza d dal dielettrico. Trova il campo in tutto lo spazio.
2. Considera un dipolo (inclinato di θ rispetto all'orizzontale) posto a distanza d dal dielettrico. Trova il campo in tutto lo spazio.

Problema P.15 (4.31 Griffiths). Su una circonferenza sono presenti due cariche che formano un dipolo, che sono vincolate a muoversi su di essa e nell'istante $t = 0$ hanno velocità parallela a $\mathbf{p}$ e concorde in verso. Al centro di questa c'è invece una carica Q (confronta la figura 18). Trova la forza sul dipolo e spiega qualitativamente perché questo non può essere un moto perpetuo.

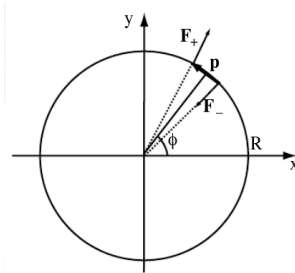


Figura 18: esercizio 4.31 del Griffiths [Gri17].

Problema P.16 (Gas Reali). Due atomi polarizzabili si trovano ad una distanza d , grande rispetto al loro raggio. In assenza di campi esterni, un atomo all'equilibrio non ha dipolo elettrico, ma in effetti è soggetto a piccole fluttuazioni casuali che corrispondono a valori istantanei non nulli del dipolo elettrico, la cui media è zero. Si discuta l'effetto di tali fluttuazioni sulla media temporale della forza risultante netta tra i due atomi, si determini se essa risulta attrattiva o repulsiva e come dipende da d .

Problema P.17. Uno ione di carica $+Q$ si trova ad una distanza macroscopica R da un'atomo di polarizzabilità α . Si determini la forza $\mathbf{F}$ di interazione elettrostatica tra ione e atomo. Si discuta come varia la situazione in presenza di un piano perfettamente conduttore, parallelo alla congiungente ione-atomo e distante h da questa, dove h è molto minore di R (ma comunque macroscopica).

Dielettrici

Problema P.18 (Sfera polarizzata). Considerate una sfera di raggio R con polarizzazione P uniforme.

1. Trova il campo elettrico che produce all'interno della sfera.
2. Si rimuove ora dalla sfera la sua porzione contenuta in un cilindro di raggio a , lunghezza $2R$ con $a \ll R$ e asse coincidente con un diametro della sfera. Qual'è il campo nella cavità? (Potete arrivare all'ordine 0 o 1 in a/h a seconda di quale metodo usate).
3. Ora rimuovo dalla sfera la sua intersezione con un disco di spessore h e raggio R con $h \ll R$, che abbia il diametro coincidente col diametro della sfera. Calcola il campo nella cavità.

Problema P.19. Una sfera di raggio R è formata da ioni ed elettroni con carica $+Ze$ ed $-e$ rispettivamente, e densità numerica uniforme n_i e n_e . La carica totale è zero. Supponiamo che tutti gli elettroni siano si sono spostati

di δ rispetto agli ioni, con $\delta \ll R$, e che le sfere ioniche ed elettroniche mantengano la loro forma.

1. Trova il campo elettrostatico nella regione in cui gli ioni e gli elettroni si sovrappongono.
2. Trova il campo elettrostatico nella regione al di fuori di entrambe le sfere.
3. Assumendo che δ sia abbastanza piccolo da assumere la densità di carica distribuita sulla superficie di una sfera, trovare la densità di carica superficiale.

Il campo esterno è ora rimosso in un tempo trascurabile.

1. Trovare l'energia elettrostatica della sfera polarizzata in funzione di δ .
2. Senza il campo esterno, gli elettroni iniziano a oscillare attorno alle loro posizioni di equilibrio. Trova la frequenza di oscillazione

Problema P.20 (Condensatori e dielettrici). Un condensatore piano avente armature quadrate di lato a poste a distanza $h \ll a$ è riempito da due lastre di materiali dielettrici differenti, aventi permeabilità ε_1 e ε_2 con $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. La superficie di contatto tra le due lastre si trova in posizione x . Sulle due armature si trovano le cariche $\pm Q$ rispettivamente.

1. Calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore, trascurando gli effetti di bordo.
2. Determinare la forza che tende a spostare le due lastre di dielettrico.
3. Ripetere il calcolo per la superficie di separazione tra i dielettrici parallela alle armature del condensatore e a metà del suo spessore.

Problema P.21 (Capacitors suck! (IPHO 1972 P3)). Un condensatore piano con armature rettangolari di altezza H è fissato in posizione verticale e produce inizialmente un campo elettrico E . Alla base è in contatto con un liquido dielettrico di permeabilità relativa ε_r e densità ρ . Assumi che la distanza tra le armature sia molto minore delle dimensioni lineari delle stesse. Trascurando effetti di capillarità, trova l'altezza dalla base del condensatore h di cui il liquido è risalito nella condizione di equilibrio.

Problema P.22 (Dielettrico Artificiale). Consideriamo un liquido isolante con suscettività elettrica trascurabile nel quale vengono buttate tante piccole palline metalliche. Ognuna ha raggio a e la densità di palline per unità di

volume è n . In approssimazione di campo medio, ovvero nel caso in cui il campo creato da una particella nella posizione di una vicina è trascurabile rispetto al campo totale presente, trovare la suscettività del dielettrico costruito artificialmente. Trovare ora una condizione sotto la quale vale nel nostro caso l'approssimazione di campo medio assunta al punto precedente.

Problema P.23. Una lastra quadrata dielettrica di spessore h , lato di base $L \gg h$ e permittività ε_r è posta in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}_0$. Sia θ l'angolo tra $\mathbf{E}_0$ e la direzione perpendicolare alla base della lastra.

1. Trovare il campo elettrico all'interno della lastra e l'angolo tra questo e la direzione perpendicolare alla superficie della lastra.
2. Trovare le densità di carica di polarizzazione.

Problema P.24. Le piastre di un condensatore piano sono mantenute ad una differenza di potenziale costante ΔV . All'interno del condensatore ci sono due strati, un primo strato di spessore d_1 riempito con un gas di suscettibilità dielettrica trascurabile ($\chi = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$), e un secondo strato di spessore d_2 riempito con materiale dielettrico con permittività $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ (con $\varepsilon_r > 1$). Si trascurino gli effetti di bordo.

1. Trovare il campo elettrico all'interno del condensatore.

Al tempo $t = 0$, all'interno del primo strato avviene una scarica di ionizzazione e il gas diventa istantaneamente conduttore. Si assuma che il gas ionizzato si possa modellizzare per $t > 0$ come un Conduttore ohmico di resistività costante ed uniforme ρ .

2. Dopo un tempo sufficientemente lungo si osserva che la corrente non scorre più nel gas, e il sistema è in uno stato stazionario (cioè tutte le grandezze fisiche sono costanti). In questa fase, trovare il campo elettrico nel condensatore e la densità superficiale della densità di carica libera tra i due strati.
3. Trovare il comportamento temporale del campo nello stadio transitorio ($t > 0$) e il tempo tipico necessario affinché il sistema raggiunga una condizione di stabilità

Problema P.25. Una lastra conduttrice viene posta sulla superficie di un materiale dielettrico con permittività ε che riempie il semispazio $z < 0$. Sia S l'area della superficie della lastra e h lo spessore, con $h \ll \sqrt{S}$. La lastra ha carica libera totale Q . Trascurando gli effetti di bordo, si trovi:

1. Le densità di carica libere sulla superficie superiore (σ_1) e inferiore (σ_2) della lastra, la densità di carica di polarizzazione (σ_p) sulla superficie del dielettrico, e il campo elettrico nelle regioni sopra ($z > h$) e sotto ($z < 0$) la lastra;
2. La forza sulla lastra.

Polarizzabilità non isotropa

Problema P.26. Si consideri una molecola fissa nello spazio formata da due atomi alla Thomson uguali (di raggio R e polarizzabilità α_0), mantenuti a distanza fissa D . Calcolare la polarizzabilità della molecola.

Problema P.27 (Momento torcente su condensatore). All'interno di un condensatore carico con carica Q ad armature piane e parallele (quadrato, con lato L molto maggiore della loro distanza d), è posta parallelamente alle armature e con esse allineata una lastra di dielettrico (di base quadrata di lato L e spessore $h < d$). La costante dielettrica della lastra è uniassiale ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$, $\varepsilon_{i \neq j} = 0$) e il suo asse ottico z forma un angolo θ con la normale alle armature del condensatore. Si calcolino la forza e la coppia torcente risultanti sulla lastra.

Altro

Problema P.28 (Gocciolatore di Kelvin (IPhO 2012 P2)). Per la soluzione di questo problema possono essere utili le seguenti informazioni sulla tensione superficiale. Per le molecole di un liquido, le posizioni all'interfaccia liquido-aria sono meno favorevoli rispetto alle posizioni all'interno del liquido. Perciò a questa interfaccia è associata la cosiddetta energia superficiale $U = \sigma S$ dove S è l'area della superficie dell'interfaccia e σ è la tensione superficiale del liquido. Inoltre due parti adiacenti della superficie del liquido si attirano reciprocamente con una forza $F = \sigma l$ dove l è la lunghezza del bordo che separa le due parti. Un lungo capillare metallico con diametro interno d è disposto verticalmente; l'acqua sgocciola lentamente dal forellino della sua estremità inferiore, come puoi vedere in figura. Si può considerare l'acqua come un conduttore elettrico; la sua tensione superficiale è σ e la sua densità è ρ . Assumi sempre che $d \ll r$. Con r si indica il raggio di una goccia che pende dal forellino e che cresce lentamente nel tempo fino a quando si separa dal capillare a causa dell'accelerazione di gravità g .

Parte A. Capillare singolo (4 punti)

1. (1.2 punti) Trova il raggio $r_{\max}$ di una goccia subito prima che si stacchi dal capillare.

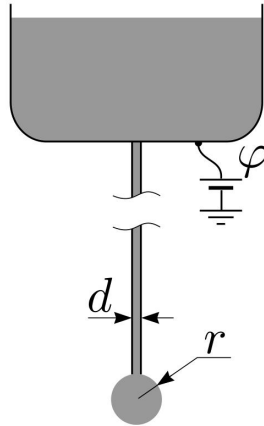


Figura 19: Gocciolatore di Kelvin, parte A.

2. (1.2 punti) Sia ϕ il potenziale elettrostatico del capillare, avendo posto a zero il potenziale elettrico a grande distanza. Trova la carica Q quando il raggio della goccia è r .
3. (1.6 punti) In questa domanda, assumi che r sia mantenuto costante e che ϕ venga aumentato lentamente. Se la pressione idrostatica al suo interno diventa più piccola della pressione atmosferica allora la goccia diventa instabile e si rompe in più parti. Trova il potenziale critico $\phi_{\max}$ a cui accadrà ciò.

Parte B. Due capillari (4 punti) Un apparato chiamato “Gocciolatore di Kelvin” consiste di due capillari (identici a quello descritto nella Parte A), collegati attraverso una giunzione a T , come in figura. Le estremità di entrambi i capillari sono al centro di due elettrodi cilindrici (con altezza L e diametro D , $L \gg D \gg r$); da entrambi i capillari cadono n gocce per unità di tempo. Le gocce cadono da una altezza H all’interno di recipienti conduttori posti sotto i forellini, e collegati agli elettrodi come mostrato in figura; gli elettrodi sono connessi attraverso una capacità C . Non c’è alcuna carica netta sul sistema dei recipienti e degli elettrodi. Si noti che il contenitore superiore dell’acqua è posto a terra. La prima goccia a cadere avrà una carica molto piccola che provocherà uno sbilanciamento tra le due parti del sistema e di conseguenza una piccola separazione di carica attraverso il condensatore.

1. (1.2 punti) Esprimi il modulo della carica Q_0 delle gocce che si staccano dai capillari nell’istante in cui la carica nel condensatore è q in funzione di $r_{\max}$ (della Parte A1). Trascura gli effetti descritti nella Parte A3.

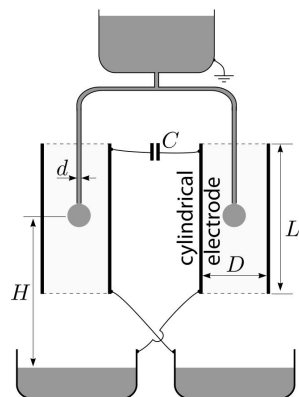


Figura 20: Gocciolatore di kelvin, parte B.

2. (1.5 punti) Trova la dipendenza di q dal tempo t approssimandola con una funzione continua $q(t)$ e assumendo che $q(0) = q_0$.
3. (1.3 punti) Il funzionamento del gocciolatore può essere ostacolato dall'effetto mostrato nella Parte A3. Inoltre, la repulsione elettrostatica fra una goccia e il recipiente sottostante fa sì che la differenza di potenziale fra i due elettrodi abbia un limite superiore $U_{\max}$; trova $U_{\max}$.

Soluzioni

Soluzione S.1 (problema P.2). Sia Q la carica totale del cubo e l il suo lato. Costruiamo il cubo originale sovrapponendo 8 cubi che hanno uno spigolo $l/2$ e carica totale q . Indico con $V_c(a, p)$ e $V_v(a, p)$ il potenziale al centro e su un vertice in un cubo di lato a e carica totale p (con a e p generici). Dal principio di sovrapposizione allora ottengo $V_c(l, Q) = 8V_v(\frac{l}{2}, q)$. Se la densità di carica ρ è uniforme la carica q in uno dei cubi piccoli sarà $q = \rho(\frac{l}{2})^3 = Q/8$. Per linearità il potenziale può dipendere solo linearmente dalla carica, allora per analisi dimensionale troviamo che $V_v(a, p) = kp/a$, da cui $V_v(l, Q) = kQ/l = \frac{4kq}{l/2} = 4V_v(\frac{l}{2}, q)$. Il risultato cercato è $\frac{V_c(l, Q)}{V_v(l, Q)} = 2$.

Soluzione S.2 (Problema P.3). Calcoliamo il campo elettrico. Notando la simmetria radiale si ha $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$. Dove il valore di $E(r)$ si può trovare con il teorema di Gauss (scegliendo come superficie una sfera centrata nell'origine di raggio r): $4\pi r^2 E(r) = Q_{int}(r)/\varepsilon_0$, dove $Q_{int} = Q \cdot r/R$ per $r < R$ e $Q_{int}(r) = Q$ per $r > R$. Otteniamo, infine:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3} & (r < R) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} & (r > R) \end{cases}$$

Al tempo $t = 0$ il campo elettrico all'interno della nube sferica aumenta con r . Così, le particelle "esterne" situate a r più grandi avranno un'accelerazione più alta che le particelle "interne" situate a r più piccole, e dopo un intervallo di tempo infinitesimale le particelle "esterne" avranno una velocità più elevata (supponendo che tutte le particelle abbiano velocità nulla a $t = 0$) e non saranno superate dalle "interne". Inoltre, l'accelerazione ha anche una simmetria radiale e quindi qualsiasi strato sferico conserva la sua forma. Questi argomenti possono essere iterati per qualsiasi tempo successivo, in modo che le particelle non si superino l'un l'altra e la simmetria sferica sia preservata.

Poiché le particelle non si capovolgono tra loro, la carica all'interno di una sfera di raggio $r_i(t)$, cioè la superficie delimitata dallo strato di particelle che a $t = 0$ si trovavano a $r = r_{i0} = r_i(t = 0)$ ²⁶, è una costante. Quindi, applicando il teorema di Gauss alla superficie sferica di tale raggio, si ha:

$$4\pi r_i^2 E(r_i) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \left(\frac{r_{i0}}{R}\right)^3$$

²⁶Sostanzialmente è come se dipingessimo di rosso le cariche che all'istante $t = 0$ erano a un raggio fissato r_{i0} e a ogni istante temporale guardassimo la sfera delimitata dalle particelle rosse in quel momento

Da cui:

$$m \frac{d^2 r_i}{dt} = qE(r_i) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \left(\frac{r_{i0}}{R}\right)^3$$

La forza sulle particelle, e quindi la loro accelerazione, aumenta con r_{i0} , il che è coerente con l'ipotesi del "non sorpasso".

Introducendo ora una nuova variabile $x(t) = r_i(t)/r_{i0}$, l'equazione differenziale appena trovata può essere riscritta come:

$$m \frac{d^2 x}{dt} = qE(r_i) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3 x^2}$$

Dove r_{i0} non compare più; questo significa che la soluzione $x(t)$ con $x(0) = 1$ descrive il moto di tutti gli strati. Come conseguenza si ha la definitiva conferma dell'ipotesi che se per due strati $r_2(0) > r_1(0)$, allora vale $r_2(t) > r_1(t) \forall t$.

Infine il numero di particelle contenute tra gli strati 1 e 2 è costante ed è dato da:

$$\delta N_{12} = N \left[\left(\frac{r_2(0)}{R} \right)^3 - \left(\frac{r_1(0)}{R} \right)^3 \right]$$

E quindi la densità tra i due strati al tempo t è data da:

$$n(t) = \frac{\delta N_{12}}{(4\pi/3)[r_2^3(t) - r_1^3(t)]} = \frac{(N/r)[r_2^3(0) - r_1^3(0)]}{(4\pi/3)[r_2^3(t) - r_1^3(t)]x^3(t)} = \frac{n(0)}{x^3(t)}$$

Con $n(0) = N/(4\pi R^3/3)$ la densità iniziale. Questo risultato non dipende dalla scelta particolare dei due strati, quindi la densità è uniforme a qualsiasi t e diminuisce con il tempo come $x^{-3}(t)$.

Soluzione S.3 (Problema P.4). In tutti i problemi ci limiteremo a trovare la disposizione delle cariche immagine in quanto da lì in poi è un semplice problema di conti. Infatti basta usare il principio di sovrapposizione per avere $E = \sum E_i$ con E_i sono i campi delle cariche puntiformi q_i in posizioni x_i (immagini e reale) con $E_i(\mathbf{x}) = \frac{kq_i \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2}$ e $\sigma = \epsilon_0 E$.

1. L'idea di base è di provare a mettere insieme i due risultati che abbiamo ottenuto per i problemi di cariche immagini con solo il piano e con solo la sfera (immaginando di continuare la semisfera dentro al conduttore, magari solo tratteggiandola).

Partiamo con il caso facile in cui la carica è posta in posizione $(d, 0, 0)$ e proviamo a mettere solo la carica immagine dovuta alla sfera, ossia $q_1 = -q \cdot \frac{a}{d}$ in posizione $(\frac{a^2}{d}, 0, 0)$ e guardiamo cosa otteniamo: la superficie della sfera (se immaginiamo di continuare la semisfera anche

dentro al conduttore) è effettivamente a terra ma il piano assolutamente no!

Fino ad ora abbiamo considerato solo la presenza della sfera, adesso dimentichiamoci un attimo di questa e consideriamo la sola presenza del piano, mettendo le cariche immagini corrispondenti alle due cariche finora presenti (quella reale e quella immagine q_1 che è anch'essa a destra del piano).

Dobbiamo quindi aggiungere due cariche $q_2 = -q$ in posizione $(-d, 0, 0)$ e $q_3 = -q_1$ in posizione $(\frac{a^2}{d}, 0, 0)$.

Convinciamoci di aver effettivamente ottenuto la soluzione: il piano è a terra in quanto il contributo di q è cancellato dal quello della sua immagine rispetto al piano q_2 mentre quello di q_1 è cancellato da q_3 ; la sfera è a terra in quanto il contributo di q è cancellato dal quello della sua immagine rispetto al piano q_1 mentre quello di q_3 è cancellato da q_2 (qui sto usando il principio di sovrapposizione lineare: divido il sistema fisico come due sistemi ciascuno con solo due cariche e dico che il potenziale totale è la somma dei potenziali nei due casi). Inoltre se avessimo tentato di fare lo stesso giochetto di prima non avremmo comunque ottenuto nulla di fatto: provando a fare la carica immagine di una qualsiasi delle quattro cariche presenti rispetto al piano o alla sfera otterrei solo un'altra delle quattro cariche (in particolare la sfera manda $q \rightarrow q_1$ $q_2 \rightarrow q_3$ e viceversa, mentre il piano manda $q \rightarrow q_2$ $q_1 \rightarrow q_3$ e viceversa).

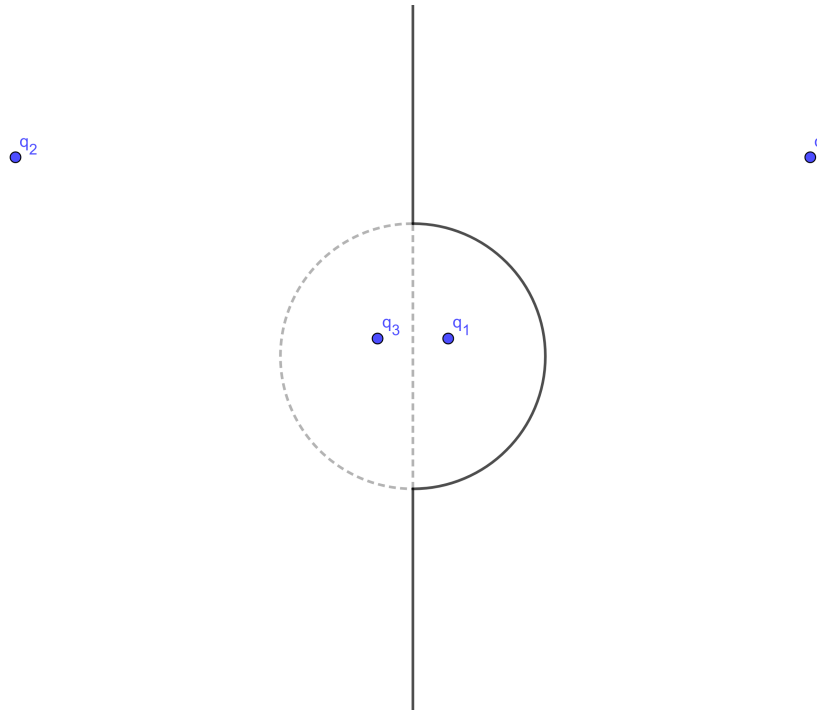
Facciamo ora il caso con la carica in posizione generica. Il concetto è lo stesso: continuare a fare riflessioni e inversioni circolari²⁷ fino a che non ne posso fare più e verificare che ottengo effettivamente la soluzione.

Inizio riflettendo la mia carica rispetto al piano, poi faccio l'inversione circolare di entrambe le cariche rispetto alla sfera. Un rapido controllo mi convince di aver finito.

Una piccola osservazione: in questo caso non ho problemi, ma in teoria dovrei sempre controllare che tutte le cariche immagine siano nella zona conduttrice.

2. Come prima immagino di continuare i due semispazi che delimitano la superficie del conduttore e faccio le cariche immagine della mia carica rispetto ai due piani, ottenendo così $q_1 = q_2 = -q$ rispettivamente in posizioni $(-a, b, 0)$ e $(a, -b, 0)$ e riflettendole ciascuna rispetto all'altro piano (non quello usato per ottenerle a partire dalla carica originale) si

²⁷È semplicemente un modo fancy per chiamare la trasformazione che data una carica mi dice dove si trova la sua carica immagine rispetto alla sfera. [Qui](#) potete trovare qualche informazione in più e convincervi di quanto ho appena detto



ottiene $q_3 = q$ in posizione $(-a, -b, 0)$. Osservando che per ciascun piano esistono due coppie di cariche (diverse per i due piani) in cui il contributo di una carica è annullato da quello dell'altra carica della coppia, ci si convince di aver finito (sempre per principio di sovrapposizione lineare). Consideriamo ora il caso analogo in cui il conduttore occupa solo uno dei quattro quadranti e la carica è posta nel quadrante opposto. Saremmo tentati di fare lo stesso ragionamento di prima e ottenere le stesse quattro cariche disposte a rettangolo. Effettivamente questa soluzione rende la superficie del conduttore equipotenziale, tuttavia avrei due cariche immagine fuori dalla zona conduttrice e quindi è da scartare. Questo è un esempio di problema non risolvibile con questo metodo.

3. Immaginiamo di suddividere lo spazio "a spicchi di torta" ossia inserendo dei piani contenenti l'asse delle z e ciascuno ottenuto da quello precedente ruotandolo di α rispetto all'asse stesso e iterativamente la carica immagine q_{i+1} la si ottiene riflettendo la carica immagine q_i rispetto al piano successivo (osserviamo che questa operazione coincide con una rotazione di un angolo α). Il processo termina grazie all'ipotesi $\frac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{N}^+$ inoltre l'ipotesi che il denominatore sia pari serve perché ogni riflessione cambia il segno della carica e voglio che la prima carica

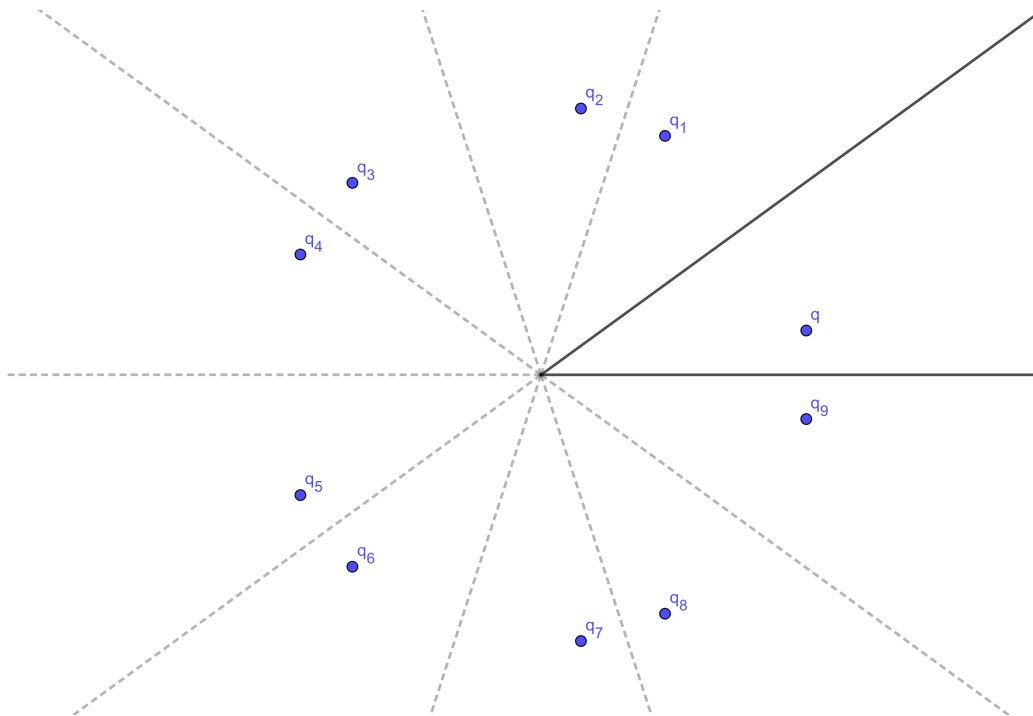


immagine in senso orario abbia lo stesso segno della prima in senso antiorario (entrambi opposti alla carica reale perché ottenute con una sola riflessione a partire dalla reale, ossia rispetto ai piani effettivamente esistenti).

Ancora una volta ci convinciamo di aver ottenuto il risultato perché i contributi delle cariche si cancellano a vicenda.

Lo stesso metodo vale anche quando la carica è posta in una posizione generica (ma in questo caso l'ipotesi sul denominatore serve anche per non avere più di una carica per ogni "fetta" di spazio)

4. Il primo istinto porterebbe a riflettere le cariche rispetto ai piani e continuare questo processo con le cariche immagini. Tuttavia, questa soluzione è problematica per vari motivi tra cui il fatto che dovrei calcolare il campo generato da un numero infinito di cariche puntiformi (che oltre a essere difficile, non so neanche se converge) e tutte nella zona fuori dal conduttore. Proviamo a guardare al problema come alla sovrapposizione di due casi più semplici: un semispazio conduttore nella zona $x \leq d$ davanti al quale c'è una carica q in posizione $(a, b, 0)$ e il problema simmetrico con il conduttore in $x \geq -d$ e carica q in $(-a, -b, 0)$.

Come abbiamo già visto, le soluzioni sono rispettivamente:

$$V_1 = \begin{cases} kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a-2d)^2 + (y-b)^2 + z^2}} \right) & \text{per } x \geq d \\ 0 & \text{per } x < d \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{cases} kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a+2d)^2 + (y+b)^2 + z^2}} \right) & \text{per } x \leq -d \\ 0 & \text{per } x > -d \end{cases}$$

che sommate danno come soluzione al problema originale:

$$V = \begin{cases} kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a-2d)^2 + (y-b)^2 + z^2}} \right) & \text{per } x \geq d \\ 0 & \text{per } -d < x < d \\ kq \left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a+2d)^2 + (y+b)^2 + z^2}} \right) & \text{per } x \leq -d \end{cases}$$

Questa soluzione è valida perché soddisfa sia le leggi di Maxwell che le condizioni dati dalla presenza dei conduttori (che in realtà sono solo una conseguenza di Maxwell). Chiariamo qualche dubbio che potrebbe sorgere: perché la soluzione è legale anche se quando guardo il sistema nel complesso mi sembra ci siano delle cariche immagine in $(-a + 2d, b, 0)$ e $(a - 2d, -b, 0)$, ossia fuori dal conduttore? In realtà quando guardando l'espressione del potenziale noto che l'effetto della prima carica immagine "si sente" solo nella regione $x > d$ in cui però non c'è la carica stessa e viceversa l'effetto della seconda carica immagine "si sente" solo nella regione $x < -d$. Quindi non c'è nessun punto in cui facendo Gauss posso ottenere un assurdo (si veda pag TOT). Detto in un altro modo, la densità di carica che c'è su una delle due superfici schermo completamente la carica e quindi l'altra superficie è ignara della sua presenza.

Soluzione S.4 (Problema P.5). Risolveremo il problema iterativamente, considerando all'inizio una soluzione grezza e migliorandone via via il grado di approssimazione. Inoltre, vale l'assunzione che la forza che una sfera esercita sull'altra all'ordine di approssimazione scelto è pari alla forza totale che agisce sulle cariche immagine posta dentro la sfera che subisce la forza, come sarà spiegato meglio in fondo a questa soluzione. Di seguito si farà riferimento alla figura (22).

Nell'approssimazione all'ordine costante, le due sfere possono essere approssimate come due cariche $+Q$ e $-Q$ centrate nei centri delle rispettive

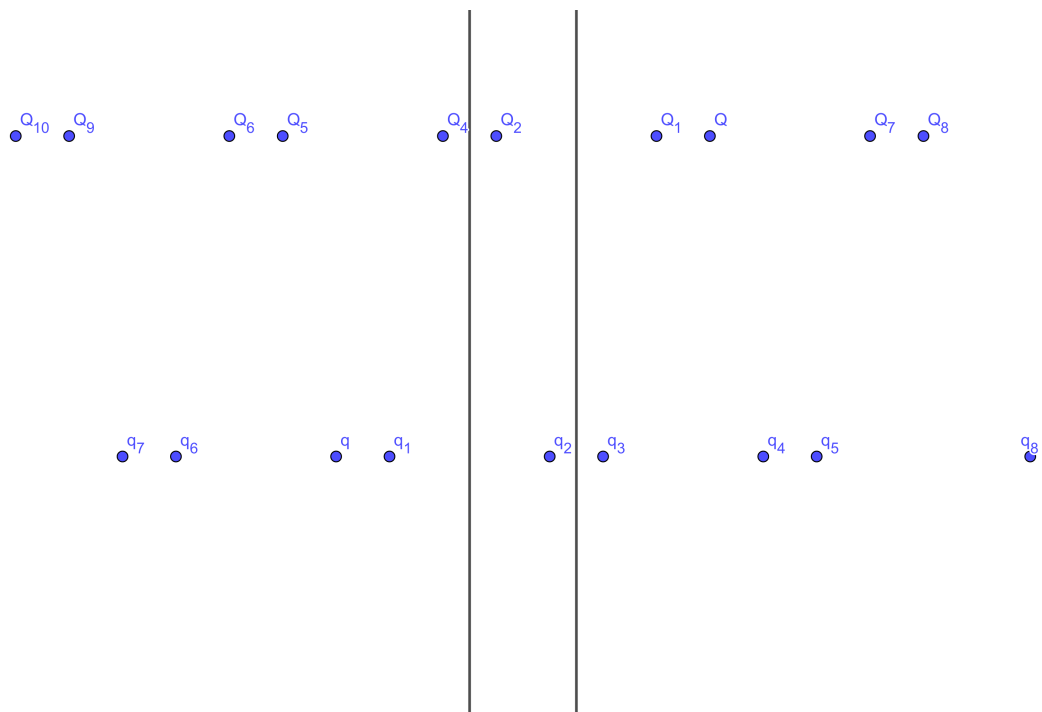


Figura 21: come NON risolvere il problema

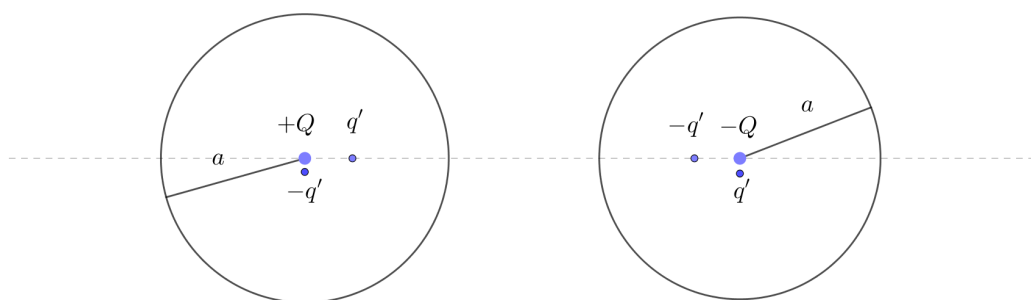


Figura 22: Immagine del problema P.5.

sfere a distanza d l'una dall'altra. La forza fra le due sfere, a questo ordine di approssimazione, vale $F = \frac{Q^2}{d^2}$ in modulo ed è diretta lungo la congiungente dei centri, con verso attrattivo.

Consideriamo ora la sfera di destra. La disposizione delle cariche nel centro delle due sfere non lascia il potenziale costante sulla superficie della sfera, come invece dovrebbe essere dato che la sfera è conduttrice. Per rendere il potenziale costante sulla superficie della sfera di destra, se supponiamo che l'unica carica esterna sia quella posta nel centro della sfera di sinistra, allora richiamando il risultato ottenuto a lezione (confronta 4.2) posizioneremmo due nuove cariche, $q_1 = q' = Q \frac{a}{d}$ e $q_2 = -q' = -Q \frac{a}{d}$, rispettivamente nel centro e a distanza $d' = \frac{a^2}{d}$ dal centro. Per la simmetria del problema, se avessimo fatto le stesse considerazioni per la sfera di sinistra, avremmo ottenuto altre due cariche $q'_1 = -q_1 = -q'$ e $q'_2 = -q_2 = q'$ posizionate nel centro della seconda sfera e a distanza $d' = \frac{a^2}{d}$. In questo caso, il modulo della forza vale

$$F = k_e \left(\frac{(Q - q')^2}{d^2} + 2 \frac{(Q - q')q'}{(d - d')^2} + \frac{q'^2}{(d - 2d')^2} \right) \quad (30)$$

Se ora chiamiamo $x = \frac{a}{d}$, allora $q' = Qx$ e $d' = dx^2$, perciò, sviluppando i conti in (30) e sostituendo, possiamo scrivere:

$$F = \frac{Q^2}{d^2} \left((1 - x)^2 + 2 \frac{x(1 - x)}{(1 - x^2)^2} + \frac{x^2}{(1 - 2x^2)^2} \right) \quad (31)$$

e ricordando lo sviluppo di Taylor $(1 - x^2)^{-2} \approx 1 + 2x^2$ si ha che (30) diventa

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{Q^2}{d^2} \left(1 - 2x + x^2 + 2x(1 + 2x^2) - 2x^2(1 + 2x^2) + x^2(1 + 4x^2) \right) \\ &\approx \frac{Q^2}{d^2} (1 + 4x^3) \end{aligned}$$

dove si è trascurato tutti i termini dello sviluppo di ordine superiore al terzo (dipendenti pertanto da x^3). Notiamo che in tal modo la forza è già oltre l'ordine richiesto, e che dunque non è più necessario andare avanti nell'approssimazione. Puntualizziamo che la forza totale fra le due forze non è esattamente quella in (30), e la formula ricavata è solo l'approssimazione dovuta alla prima iterazione del procedimento delle cariche immagine. Questo ci garantisce che approssimare le sfere come cariche puntiformi è un'approssimazione più che buona per la maggior parte dei problemi incontrati.

Perché la forza fra le sfere è proprio la forza fra le cariche immagine? Le cariche immagine sono un costrutto che realizzano il campo elettrico

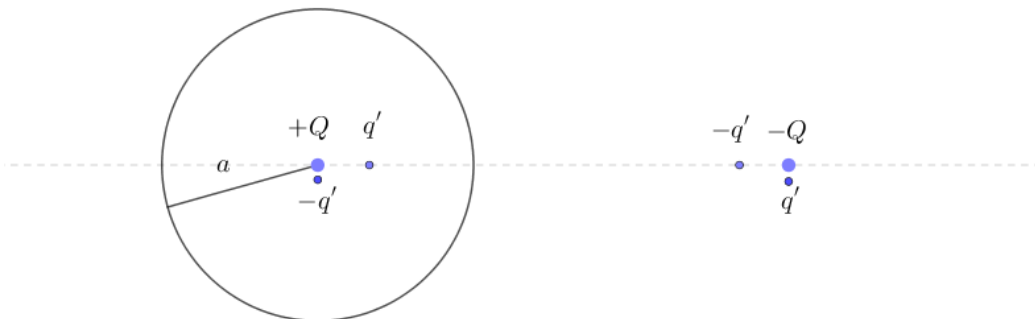


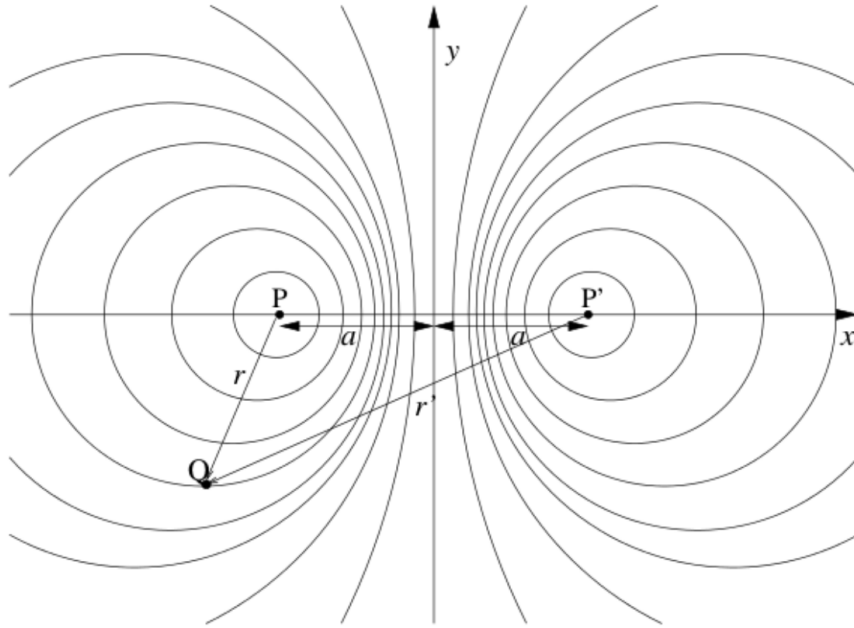
Figura 23: Problema P.5, sostituzione della sfera conduttrice con le cariche immagine.

all'esterno dei conduttori. Ora, consideriamo una nuova configurazione, per cui abbiamo nello spazio che esiste solamente una delle due sfere conduttrici, per esempio quella di sinistra, ed al posto dell'altra poniamo solo le cariche immagini nelle stesse posizioni di figura (22), come mostrato in figura 23. A questo punto, dato che le cariche immagine della sfera rimanente sono un modo comodo per rappresentare una distribuzione di carica che genera lo stesso campo elettrico che la sfera produce. Pertanto, la forza esercitata sulle cariche che sostituiscono l'altra sfera è proprio la forza di interazione fra queste e le cariche immagine. Per la terza legge di Newton (principio di azione e reazione) questa forza è anche la stessa che le cariche immagine esercitano sulla sfera. Sostituiamo nuovamente le cariche con la sfera conduttrice. Il campo elettrico che agisce sulla sfera di destra, nelle due configurazioni, è lo stesso, pertanto la forza che agisce sulla sfera *deve* essere la stessa. Del resto, si è supposto che il campo generato dalla sfera sia lo stesso, in prima approssimazione, di quello generato dalle cariche immagine, pertanto per la sfera di destra il fatto che ci siano cariche come in figura (23) o una sfera come in figura (22) è influente, l'importante è il campo elettrico che essa percepisce.

Soluzione S.5 (Problema P.6). Iniziamo dimostrando l'hint. Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano e poniamo i due punti fissi in posizioni $(-a, 0)$ e $(a, 0)$, dunque, indicando con (x, y) le coordinate di P si ottiene $r = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$ e $r' = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$.

Elevando al quadrato entrambi i lati dell'equazione $r/r' = K$ e riarrangiando qualche termine si ha:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{1 + K^2}{1 - K^2}ax = -a^2$$



da cui, completando il quadrato, si ottiene l'equazione di una circonferenza di centro $(\frac{1+K^2}{1-K^2}a, 0)$ e raggio $\frac{2Ka}{|K^2-1|}$.

Passiamo ora al problema vero e proprio. Notando l'analogia con il problema precedente vorrei iniziare a mettere qualche carica immagine, ma vista la simmetria del problema sotto traslazioni lungo z opto per dei fili immagine paralleli all'asse z .

Da adesso in poi il problema è sostanzialmente diventato due dimensionale: devo solo dividere le coordinate x e y dei fili.

Iniziamo calcolando la forma del potenziale generato da due fili di densità di carica opposta λ e $-\lambda$ posti in posizioni $(-a, 0)$ e $(a, 0)$. Se per il teorema di Gauss il potenziale di un filo vale:

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

dove r è la distanza dal filo (sto implicitamente usando una sorta di sistema di coordinate cilindriche) e r_0 è una costante arbitraria, corrispondente alla distanza in cui abbiamo posto $V = 0$; allora il potenziale di due fili vale:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r'}{r'_0}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r'}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r'_0}{r_0}\right)$$

con r' la distanza dal secondo filo e r'_0 analoga a r_0 . A questo punto però possiamo imporre il termine $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log(\frac{r'_0}{r_0})$ pari a zero, intanto r_0 e r'_0 sono

costanti che posso scegliere arbitrariamente: sto semplicemente fissando lo zero del potenziale (che è infatti definito a meno di una costante) e in questo caso il luogo degli zeri coinciderà con il piano $x = 0$.

L'equazione che caratterizza le superfici equipotenziali diventa:

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{r'}\right) = V \quad \equiv \quad \frac{r}{r'} = e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda}$$

che, usando il risultato dell'hint, ci fa concludere che le superfici equipotenziali sono cilindri di centro e raggio rispettivamente:

$$x_0 = \frac{e^{4\pi\epsilon_0 V/\lambda} + 1}{e^{4\pi\epsilon_0 V/\lambda} - 1}a, \quad y_0 = 0 \quad R = \frac{2e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda}}{e^{4\pi\epsilon_0 V/\lambda} - 1}a$$

Moltiplicando numeratore e denominatore di x_0 e R per $e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}$ si ottiene:

$$x_0 = \frac{e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda} + e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}}{e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda} - e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}}a, \quad y_0 = 0 \quad R = \frac{2}{e^{2\pi\epsilon_0 V/\lambda} - e^{-2\pi\epsilon_0 V/\lambda}}a$$

Che si può riscrivere in termine di funzioni iperboliche come:

$$x_0 = a \coth\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}\right) \quad R = \frac{a}{\sinh\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}\right)}$$

Ora dobbiamo solo scegliere λ e a in modo che il cilindro equipoteniale a potenziale $V_0/2$ abbia raggio R e sia centrato in $(d/2, 0)$ mentre quello a potenziale $-V_0/2$ abbia raggio R e sia centrato in $(-d/2, 0)$. Dividendo membro a membro l'espressione del centro per quella del raggio otteniamo:

$$\frac{d}{2R} = \cosh\left(\frac{\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{\pi\epsilon_0 V_0}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{d}{2R}\right)}$$

e quindi sostituendo nell'espressione del raggio (sapendo che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ e quindi $\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$):

$$a = R\sqrt{(d/2R)^2 - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4R^2}$$

dove la radice è ben definita perché, per evitare compenetrazioni, $d > 2R$. Come già spiegato per il problema sopra, la forza (per unità di lunghezza) percepita da uno dei cilindri è la stessa che c'è tra i due fili immagine:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0(2a)} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0\sqrt{d^2 - 4R^2}}$$

Soluzione S.6 (Problema P.7). Per il primo punto, il problema è analogo a quello di due pianeti che si schiantano nel loro centro di massa a causa della forza gravitazionale che attrae i due pianeti (confronta il problema 2 di [TBS19]). Nel nostro caso, invece, le equazioni del moto si scriveranno come segue. Ponendoci nel sistema di riferimento con assi $\hat{y}$ e $\hat{z}$ sul piano e con l'asse $\hat{x}$ ortogonale al piano e passante per la carica, la forza che agisce sulla carica a distanza x dal piano è esattamente quella che la carica immagine provocherebbe se fosse realmente esistente, ovvero (confronta 4.1)

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4x^2}\hat{x} \quad (32)$$

In questa configurazione, per il solo moto della carica a distanza x dal piano è come se ci fosse, posta nell'origine del nostro sistema di riferimento, una carica $q' = -\frac{q}{4}$, che appunto esercita una forza pari a quella di equazione 32. Questa configurazione è praticamente identica a quella di un pianeta che ruota intorno ad un “sole” fermo nell'origine del sistema. L'analogo della legge di Keplero per questa configurazione è:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k_e q^2}{16\pi^2 m} \Rightarrow T = \pi \sqrt{\frac{16ma^3}{k_e q^2}} \quad (33)$$

dove m è la massa della particella e a è il semiasse dell'orbita. Se supponiamo ora che l'orbita della particella è fortemente eccentrica, ovvero che il fuoco dell'ellisse intorno a cui orbita coincide praticamente con l'origine del nostro sistema di coordinate, allora possiamo scrivere che il tempo che la particella ci impiega ad arrivare nell'origine è pari a metà di tutto il periodo. Inoltre, dato che l'orbita è fortemente eccentrica, il semiasse principale dell'orbita sarà la semidistanza della carica dall'origine, dunque $a = \frac{1}{2}d$. Il tempo di caduta sul piano τ sarà pertanto

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{md^3}{2k_e q^2}} \quad (34)$$

Consideriamo ora il problema delle tre palline²⁸.

In assenza di forze esterne, il centro di massa (CM) del sistema fatto dalle tre palline cariche rimane fermo (o si muove a velocità costante, che è equivalente). Perciò è un buon punto da scegliere come origine del sistema di riferimento di un sistema di coordinate, in cui $\mathbf{r}_i$ sono le posizioni delle palline nel sistema di riferimento. Si chiamino le distanze d_i fra le palline come in figura.

²⁸Liberamente ispirato al problema 130 di [HRG01].

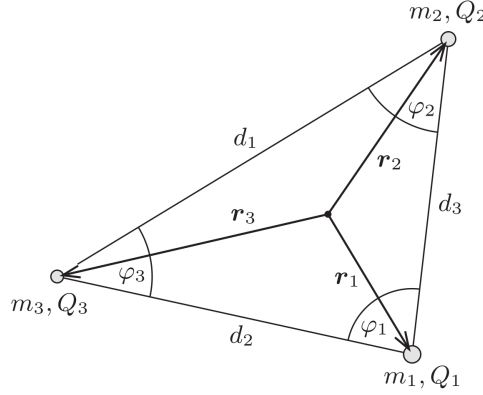


Figura 24: Figura del Problema P.7, ispirato al Problema 130 di [HRG01].

La forza totale che agisce sulla prima particella è la somma delle forze elettrostatiche esercitate dalle altre due cariche:

$$\mathbf{F} = m_1 \mathbf{a}_1 = k_e \frac{Q_1 Q_2}{d_3^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + k_e \frac{Q_1 Q_3}{d_2^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \quad (35)$$

In conseguenza della scelta dell'origine nel centro di massa si ha che

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0$$

E sostituendo $\mathbf{r}_3$ in (35) dà l'equazione del moto per la prima pallina:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = k_e Q_1 \left(\frac{Q_2}{d_3^3} + \frac{Q_3}{d_2^3} \left[\frac{m_1}{m_3} + 1 \right] \right) \mathbf{r}_1 + k_e Q_1 \left(\frac{Q_3}{d_2^3} \frac{m_2}{m_3} + \frac{Q_2}{d_3^3} \right) \mathbf{r}_2 \quad (36)$$

La condizione per cui la traiettoria della prima pallina sia una linea retta è che l'accelerazione deve essere allineata ad ogni istante al vettore posizione. Pertanto, il fattore che moltiplica $\mathbf{r}_2$ deve annullarsi, ovvero $Q_2 d_2^3 / m_2 = Q_3 d_3^3 / m_3$. Similmente, data la simmetria del problema se si scambiano gli indici in modo ciclico, si ottiene che

$$\frac{Q_1}{m_1} d_1^3 = \frac{Q_2}{m_2} d_2^3 = \frac{Q_3}{m_3} d_3^3 = \lambda \quad (37)$$

Dove λ ha lo stesso valore per tutti e tre i corpi. Il valore di λ **non** è una costante del moto, ma cambia col tempo dato che la distanza fra le palline aumenta.

Se le uguaglianze in (37) sono soddisfatte, allora l'accelerazione di ogni pallina può esprimersi come (segue dai conti):

$$\mathbf{a}_i = k_e \frac{Q_1 Q_2 Q_3 (m_1 + m_2 + m_3)}{\lambda m_1 m_2 m_3} \mathbf{r}_i \quad (38)$$

Perciò, ad ogni tempo fissato la proporzione del modulo dell'accelerazione è la stessa di quella dei moduli della posizione rispetto al CM. Di conseguenza, il rapporto delle distanze dall'origine delle tre palline rimane *costante nel tempo!*

Questi rapporti possono essere trovati dalla condizione (37 e dalla proporzione massa-carica delle tre palline data nel testo:

$$d_1 : d_2 : d_3 = \sqrt[3]{\frac{m_1}{Q_1}} : \sqrt[3]{\frac{m_2}{Q_2}} : \sqrt[3]{\frac{m_3}{Q_3}} = 1 : \frac{1}{\sqrt[3]{2}} : \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad (39)$$

Con questo rapporto distanza e massa-carica, le tre palline si muovono in modo tale che in ogni momento il triangolo che formano è simile al triangolo iniziale, e usando il Teorema di Carnot so possono ricavare gli angoli del triangolo.

Soluzione S.7 (problema P.10). Detta Q la carica dell'anello, quando questo è molto lontano dalla sfera, il potenziale al suo centro è $V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \implies Q = 4\pi\epsilon_0 R V_0$. Quando dispongo l'anello come descritto nel testo, sulla sfera (che è connessa a terra) viene indotta una carica di polarizzazione. Il potenziale nel centro dell'anello, che ora appartiene alla sfera conduttrice, deve essere nullo. Sia $-q$ la carica totale sulla sfera (il segno meno è coerente con la scelta di $Q > 0$), voglio trovare un modo per utilizzare solamente le cariche totali su anello e sfera senza passare dalle loro distribuzioni superficiali. A questo scopo cerco un punto equidistante da tutti i punti della sfera e dell'anello. Il punto cercato è il centro della sfera, per principio di sovrapposizione il suo potenziale è somma di quello dato dalle cariche dell'anello e quello delle cariche della sfera. Il potenziale dato dalla carica sull'anello per equidistanza di tutti gli elementini di carica è $V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + R^2}}$, e come voluto dipende solo dalla carica totale sull'anello. Analogamente il potenziale al centro della sfera causato dalle cariche sulla sfera è $V_s = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$. La sfera è conduttrice dunque il suo potenziale al centro è uguale a quello sulla superficie, ovvero è nullo. Imponendo $V_a + V_s = 0$ si ottiene $q = 4\pi\epsilon_0 V_0 \frac{rR}{\sqrt{r^2 + R^2}}$.

NOTA: questo problema si poteva risolvere anche con il metodo delle cariche immagine. Il risultato del problema di una carica davanti a una sfera è nota (vedere la lezione), disponendo le cariche immagine per ogni elemento di carica dell'anello ottengo un anello immagine interno alla sfera. Con qualche calcolo si giunge allo stesso risultato trovato tramite il principio di sovrapposizione.

Soluzione S.8 (problema P.11). Anzitutto notiamo che una configurazione di cariche in equilibrio, rimane in equilibrio se moltiplichiamo tutte le cariche

per un fattore λ , e in tal caso per linearità campi elettrici e potenziali sono moltiplicati per λ . Vogliamo ottenere A al potenziale V mettendo una carica uguale su WLOG A, B e C. Chiamiamo il caso in cui si pone q su A configurazione 1, e configurazione 2 e 3 i casi in cui si pone $3q/4$ su rispettivamente A e B e su A e C. Vogliamo ottenere la nuova situazione di equilibrio per sovrapposizione delle vecchie configurazioni, sovrapponendo λ_1 volte la 1 e λ_2 volte la 2 e la 3 (che per simmetria devono contribuire in maniera uguale) abbiamo come condizioni:

$$q\lambda_1 + 2\frac{3}{4}q\lambda_2 = \frac{3}{4}q\lambda_2$$

$$\lambda_1 V + 2\lambda_2 V = V$$

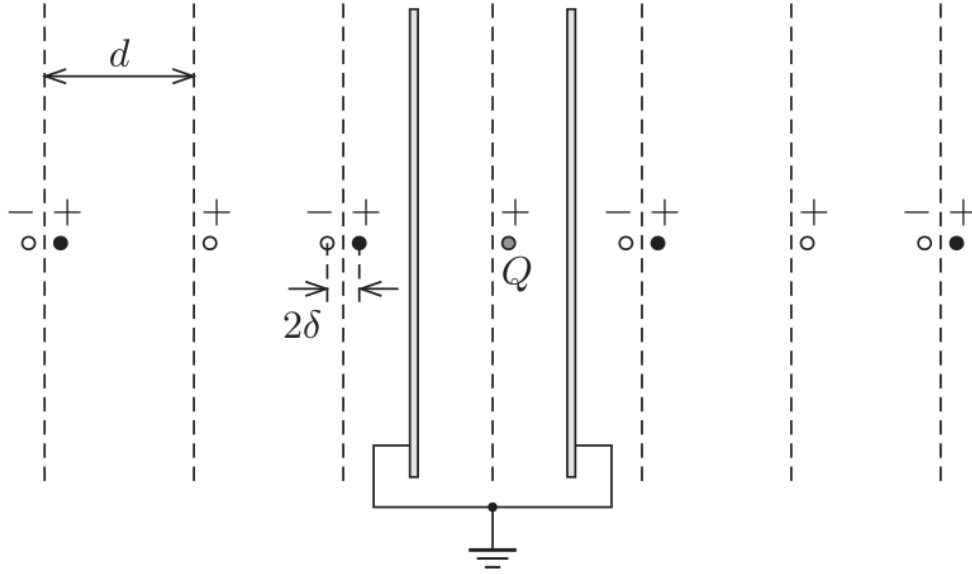
Da cui si ottiene $\lambda_1 = -3/5$, $\lambda_2 = 4/5$, dunque la carica che bisogna mettere su A, B e C è $3q\lambda_2/4 = 3q/5$. Per il secondo punto si procede allo stesso modo aggiungendo anche la configurazione 4 in cui si dispone $3q/4$ su A e D. Come sopra le condizioni 2, 3, e 4 devono contribuire in modo uguale per simmetria, allora si hanno le condizioni:

$$q\lambda_1 + 3\frac{3}{4}q\lambda_2 = \frac{3}{4}q\lambda_2$$

$$\lambda_1 V + 3\lambda_2 V = V$$

Da cui si ottiene $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2/3$, dunque la carica da mettere su tutte le sfere è $3/4\lambda_2 q = q/2$

Soluzione S.9 (Problema P.12). Questo problema è risolvibile utilizzando il metodo delle cariche immagini. Essendo necessario mantenere le facce del condensatore a potenziale nullo si inizia mettendo le due cariche immagini ovvie (ossia quelle rispetto alle due facce del condensatore stesso), ma queste alterano il potenziale sulla faccia opposta ed è quindi chiaro che è necessaria una sequenza infinita di cariche, come quelle bianche in figura. La configurazione di cariche bianche è quella quindi che mi determina la forza sulla carica Q . Però è evidentemente molto complicato calcolarla e quindi usiamo un piccolo stratagemma. Notando che le cariche bianche positive sono simmetriche rispetto alla carica Q possiamo non considerarle per il calcolo della forza (in quanto il loro contributo complessivo è nullo). Inoltre, questa osservazione ci conduce subito ad un'altra idea simile. Aggiungendo alla configurazione una serie di cariche positive in maniera simmetrica rispetto alla carica Q (come in figura), sicuramente altereremo il potenziale ma non la forza su Q , che è quello a cui siamo interessati in questo momento. Ma ora si vede che le cariche bianche negative e quelle nere aggiunte formano tanti dipoli di



momento $2Q\delta$ identicamente orientati che con buona approssimazione sono a distanza $\pm d, \pm 3d, \pm 5d, \dots$ dalla nostra Q . Usando quindi l'espressione della forza di dipolo che ricordiamo essere $F = 2k \frac{pQ}{r^3}$ troviamo

$$F = 2k \frac{2Q^2\delta}{r^3} \left(2 + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} + \dots \right) = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \frac{Q^2\delta}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$$

Per finire l'esercizio si potrebbero calcolare i primi termini e accorgersi che diventano piccoli in fretta oppure ricorrere alla funzione Zeta di Riemann.

Soluzione S.10 (Problema P.14). Lo svolgimento di questo problema è analogo a quello della carica immagine per un piano conduttore. Considerate infatti la figura 28. Possiamo posizionare una carica immagine nella posizione mostrata. Perché a distanza d ? Per simmetria e per analogia al caso del piano conduttore. Il fatto che esso sia un dielettrico fa in modo che la carica immagine posizionata non possa avere la stessa quantità di carica della carica originale.

Per essere una soluzione valida per il metodo delle immagini, dobbiamo richiedere che il campo elettrico parallelo si conservi, e che $D_{\perp}$ si conservi. Vicino al piano, all'esterno del dielettrico, detta r la distanza del punto sulla superficie da ognuna delle due cariche immagini, avremo che i campi saranno

(confronta 28a):

$$E_1^{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta (q + q_1)$$

$$E_1^{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta (q - q_1)$$

Consideriamo invece la figura (28b): all'interno, il campo può essere visto come generato dalla carica q_2 , nella stessa posizione di q . Vicino alla superficie, questo campo sarà pari a

$$E_2^{\parallel} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta$$

$$E_2^{\perp} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

Imponendo l'uguaglianza richiesta, si ha che

$$\begin{cases} E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \\ E_1^{\perp} = \epsilon_r E_2^{\perp} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q + q_1 = q_2 \\ q - q_1 = \epsilon_r q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} q \\ q_2 = \frac{2}{1 + \epsilon_r} q \end{cases}$$

Nota: q_1 ha segno opposto a q , mentre q_2 è concorde.

Per un dipolo, confronta 25. Infatti, un dipolo può essere schematizzato come due cariche di segno opposto che si trovano a distanza δ l'un dall'altra. Facendo l'immagine di ognuna delle due cariche, otteniamo che il modulo del vettore momento di dipolo cambia di un fattore $\frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r}$, esattamente come le cariche. La cosa considerevole è invece che la direzione ed il verso del dipolo immagine sono speculari rispetto al piano dielettrico se confrontati a gli stessi del dipolo originale.

Soluzione S.11 (Problema P.15). Ruotiamo gli assi in modo che uno dei due (diciamo quello delle ascisse) divida in due l'angolo sotteso dal dipolo (che chiameremo $d\theta$). Il campo elettrico è radiale e di modulo kQ/R^2 uniforme sulla guida.

Scomponiamo le due forze mostrate in figura 18 lungo le due componenti (immaginiamo per semplicità il dipolo $\mathbf{p}$ effettivamente composto da due cariche di modulo q e distanti D , con ovviamente $p = qD$):

$$F_x = qE \cos(d\theta/2) - qE \cos(d\theta/2) = 0$$

$$F_y = qE \sin(d\theta/2) + qE \sin(d\theta/2) = 2qE \sin(d\theta/2) \approx qE d\theta \approx \frac{qED}{R} = \frac{pQ}{R^3}$$

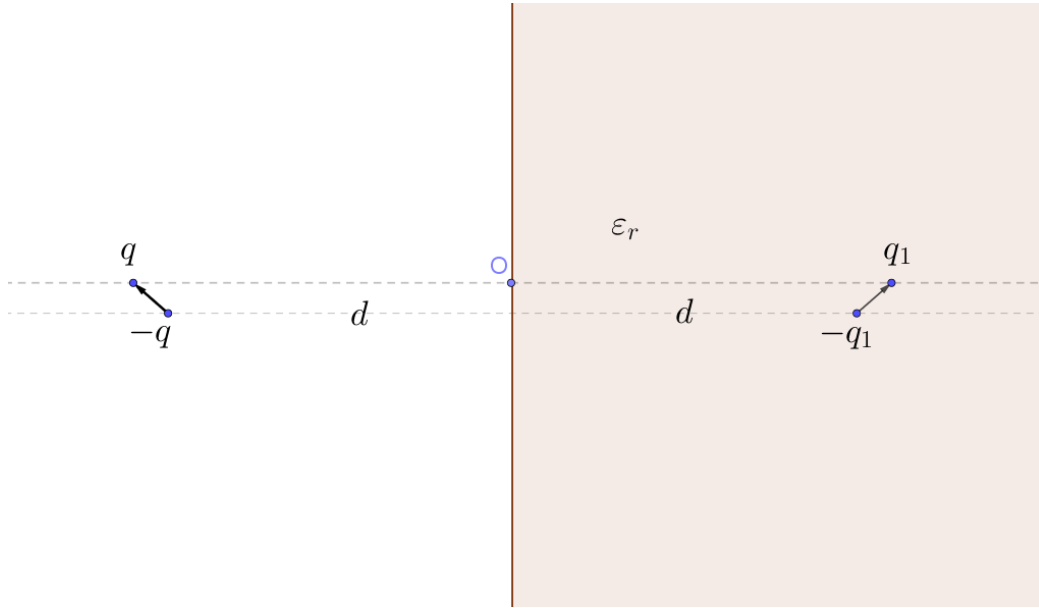


Figura 25: Dipolo davanti ad un dielettrico.

Quindi sembrerebbe quasi ci fosse una forza tutta diretta lungo la guida (e dunque non contrastabile con la reazione vincolare, che è solo radiale) che causerebbe un moto perpetuo! Tuttavia, sebbene la reazione vincolare è solo radiale, anche la forza elettrica lo è. Inoltre, per far mantenere il moto circolare serve anche un momento torcente che tiene il dipolo orientato tangenzialmente alla guida. Come si vede dalla figura il momento torcente dovuto a Q è in senso orario mentre la rotazione del dipolo dev'essere antioraria, quindi le forze vincolari devono essere più grandi delle forze esercitate da Q e in particolare saranno frenanti per il dipolo.

Soluzione S.12 (Problema P.16). Per le ipotesi del testo, possiamo modellizzare le fluttuazioni di un singolo atomo come se egli avesse un dipolo oscillante $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos(\omega t)$, con $\mathbf{p}_0$ costante e piccolo. Facciamo anche l'assunzione che il campo elettrico generato si propaghi istantaneamente, ovvero che il tempo che la luce impiega ad andare da un atomo all'altro (detta c la velocità della luce, tale tempo vale $\frac{d}{c}$) sia molto minore del periodo di un'oscillazione, ovvero $\frac{d}{c} \ll \frac{1}{\omega}$. Notiamo che il problema è simmetrico per rotazioni intorno all'asse che congiunge i due atomi sferici. Pertanto, senza perdita di generalità, possiamo ricondurci a studiare il problema considerando il vettore $\mathbf{p}_0$ solamente sul piano formato dall'asse che congiunge i centri dei due atomi (asse $\hat{\mathbf{x}}$ d'ora in avanti, orientato dall'atomo rosso all'atomo blu, confronta 26) e dall'asse ortogonale ad esso (asse $\hat{\mathbf{y}}$ in figura).

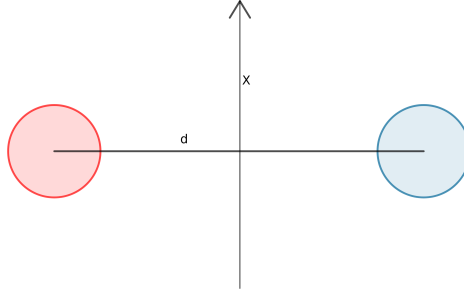


Figura 26: Problema P.16, configurazione spaziale, in rosso e blu i due atomi a distanza d .

Scomponiamo dunque il dipolo oscillante come

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos(\omega t) = (p_x \hat{\mathbf{x}} + p_y \hat{\mathbf{y}}) \cos(\omega t) \quad (40)$$

con gli assi come da figura. Il vettore distanza lo indicheremo con $\mathbf{d} = d\hat{\mathbf{x}}$. Scriviamo pertanto il campo elettrico generato dal dipolo dell'atomo rosso sull'atomo blu usando la formula 18, identificando $\mathbf{r}$ con $\mathbf{d}$ e omettendo il termine $\cos(\omega t)$, che reinseriremo ricordando che per ogni p presente nella formula è necessario un coseno:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{3(p_x \hat{\mathbf{x}} + p_y \hat{\mathbf{y}}) \cdot d\hat{\mathbf{x}}}{d^5} \right) d\hat{\mathbf{x}} - \frac{p_x \hat{\mathbf{x}} + p_y \hat{\mathbf{y}}}{d^3} \right] = \quad (41)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p_x \hat{\mathbf{x}} - p_y \hat{\mathbf{y}}}{d^3} \right) \quad (42)$$

Poiché l'atomo blu è anch'esso polarizzabile, il campo su di esso induce un dipolo di intensità

$$\mathbf{p}_{\text{blu}} = \alpha \mathbf{E} = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p_x \hat{\mathbf{x}} - p_y \hat{\mathbf{y}}}{d^3} \right) \quad (43)$$

dove ricordiamo che c'è sempre a moltiplicare un termine oscillante: in particolare sarebbe più giusto scrivere

$$\mathbf{p}_{\text{blu}} = \alpha \mathbf{E} = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p_x \hat{\mathbf{x}} - p_y \hat{\mathbf{y}}}{d^3} \right) \cos(\omega t)$$

Questo dipolo, a sua volta, genererà un campo elettrico $\mathbf{E}'$ che applicato sull'atomo rosso varrà (questa volta, il vettore posizione è quello che va dall'atomo blu all'atomo rosso, quindi $\mathbf{r} = -d\hat{\mathbf{x}}$, mentre il dipolo che lo genera è $\mathbf{p}_{\text{blu}}$)

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{3 \mathbf{p}_{\text{blu}} \cdot (-d\hat{\mathbf{x}})}{d^5} \right) (-d\hat{\mathbf{x}}) - \frac{\mathbf{p}_{\text{blu}}}{d^3} \right] = \quad (44)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{3 \mathbf{p}_{\text{blu}} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{d^3} \right) (\hat{\mathbf{x}}) - \frac{\mathbf{p}_{\text{blu}}}{d^3} \right] = \quad (45)$$

$$= \frac{\alpha}{d^6 (4\pi\epsilon_0)^2} \left[(3 (2p_x \hat{\mathbf{x}} - p_y \hat{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - (2p_x \hat{\mathbf{x}} - p_y \hat{\mathbf{y}}) \right] = \quad (46)$$

$$= \frac{\alpha}{d^6 (4\pi\epsilon_0)^2} (4p_x \hat{\mathbf{x}} + p_y \hat{\mathbf{y}}) \quad (47)$$

o, più precisamente, reinserendo il termine oscillante,

$$\mathbf{E}' = \frac{\alpha}{d^6 (4\pi\epsilon_0)^2} (4p_x \hat{\mathbf{x}} + p_y \hat{\mathbf{y}}) \cos(\omega t) \quad (48)$$

Pertanto, la forza che agisce sull'atomo rosso si può ricavare come:

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial}{\partial d} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}') = \quad (49)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{\alpha}{d^6 (4\pi\epsilon_0)^2} (4p_x^2 + p_y^2) \cos^2(\omega t) \right] = \quad (50)$$

$$= \frac{6\alpha}{d^7 (4\pi\epsilon_0)^2} (4p_x^2 + p_y^2) \cos^2(\omega t) \quad (51)$$

che è attrattiva fra i due atomi. Con questo esercizio ed usando il modello di Thomson dell'atomo, si è ricavata la forza di Van der Waals di attrazione fra gli atomi di un gas reale, sperimentalmente verificata. Questo esercizio è utile per comprendere l'importanza storica che ebbe il modello di Thomson, nonostante oggi sia un modello del tutto superato.

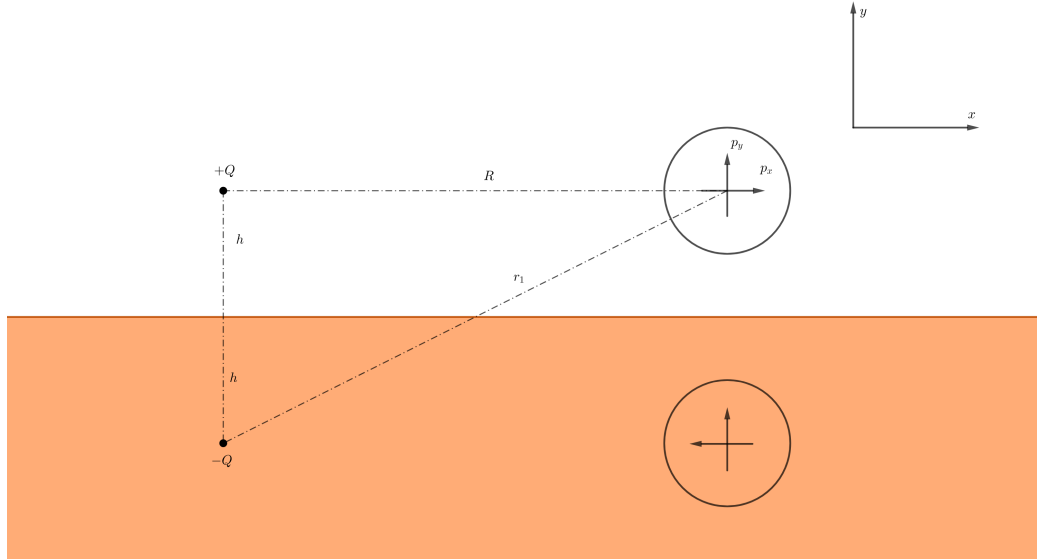


Figura 27: Problema P.17, atomo e carica di fronte a conduttore

Soluzione S.13 (Problema P.17). Consideriamo il caso in cui si abbia solamente la carica e l'atomo polarizzabile. Sia $\mathbf{R}$ il vettore di modulo R che rappresenta la distanza fra la carica e l'atomo. In tal caso, il dipolo totale che si genera sull'atomo vale

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_Q = \frac{\alpha Q \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

dove, a causa del fatto che la distanza R è molto più grande delle dimensioni dell'atomo, abbiamo supposto trascurabile la variazione del campo elettrico all'interno dell'atomo stesso.

Consideriamo ora il caso in cui ci sia un piano conduttore, posto a distanza $h \ll R$ dalla carica e parallelo alla congiungente fra la carica e l'atomo. Poiché il piano è conduttore, sulla sua superficie si genererà una distribuzione di carica tale da annullarne il potenziale. Per linearità, tale distribuzione è equivalente a quella generata da una carica immagine e da un dipolo immagine, posti a distanza h dalla superficie e a $2h$ dagli oggetti di cui sono rispettivamente immagine. Il segno della carica immagine è opposto a quello della carica originale, la componente ortogonale al piano del dipolo immagine è la stessa in segno e intensità di quello originale, mentre la componente parallela è opposta in segno. Questo risultato si può ottenere in analogia con il problema

P.14, dove si è fatto tendere ε_r la permeabilità dielettrica relativa a infinito.²⁹

La condizione di polarizzabilità di un singolo atomo ci dice che il dipolo su di lui indotto è proporzionale alla somma dei campi esterni. Inoltre, tutte le cariche o dipoli presenti sono complanari su un piano ortogonale alla superficie del conduttore. Poiché i campi appartengono tutti a questo piano, segue che le uniche componenti del dipolo risultante sono solo quella lungo l'ortogonale alla superficie del conduttore e quella parallela alla congiungente fra la carica e l'atomo.

Ricordiamo che $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$. Sia $r_1 = \sqrt{R^2 + 4h^2} = R\sqrt{1 + \frac{4h^2}{R^2}}$ la distanza fra l'atomo e la posizione della carica immagine come in Soluzione S.13. Allora per il campo possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\alpha \mathbf{E} &= \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q}{R^2} \hat{\mathbf{x}} - \frac{Q}{r_1^2} \left(\frac{2h}{r_1} \right) \hat{\mathbf{x}} - \frac{Q}{r_1^2} \left(\frac{R}{r_1} \right) \hat{\mathbf{y}} \right] + \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3 \left((-p_x \hat{\mathbf{x}} + p_y \hat{\mathbf{y}}) \cdot 2h \hat{\mathbf{y}} \right) 2h \hat{\mathbf{y}} - (2h)^2 (-p_x \hat{\mathbf{x}} + p_y \hat{\mathbf{y}})}{(2h)^5} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0} \left[\left(\frac{Q}{R^2} + \frac{p_x}{(2h)^3} - \frac{QR}{r_1^3} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{2p_y}{(2h)^3} - \frac{2hQ}{r_1^3} \right) \hat{\mathbf{y}} \right]\end{aligned}$$

e dato che il dipolo vale $\mathbf{p} = p_x \hat{\mathbf{x}} + p_y \hat{\mathbf{y}}$ allora eguagliando componente per componente otteniamo

$$p_x = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{R^2} + \frac{p_x}{(2h)^3} - \frac{QR}{r_1^3} \right) \quad (52)$$

$$p_y = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{2p_y}{(2h)^3} - \frac{2hQ}{r_1^3} \right) \quad (53)$$

che portano i seguenti risultati:

²⁹Ci si può convincere di questo fatto ricordando la definizione di $\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ed il fatto che all'interno del conduttore il campo è nullo: per conservare la componente perpendicolare di $\mathbf{D}$, poiché dentro il campo è nullo e fuori no, l'unico modo è che ε_r vada ad infinito.

$$p_x = \frac{\frac{Q}{R^2} - \frac{QR}{r_1^3}}{\frac{4\pi\epsilon_0}{\alpha} - \frac{1}{(2h)^3}} \quad (54)$$

$$p_y = -\frac{\frac{2hQ}{r_1^3}}{\frac{4\pi\epsilon_0}{\alpha} - \frac{2}{(2h)^3}} \quad (55)$$

Si lascia al lettore lo sviluppo al primo ordine in $\lambda = \frac{2h}{R}$.

Soluzione S.14 (Problema P.18). Di seguito la soluzione per i vari punti del problema.

1. Consideriamo un sistema di riferimento con l'origine nel centro della sfera e con l'asse $\hat{z}$ parallelo e concorde alla polarizzazione uniforme $\mathbf{P}$. Sia inoltre $\theta(\mathbf{x})$ l'angolo che un vettore $\mathbf{x}$ nello spazio forma con l'asse $\hat{z}$.

La polarizzazione è per definizione la densità di momento di dipolo per unità di volume, perciò il campo esterno è quello di un dipolo di momento $\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi r^3 \mathbf{P}$ con centro nel centro della sfera.

Dato che per ipotesi la polarizzazione è uniforme, calcoliamo la carica interna e la carica superficiale. Se la polarizzazione è uniforme, richiamando quanto fatto a lezione, si ha che $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, quindi la carica volumica fissata è nulla. La carica superficiale fissa, invece, è non nulla, e vale

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \sin \theta \quad (56)$$

Questa disposizione di carica assomiglia a quella generata dal problema delle oscillazioni di Mie, per cui il campo dentro la sfera è costante, e vale $\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$.

2. All'ordine 0, richiamando la formula 2.1, siccome si conserva la componente parallela di E , il campo rimane uniforme su tutto il volume della sfera! In altri termini il campo elettrico è nullo all'interno di un cilindro uniformemente polarizzato nel limite $a/h \rightarrow 0$.

Per ottenere la variazione all'ordine uno, un altro ragionamento che si può fare è il seguente. Sulla superficie interna del cilindretto, dal fatto che $\sigma = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, e dal fatto che il vettore normale della superficie laterale del cilindretto è ortogonale alla polarizzazione, si ha che non è

presente alcuna densità superficiale. Perciò, la differenza del campo è dovuta alla mancanza delle cariche superficiali in corrispondenza delle basi del cilindro. Possiamo approssimare la calotta mancante dovuta allo scavo cilindrico come se fosse piatta, poiché il raggio del cilindretto è molto minore del raggio della sfera. Su tale base, il vettore normale è parallelo alla polarizzazione, perciò si ha che la carica che manca in corrispondenza delle basi vale in modulo $|\sigma| = P$ e la carica totale è dunque $q = \pm P(\pi a^2)$, ed il segno della carica sulle due basi è opposto: la polarizzazione ha verso unico, ma il vettore normale cambia di verso. L'assenza di tali basi cariche è equivalente a posizionare sopra tali basi una distribuzione di carica di segno opposto a quella che c'era già. Questa distribuzione, all'interno del cilindretto cavo, genera una differenza di campo che nel centro può essere stimato come

$$\Delta E \simeq 2k_0 \frac{q}{(h/2)^2} = 8\pi k_0 P \left(\frac{a}{h}\right)^2 \ll \frac{1}{\varepsilon_0} P$$

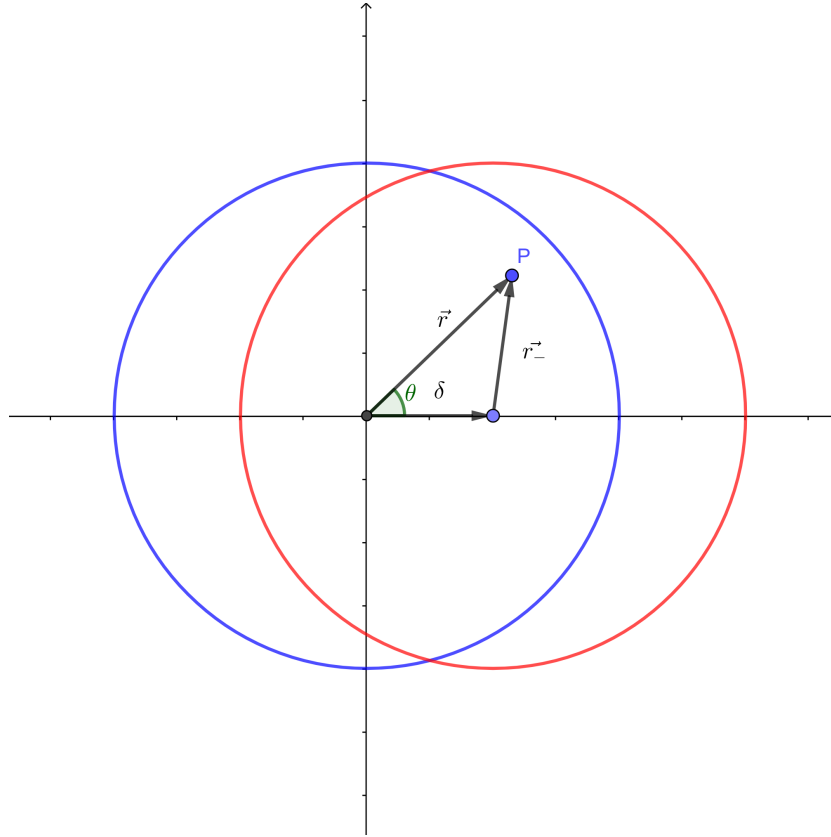
3. Se non togliamo la “fetta”, il campo all'interno della sfera è $E_{\text{int}} = -\frac{P}{3\varepsilon_0}$. Togliendo la fetta, la cavità che rimane si comporta come un condensatore con densità di carica $\sigma = \pm P$, quindi con carica $Q \simeq \pi a^2 P$ e capacità $C = \varepsilon_0 \pi a^2 / h$. La differenza di potenziale tra le due superfici del taglio è $V = Q/C = Ph/\varepsilon_0$, mentre il campo generato dal “condensatore”, nullo fuori dal “condensatore” stesso, vale $E_{\text{cond}} = P/\varepsilon_0$ tra le due superfici. Tra le due superfici di taglio il campo complessivo vale quindi

$$E = E_{\text{int}} + E_{\text{cond}} = \frac{2P}{3\varepsilon_0}$$

Allo stesso risultato si pu'ò giungere ricordando la continuità della componente perpendicolare di D . Nella sfera abbiamo infatti $D = \varepsilon_0 E + P = -\frac{1}{3}P + P = \frac{2}{3}P$.

Soluzione S.15 (Problema P.19). Dalla condizione di carica totale nulla posso associare delle densità di carica agli ioni e agli elettroni in modo tale che $\rho = Zen_i$ e dunque $-en_e = -\rho$. Ricordiamo che il campo elettrico all'interno di una sfera uniformemente carica di densità ρ vale $\mathbf{E} = \rho \mathbf{r} / (3\varepsilon_0)$ (risultato che si può facilmente ottenere con il teorema di Gauss).

Mettiamoci in un sistema di riferimento centrato nella sfera di ioni positivi e indichiamo con $\mathbf{r}_- = \mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}$ la posizione relativa rispetto al centro della sfera di elettroni. Avvalendoci del principio di sovrapposizione lineare per le due sfere rigide di sopra, otteniamo che il campo nella zona in cui le sfere sono sovrapposte vale:



$$\mathbf{E}_{int}(\mathbf{r}) = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho \mathbf{r}_-}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho \boldsymbol{\delta}}{3\varepsilon_0}$$

Per trovare il campo fuori dalle due sfere basta ricordarsi che fuori da una sfera uniformemente carica il campo è pari a quello generato da una carica nel centro. Quindi il campo fuori è quello di un dipolo formato da due cariche $Q = 4\pi R^3 \rho/3$ e $-Q$ a distanza δ e posto nell'origine (in realtà sarebbe in $\boldsymbol{\delta}/2$ ma se questo è molto piccolo, cambia poco).

$$\mathbf{p} = -Q\boldsymbol{\delta} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \boldsymbol{\delta} = -4\pi R^3 \varepsilon_0 \mathbf{E}_{int}$$

Per trovare la densità sui bordi delle sfere non sovrapposte possiamo considerare al limite in $\delta \rightarrow 0$ come se queste fossero uno strato superficiale carico.

Allora possiamo usare le condizioni di raccordo 6:

$$E_{out,\perp} - E_{int,\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Usando per $\mathbf{E}_{out}$ quella trovata al punto 2 e per $\mathbf{E}_{int}$ quella del punto 1:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{int}(R\hat{r}) \cdot \hat{r} &= \frac{\rho\delta}{3\varepsilon_0} \cos\theta & \mathbf{E}_{out}(R\hat{r}) \cdot \hat{r} &= -\frac{2\rho\delta}{3\varepsilon_0} \cos\theta \\ \sigma &= -\rho\delta \cos\theta = \frac{p}{V} \cos\theta = \frac{\mathbf{p}}{V} \cdot \hat{n}\end{aligned}$$

Gli ultimi due punti sono lasciati come esercizio per il lettore.

Riflettiamo ora su cosa ci sta dicendo questo esercizio apparentemente senza senso. Osserviamo che la distribuzione di cariche è esattamente quella di una sfera con polarizzazione uniforme $\mathbf{P} = \mathbf{p}/V$. Abbiamo quindi ottenuto che una sfera polarizzata uniformemente genera rispettivamente un campo interno e esterno pari a:

$$\mathbf{E}_{int} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \quad \mathbf{E}_{out} = V \frac{3(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{P}r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

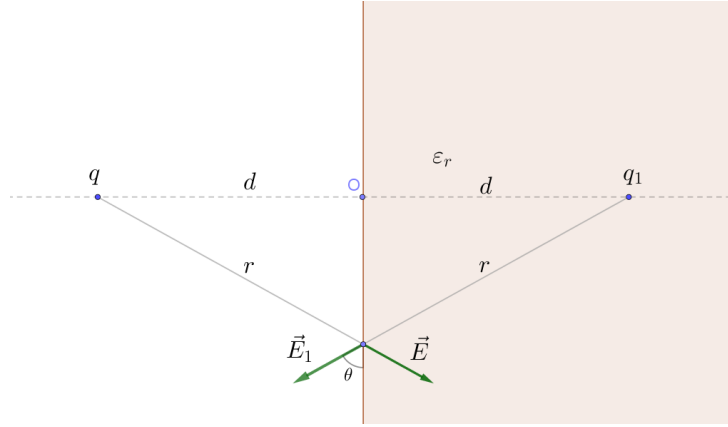
Soluzione S.16 (Problema P.20). Utilizzando la conservatività del campo elettrostatico nella sua espressione globale, ovvero circuitazione nulla, intorno a un cammino rettangolare con due lati paralleli all'interfaccia otteniamo $E_1 = E_2$ (con E_i i campi elettrici nei due diversi dielettrici). Inoltre sappiamo che vale $E_i h = V = Q/C$, ma qual è questa C ?

Si può facilmente osservare che, immaginando di vedere il condensatore come due condensatori appiccicati (dove la distinzione tra i due viene fatta in base al dielettrico che c'è tra le piastre), questi possono essere considerati come se fossero collegati in parallelo (infatti la d.d.p. è la stessa, visto che hanno le piastre in comune e queste sono equipotenziali). Quindi $C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 x a}{h} + \frac{\varepsilon_2 a(a-x)}{h}$.

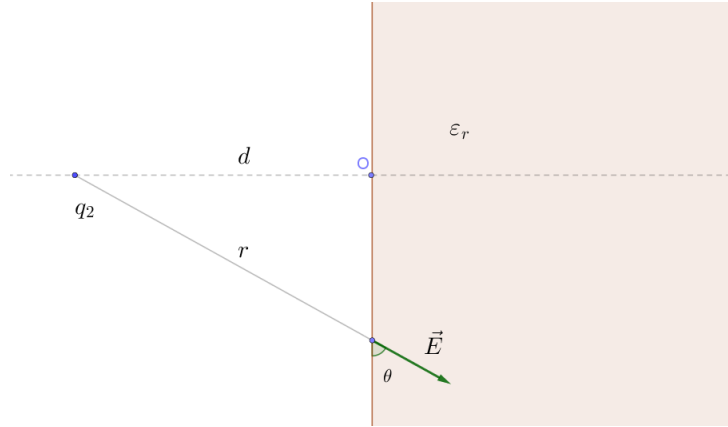
Per calcolare la forza sugli strati dielettrici utilizziamo un approccio energetico $F = -\frac{dU}{dx}$ dove $U = \frac{Q^2}{2C}$ ed è quindi interessante notare che il dielettrico con ε_i più alta viene tirato dentro, allo scopo di minimizzare l'energia del sistema. Nel caso dei due strati consecutivi con superficie di separazione parallela alle facce del condensatore ci basta usare il teorema di Gauss che ci dice che la componente perpendicolare all'interfaccia di D si conserva e quindi $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$. Inoltre in questo caso abbiamo anche l'equazione $E_1 \frac{h}{2} + E_2 \frac{h}{2} = V = Q/C$ dove però C è data dalla serie di C_1 e C_2 e quindi $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

Soluzione S.17 (Problema P.22). Una sfera metallica in un campo costante, come visto in un problema precedente, crea all'esterno di essa un campo pari a quello di un dipolo centrato in essa e di valore $\mathbf{p} = 3V\varepsilon_0\mathbf{E}$, dove V è il volume della sferetta.

Dalla relazione $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E} = n\langle\mathbf{p}\rangle$ sostituendo la $\mathbf{p}$ trovata sopra (proprio per



(a) Carica immagine all'esterno del dielettrico.



(b) Carica immagine all'interno del dielettrico.

Figura 28: Carica immagine davanti ad un dielettrico.

MFA: mean field approximation) si trova $\mathbf{P} = 3nV\varepsilon_0\mathbf{E}$ e quindi $\chi = 3nV = 4n\pi a^3$.

Troviamo ora la condizione perché si possa usare la MFA. La distanza tra due sferette l è dell'ordine di $n^{\frac{1}{3}}$. Dobbiamo imporre quindi $E_{\text{dip}} \ll E$ a quella distanza ovvero $E_{\text{dip}} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{l^3} = a^3 n E \ll E$ ovvero $a^3 n \ll 1$.

Soluzione S.18 (Problema P.23). Di seguito la soluzione per i vari punti del problema.

1. Innanzitutto notiamo che il campo $\mathbf{E}_0$ all'esterno del dielettrico è uguale al campo esterno in assenza del dielettrico. Infatti, trascurando gli effetti di contorno, la distribuzione della densità superficiale della carica di polarizzazione è equivalente a quella di un condensatore (per invarianza

sotto traslazioni parallele al piano, la carica è uniforme) e quindi non produce alcun campo all'esterno del condensatore stesso.

All'interno del condensatore il campo elettrico è anch'esso uniforme in quanto è dato dalla somma di due campi uniformi, cioè il campo esterno $\mathbf{E}_0$ e il campo prodotto dalle cariche di polarizzazione.

La componente del campo elettrico parallelo alla superficie, $E_{\parallel} = E_0 \sin \theta$, è continua. Nel vuoto la componente perpendicolare è data da $E_{v,\perp} = E_0 \cos \theta$. Usiamo la continuità di $D_{\perp} = \varepsilon E_{\perp}$ per determinare $E_{v,\perp} = \varepsilon_r E_{d,\perp}$ dove $\mathbf{E}_d$ è il campo dentro la lastra dielettrica. Dunque $E_{d,\perp} = E_0 \cos \theta / \varepsilon_r$ e:

$$\tan \theta' = \frac{E_{d,\parallel}}{E_{d,\perp}} = \frac{E_0 \sin \theta}{E_0 \cos \theta / \varepsilon_r} = \varepsilon_r \tan \theta$$

2. Dalla discontinuità del campo perpendicolare

$$\sigma_p = \varepsilon_0(E_{v,\perp} - E_{d,\perp}) = \varepsilon_0 E_0 \cos \theta \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

Soluzione S.19 (Problema P.24). Di seguito la soluzione per i vari punti del problema.

1. Siano E_1 ed E_2 i moduli dei campi (entrambi diretti perpendicolarmente alle piastre) rispettivamente negli strati del gas e del dielettrico. La caduta di tensione tra le piastre è ΔV , quindi

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = \Delta V$$

mentre la continuità di $D = \varepsilon E$ dà

$$\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon E_2$$

Da queste relazioni si ottiene

$$E_1 = \frac{\varepsilon \Delta V}{\varepsilon d_1 + \varepsilon_0 d_2} \quad E_2 = \frac{\varepsilon_0 \Delta V}{\varepsilon d_1 + \varepsilon_0 d_2}$$

2. In condizioni stazionarie la corrente deve essere zero, altrimenti la carica continuerebbe ad accumularsi sulla superficie del dielettrico. Poiché $J = E_1 / \rho$ (è la versione locale della legge di Ohm), dobbiamo avere $E_1 = 0$. Poiché vale ancora $E_1 d_1 + E_2 d_2 = \Delta V$, otteniamo $E_2 = \Delta V / d_2$.

La densità di carica libera è uguale al salto di D :

$$\sigma = \varepsilon E_2 - \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon E_2 = \varepsilon \Delta V / d_2$$

3. Dall'equazione di continuità (conservazione della carica) abbiamo:

$$\partial_t \sigma = J = \frac{E_1}{\rho}$$

Usando le equazioni già introdotte

$$\sigma = \varepsilon E_2 - \varepsilon_0 E_1, \quad E_1 d_1 + E_2 d_2 = \Delta V$$

possiamo eliminare E_1 e ottenere

$$\partial_t \sigma = -\frac{d_2}{\rho(\varepsilon_0 d_2 + \varepsilon d_1)}(\sigma - \varepsilon \Delta V / d_2)$$

Definendo $\tau = \rho(\varepsilon_0 d_2 + \varepsilon d_1) / d_2$, la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $\sigma = 0$ è:

$$\sigma = (\varepsilon \Delta V / d_2)(1 - e^{-t/\tau})$$

Soluzione S.20 (Problema P.25). Di seguito la soluzione per i vari punti del problema.

1. Per ragioni di simmetria il campo è perpendicolare al piano dielettrico. La distribuzione totale della carica (incluse le cariche di polarizzazione e di immagine) può essere descritta come due piani con densità di carica superficiale uniforme: il piano “superiore” con densità σ_1 e il piano “inferiore” con densità $\sigma_2 + \sigma_p$, con σ_p la densità di carica superficiale di polarizzazione sulla superficie di contatto. Un piano con densità di carica superficiale uniforme genera un campo uniforme di modulo $E = \pm \sigma / \varepsilon_0$ su entrambi i lati del piano. Così, a causa del principio di sovrapposizione il campo nella regione tra i piani è $E_0 = (-\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_p) / 2\varepsilon_0$, mentre sopra la lastra conduttrice $E_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_p) / 2\varepsilon_0$ e nel dielettrico $E_2 = (-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_p) / 2\varepsilon_0 = -E_1$.

Poiché la regione tra i piani 1 e 2 è riempita dal conduttore, $E_0 = 0$, da cui si ottiene $\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_p$ ed $E_1 = -E_2 \equiv E$: il valore assoluto del campo è lo stesso sopra e sotto la lastra conduttrice. Usando le leggi di continuità di $E_\perp$ e $D_\perp$, abbiamo anche $E_1 = \sigma_1 / \varepsilon_0$ e $E_2 = -\sigma_2 / \varepsilon$ così che $\sigma_2 = \varepsilon_r \sigma_1$. Poiché la carica libera totale è Q , abbiamo anche $(\sigma_1 + \sigma_2)S = Q$. Otteniamo così:

$$\sigma_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon_r} \frac{Q}{S} \quad \sigma_1 = \frac{\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{Q}{S}$$

Alternativamente si poteva usare il risultato del problema della carica immagine di fronte a un dielettrico per calcolare il campo dovuto a un piano carico e al suo "piano immagine".

Si noti che questi risultati valgono sia se la lastra è in contatto con il piano o meno, cioè se c'è uno spazio vuoto tra la lastra e il piano.

2. La forza si può ottenere calcolando la variazione dell'energia elettrostatica quando si solleva la lastra conduttrice. Il campo elettrico sopra la lastra vale $E_1 = \sigma_1/\varepsilon_0$ mentre nella regione di gap tra il dielettrico e la lastra si ha $E_2 = -\sigma_2/\varepsilon_0$. Se quest'ultima viene alzata di una quantità dh , la variazione dell'energia elettrostatica è:

$$dU = \frac{\varepsilon_0}{2}(E_2^2 - E_1^2)S dh = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q}{S} \frac{\varepsilon_r^2 - 1}{(\varepsilon + 1)^2} dh$$

così che la forza sulla lastra è

$$F = -\frac{dU}{dh} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q}{S} \frac{\varepsilon_r^2 - 1}{(\varepsilon + 1)^2}$$

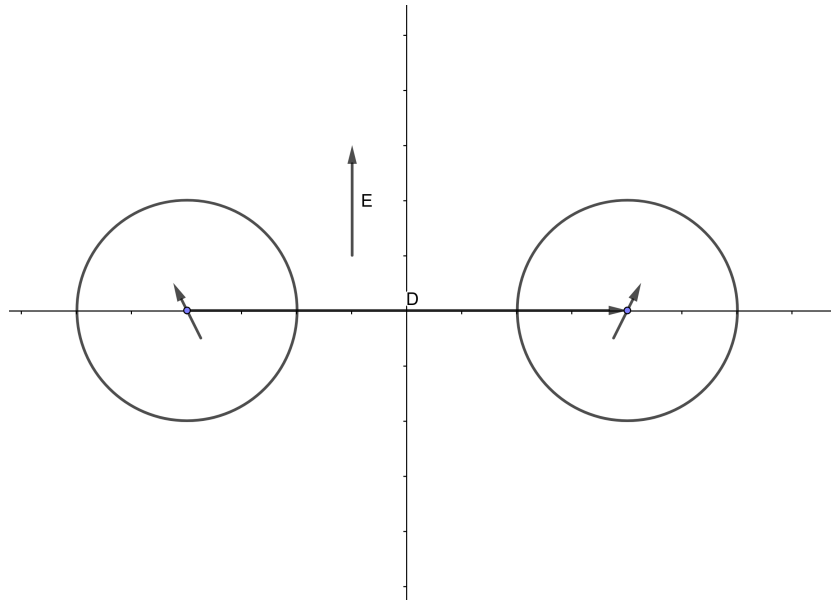


Figura 29: situazione SBAGLIATA nel caso di $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{x}$

Soluzione S.21 (Problema P.26). Mettiamoci in un sistema di riferimento cartesiano in cui l'asse z passa per i centri di entrambi gli atomi. Per gli stessi motivi di simmetria dell'esercizio precedente, la polarizzabilità sarà una matrice diagonale con $\alpha_{xx} = \alpha_{yy}$.

Andiamo a calcolare α_{zz} : mettiamo dunque un campo esterno $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{z}$ e analizziamo la risposta del sistema. Ciascun atomo avrà un dipolo indotto solo lungo z (per simmetria cilindrica) $\mathbf{d}_{1,2} = d_{1,2} \hat{z}$. Questo andrà a generare un campo elettrico $\mathbf{E}_d$ il quale a sua volta influenza il dipolo dell'altro atomo.

$$\mathbf{E}_{d2}(\mathbf{r}_1) = \frac{3(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{r}_{12} - \mathbf{d}_2 r_{12}^2}{r_{12}^5} = \frac{2d_2}{D^3} \hat{z} \Rightarrow d_1 = \alpha_0 \left(E_0 + \frac{2d_2}{D^3} \right)$$

Una cosa analoga vale per l'altro dipolo. Sommando i due valori, otteniamo la polarizzazione dell'intera molecola $\mathbf{p} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = p \hat{z}$:

$$p = 2\alpha_0 \left(E_0 + \frac{p}{D^3} \right) \Rightarrow p = \frac{2\alpha_0}{1 - \frac{2\alpha_0}{D^3}} E_0 \Rightarrow \alpha_z = \frac{2\alpha_0}{1 - \frac{2\alpha_0}{D^3}}$$

Supponiamo ora di mettere un campo esterno $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{x}$. Anche in questo caso i dipoli indotti sono allineati con il campo: non possono avere componenti lungo y per simmetria sotto riflessione xz , se uno ha componente lungo z l'altro atomo ce la deve avere uguale e opposta (per simmetria sotto riflessione xy) ma se per esempio ce l'avessero entrambi verso l'interno della molecola basterebbe fare una riflessione centrale (e cambiare segno a tutti i vettori) per avere lo stesso setup fisico ma con i dipoli ora puntanti verso l'esterno. Procediamo ora con conti analoghi a prima:

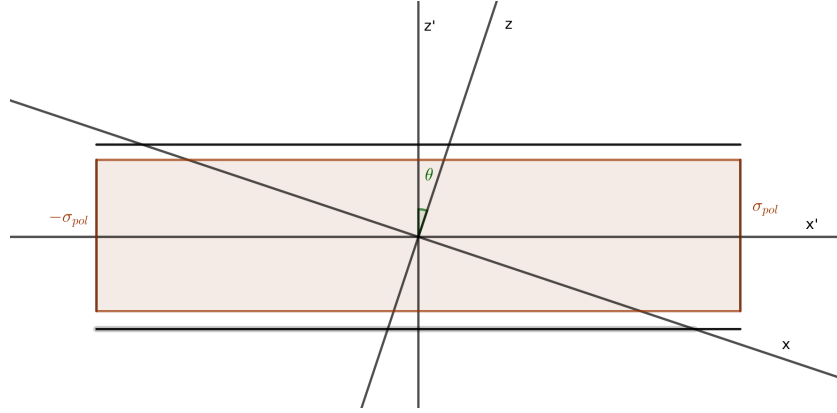
$$\mathbf{E}_{d2}(\mathbf{r}_1) = \frac{3(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{r}_{12} - \mathbf{d}_2 r_{12}^2}{r_{12}^5} = -\frac{d_2}{D^3} \hat{x} \Rightarrow d_1 = \alpha_0 \left(E_0 - \frac{d_2}{D^3} \right)$$

Vale ancora un'espressione analoga per l'altro atomo. Sommando i due valori, otteniamo la polarizzazione dell'intera molecola $\mathbf{p} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = p \hat{x}$:

$$p = \alpha_0 \left(2E_0 - \frac{p}{D^3} \right) \Rightarrow p = \frac{2\alpha_0}{1 + \frac{2\alpha_0}{D^3}} E_0 \Rightarrow \alpha_{\parallel} = \frac{2\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{D^3}}$$

Prima di passare al prossimo argomento, soffermiamoci un attimo sui risultati ottenuti. In entrambi i casi la polarizzabilità tende ad α_0 per $D \gg R$. Notiamo anche che α_z diverge per $D^3 = 2\alpha_0$. Questo fenomeno peculiare non è da attribuirsi a un qualche errore del modello: semplicemente tali materiali sono in grado di produrre una polarizzazione finita anche in assenza di campi elettrici ma solo amplificando le piccole oscillazioni naturalmente presenti. Per analogia con il magnetismo, tali materiali sono detti ferroelettrici

Soluzione S.22 (Problema P.27). Indichiamo con variabili non primate quelle relative al sistema con assi paralleli agli assi principali del dielettrico, e



con variabili primarie quelle con gli assi paralleli alle direzioni principali del condensatore (cfr. Soluzione S.22). Osserviamo che il sistema è invariante sotto traslazioni parallele alle facce del condensatore³⁰ la distribuzione di carica (libera e di polarizzazione) sarà uniforme e il campo sarà quello di un condensatore senza dielettrico (ovviamente con una carica diversa da Q). Usando le leggi di continuità dei campi si ha:

$$0 = E_x \cos \theta + E_z \sin \theta$$

$$\frac{Q}{L^2} = \varepsilon_{zz} E_z \cos \theta - \varepsilon_{xx} E_x \sin \theta$$

Da cui è facile concludere:

$$E_x = -\frac{Q}{L^2} \frac{\sin \theta}{\varepsilon_{zz} \cos \theta^2 + \varepsilon_{xx} \sin \theta^2} \quad E_z = \frac{Q}{L^2} \frac{\cos \theta}{\varepsilon_{zz} \cos \theta^2 + \varepsilon_{xx} \sin \theta^2}$$

Questi campi, trovati con l'ipotesi in cui si trascurano gli effetti di bordo, causano invece un comportamento interessante proprio quando ci si ricorda delle dimensioni finite del condensatore. Il campo ha infatti una componente orizzontale (lungo $\hat{x}'$) non nulla che induce delle cariche superficiali di polarizzazione:

$$\sigma_{pol} = D_{x'} = \varepsilon_{zz} E_z \sin \theta + \varepsilon_{xx} E_x \cos \theta = \frac{Q}{L^2} \frac{\cos \theta \sin \theta (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})}{\varepsilon_{zz} \cos \theta^2 + \varepsilon_{xx} \sin \theta^2}$$

È quindi possibile vedere il sistema come un dipolo $\mathbf{p} = \sigma_{pol} L^2 h \hat{x}'$ immerso

³⁰Questa osservazione in realtà basta già per concludere $\mathbf{F} = 0$

in un campo uniforme:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{p} = 0 \\
E_{z'} &= E_z \cos \theta - E_x \sin \theta = \frac{Q}{L^2} \frac{1}{\varepsilon_{zz} \cos \theta^2 + \varepsilon_{xx} \sin \theta^2} \\
&\Downarrow \\
\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{p} \wedge \mathbf{E} = -\hat{\mathbf{y}}' E_{z'} p = -\hat{\mathbf{y}}' \frac{Q^2 h}{L^2} \frac{\cos \theta \sin \theta (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})}{(\varepsilon_{zz} \cos \theta^2 + \varepsilon_{xx} \sin \theta^2)^2}
\end{aligned}$$

Riferimenti bibliografici

- [Bog18] Giuseppe Bogna. *Elettrodinamica classica*. 2018. Reperibile [qui](#).
- [Gri17] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics Fourth Edition*, page 312. Cambridge University Press, 2017.
- [HRG01] Gyula Honyek, K. F. Riley, and Péter Gnädig. *200 Puzzling Physics Problems*. 2001.
- [TBS19] Giovanni Maria Tomaselli, Giuseppe Bogna, and Veronica Sacchi. *Meccanica celeste*, 2019. Reperibile [qui](#).