

Elettrodinamica

Marco Lastres, Marco Malandrone,
Paolo Alessandro Xavier Tognini*

8 febbraio 2022

Sommario

In questa lezione trattiamo la magnetostatica e l'evoluzione temporale dei fenomeni elettromagnetici. Introduciamo le leggi di Maxwell nella loro forma completa, mostrando particolare interesse al significato fisico delle componenti dipendenti dal tempo. Parliamo inizialmente, nel regime magnetostatico, del campo magnetico come mediatore di forze fra le correnti. Discutiamo poi in modo approfondito la legge di Faraday-Neumann-Lenz, mostrando come l'elettrodinamica si comporta in sistemi di riferimento in moto relativo, nel limite $v \ll c$. Infine mostriamo l'applicazione delle leggi di Maxwell alla teoria dei circuiti elettrici. Nelle appendici sono discussi alcuni argomenti più avanzati, fra cui le onde elettromagnetiche.

Per chiarimenti sulla notazione utilizzata si veda la sezione 4.1.

*Basato sulle dispense dei corsi relativi agli anni 2020-2021, a cura di Alessandro Garaglio, Filippo Girardi, Marco Lastres, e Alessandro Seccarelli.

Indice

1	Magnetostatica	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Correnti elettriche	3
1.3	La legge di Biot e Savart	4
1.4	Le leggi di Maxwell per la magnetostatica	7
1.5	Dipolo magnetico	7
1.6	Cenni di magnetismo nella materia	9
2	La terza e la quarta legge di Maxwell	10
2.1	La legge di Faraday e l'elettrodinamica nei sistemi di riferimento in moto relativo	10
2.2	La legge di Ampère-Maxwell	17
3	Circuiti elettrici	19
3.1	Le leggi di Kirchhoff	20
3.2	Linearità dei componenti	21
3.3	I resistori e le leggi di Ohm	22
3.4	I capacitori	24
3.5	Corrente alternata e impedenza	25
3.5.1	Alcune regole importanti	27
3.6	Gli induttori	28
3.7	Fenomenologia di alcuni circuiti	29
3.8	Teoremi di Thévenin e Norton	31
3.9	Componenti non lineari	32
4	Appendici	34
4.1	Notazione	34
4.2	Simmetrie del campo elettromagnetico	35
4.3	Energia elettromagnetica	36
4.4	Onde elettromagnetiche	37
4.5	I teoremi di Gauss e di Stokes	43
4.6	Potenziale vettore	44
5	Problemi	45
6	Soluzioni	47

1 Magnetostatica

1.1 Introduzione

La formulazione moderna dell'elettrodinamica classica mostra che una comprensione completa dei fenomeni elettrici non può essere separata da quella dei fenomeni magnetici. Prima di mostrare la dinamica fra i campi associati alle forze elettriche e magnetiche, dove la relazione fra i due campi è più manifesta, tratteremo la classe dei fenomeni magnetostatici, caratterizzati da certe restrizioni sullo sviluppo temporale dei fenomeni.

Lo studio della magnetostatica permette di vedere chiaramente le proprietà fondamentali del campo magnetico, e, per questo motivo, storicamente precede una qualunque comprensione dell'elettrodinamica.

Una delle prime osservazioni effettuate sui magneti è la cosiddetta **assenza di monopoli**: l'attrazione e la repulsione magnetica fra corpi magnetizzati non dipende solo dalla loro "carica magnetica", ma anche dalla loro orientazione reciproca. La "carica magnetica" non è quindi uno scalare, ma un vettore; questa è chiamata **momento di dipolo magnetico** per analogia fra le leggi fisiche che regolano il dipolo magnetico ed il dipolo elettrico.

In presenza di magneti i dipoli si orientano parallelamente a quelle che, per definizione, sono le linee del campo di induzione magnetica $\vec{B}$, spesso chiamato semplicemente campo magnetico. Detto $\vec{\tau}$ il momento torcente agente sul dipolo magnetico si ha:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Nella storia della fisica non vennero fatti progressi quantitativi finché non venne scoperta la relazione tra correnti elettriche e campi magnetici, il primo passo verso l'unificazione delle due forze.

1.2 Correnti elettriche

Una corrente elettrica è uno spostamento di cariche attraverso lo spazio ed è descritta dal vettore di **densità di corrente**:

$$\vec{J}(\vec{r}) \equiv \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}),$$

dove $\vec{v}$ è la velocità a cui si muove la carica di densità ρ . Nel sistema internazionale di unità di misura $[\vec{J}] = \text{Am}^{-2}$. La più familiare corrente I attraverso una superficie S è il flusso di $\vec{J}$ attraverso S :

$$I \equiv \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

La legge della conservazione della carica impone che, per ogni intervallo di tempo, la quantità di carica uscente attraverso una data superficie chiusa sia uguale ed opposta alla variazione della carica nel volume racchiuso dalla superficie, ovvero $I_S dt = -dQ_{\text{int}}$; facendo tendere a zero l'intervallo di tempo si ha:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = 0 \quad (1)$$

Quest'equazione è la forma integrale dell'**equazione di continuità**. Questa compare in molte aree della fisica, e descrive in modo completo la variazione di quantità continue nello spazio in funzione del loro spostamento, in questo caso dato dal flusso di corrente. Questa equazione non compare fra le leggi di Maxwell solo perché, nella loro forma completa, queste la implicano.

La magnetostatica si propone di studiare situazioni stazionarie nelle correnti e nella densità di carica¹, in cui la carica netta contenuta in una qualsiasi regione di spazio rimane costante nel tempo. Per la (1) otteniamo:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2)$$

Questo ha un'importante conseguenza: in magnetostatica è ben definito il **flusso di corrente concatenato** ad una curva chiusa², ovvero per ogni superficie S_γ con bordo in una stessa curva chiusa γ il flusso di $\vec{J}$ attraverso S_γ è sempre lo stesso, purché si usi la regola della mano destra per scegliere l'orientazione di S_γ (si veda la sezione 1.4).

1.3 La legge di Biot e Savart

Nel 1819 Ørsted osservò che le correnti elettriche generavano una deflessione permanente dei dipoli magnetici nelle vicinanze. A partire da questo fatto, che le correnti elettriche interagiscono con il campo magnetico, cominciò un processo di astrazione che si concluse con la dichiarazione che *il campo magnetico è mediatore delle forze fra correnti* e con la riduzione di ogni “carica magnetica” ad una corrente. Biot e Savart (1820) e dopo Ampère (1825) posero le basi per la comprensione sperimentale della relazione tra le correnti e il campo $\vec{B}$; detto $d\vec{\ell}$ un elemento di lunghezza del circuito orientato nel verso

¹È facile vedere che esistono distribuzioni stazionarie di corrente che non lasciano invariata la distribuzione di carica, ma si noti che è anche possibile avere una distribuzione di carica stazionaria con una distribuzione di corrente variabile (se $\vec{J}(\vec{r})$ lascia invariata la distribuzione di carica, anche un qualunque $\alpha(t)\vec{J}(\vec{r})$ lascia la stessa distribuzione invariata). La magnetostatica esclude entrambe le possibilità.

²Si veda il problema 5.1.

della densità di corrente, I la corrente elettrica, e $\vec{r}'$ la posizione dell'elemento di lunghezza, si ha³:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

detta γ la curva delineata dal circuito dove scorre la corrente I , si ottiene integrando:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (3)$$

Astraendo dai circuiti alle densità di corrente possiamo pensare di formulare una legge più generale sostituendo a $I d\vec{\ell} = \vec{J} d^3r'$:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'} \quad (\text{legge di Biot-Savart})$$

dove l'integrale è stato esteso alla regione di spazio in cui sono presenti densità di corrente. Nel caso di una carica puntiforme di carica q e velocità $\vec{v}$ questa si riduce a:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \epsilon_0\mu_0 \vec{v} \times \vec{E}(\vec{r}).$$

In questa legge, nelle sue varie formulazioni, compare la costante universale $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$ detta *permeabilità magnetica del vuoto*. Si noti che questa legge descrive un fenomeno non magnetostatico, a causa del moto della particella, ma rimane comunque valida a basse velocità.

Mentre l'esperimento di Biot e Savart quantifica come le correnti generino un campo magnetico, gli esperimenti di Ampère quantificano la forza esercitata dal campo magnetico su una corrente. Un elemento infinitesimo di corrente $I d\vec{\ell}$ subisce in un campo $\vec{B}$ una forza:

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

Astraendo come prima dai circuiti otteniamo:

$$\vec{F} = \int \vec{J} \times \vec{B} d^3r, \quad (4)$$

³Nonostante questa legge possa sembrare equivalente alla legge di Coulomb, c'è una differenza sostanziale: mentre è possibile fisicamente isolare una carica elettrica, è fisicamente impossibile, a causa dell'equazione di continuità, isolare un elemento di corrente elettrica. Questa formula differenziale può essere un utile strumento concettuale, ma fisicamente solo la formula integrale (3) ha senso. Questo non è un problema di piccola rilevanza: il fatto che le interazioni magnetiche siano interazioni *fra circuiti*, e non fra cariche, le rese molto più difficili da studiare.

che per una particella con carica q e velocità $\vec{v}$ si riduce a:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B},$$

che è l'espressione per il contributo magnetico alla forza di Lorentz. Si noti come il campo magnetico non compia lavoro, essendo $\vec{F} \perp \vec{v}$.

Per mostrare le conseguenze macroscopiche di queste leggi calcoliamo la forza che un circuito percepisce in presenza di un secondo circuito. Chiamando 1 e 2 le grandezze relative al rispettivo circuito, $\vec{r}_{12}$ nell'integrale il vettore che indica la distanza fra gli elementi di lunghezza $d\vec{\ell}_1$ e $d\vec{\ell}_2$, e chiamando $\vec{F}_{12}$ la forza sul secondo circuito causata dal primo:

$$\vec{F}_{12} = \oint_{\gamma_2} I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1 = \oint_{\gamma_2} I_2 d\vec{\ell}_2 \times \left(\oint_{\gamma_1} \frac{\mu_0 I_1 d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12}}{4\pi |\vec{r}_{12}|^3} \right).$$

Riordinando l'espressione otteniamo:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \times (d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}.$$

Si può manipolare ulteriormente questa formula usando l'identità vettoriale⁴ soprannominata BAC-CAB, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, con la quale si ottiene:

$$\frac{d\vec{\ell}_2 \times (d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3} = -(d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1) \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} + \left(d\vec{\ell}_2 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} \right) d\vec{\ell}_1,$$

dove il secondo termine, integrando lungo γ_2 , si annulla dato che $\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$ è un multiplo scalare del campo elettrostatico di una carica puntiforme, che essendo conservativo ha circuitazione nulla su curve chiuse. Si ottiene quindi:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2,$$

che mostra, dato che $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$, la validità della terza legge di Newton, ovvero $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, e che in particolare $\vec{F}_{11} = \vec{F}_{22} = 0$.

Si può inoltre discutere il momento torcente su una distribuzione di corrente dovuto ad un campo magnetico. Senza inoltrarci nell'argomento lasciamo solo la formula generale ricavabile dalla (4) tramite la definizione di momento torcente rispetto ad un polo $\vec{r}_0$:

$$\vec{\tau} = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\vec{J} \times \vec{B}) d^3r.$$

⁴Le identità vettoriali sono un utile strumento, ma in genere non hanno alcuna profondità concettuale: la loro dimostrazione è solitamente una semplice verifica.

1.4 Le leggi di Maxwell per la magnetostatica

Le leggi dell'elettromagnetismo sono spesso espresse nella forma delle leggi di Maxwell, che racchiudono in modo compatto e completo una descrizione dei fenomeni dell'elettrodinamica classica. I fenomeni magnetostatici di cui finora abbiamo parlato possono essere descritti dalle equazioni:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{assenza di monopoli})$$
$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (\text{legge di Ampère})$$

dove nella prima equazione S è una qualsiasi superficie chiusa, e nella seconda equazione γ è una qualsiasi curva chiusa e S_γ una qualsiasi superficie con bordo γ (avevamo visto come la scelta di S_γ non cambia il valore dell'integrale, e che quindi la corrente concatenata ad una curva è ben definita).

La prima legge riflette l'assenza di cariche magnetiche libere; le linee di campo prodotte dai dipoli magnetici, come quelle prodotte dai dipoli elettrici, sono linee chiuse, quindi il loro flusso attraverso una superficie chiusa è nullo.

La seconda legge invece esprime, in modo equivalente alla legge di Biot-Savart, la relazione fra le correnti ed il campo magnetico; questa formulazione ha il vantaggio di facilitare, in casi di particolare simmetria, la computazione del campo magnetico nello spazio⁵. Inoltre questa formulazione permette di osservare una certa asimmetria fra i campi: il campo elettrico dipende dalla densità di carica tramite una relazione di flusso, mentre il campo magnetico dipende dalla densità di corrente tramite una relazione di circuitazione.

Per dare senso matematico alla seconda legge è necessario utilizzare la convenzione della mano destra: se i vettori tangenti alla curva $d\vec{\ell}$ hanno il verso delle dita della mano destra, i vettori normali alla superficie $d\vec{S}$ hanno il verso del pollice. Questa convenzione, insieme a quella del flusso uscente da una superficie chiusa, è di gran lunga la più utilizzata nella letteratura (dato che evita in molte formule un segno meno).

1.5 Dipolo magnetico

Come detto nella lezione di elettrostatica, il campo di dipolo è il campo generato da due particelle con carica $\pm q$ separate da una distanza $\vec{d}$ piccola; il momento di dipolo di questa configurazione di cariche è poi definito come $\vec{p} = q\vec{d}$. Per una qualsiasi distribuzione di carica – che assumeremo per

⁵Si vedano ad esempio le distribuzioni di corrente del solenoide infinito, del piano di corrente, del filo infinito, ed il problema 5.3. Un breve approfondimento teorico sulla questione delle simmetrie si trova nella sezione 4.2.

semplicità avere carica totale nulla – si può inoltre definire un momento di dipolo:

$$\vec{p} \equiv \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3r',$$

una grandezza tale che il campo generato dalla configurazione di cariche è approssimabile a grandi distanze a quello di un dipolo elettrico di valore $\vec{p}$ posizionato nell'origine (il punto dove $\vec{r}' = 0$ nell'integrazione di $\vec{p}$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - r^2\vec{p}}{r^5}.$$

Si può fare, con qualche difficoltà in più, un'operazione analoga per il campo magnetico; a causa dell'assenza di cariche nette magnetiche, per una qualsiasi distribuzione di correnti localizzate l'approssimazione di dipolo sarà quella dominante in ogni approssimazione del campo magnetico a grande distanze (mentre per il campo elettrico il termine dominante è il monopolo $\frac{Q_{\text{tot}}}{r^3}\vec{r}$). La formula ottenuta è la seguente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2\vec{m}}{r^5}$$

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d^3r'.$$

Si possono osservare le analogie con la formula per il dipolo elettrico a grandi distanze. Si può inoltre notare che se abbiamo una distribuzione di corrente $\vec{J}(\vec{r})$ localizzata in una regione finita di spazio, le leggi di Maxwell per la magnetostatica assumono la forma di *flusso e circuitazione nulli* in ogni regione di spazio distante dalla distribuzione di corrente, dove noi ci proponiamo di calcolare $\vec{B}$; nella situazione elettrostatica equivalente, le leggi di Maxwell per il campo elettrico assumono la stessa forma, quindi la formula data rispetta le leggi del campo magnetico. Per una traccia di ricavazione rigorosa, ma anche più laboriosa, si fa riferimento alla sezione 4.6. Per un'utile applicazione di questo strumento di approssimazione si veda il problema 5.4, dove si ricava che per una spira piana di superficie S si ha:

$$\vec{m} = IS\hat{n}.$$

Nota: leggere la prossima parte (i.e. la 1.6) non è necessario per comprendere le idee esposte nelle sezioni successive; sarà sufficiente ricordare che nel vuoto sono vere le leggi $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ e $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$. Queste leggi rimangono vere in alcuni materiali sostituendo degli opportuni ϵ e μ a ϵ_0 e μ_0 .

1.6 Cenni di magnetismo nella materia

Secondo il modello atomico di Rutherford, l'atomo di idrogeno è formato da un elettrone in orbita circolare attorno ad un protone posto al centro dell'orbita. Detto T il periodo dell'orbita si può approssimare l'orbita ad una corrente statica d'intensità $I = -\frac{e}{T}$ che scorre in una circonferenza di raggio r_0 (per l'idrogeno circa $0.5 \text{ \AA} = 5 \times 10^{-10} \text{ m}$).

A distanze molto maggiori di r_0 , il campo magnetico dell'atomo di idrogeno, si può approssimare al campo di dipolo relativo all'elettrone, che ha un momento pari a:

$$\vec{m} = IS\hat{n} = -\frac{\pi r_0^2 e}{T}\hat{n}.$$

Queste correnti microscopiche sono dette **correnti amperiane**, e contribuiscono al campo magnetico effettivamente presente in un mezzo materiale:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_{\gamma}} (\vec{J} + \vec{J}_m) \cdot d\vec{S},$$

dove $\vec{J}_m$ è la densità media delle correnti microscopiche. Spesso un materiale su cui non agisce alcuna forza esterna ha $\vec{J}_m$ nullo, dato che l'orientazione delle singole correnti sarà localmente distribuita in modo casuale. Ma campi esterni o proprietà intrinseche del materiale possono portare i dipoli microscopici ad orientarsi in media in un verso preferenziale, come ad esempio avviene in un magnete; questo comportamento può essere descritto dal concetto di "densità di dipolo", che è realizzato nella grandezza fisica detta **magnetizzazione**:

$$\vec{M}(\vec{r}) \equiv \frac{dN}{dV} \langle \vec{m} \rangle,$$

ovvero la media volumica *locale* del momento di dipolo. Definiamo ora il campo magnetico $\vec{H}$, detto anche intensità magnetica (grandezza distinta da $\vec{B}$, propriamente chiamata induzione magnetica):

$$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}}$$

Nei materiali questa grandezza sostituisce $\vec{B}$ nella legge di Ampère:

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_{\gamma}} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (5)$$

dove $\vec{J}$ non include le correnti amperiane, ma solo quelle macroscopiche; $\vec{H}$ è la controparte macroscopica di $\vec{B}$ (come lo è $\vec{D}$ per $\vec{E}$, anche se nelle leggi

di Maxwell $\vec{H}$ e $\vec{D}$ hanno ruoli invertiti ($\vec{E}$ e $\vec{H}$ compaiono nelle leggi di circuitazione, mentre $\vec{D}$ e $\vec{B}$ in quelle di flusso)).

Per poter però effettivamente trattare la magnetostatica nei materiali in modo macroscopico è necessario esplicitare $\vec{M}$ in funzione dei campi agenti sul materiale e di una qualche costante fenomenologica che racchiuda le informazioni fondamentali sulla struttura microscopica del materiale. Questo non è possibile in tutti i materiali, ma in quelli isotropi ed omogenei, per valori di $\vec{B}$ non troppo elevati, vale la relazione:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (6)$$

data dalla relazione lineare fra intensità magnetica e magnetizzazione magnetica $\vec{M} = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\vec{H}$. La costante μ è detta permeabilità magnetica del materiale⁶. Nel problema 5.5 si ricava dalle leggi di Maxwell che all'interfaccia di due mezzi con permeabilità magnetiche μ_1 e μ_2 valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{J}_S, \end{aligned}$$

dove $\hat{n}$ è la normale alla superficie fra i due mezzi nel verso $1 \rightarrow 2$ nel punto considerato, e $\vec{J}_S$ è la densità di corrente *libera* superficiale sull'interfaccia tra i due mezzi (la corrente libera è quella causata da fenomeni macroscopici, distinti da quelli relativi alla magnetizzazione del materiale). Si ha quindi in particolare che in assenza di correnti libere sono continue all'interfaccia le grandezze $\vec{B}_\perp$ e $\vec{H}_\parallel$. Osserviamo infine che la legge di Ohm e l'effetto Joule, leggi sulle correnti libere in materiali ohmici (discusse nella sezione 3), assumono le espressioni $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ e $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$ dove σ è la conducibilità del materiale e $p = \frac{dP}{dV}$ è la densità volumica di potenza dissipata.

2 La terza e la quarta legge di Maxwell

2.1 La legge di Faraday e l'elettrodinamica nei sistemi di riferimento in moto relativo

Nel 1831, Faraday studiò il comportamento di circuiti posti in campi magnetici che variano nel tempo. Possiamo riassumere [Gri17] le sue osservazioni fondamentali mediante tre fenomeni empiricamente verificati (figura 1):

⁶ μ/μ_0 è ≈ 1 per materiali non magnetici, solitamente fra 1 e 10^6 per paramagneti e ferromagneti (ferromagneti più saturi hanno μ più piccolo), fra 0 e 1 per diamagneti, e 0 per superconduttori.

1. **Circuito in movimento.** Spostando un circuito fuori da un campo magnetico, una corrente scorre nel filo.
2. **Magnete in movimento.** Spostando la sorgente del campo magnetico, nuovamente una corrente scorre nel filo.
3. **Variazione di intensità.** Facendo variare l'intensità del campo magnetico, anche questa volta una corrente scorre nel circuito. Faraday usò un elettromagnete di cui fece cambiare l'intensità di corrente.

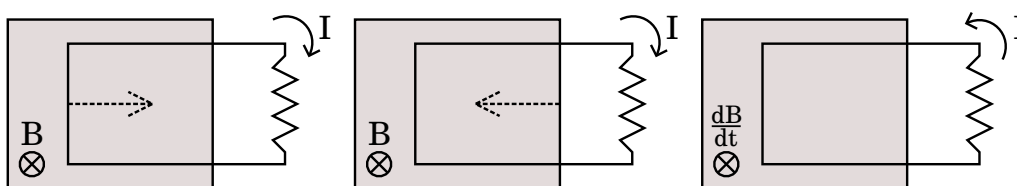


Figura 1: i tre fenomeni principali di induzione magnetica.

Faraday interpretò la comparsa di una corrente come conseguenza della variazione del flusso del campo magnetico attraverso il circuito. Per formulare questa legge definiamo due grandezze fisiche: $\mathcal{E}$ e $\Phi(\vec{B})$. Pensando il circuito come una curva chiusa γ tracciata nello spazio, la variazione di flusso magnetico induce un campo elettrico del quale possiamo definire⁷ la **forza elettromotrice** lungo γ come l'integrale su γ del campo elettrico indotto $\vec{E}'$:

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell},$$

e detta S_{γ} una superficie⁸ che ha come bordo la curva γ , che delinea il circuito, possiamo scrivere il flusso del campo magnetico come:

$$\Phi(\vec{B}) \equiv \int_{S_{\gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

È importante chiarire subito che la scelta del sistema di riferimento non è indifferente: indicheremo con $\vec{E}'$ il campo elettrico indotto dal campo

⁷Come in seguito discuteremo, il nostro approccio non è relativistico; questo si manifesta già nella nostra definizione di $\mathcal{E}$, dove utilizziamo nella stessa formula grandezze fisiche ed oggetti geometrici appartenenti a sistemi di riferimento diversi, trascurando quindi effetti come la contrazione delle lunghezze su γ . La presentazione è pensata a partire dallo studio dei circuiti, dove $\mathcal{E} = IR$ ha come interpretazione naturale la definizione di sopra.

⁸Per circuiti planari è naturale prendere la superficie piana racchiusa dalla curva, ma in generale è possibile considerare una qualunque superficie nello spazio ed ottenere risultati equivalenti. Si veda il problema 5.1.

magnetico *nel sistema di riferimento solidale al circuito*, mentre con $\vec{B}$ il campo magnetico presente nel laboratorio. Le osservazioni di Faraday sono così espresse con la seguente legge:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}.$$

Nel segno del membro di destra è manifesta la **legge di Lenz**: la variazione di flusso del campo magnetico induce una corrente che genera un campo magnetico il cui flusso si oppone alla variazione originaria di flusso.

Scriviamo ora più esplicitamente questa legge, nei termini del campo elettrico indotto e del flusso del campo magnetico,

$$\oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}, \quad (7)$$

per poter studiarne le conseguenze alla luce del principio di invarianza galileiana, valido solo nel limite in cui $v \ll c$. Abbiamo esplicitato nel membro a destra dell'equazione (7) la dipendenza dal tempo delle quantità in gioco per ricordare che non è il solo campo magnetico a evolvere nel tempo. In altre parole, a seconda dei casi che considereremo, non sarà sempre il campo magnetico il solo a variare nel tempo, ma anche la posizione del circuito, o più precisamente la superficie che questo individua, cioè il dominio di integrazione stesso. Se non considerassimo questo dettaglio e ci limitassimo a derivare sotto il segno di integrale, nel primo esperimento, caratterizzato da $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, concluderemmo erroneamente che non vi sono correnti indotte ($\mathcal{E} = 0$). Cerchiamo di riscrivere la derivata nell'equazione (7) in modo che questi due aspetti della dipendenza temporale siano più chiari e distinti:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_{\gamma}(t+\delta t)} \vec{B}(t+\delta t) \cdot d\vec{S} - \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}}{\delta t} =$$

approssimiamo $\vec{B}(t+\delta t)$ con il suo sviluppo al prim'ordine $\vec{B}(t) + \delta t \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t)$, poiché nel calcolo di questa derivata – come vedremo – è quello rilevante:

$$= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{S_{\gamma}(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}}{\delta t} + \int_{S_{\gamma}(t+\delta t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t) \cdot d\vec{S} \right) =$$

eseguendo il limite sul secondo addendo otteniamo:

$$= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_{\gamma}(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}}{\delta t} + \int_{S_{\gamma}(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t) \cdot d\vec{S}. \quad (8)$$

Per il primo limite cerchiamo di riscrivere l'espressione a numeratore in una forma più comoda da trattare, grazie ad alcune manipolazioni la cui interpretazione può essere facilitata dalla figura 2.

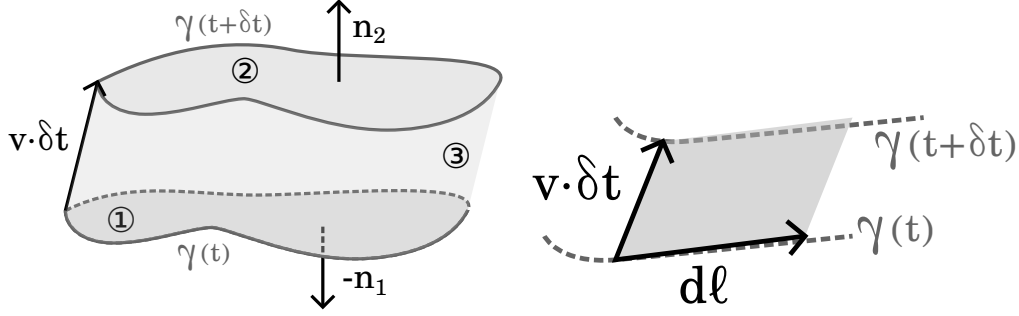


Figura 2: schema dell'evoluzione temporale della curva.

Se nell'espressione a numeratore cambiamo il verso di $S_\gamma(t)$ (con $d\vec{S} \mapsto -d\vec{S}$) e pertanto anche il segno davanti al rispettivo integrale, otteniamo:

$$\int_{S_\gamma(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S_\gamma(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = \int_{S_\gamma(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \int_{S_\gamma(t)} \vec{B}(t) \cdot (-d\vec{S})$$

che rappresenta il flusso del campo magnetico attraverso le superfici 1 e 2 in figura. Sappiamo che il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è nullo, e dato che la superficie $1 + 2 + 3$ è chiusa, si ha che il numeratore si può riscrivere come il flusso, cambiato di segno, di $\vec{B}(t)$ attraverso la superficie 3.

Esaminiamo adesso in dettaglio lo spostamento del circuito che delinea la superficie 3. L'elemento infinitesimo di superficie, che si riduce a un parallelogramma di lati $d\vec{\ell}$ e $\vec{v}\delta t$, ha una superficie descritta dal vettore $d\vec{S} = d\vec{\ell} \times \vec{v}\delta t$: il modulo è l'area del parallelogramma, il verso è quello che scegliamo per la superficie, cioè quello uscente, come è possibile verificare mediante la regola della mano destra. Il flusso del campo magnetico attraverso questo elemento di superficie è $d\vec{S} \cdot \vec{B} = (d\vec{\ell} \times \vec{v}\delta t) \cdot \vec{B} = (\vec{v}\delta t \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$. Abbiamo qui usato l'identità vettoriale del prodotto triplo $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$. Ora, per trovare il flusso complessivo attraverso la superficie 3, non resta che integrare il risultato ottenuto per la superficie infinitesima lungo l'intero circuito.

$$\int_{S_\gamma(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S_\gamma(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = -\delta t \oint_{\gamma(t)} (\vec{v} \times \vec{B}(t)) \cdot d\vec{\ell},$$

da cui otteniamo il limite che volevamo calcolare:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_\gamma(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = \int_{S_\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \oint_{\gamma} (\vec{v} \times \vec{B}(t)) \cdot d\vec{\ell}.$$

Alla luce di tutto questo, riscriviamo l'equazione (7) nella forma che ci interessa studiare:

$$\boxed{\oint_{\gamma} (\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = - \int_{S_\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S}} \quad (9)$$

Ricordiamo che stiamo indicando con $\vec{v}$ la velocità del circuito rispetto al laboratorio, che $\vec{B}$ è espresso in termini delle coordinate spaziali del laboratorio, e che $\vec{E}'$ è il campo elettrico indotto nel circuito misurato nel sistema di riferimento del circuito stesso⁹, dove $d\vec{\ell}$ è a riposo; a questo punto non è più necessario specificare la dipendenza o l'indipendenza dal tempo di S_γ , dato che tutte le derivate temporali compaiono dentro gli integrali.

Cambiamo prospettiva. La legge (7) riassume una serie di osservazioni empiriche effettuate tramite lo studio delle correnti nei conduttori, ma astraendo dagli esperimenti di Faraday possiamo intuire che l'esistenza del campo elettrico indotto prescinde dalla presenza del circuito: questo è solo uno strumento che permette di misurare la variazione di campo elettrico in una data regione di spazio. La (7) è quindi fondamentalmente una relazione tra i campi $\vec{E}'$ e $\vec{B}$. Se il flusso di un campo magnetico varia, anche in assenza di un circuito, la circuitazione del campo elettrico lungo una curva η qualunque può essere comunque calcolata, perché il campo $\vec{E}'$ è effettivamente presente. È quindi ben definito il campo elettrico $\vec{E}$ misurato nel laboratorio, e ne possiamo calcolare la circuitazione lungo la curva η . Possiamo ad esempio scegliere $\eta(t) \equiv \gamma(t_0)$, ovvero la curva relativa al circuito nella sua posizione ad un dato tempo fissato nel sistema del laboratorio. Dato che il dominio di integrazione η non dipende dal tempo, la (9) riferita al campo elettrico $\vec{E}$ si scriverà ponendo $\vec{v} = 0$:

$$\oint_{\eta} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{S_\eta} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}. \quad (10)$$

Dato che però al tempo t_0 le curve γ e η coincidono, possiamo imporre scegliendo $S_\gamma = S_\eta$ che i membri di sinistra delle equazioni (9) e (10) siano

⁹Infatti la forza elettromotrice che abbiamo considerato inizialmente è una grandezza “legata al circuito” e non allo spazio del laboratorio: nel laboratorio è possibile misurare $\vec{E}'$ solo grazie alle correnti generate nel circuito, che però “vivono” nel sistema di riferimento del circuito stesso. Distinguiamo quindi $\vec{E}'$ da $\vec{E}$, anche se questi coincidono se il circuito è stazionario (ovvero quando i sistemi del laboratorio e del circuito coincidono).

uguali, ottenendo in particolare per l'arbitrarietà della scelta di γ :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}.$$

Questo risultato è alquanto sorprendente, per quanto valido solo per velocità $v \ll c$ (abbiamo infatti usato implicitamente le trasformazioni di Galileo nei passaggi per ricavare la (9) dalla (7)): il campo elettrico $\vec{E}'$ di cui una carica q in moto nel laboratorio fa esperienza differisce dal campo $\vec{E}$ percepito da una carica ferma di $\vec{v} \times \vec{B}$. Avviene quindi, nel cambio di sistema di riferimento, una trasformazione del campo magnetico in campo elettrico: questi sono infatti manifestazioni di un'unica entità fisica, detta **campo elettromagnetico**, le cui componenti elettriche e magnetiche trasformano in generale secondo le trasformazioni di Lorentz per il campo elettromagnetico. Pur essendo questa una proprietà delle leggi di Maxwell, le sue conseguenze furono scoperte e studiate solo dopo la formulazione della relatività speciale.

Tornando alla nostra carica in moto, per discutere un punto di vista più moderno rispetto a quello circuitale, osserviamo che la legge di trasformazione appena ricavata ricorda l'espressione per la forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Questo non è un caso: dato che i due sistemi di riferimento appena studiati sono entrambi inerziali, le forze percepite in questi sistemi devono essere classicamente le stesse, ed applicando la legge di forza per il campo elettromagnetico in entrambi i sistemi, si ottiene correttamente (non dimenticando che $\vec{E}$ ed $\vec{E}'$ sono i campi indotti dalle variazioni nel tempo di $\vec{B}$ e $\vec{B}'$):

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{F}. \quad (11)$$

Notiamo però che nei due sistemi di riferimento la nostra teoria spiega questa stessa forza in modo diverso. Se assumiamo ad esempio che $\vec{E} = 0$ nel sistema del laboratorio, si ha che qui la forza è data dal moto di una carica in un campo magnetico, mentre nell'altro sistema le variazioni temporali del campo magnetico $\vec{B}'$ inducono un campo elettrico $\vec{E}'$ che esercita una forza – la stessa – sulla carica; più esplicitamente i primi due fenomeni descritti all'inizio della sezione e rappresentati nella figura 1, che risultano totalmente simmetrici e dipendenti solo dal moto relativo, sono descritti dalla teoria di Maxwell in modo diverso: il primo tramite la forza di Lorentz, il secondo tramite l'induzione magnetica di un campo elettrico (si vedano i due addendi della (8)); le trasformazioni dei campi al variare del sistema di riferimento rendono coerenti le due visioni. Questa asimmetria nella spiegazione è proprio uno dei motivi che spinse Einstein a formulare la relatività speciale e la versione corretta delle leggi di trasformazione del campo elettromagnetico (in un articolo con un titolo non a caso molto simile a quello di questa sezione).

Ora è lecito chiedersi come comportarsi se si aggiunge nel laboratorio un eventuale campo elettrostatico $\vec{E}_0$, generato da una distribuzione di carica $\rho(\vec{r})$, oltre al campo $\vec{E}$ descritto in precedenza (la differenza principale fra $\vec{E}_0$ ed $\vec{E}$ è la circuitazione nonnulla del secondo a causa della (7)). Per il principio di sovrapposizione lineare, che è valido tanto nel caso statico quanto in quello dinamico, possiamo affermare che il campo elettrico agente complessivamente sulla carica q è $\vec{E}_0 + \vec{E}$, quindi $\vec{F} = q(\vec{E}_0 + \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Spostiamoci ora nel sistema di riferimento della carica q . Dopo quanto visto finora, non possiamo limitarci ad affermare che nel sistema della particella la distribuzione di carica ρ produce solamente un campo elettrico $\vec{E}_0$ (che è a tutti gli effetti presente, dato che la particella ne fa esperienza, alla luce del principio di relatività galileiana). La distribuzione di carica, in moto nel sistema della particella, produce anche un campo magnetico¹⁰, in quanto è vista anche come una densità di corrente $\vec{J} = -\rho(\vec{r})\vec{v}$ che genera quindi un campo magnetico $\vec{B}'$ dato dalla legge di Biot-Savart:

$$\begin{aligned}\vec{B}'(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{v} \times \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = \\ &= -\mu_0\epsilon_0 \vec{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = -\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_0(\vec{r}),\end{aligned}$$

dove abbiamo definito $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}}$, che nella sezione 4.4 è mostrata essere la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche. Dunque, se nel laboratorio è presente il campo stazionario $\vec{E}_0$, allora la particella farà esperienza di un campo magnetico $\vec{B}' = -\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_0$ nel sistema in cui è ferma.

Riassumendo queste ultime considerazioni, possiamo dire che, detti $\vec{E}$ e $\vec{B}$ i campi elettromagnetici nel sistema del laboratorio, e detti $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ i campi elettromagnetici nel sistema in moto¹¹:

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{B}' = -\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} + \vec{B}, \end{cases}$$

o, utilizzando solo formalmente una notazione matriciale, e considerando le grandezze omogenee $\vec{E}$ e $c\vec{B}$:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\vec{v}}{c} \times \\ -\frac{\vec{v}}{c} \times & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix}.$$

¹⁰Si pensi ad esempio a un filo in cui scorre corrente; solitamente il campo elettrico prodotto è nullo perché il filo è complessivamente neutro, ma se fosse carico produrrebbe anche un campo elettrico.

¹¹Questa notazione differisce dalla precedente, dove si distinguono i campi statici da quelli indotti.

Per come è stata ricavata – calcolando dei termini correttivi a piccole velocità – questa trasformazione è un'approssimazione al prim'ordine in v/c della trasformazione di Lorentz per il campo elettromagnetico. Notiamo infatti che cambiando il segno di $\vec{v}$ non otteniamo la trasformazione inversa (compaiono dei termini di second'ordine), violando il principio di relatività – un'ulteriore conferma del fatto che i campi elettromagnetici non trasformano in modo coerente sotto il principio di invarianza galileiana. Utilizzando i risultati ricavati nella sezione 4.3 si può anche osservare che l'energia del campo elettromagnetico non rimane invariata sotto questa trasformazione¹².

2.2 La legge di Ampère-Maxwell

Possiamo ora scrivere le leggi di Maxwell, nella misura in cui le abbiamo conosciute fino a questo punto (dove nella legge di Faraday consideriamo le grandezze nel sistema del laboratorio, ed una curva stazionaria):¹³

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}} \quad (\text{legge di Gauss})$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{assenza di monopoli})$$

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{S_\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{legge di Faraday})$$

$$\oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{legge di Ampère})$$

Notiamo come la legge di Ampère sia stata ricavata sotto l'assunzione che $\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$: risulta cioè valida, al momento, solamente per la magnetostatica. Applichiamo la legge di Ampère a due superfici S_1 e S_2 il cui bordo γ è in comune, ma la cui orientazione è opposta (cioè una è delimitata da γ mentre l'altra da $-\gamma$), e sommiamo membro a membro:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{-\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{-\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \longrightarrow \quad 0 = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, \end{aligned}$$

dove S è la superficie data dall'unione di S_1 e S_2 , che racchiude un volume V_S .

¹²Questo non è un errore dovuto all'approssimazione fatta, come mostra un'analisi attenta degli ordini di grandezza in gioco, ma un effetto fisico reale (qualitativamente si può ad esempio pensare all'effetto Doppler come manifestazione del fenomeno).

¹³Per le definizioni di $\vec{D}$ e $\vec{H}$ leggere la sezione 1.6, o la nota che la precede.

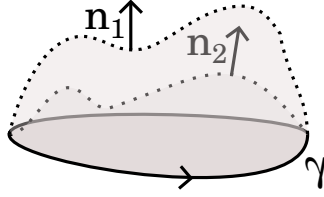


Figura 3: due superfici concatenate ad una stessa curva formano una superficie chiusa se si cambia orientazione ad una delle due superfici.

Ci siamo quindi ricondotti all'equazione che caratterizza la magnetostatica. Se però riprendiamo l'equazione di continuità ed applichiamo la legge di Gauss otteniamo:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial Q_{\text{int}}}{\partial t} = 0 \rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0.$$

Se precedentemente era quindi $\vec{J}$ ad avere flusso nullo, cosa che ci permetteva nella legge di Ampère di scegliere arbitrariamente la superficie di integrazione S una volta dato il suo bordo γ , ora ad avere flusso nullo è una sua versione generalizzata: $\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, ottenuta sommando alla corrente di carica la cosiddetta **corrente di spostamento**¹⁴. Se quindi sostituiamo $\vec{J}$ con $\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ nella legge di Ampère otteniamo¹⁵:

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_{\gamma}} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (\text{legge di Ampère-Maxwell})$$

In questo modo otteniamo finalmente – nella loro forma integrale – le quattro leggi di Maxwell per l'elettrodinamica. Come discusso ampiamente nella sezione 4.4, queste sono equazioni lineari del prim'ordine che descrivono in modo completo i due campi vettoriali $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in funzione delle loro sorgenti ρ e $\vec{J}$, e delle proprietà elettromagnetiche locali ϵ e μ ; a causa dei termini dinamici, in queste equazioni è impossibile descrivere $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in modo indipendente. Queste equazioni sono inoltre invarianti sotto le trasformazioni di Lorentz, che trasformano i due campi l'uno nell'altro esclusivamente in funzione della velocità relativa fra due sistemi di riferimento.

¹⁴Per vedere in modo concreto il significato fisico di questa grandezza si consiglia lo svolgimento del problema 5.6.

¹⁵Chiaramente questo passaggio non è guidato esclusivamente dalla matematica: nella formulazione di questa nuova legge stiamo aggiungendo contenuto fisico alle nostre equazioni ($\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ non è l'unico campo a flusso nullo, e non è quindi l'unico campo che si potrebbe scegliere per rendere coerente la legge di Ampère).

3 Circuiti elettrici

Un circuito è un insieme interconnesso di componenti elettrici tra i quali la corrente può fluire con continuità. Questi si possono rappresentare tramite dei diagrammi circuitali, i quali elementi modellizzano i componenti che formano il circuito. Ci interesseremo quasi esclusivamente di alcuni componenti elementari (i fili, e i generatori di tensione e corrente) e dei componenti lineari elementari (i resistori, i capacitori, e le induttanze). Infine discuteremo brevemente come affrontare in generale eventuali componenti non lineari come diodi e transistor.

Questi tipi di componenti possono essere classificati in diversi modi. Per cominciare, li divideremo a seconda del numero di estremità, le quali possono essere collegate ad altri componenti. Tutti i componenti elementari che vedremo saranno **bipoli**, ovvero componenti con due estremità. Altri componenti possono avere più estremità, come il transistor, che è un **tripolo** con tre estremità. Una seconda distinzione è tra elementi **attivi** e **passivi**: i primi richiedono una fonte di lavoro esterna per funzionare, al contrario dei secondi. Solo in presenza di almeno un elemento attivo è possibile avere passaggio di corrente nel circuito. Ad esempio i generatori di tensione e corrente, come anche alcuni componenti non lineari, sono componenti attivi.

Parliamo innanzitutto dell'oggetto fondamentale dei circuiti elettrici, il **filo**, il componente passivo che permette di collegare insieme altri componenti. Questo ha una forma approssimativamente unidimensionale e può essere pensato come un conduttore perfetto che permette il flusso di corrente; perciò le variabili d'interesse relative ad un filo sono il potenziale elettrico V , che ha un valore uniforme sul filo, e la corrente I che scorre lungo la sezione del filo (il segno di I indicherà il verso della corrente in relazione ad una convenzione sul verso del filo).

Altri due tipi di componenti circuitali molto importanti sono i generatori, che sono i più semplici componenti attivi. Il **generatore di tensione** è un componente attivo che impone fra le sue estremità una differenza di potenziale $+\Delta V$ costante nel tempo; per mezzo di essa passerà della corrente, la cui intensità dipenderà dal resto del circuito. Il **generatore di corrente** è un componente attivo che impone la presenza di un dato flusso di una corrente I ; la differenza di potenziale fra le sue estremità dipenderà dal resto del circuito.

Nei diagrammi circuitali i fili sono rappresentati come linee continue, mentre i due tipi di generatori sono rappresentati come in figura 4.

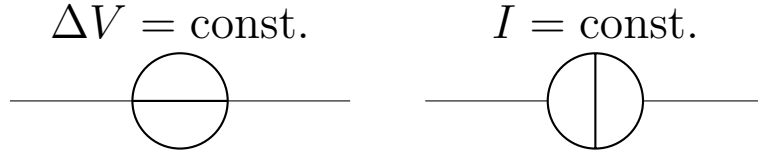


Figura 4: Raffigurazione schematica di un generatore di tensione (a sinistra) e di un generatore di corrente (a destra). La notazione grafica serve a ricordare con cosa sostituire i generatori quando questi sono “disattivati”: il generatore di tensione va sostituito con un circuito chiuso, mentre il generatore di corrente con un circuito aperto. Questo è ciò che si ottiene eliminando il cerchio dalle figure.

3.1 Le leggi di Kirchhoff

Predire il comportamento di un circuito elettrico è un lavoro che si divide in due parti: la corretta modellizzazione del circuito tramite un diagramma circuitale (su cui torneremo fra poco), e la risoluzione delle equazioni date dalle leggi di Kirchhoff applicate al diagramma del circuito.

La **prima legge di Kirchhoff** stabilisce che in un nodo (un vertice in cui si incontrano più fili) la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti:

$$\sum_{\text{nodo}} I_{\text{in}} - \sum_{\text{nodo}} I_{\text{out}} = 0.$$

Questa legge non è altro che una conseguenza dell’equazione di continuità (1) applicata a fili unidimensionali che si incontrano in un punto.

La **seconda legge di Kirchhoff** stabilisce che, facendo il giro di una maglia (ovvero un qualunque cammino chiuso lungo il circuito), la somma delle differenze di potenziale ai capi dei componenti incontrati lungo il giro è nulla:

$$\sum_{\text{maglia}} \Delta V = 0.$$

Questo segue dall’applicazione della terza legge di Maxwell (la legge di Faraday) lungo la curva delineata dalla maglia, nel caso magnetostatico:

$$\sum_{\text{maglia}} \Delta V = \oint_{\text{maglia}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{S_{\text{maglia}}} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Entrambe queste leggi necessitano la scelta arbitraria di una convenzione sui versi dei fili per essere applicate. Notiamo inoltre che queste due leggi dipendono solo da come i vari componenti sono fra loro collegati tramite i fili, mentre sono indipendenti dalla lunghezza, forma, o posizione relativa di

questi¹⁶. Questo ha senso, vista la nostra idealizzazione di un filo come un conduttore perfetto unidimensionale; qualora i fili non possano essere più considerati come ideali, questi potranno sempre essere trattati nel formalismo dei diagrammi circuitali tramite l'aggiunta di altri componenti che ne modellizzano il comportamento (in questo caso solitamente dei resistori, detti resistenze parassite).

Un altro punto da tenere in mente, oltre alla non idealità dei componenti circuitali, è l'assunzione implicita nella seconda legge di Kirchhoff, che eventuali campi magnetici siano (quasi) statici; quest'assunzione di campi elettromagnetici lentamente variabili non è in generale valida, ma sue violazioni possono essere modellizzate tramite l'aggiunta di induttanze (dette parassite), trasformatori, o pure antenne, al diagramma circuitale. Un buon modo per determinare se simili correzioni sono necessarie è confrontare i tempi caratteristici delle variazioni temporali dei segnali nel circuito (ad esempio il periodo di oscillazione di una corrente alternata) col tempo di propagazione di un segnale luminoso lungo il circuito.

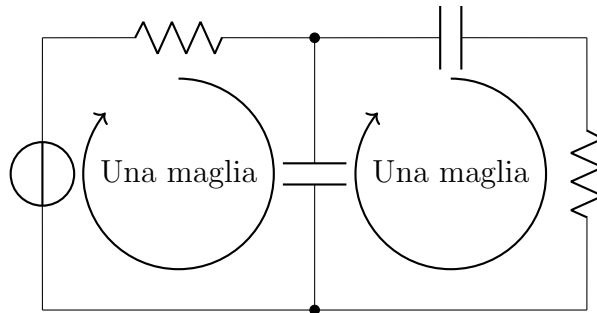


Figura 5: Un circuito a due maglie. Oltre alle due indicate in figura, è presente anche una maglia grande che percorre tutto l'esterno del diagramma circuitale, ma applicare la seconda legge di Kirchhoff a due qualunque di queste maglie permette di ricavare l'equazione relativa alla terza.

3.2 Linearità dei componenti

Nelle equazioni di Maxwell sono presenti due tipi di entità fisiche: i campi e le sorgenti. I campi sono il campo elettrico $\vec{E}$ e il campo magnetico $\vec{B}$, mentre le sorgenti sono la densità di carica ρ e la densità di corrente $\vec{J}$. Il senso delle equazioni vuole essere che la configurazione delle sorgenti modifica la configurazione dei campi. Esistono però anche campi in assenza di sorgenti:

¹⁶Si dice che dei diagrammi circuitali è solo rilevante la topologia.

ad esempio, le onde elettromagnetiche possono propagarsi anche nello spazio vuoto, e la loro presenza o assenza dipende dalle condizioni iniziali.

Una delle proprietà principali delle equazioni di Maxwell è la loro **linearità**. Questo significa che se la configurazione di sorgenti $(\rho_1, \vec{J}_1)$ genera i campi elettromagnetici $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$, e la configurazione di sorgenti $(\rho_2, \vec{J}_2)$ genera i campi $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$, allora la configurazione di sorgenti che in ogni punto è semplicemente la somma delle sorgenti $(\rho_1 + \rho_2, \vec{J}_1 + \vec{J}_2)$ genera i campi dati semplicemente da $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B}_1 + \vec{B}_2)$.

Questa proprietà di linearità è molto utile, e per questo è importante la classe di circuiti che la possiede, i **circuiti lineari**. Per tali circuiti, se due date configurazione $G1/G2$ di generatori (che svolgono il ruolo di sorgenti) producono nel filo n -esimo le tensioni $V_n^{(G1)}/V_n^{(G2)}$ e le correnti $I_n^{(G1)}/I_n^{(G2)}$, allora la “configurazione somma” $G1 + G2$ (data dalla somma dei ΔV dei generatori di tensione e dalla somma delle I dei generatori di corrente) produce tensioni e correnti: $V_n = V_n^{(G1)} + V_n^{(G2)}$ e $I_n = I_n^{(G1)} + I_n^{(G2)}$.

Questa proprietà sarà fondamentale. In circuiti con più di un generatore, è possibile attivarne uno alla volta e risolvere il circuito, per poi sommare le diverse soluzioni. I generatori disattivati vanno sostituiti nel modo seguente: il generatore di tensione viene sostituito con un *cortocircuito*, un semplice filo (in modo che così $\Delta V = 0$), mentre il generatore di corrente viene sostituito con un *circuito aperto*, un filo tagliato (in modo che così $I = 0$).

3.3 I resistori e le leggi di Ohm

Introduciamo ora un nuovo componente passivo chiamato **resistore**, o impropriamente resistenza, indicato nei diagrammi circuitali col simbolo mostrato nella figura 6.

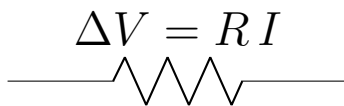


Figura 6: Simbolo del resistore.

La loro proprietà caratteristica è la resistenza elettrica, una grandezza indicata solitamente con R , che soddisfa la seguente equazione lineare, la prima legge di Ohm:

$$\Delta V = RI$$

dove ΔV è la differenza di potenziale ai capi del resistore e I è la corrente che vi fluisce; la convenzione dei segni è tale che la corrente scorra dal capo con

potenziale maggiore a quello con potenziale minore. Nel sistema internazionale di unità di misura la resistenza è misurata in Ohm $[R] = \Omega = \text{VA}^{-1}$.

La prima legge di Ohm può essere vista semplicemente come una definizione del concetto di resistenza, che non è detto che sia indipendente dalla tensione; il contenuto non banale della legge sta nel fatto che per una grande classe di oggetti la prima legge di Ohm è soddisfatta con una resistenza R indipendente dalla differenza di potenziale ai capi. In altre parole, una grande classe di oggetti mostra una relazione lineare tra la differenza di potenziale ai capi e la corrente che ci passa attraverso. La seconda legge di Ohm afferma inoltre che la resistenza R di un oggetto composto da un materiale conduttore chimicamente omogeneo dipende soltanto dalla geometria dell'oggetto e da una proprietà ρ intrinseca del materiale, detta resistività; questa afferma:

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

dove ℓ è la lunghezza dell'oggetto e S è la sua sezione (si pensi a un oggetto con sezione uniforme sulla lunghezza, ad esempio di forma cilindrica). La resistività di un materiale non è però indipendente da ogni altro parametro fisico, e ad esempio ha una dipendenza sensibile dalla temperatura¹⁷. In alcuni casi si parla di conducibilità $\sigma = 1/\rho$.

Utilizzando la legge di conservazione dell'energia, è possibile dalle leggi di Ohm dedurre la potenza persa dalla corrente che attraversa un resistore. Il lavoro compiuto per spostare le cariche è:

$$\Delta L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

La forza che sposta le cariche è la forza elettrica dovuta al campo elettrico $\vec{E}$, che agisce su N cariche di carica q ($\vec{F} = Nq\vec{E}$). Si ha dunque per la potenza:

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{Nq\vec{E} \cdot \Delta \vec{x}}{\Delta t}.$$

Tutto ciò è valido finché la forza, e quindi il campo elettrico, sono uniformi sullo spostamento; in generale sarà necessario considerare spostamenti piccoli e integrare:

$$P = \frac{Nq}{\Delta t} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

Detti A e B gli estremi del resistore, riconosciamo $\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{x}$ e $I = Nq/\Delta t$, per cui una corrente che attraversa una differenza di potenziale

¹⁷Ad esempio molti metalli a temperatura ambiente hanno un aumento della resistività del $\sim 0.5\%$ per ogni grado centigrado.

V perde in energia potenziale una potenza:

$$P = VI.$$

Questa è la legge di Joule. Nei resistori questa energia non è convertita in energia cinetica per le cariche che compongono la corrente, ma in vibrazioni disordinate all'interno del materiale conduttore, che si traducono in calore. Applicando la legge di Ohm possiamo riscrivere:

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}.$$

3.4 I capacitori

Un altro elemento circuitale passivo lineare è il **capacitore**, detto anche condensatore, indicato nei diagrammi circuitali col simbolo mostrato nella figura 7.

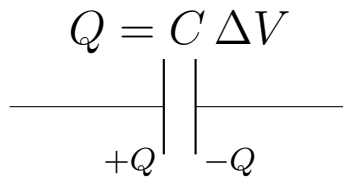


Figura 7: Un capacitore.

I capacitori sono in grado di mantenere, su due elettrodi separati, delle cariche nette $\pm Q$ ad una differenza di potenziale ΔV , e sono caratterizzati dalla loro capacità C , definita da:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}.$$

La grandezza C , similmente alla resistenza R descritta sopra, non dipende esplicitamente da ΔV , ma in questo caso ciò segue semplicemente dalla linearità delle equazioni di Maxwell per l'elettrostatica, che garantisce che a un raddoppiamento nella densità della sorgente corrisponda un raddoppiamento nell'intensità del campo¹⁸.

Nel sistema internazionale di unità di misura la capacità è misurata in Farad $[C] = \text{F} = \text{CV}^{-1}$, ma tipicamente capacitori reali hanno capacità dell'ordine del nF. Un modello idealizzato di capacitore lo rappresenta come

¹⁸A sua volta la linearità delle equazioni di Maxwell segue dalla possibilità di trattare i materiali in modo lineare, con una costante di proporzionalità dielettrica ϵ .

una coppia di lastre parallele di area A e distanza $d \ll \sqrt{A}$ separate da un dielettrico uniforme con permittività ϵ , la cui capacità è:

$$C = \epsilon \frac{A}{d}.$$

Capacitori reali hanno solitamente dimensioni sotto il centimetro, e non somigliano affatto al modello appena descritto; questi possono avere varie forme, e raggiungere differenze di potenziale significative con diverse strategie, che si riducono spesso alla creazione di un'ampia superficie in piccolo spazio. Viste le ridotte dimensioni, non è troppo difficile cominciare a vedere effetti non lineari nel dielettrico che costituisce il capacitore, e quindi dipendenze della capacità dalla differenza di potenziale. Per ΔV eccessivamente grandi, questi effetti non lineari culminano nella rottura del dielettrico (*dielectric breakdown*), ovvero il passaggio di corrente fra i due elettrodi attraverso il dielettrico; la maggior parte dei capacitori può sopportare una tensione massima $V_{\text{breakdown}}$ che può andare da 1V a 1kV.

3.5 Corrente alternata e impedenza

I generatori di potenziale e di corrente usati fin qui sono detti a corrente continua, o DC (*Direct Current*), in quanto emettono segnali, il potenziale V e la corrente I , costanti nel tempo.

È possibile anche introdurre dei generatori di potenziale o corrente che forniscono valori di potenziale o corrente fluttuanti nel tempo. La natura dei principali componenti lineari, oltre alla possibilità di decomporre un segnale generico come somma di segnali sinusoidali, rende molto interessante la scelta di generatori che producono segnali della forma:

$$V = V_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad I = I_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Questi segnali sono detti alternati, o AC (*Alternating Current*). È molto comodo scrivere questa relazione nel seguente modo:

$$V = V_0 \Re(e^{i(\omega t + \varphi)}), \quad I = I_0 \Re(e^{i(\omega t + \varphi)}),$$

dove l'esponenziale di un numero complesso è definito essere

$$e^{a+ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

(ricordiamo che per definizione $i^2 = -1$), e $\Re(a + ib) = a$ è la parte reale di un numero complesso. Rendendo le ampiezze V_0 e I_0 anch'esse numeri complessi, è possibile assorbire le fasi $e^{i\varphi}$ al loro interno:

$$V = \Re(V_0 e^{i\omega t}), \quad I = \Re(I_0 e^{i\omega t}).$$

L'oggetto $e^{i\omega t}$ viene chiamato fasore, perché è la fase angolare di un'onda, ma si tratta tuttavia di un semplice numero complesso, che ruota nel tempo a velocità angolare costante. Com'è solito in questi casi, nel seguito sottintenderemo le parti reali $\Re(\cdot)$; ciò rende formalmente V e I delle grandezze complesse, ma ciò non porta alcun fastidio finché si fanno operazioni lineari. Nel calcolo della potenza $P = VI$ ad esempio ci si trova di fronte ad un prodotto di fasori, ma in generale $\Re(z_1 \cdot z_2) \neq \Re(z_1) \cdot \Re(z_2)$ per due numeri complessi z_1, z_2 (l'espressione da utilizzare è quella a destra).

La linearità è quindi fondamentale: se il generatore di tensione fornisce la tensione V , allora tutte le altre quantità fisiche dipenderanno linearmente da V , e dunque tutte saranno proporzionali al fasore $e^{i\omega t}$. Ad esempio la corrente alternata, quando passa attraverso i resistori, fa in modo che pure la differenza di potenziale abbia un andamento sinusoidale:

$$V = RI \quad \Longrightarrow \quad V_0 e^{i\omega t} = RI_0 e^{i\omega t}$$

quindi è possibile ignorare gli esponenziali e scrivere semplicemente $V_0 = RI_0$. In generale per un componente lineare, la stessa relazione è valida se si sostituisce a R un generico numero complesso Z detto **impedenza** del componente:

$$V_0 = ZI_0.$$

L'impedenza di un resistore è quindi $Z_R = R$. Per i capacitori, anch'essi componenti lineari, sappiamo che la tensione ai capi di questi rispetta:

$$V = \frac{Q}{C},$$

e derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$\frac{d}{dt}V = \frac{I}{C}.$$

Utilizzando le definizioni di V e I con corrente alternata troviamo¹⁹:

$$i\omega V_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{C} I_0 e^{i\omega t}$$

da cui:

$$V_0 = \frac{1}{i\omega C} I_0 \quad \Longrightarrow \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}.$$

Vediamo quindi che, in presenza di corrente alternata, il capacitore si comporta come un resistore con resistenza immaginaria. Notare che anche qui

¹⁹È facile verificare che $\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$.

l'impedenza ha le stesse dimensioni di una resistenza, e si misura quindi in Ohm.

Vediamo infine che l'impedenza di un condensatore dipende dalla frequenza angolare ω : ad esempio la corrente continua (che corrisponde a $\omega = 0$), porta a un'impedenza infinita, e quindi a una corrente nulla attraverso il condensatore, il che è esattamente il comportamento atteso. Il condensatore invece permette il passaggio di corrente alternata a qualunque frequenza non nulla, con uno sfasamento di $\pi/2$ fra corrente e tensione. Intuitivamente ciò è possibile perché alla corrente alternata non corrisponde alcun trasporto di carica, ma solo un'oscillazione delle cariche avanti e indietro lungo il circuito; sulle piastre del condensatore ciò si riflette in un accumulo di carica oscillante nel tempo.

3.5.1 Alcune regole importanti

Se due componenti lineari sono posti in serie (di modo che la corrente uscente da una fluisca completamente nell'altra), allora ai capi della serie vi è una tensione:

$$V_0 = V_0^{(1)} + V_0^{(2)} = (Z^{(1)} + Z^{(2)})I_0,$$

Mentre se due componenti lineari sono posti in parallelo (di modo che la tensione ai capi dei componenti sia sempre la stessa), allora complessivamente vi fluisce una corrente:

$$I_0 = I_0^{(1)} + I_0^{(2)} = \left(\frac{1}{Z^{(1)}} + \frac{1}{Z^{(2)}} \right) V_0.$$

È quindi possibile sostituire, per ogni equazione in cui l'impedenza compare in modo lineare (come le leggi di Kirchhoff o la formula per la potenza), una serie o un parallelo di componenti lineari con un singolo componente lineare di impedenza pari a:

$$Z_{\text{serie}} = Z^{(1)} + Z^{(2)}, \quad \frac{1}{Z_{\text{parallelo}}} = \frac{1}{Z^{(1)}} + \frac{1}{Z^{(2)}}.$$

Vediamo adesso come calcolare la potenza media relativa a segnali alternati. Detta $\Im(a + ib) = b$ la parte immaginaria di un numero complesso, in generale i segnali reali avranno la forma:

$$V = \Re(V_0) \cos(\omega t) - \Im(V_0) \sin(\omega t)$$

$$I = \Re(I_0) \cos(\omega t) - \Im(I_0) \sin(\omega t)$$

da cui troviamo che la media temporale della potenza (per la quale ricordiamo che $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$, mentre $\langle \cos(\omega t)^2 \rangle = \langle \sin(\omega t)^2 \rangle = 1/2$):

$$\langle P \rangle = \langle VI \rangle = \frac{1}{2}(\Re(V_0)\Re(I_0) + \Im(V_0)\Im(I_0)).$$

Tornando a segnali complessi $V = V_0 e^{i\omega t}$ e $I = I_0 e^{i\omega t}$, la formula di sopra si scrive come:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \Re(V I^*),$$

dove $(a + ib)^* = a - ib$ è il coniugio.

3.6 Gli induttori

Introduciamo infine un altro fondamentale elemento circuitale passivo, l'**induttore**, indicato nei diagrammi circuitali col simbolo mostrato nella figura 8.

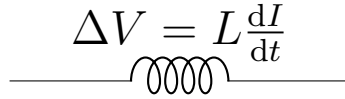


Figura 8: Un'induttanza.

Un modello idealizzato di induttore lo rappresenta come un solenoide molto lungo rispetto al proprio raggio, all'interno del quale si trova quindi un campo magnetico uniforme $B \propto I$, per cui derivando:

$$\frac{d}{dt} B = \frac{d}{dt} I.$$

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la variazione nel tempo del campo magnetico provoca però una forza elettromotrice nel filo che costituisce il solenoide, la quale si opporrà alla corrente che l'ha generata. In conclusione:

$$\Delta V \propto \frac{dI}{dt}.$$

La costante di proporzionalità è detta **induttanza** L :

$$\Delta V = L \frac{dI}{dt}.$$

Induttori reali sono solitamente costituiti da un certo numero, non sempre molto elevato, di avvolgimenti di un filo conduttore attorno a un nucleo ferromagnetico che permette di meglio incanalare il campo magnetico indotto. Nella teoria dei circuiti l'induttore è un elemento lineare ideale caratterizzato dalla propria induttanza L , misurata in Henry $[L] = \text{H} = \text{VA}^{-1}\text{s}$.

In presenza di corrente continua, la corrente è costante nel tempo, e così l'induttore si comporta semplicemente come un circuito chiuso (come un filo). Invece, in presenza di corrente alternata, si può facilmente vedere che:

$$V_0 = i\omega L I_0;$$

possiamo dunque ridefinire l'induttanza come un elemento circuitale con un'impedenza immaginaria positiva, pari a:

$$Z_L = i\omega L.$$

3.7 Fenomenologia di alcuni circuiti

Discutiamo brevemente il comportamento qualitativo di alcuni semplici circuiti lineari; la risoluzione esplicita dei sistemi discussi, nel dominio del tempo (trovare $V(t)$ date certe condizioni iniziali) e in quello delle frequenze (trovare $V_0(\omega)$ quando il circuito riceve come sorgente un segnale alternato di frequenza angolare ω), può essere un utile esercizio. Nel seguito chiameremo “circuito XYZ” un circuito che presenta posti in serie gli elementi circuitali X, Y, e Z, ai quali capi della serie è possibile porre un generatore ideale di qualche tipo:

1. CIRCUITO RC\ Immaginiamo di partire con un condensatore scarico $Q = 0$ e di porre un generatore che impone una tensione V ai capi della serie. Nei primi istanti di evoluzione del circuito la carica sul condensatore sarà quasi nulla, dato che il flusso di corrente ad una certa tensione finita è controllata dal resistore; avremo quindi inizialmente una differenza di potenziale nulla ai capi del condensatore, che dovrà essere compensata da una differenza di potenziale ai capi del resistore $V = IR \rightarrow I = V/R$. La corrente che gira attorno al circuito porterà ad una graduale accumulazione di carica sugli elettrodi del condensatore, che corrisponderà ad una diminuzione della tensione ai capi del resistore. In conclusione la corrente passante per il resistore diminuirà con legge esponenziale $I = I_{\text{in}} e^{-t/\tau}$ con $\tau = RC$ e con uno stato asintotico di equilibrio in cui la carica sul condensatore è tale che $V = Q/C$. Con condizioni iniziali $Q = Q_{\text{in}}$ e con $V = 0$ si avrà viceversa una scarica esponenziale con stato asintotico $Q = I = 0$.
2. CIRCUITO RL\ Analogamente a prima partiamo con una corrente iniziale $I = 0$ e con un generatore di tensione V ai capi della serie. Nei primi istanti di evoluzione la corrente rimarrà quasi nulla, dato che variazioni troppo rapide di corrente porterebbero a una differenza di potenziale divergente ai capi dell'induttore; per cui inizialmente la tensione ai capi della serie sarà dovuta principalmente all'induttore stesso, portando ad un aumento di corrente $\frac{d}{dt}I = V/L$. Con l'aumento della corrente, il resistore avrà una tensione crescente ai propri capi, che verrà a scapito della tensione ai capi dell'induttore, per cui l'aumento di corrente diminuirà. Di fatto si avrà una legge $\frac{d}{dt}I \propto e^{-t/\tau}$ con

$\tau = L/R$, del tutto analoga alla precedente, con uno stato asintotico in cui per il resistore passa una corrente $I = V/R$. Mentre quindi prima si aveva un transiente nel quale si accumulava energia elettrostatica nel condensatore, qui si ha un transiente nel quale si accumula energia magnetica nell'induttore (si veda la sezione 4.3); notare che mentre la dissipazione di energia da parte della resistenza prima avveniva durante il transiente, qui questa avviene nello stato asintotico.

3. CIRCUITO LC\ I parametri iniziali più interessanti per questo circuito sono porre $Q = Q_{\text{in}}$ e $I = 0$ (o viceversa), con i capi della serie cortocircuitati, per far sì che $\Delta V_C = -\Delta V_L$. Vediamo che inizialmente si avrà un aumento della corrente, in quanto $\frac{d}{dt}I = -Q/LC$, il quale rallenterà con lo scaricarsi del condensatore. Col condensatore completamente scarico, si fermerà anche l'aumento di corrente; a questo punto però I avrà già un valore non nullo, e continuerà a spostare le cariche da un elettrodo all'altro del condensatore, invertendo la polarità del condensatore rispetto a quella iniziale. Adesso che ΔV_C è di nuovo nonnullo, l'induttore comincerà a diminuire nuovamente l'intensità della corrente; questa logica porta ad un'oscillazione sinusoidale con periodo $\sqrt{LC}$ della carica Q , della corrente I , e della variazione di corrente $\frac{d}{dt}I$, dove ogni termine è sfasato di $\pi/2$ rispetto al precedente. In particolare vediamo che c'è un continuo scambio di energia da elettrica a magnetica e viceversa, con un andamento non a caso del tutto analogo a quello riscontrato nelle onde elettromagnetiche.
4. CIRCUITO RLC\ Partendo similmente a prima con $Q = Q_{\text{in}}$ e $I = 0$, e ponendo $V = 0$, il circuito RLC può avere comportamenti di diverso tipo, in base al rapporto fra i tempi caratteristici dei sottosistemi RC, RL, e LC. Se il decadimento del segnale è molto rapido rispetto ai tempi di oscillazione, allora il segnale decadrà senza oscillare. Se invece l'oscillazione LC è molto rapida rispetto ai decadimenti, allora il segnale del circuito mostrerà un'oscillazione quasi sinusoidale, che è però esponenzialmente smorzata all'aumentare del tempo. In queste ultime condizioni il circuito mostra molte analogie con altri fenomeni fisici di natura molto diversificata, ed è un esempio di sistema risonante: ponendo ai capi della serie un generatore di tensione alternata, esisterà una frequenza $f_0 \sim 1/\sqrt{LC}$ per la quale si osserverà nel circuito una massima ampiezza di oscillazione per la corrente; questo picco della funzione $I_0(\omega)$ attorno a ω_0 diventa sempre più pronunciato col diminuire di R rispetto a L e C .

5. CIRCUITI C, R, E L\ Ponendo uno solo di questi tre componenti attaccato ad un generatore si trovano dei comportamenti singolari nell'evoluzione del sistema. Asintoticamente un circuito C ha carica costante, un circuito R ha corrente costante, ed un circuito L ha un aumento costante di corrente; nell'istante in cui si attacca il componente al generatore si ottiene un comportamento discontinuo, col raggiungimento istantaneo dello stato asintotico. Questo comportamento non è realistico – dato che in circuiti reali è *sempre* presente una certa resistenza e una certa induttanza (anche piccole) – e funziona solo come limite idealizzato in cui analizzare le proprietà di un oggetto. In analogia con la meccanica, possiamo in questo spirito far corrispondere formalmente la tensione ai capi di un circuito V alla forza applicata a un corpo ($V \sim F$), e la corrente che vi scorre I alla velocità del corpo ($I \sim v$); con questa analogia vediamo che l'induttanza si comporta come una massa $L \sim m$, dato che il circuito L presenta in questa analogia un'accelerazione uniforme; similmente si ha che la resistenza si comporta come una forza di attrito viscoso $RI \sim \kappa v$, dove in presenza di una forza costante si raggiunge una velocità limite fissata; infine osserviamo che la capacità si comporta come una forza di richiamo elastica $Q/C \sim kx$, dato che dopo l'accensione del generatore la carica (analogia alla posizione) salta ad un valore fissato.

3.8 Teoremi di Thévenin e Norton

Il teorema di Thévenin afferma che un qualunque circuito composto di componenti *lineari* e generatori che abbia due estremità libere, di modo da potervi collegare un carico lineare Z_X , è equivalente a una serie di un generatore di tensione ideale V_{Th} e di un'impedenza Z_{Th} , come mostrato in figura 9.

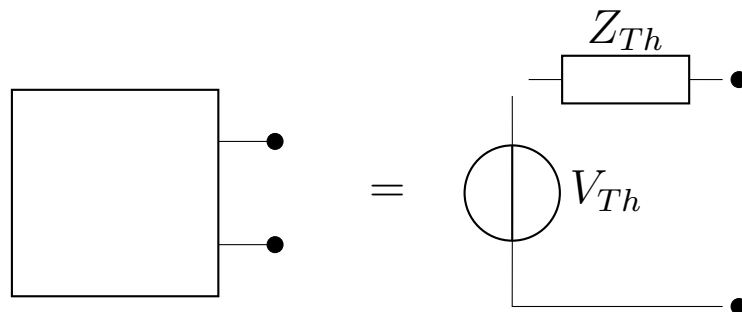


Figura 9: Il Teorema di Thévenin.

Il teorema di Norton è duale al teorema di Thévenin: sotto le stesse ipotesi il circuito è sostituibile con un un generatore di corrente ideale I_N con un'impedenza Z_N posta in parallelo, come mostrato in figura 10.

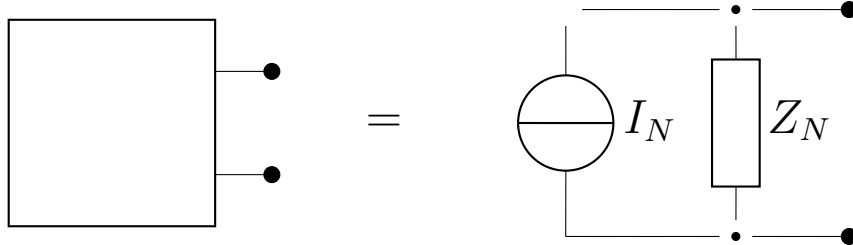


Figura 10: Il Teorema di Norton.

Questi teoremi seguono dal fatto che, essendo tutte le equazioni legate al circuito lineari – omogenee o disomogenee – la corrente e la differenza di potenziale ai capi del carico Z_X seguiranno sia la legge $\Delta V = Z_X I$ (ottenuta percorrendo il cammino fra i due capi passante per Z_X), che una legge della forma $\Delta V = a + bI$ (ottenuta percorrendo un cammino fra i due capi passante all'interno del circuito d'interesse, e poi “condensando” tutte le equazioni lineari del circuito). Assieme, queste due equazioni permettono di trovare ΔV e I ; i teoremi di sopra sono dovuti al fatto che lo spazio dei parametri a, b può facilmente essere riprodotto con i circuiti in figura. Scegliendo come valori di prova $Z_X = 0$ (cortocircuito, $\Delta V = 0$) e $Z_X = \infty$ (circuito aperto, $I = 0$), vediamo infatti che per i due circuiti di sopra si ha $a = V_{Th} = Z_N I_N$ e $b = -Z_{Th} = -Z_N$.

Questo trucco è utile anche per ricavare in generale i parametri del circuito di Thévenin o Norton equivalente: V_{Th} è la tensione ai capi per il circuito aperto, I_N è la corrente fra i capi per il circuito chiuso, $Z_{Th} = Z_N$ è l'impedenza equivalente ai capi del circuito (aperto), dove come al solito si sostituiscono cortocircuiti a generatori di tensione e circuiti aperti a generatori di corrente.

3.9 Componenti non lineari

Per concludere questa sezione, discuteremo brevemente come è in generale possibile trattare il comportamento di componenti elettronici non lineari. Con *relazione lineare* tra I e V intendiamo che, definita una relazione funzionale $I[V(t), t]$, questa soddisfa proprietà di linearità rispetto a $V(t)$:

- $I[k V(t), t] = k I[V(t), t]$
- $I[V_1(t) + V_2(t), t] = I[V_1(t), t] + I[V_2(t), t]$

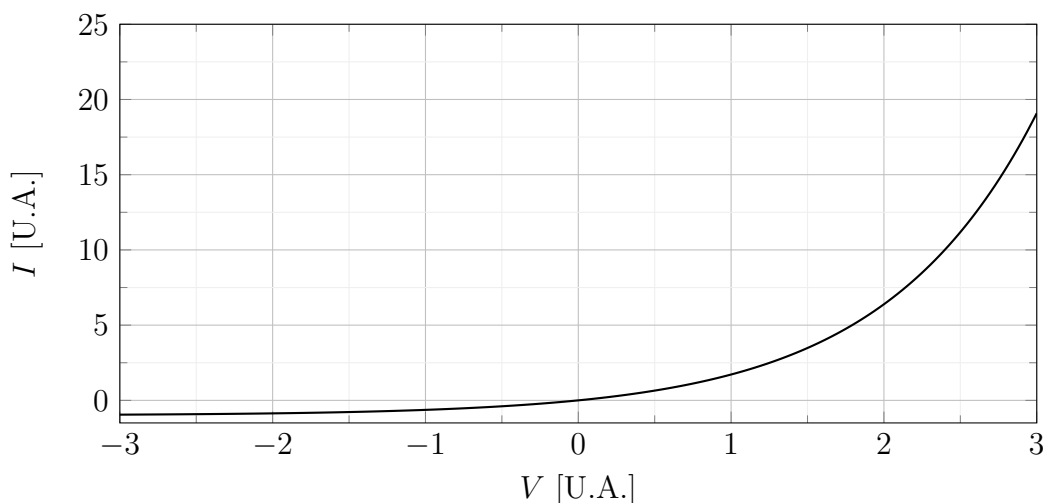


Figura 11: Curva caratteristica di un diodo, per cui $I \propto e^V - 1$.

Vale la pena sottolineare che con *relazione lineare* non si intende esclusivamente una relazione del tipo $I(t) = k V(t)$, in quanto la corrente, anche in un componente lineare, può dipendere dalla storia passata del componente.

Comportamenti non lineari nascono dal comportamento non lineare dei materiali che costituiscono i componenti, dato che in sé il campo elettromagnetico segue solo le leggi di Maxwell, che sono lineari. Queste non linearità sono dovute alla natura della materia su scala microscopica, che può manifestarsi sia quando si porta al limite un componente lineare, che quando si progetta un componente per presentare certi comportamenti desiderati; questa è la classe dei *componenti non lineari*, che chiaramente presenta molta più varietà di quella incontrata finora. Nei casi in cui $I(t)$ sia solo funzione di $V(t)$, gli elementi non lineari possono essere descritti in termini di una propria **curva caratteristica**, ovvero un grafico $I - V$. Ne è un tipico esempio il diodo, la cui curva caratteristica è qualitativamente mostrata in figura 11.

Anche per i componenti non lineari, è possibile che la corrente in un dato momento dipenda dalla storia passata del componente. Talvolta è pratico comunque riferirsi ad una curva caratteristica, specificando, anche graficamente, quale sia il *punto di lavoro* del componente in funzione della storia passata dello stesso; ne è un esempio la (psuedo) curva caratteristica in figura 12.

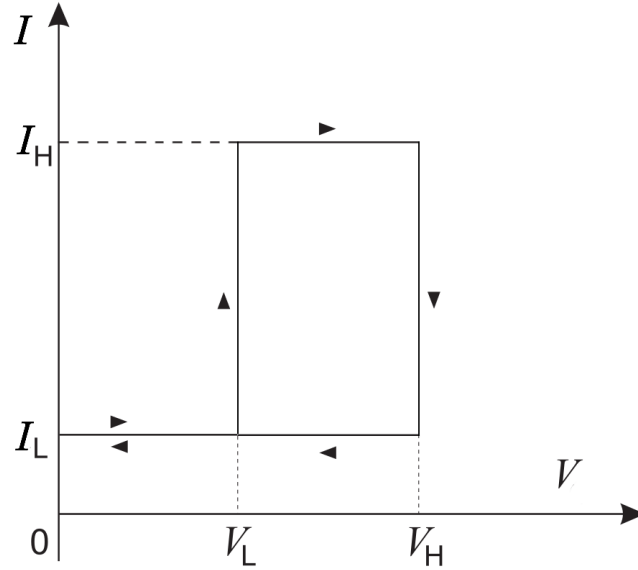


Figura 12: Curva caratteristica di un componente non lineare in cui $I(t)$ dipende dalla “storia passata” del componente.

4 Appendici

Per alcuni dei passaggi svolti in questa lezione e per possibili approfondimenti rimandiamo a [Jac98].

4.1 Notazione

Per quanto riguarda le convenzioni fisiche, in questa lezione abbiamo utilizzato il sistema internazionale di unità di misura (noto anche come *mks*) ed abbiamo usato la nomenclatura standard per le grandezze e le costanti fisiche dell'elettrodinamica.

Per quanto riguarda invece le convenzioni matematiche, abbiamo indicato gli integrali in più dimensioni con un unico segno di integrale, per gli integrali di linea e di superficie abbiamo incluso il versore – rispettivamente tangente e normale – nel differenziale, ovvero abbiamo utilizzato $d\vec{\ell} = \hat{\tau} d\ell$ e $d\vec{S} = \hat{n} dS$, ed abbiamo ommesso il dominio di integrazione negli integrali di volume, dove il differenziale è indicato con $d^3r = dV$ per esplicitare la variabile di integrazione.

4.2 Simmetrie del campo elettromagnetico

Descriviamo qui brevemente alcune proprietà geometriche del campo elettromagnetico che possono aiutare a trovare rapidamente soluzioni a problemi le cui premesse presentano particolari simmetrie spaziali.

In fisica si è soliti chiamare “vettore” una qualunque grandezza fisica a tre componenti che sotto rotazioni “trasforma come la posizione”; per formulare questa affermazione in modo più preciso indichiamo con $\vec{f}(\vec{r}) = (f_1(\vec{r}), f_2(\vec{r}), f_3(\vec{r}))$ una grandezza fisica a tre componenti e con R una rotazione dello spazio tridimensionale; dato un oggetto a tre componenti $\vec{a}$, la sua rotazione si indica con $R\vec{a}$. Si dice che f è un vettore se, detta $\vec{f}'$ la stessa grandezza calcolata dopo la rotazione dell'intero spazio fisico, $\vec{f}'(R\vec{r}) = R\vec{f}(\vec{r})$. Sia il campo elettrico che il campo magnetico sono, in questo senso, vettori (anche nel regime dinamico).

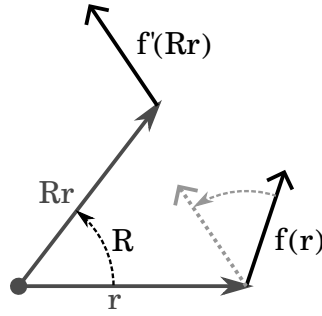


Figura 13: come un vettore trasforma sotto rotazioni.

Fra i vettori è possibile fare un'ulteriore distinzione, in base al comportamento sotto simmetrie planari: detta S una simmetria planare, $\vec{f}$ si dice “vettore vero” se $\vec{f}'(S\vec{r}) = S\vec{f}(\vec{r})$, mentre si dice “pseudovettore” se $\vec{f}'(S\vec{r}) = -S\vec{f}(\vec{r})$. La maggior parte dei vettori fisici sono vettori veri, ad esempio la posizione $\vec{r}$, la velocità $\vec{v}$, la densità di corrente $\vec{J}$, ed il campo elettrico $\vec{E}$; gli pseudovettori, come ad esempio il momento angolare $\vec{L}$ ed il campo magnetico $\vec{B}$, sono meno ricorrenti e spesso descritti come prodotto vettoriale di vettori veri (per il momento angolare vale $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$, mentre per il campo magnetico vale la legge di Biot-Savart).

Ricordare che $\vec{E}$ è un vettore vero e che $\vec{B}$ è uno pseudovettore può aiutare a dimostrare che in certi problemi alcune componenti di questi campi devono essere necessariamente nulle *per motivi di simmetria*, senza dover svolgere alcun calcolo. Consideriamo ad esempio, nel problema del solenoide infinito, delle simmetrie planari rispetto a piani perpendicolari al solenoide: la distribuzione di corrente rimane invariata sotto la trasformazione, quindi

$\vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$, ma per pseudovetorialità del campo magnetico $\vec{B}'(S\vec{r}) = -S\vec{B}(\vec{r})$; per punti giacenti sul piano di simmetria, dove $S\vec{r} = \vec{r}$, otteniamo quindi $\vec{B}(\vec{r}) = -S\vec{B}(\vec{r})$. Dato che ogni punto dello spazio giace su un tale piano di simmetria, si ha che in tutto lo spazio l'unica componente non nulla di $\vec{B}$ è quella parallela all'asse del solenoide. Consigliamo come esercizio di calcolare in tutto lo spazio i campi magnetostatici del solenoide infinito, del piano di corrente (a.k.a. cascata di corrente), e del filo infinito.

4.3 Energia elettromagnetica

Discutiamo brevemente in che modo i campi elettromagnetici possono essere visti come portatori di energia, anche per giustificare l'interesse sul tipo di soluzioni alle leggi di Maxwell che studieremo a breve nella sezione 4.4 sulle onde elettromagnetiche.

Nell'elettrostatica l'energia potenziale di una configurazione di cariche si può pensare come l'energia necessaria per assemblare la configurazione portando le cariche nella loro posizione da molto lontano. Si può mostrare che questa è $U_{\text{es}} = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d^3r$, una volta scelto un potenziale nullo ad infinito. È possibile però riscrivere questa formula nel modo seguente:

$$U_{\text{es}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \vec{E}^2 d^3r,$$

cosa che permette di astrarre dalla definizione iniziale, e di attribuire l'energia del sistema al campo elettrico anziché alle cariche interagenti. Una simile astrazione, benché più laboriosa, è possibile anche per il campo magnetico:

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) d^3r, \quad (12)$$

dove l'integrando è detto **densità di energia elettromagnetica**.

Possiamo verificare questa legge nel caso della carica di un solenoide. In un circuito LR sono posti in serie un resistore di resistenza R ed un solenoide di superficie S , lunghezza ℓ , densità di spire n . L'equazione relativa al circuito è data da²⁰:

$$\mathcal{E} = \mu_0 n^2 L S \frac{dI}{dt} + RI,$$

moltiplicando da entrambi i lati per dQ si ottiene il differenziale per l'energia del sistema:

$$\mathcal{E} dQ = \mu_0 n^2 \ell S I dI + RI dQ = \ell S \frac{B dB}{\mu_0} + RI^2 dt,$$

²⁰Si veda il problema 5.7.

ovvero l'energia erogata dalla pila è in parte dissipata dal resistore ed in parte accumulata come energia potenziale del solenoide. Se integriamo il termine relativo al solenoide otteniamo:

$$U_{\text{sol}} = \ell S \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 d^3r,$$

che corrisponde al termine magnetico dell'energia del campo elettromagnetico.

4.4 Onde elettromagnetiche

Ci accingiamo ora a risolvere simultaneamente le leggi di Maxwell in un caso particolare: considereremo l'intero spazio come vuoto, cioè privo di cariche e correnti, che finora abbiamo considerato le sorgenti dei campi. Riscriviamo dunque le nostre equazioni con questa condizione aggiuntiva:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= 0 & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= - \int_{S_\gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} & \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

Queste equazioni descrivono l'evoluzione temporale di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in funzione di alcune proprietà del campo ad un dato istante. Possiamo già osservare che applicando le leggi di Coulomb e di Biot-Savart allo spazio vuoto, e quindi trovando come soluzione i campi costantemente nulli, risolviamo le equazioni; questo però non ci soddisfa: il nostro sistema di equazioni ammette svariate soluzioni, e noi vogliamo imporre delle **condizioni iniziali** – un insieme aggiuntivo di equazioni che descrivono lo stato del sistema ad un certo istante – che ci permettano di rendere la soluzione unica. Questo è un procedimento che avviene spesso in fisica; gran parte delle leggi descrivono l'evoluzione di un sistema in modo differenziale – ad esempio $\vec{F} = m\vec{a}$ – e per risolvere un particolare problema è necessario imporre certe restrizioni sulla soluzione, come la posizione e la velocità iniziale di un corpo. Vogliamo quindi trovare prima quante condizioni iniziali è necessario imporre per garantire l'unicità della soluzione, e poi la soluzione effettiva del problema al variare delle condizioni. Possiamo già ad esempio intuire che sarà necessario descrivere il campo elettromagnetico in tutto lo spazio al tempo $t = 0$, ma discuteremo anche altre possibilità in seguito.

Senza quindi cercare delle soluzioni a particolari problemi, tenteremo di ottenere una famiglia piuttosto ampia di soluzioni per comprendere alcune proprietà dei campi. Nulla ci vieterà di utilizzare poi questo insieme di soluzioni per la risoluzione di uno specifico problema fisico dalle condizioni

iniziali fissate, per studiare altri fenomeni, o ancora approssimare situazioni più complesse che richiederebbero magari una trattazione eccessivamente laboriosa.

Per fare ciò imporreemo al campo elettromagnetico alcune simmetrie aggiuntive, oltre a quelle già descritte dalle leggi di Maxwell, per trovare un meccanismo semplice per produrre soluzioni al sistema. Sfrutteremo largamente in particolare la **linearità dei campi**, conseguenza del principio di sovrapposizione lineare ed osservabile nella linearità delle leggi di Maxwell: date due leggi valide di evoluzione temporale dei campi elettrico e magnetico $\vec{E}, \vec{B}$ e $\vec{E}', \vec{B}'$, una qualunque loro combinazione lineare $a\vec{E} + b\vec{E}', a\vec{B} + b\vec{B}'$ è una nuova legge di evoluzione valida.

Cominciamo quindi supponendo che i campi dipendano da una sola coordinata spaziale e da quella temporale t , ovvero $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(z, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(z, t)$. Questo ridurrà ampiamente le tipologie di soluzioni che otterremo, ma ci permetterà di effettuare in un caso semplice varie osservazioni valide in generale. Tentiamo ora di ricavare alcune informazioni sulle componenti dei campi applicando le leggi di Maxwell.

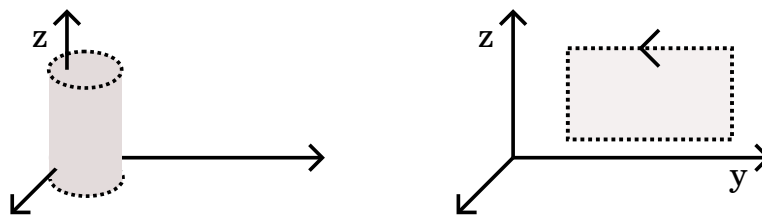


Figura 14: deduzione dell'equazione d'onda.

Consideriamo una superficie cilindrica con asse parallelo all'asse z : a contribuire al flusso partecipano solo le basi. Infatti essendo sia $\vec{E}$ che $\vec{B}$ uniformi sui piani paralleli alle basi del cilindro, tante linee di campo entrano dalla superficie laterale quante ne escono. Dunque, applicando la legge di Gauss, il flusso attraverso la base superiore è uguale e opposto a quello della base inferiore. Data l'arbitrarietà delle dimensioni e della posizione del cilindro, ed in particolare considerandone uno dalla base infinitesima ove il campo può essere considerato approssimativamente costante e dalla altezza qualsiasi, deduciamo che le componenti z dei campi sono, ad un dato istante di tempo, uguali ovunque. Le componenti z dei campi, oltre ad essere uniformi, sono inoltre costanti: se ad esempio E_z variasse nel tempo la circuitazione di $\vec{B}$ sulla circonferenza di base del cilindro sarebbe diversa da zero, ma questo non può essere dato che $\vec{B}$ è uniforme sul piano, e dunque la sua circuitazione è nulla su ogni curva. Un'argomentazione analoga vale anche per

B_z . Siamo quindi solo interessati all'evoluzione di E_x , E_y , B_x , e B_y , dato che le componenti in z sono determinate da un singolo numero; poniamo quindi $E_z = B_z = 0$, sapendo che per linearità dei campi potremo sommare in ogni momento la soluzione costante $\vec{E} = \vec{E}\hat{z}$, $\vec{B} = \vec{B}\hat{z}$.

Effettuiamo ora la circuitazione di $\vec{E}$ lungo un rettangolo giacente sul piano yz con lati di lunghezza dy e dz , e con il vertice in basso a sinistra alla posizione (x, y, z) : i lati paralleli all'asse z non forniscono un contributo essendo il campo nullo in quel verso. Il contributo degli altri due, è invece pari a $dy(E_y(z, t) - E_y(z + dz, t))$. Per la terza legge di Maxwell otteniamo:

$$dy(E_y(z, t) - E_y(z + dz, t)) = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{S_{\gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \approx - dy dz \frac{\partial B_x}{\partial t},$$

che nel limite di rettangoli piccoli diventa:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}. \quad (13)$$

Analogamente troviamo le seguenti uguaglianze applicando la terza e la quarta legge di Maxwell a rettangoli paralleli ai piani zy e zx :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Derivando la prima uguaglianza in z e usando la terza uguaglianza osserviamo:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Ovvero:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}} \quad (14)$$

Questa è un'espressione solamente di E_y , che ci permette di separare una variabile dalle altre quattro. Ripetendo il procedimento si ottiene l'insieme di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Questa equazione è nota come equazione di d'Alembert unidimensionale, detta anche equazione della corda vibrante. Se non avessimo ridotto i gradi di libertà spaziali da tre (ovvero x, y, z) a uno (solo z), avremmo ottenuto la

seguente equazione, ricavabile e risolvibile però solo tramite l'uso di strumenti di analisi vettoriale:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Questa è l'equazione di d'Alembert tridimensionale, nota anche come equazione delle onde.

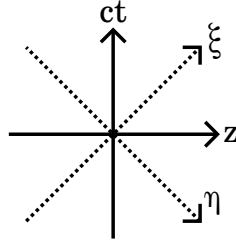


Figura 15: cambio di coordinate nel piano zt .

Tornando alla (14), per risolvere l'equazione può essere utile “fattorizzare” la derivata e definire $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_y = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_y = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{z+ct}{2} \right)} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{z-ct}{2} \right)} E_y,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la regola della derivazione della funzione composta. Semplificando i fattori numerici, otteniamo quindi l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial(z+ct)} \frac{\partial}{\partial(z-ct)} E_y = 0.$$

Nel piano zt , queste sono derivate effettuate lungo le rette $z = \pm ct$; prendiamo quindi temporaneamente queste due rette come assi del nostro piano, ponendo $\xi = z + ct$ e $\eta = z - ct$. Riscrivendo E_y in queste coordinate abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} E_y = 0,$$

che si può risolvere facilmente integrando singolarmente nelle due variabili e ottenendo $E_y = f(\eta) + g(\xi)$ come costanti di integrazione. Ritornando alle coordinate originarie si ha che la soluzione dell'equazione (14) assume sempre la forma:

$$\boxed{E_y(z, t) = f(z + ct) + g(z - ct)}$$

Le due funzioni reali che descrivono il campo possono essere viste come una coppia di “onde viaggianti”, una verso destra ed una verso sinistra, che si muovono ad una **velocità finita** c . Ad esempio se $f(\xi) = 0$ e $g(\eta) = \frac{E_0}{1+\eta/\ell}$, otteniamo che la componente y del campo elettrico ha una forma d’onda costante, con un picco alla posizione $z = ct$, e che viaggia quindi a velocità c verso destra²¹. Un modo comune per identificare un’unica soluzione, data dalla coppia di funzioni f e g , è imporre come condizioni iniziali i valori di $E_y(z, 0)$ e $\frac{\partial}{\partial t} E_y(z, 0)$ al variare di z , ovvero il valore del campo elettrico e della sua derivata temporale in tutto lo spazio al tempo $t = 0$.

Notiamo che per la (13), una volta determinata l’espressione del campo elettrico nella componente y anche il campo magnetico nella componente x è fissato a meno di una componente costante, o “magnetostatica”; integrando si ottiene infatti:

$$B_x(z, t) = \int_0^t \frac{\partial E_y}{\partial z}(z, t') dt' + B_x(z, 0),$$

dove $B_x(z, 0)$ è il valore del campo magnetico al tempo iniziale; se lo poniamo uguale a $\frac{1}{c}(f(z) - g(z))$ otteniamo un campo magnetico puramente ondulatorio²²:

$$B_x(z, t) = \frac{f(z + ct) - g(z - ct)}{c},$$

e ripetendo nuovamente tutto il procedimento otteniamo anche:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= h(z + ct) + k(z - ct) \\ B_y(z, t) &= -\frac{h(z + ct) - k(z - ct)}{c}. \end{aligned}$$

Da ciò deduciamo due importanti fatti, nel caso in cui l’onda si propaga in uno solo dei due versi (eg. $g \equiv 0$ e $k \equiv 0$): il rapporto tra i due campi è costante ed ovunque uguale a $\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c$, ed i due campi sono sempre fra loro perpendicolari (oltre che perpendicolari alla direzione di propagazione).

Una classe di soluzioni di particolare rilevanza è costituita dalle funzioni trigonometriche, che spesso descrivono in modo accurato fenomeni oscillatori, fra cui quelli che possono dare origine alle onde elettromagnetiche:

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t),$$

²¹Nella figura 15 si può vedere come g , una funzione della sola η è costante lungo le rette parallele all’asse ξ , e quindi forma un’onda che trasla nel tempo nella direzione $+z$.

²²Se volessimo considerare anche il caso in cui $B(z, 0)$ è diverso da quanto detto, allora otterremmo una componente costante sommata al campo magnetico trovato.

con E_0 l'ampiezza dell'onda, e k, ω parametri di cui chiariremo a breve la funzione. Poiché l'argomento di tale senoide deve essere un multiplo di $z \pm ct$, si deve imporre la condizione $\frac{\omega}{k} = c$, che è equivalente ad affermare che i nodi dell'onda si muovono a velocità c . Dunque se $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ è la frequenza dell'onda, si ha che $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ è il “periodo” spaziale, cioè la lunghezza d'onda. Il fatto che ogni forma d'onda si muova alla stessa velocità finita c ci porta a concludere che variazioni dei campi elettrici e magnetici necessitano un tempo diverso da zero prima che i loro effetti si percepiscano in un dato punto dello spazio. Come già visto più volte in questa lezione, si osserva che l'introduzione di campi mediatori di forze non è un semplice espediente formale, ma permette di formulare leggi fisiche che descrivono fenomeni di natura diversa rispetto a quelli classici. In virtù di ciò una carica posta a grande distanza da una seconda che compie un movimento improvviso ne percepirà gli effetti solo dopo un certo intervallo di tempo. Dunque in tutta la fase transiente la forza tra le due non sarà necessariamente uguale e contraria: l'assenza di cosiddette forze a distanza contraddice quindi la terza legge di Newton, valida altrimenti in elettrostatica e magnetostatica. Possiamo inoltre osservare come un'onda elettromagnetica trasporti energia nello spazio, a causa della legge (12); nel problema 5.13 inoltre si mostra come in un certo senso il campo elettromagnetico trasporta anche momento angolare (e di conseguenza anche impulso).

Anche se le difficoltà non terminano qui, per risolvere questo particolare paradosso non è necessario scardinare l'intero edificio della meccanica newtoniana – è sufficiente apportarvi delle correzioni. Quando la fisica nacque come disciplina moderna, un passo imprescindibile fu la formulazione del principio di relatività galileiano: le leggi della meccanica sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Ciò significa che se in due dati sistemi di riferimento inerziali si pongono le stesse condizioni iniziali quelli si evolveranno in modo perfettamente identico, proprio perché le leggi che ne governano l'evoluzione sono identiche.

Come accennato, quando si comprese questo importante tassello delle leggi fisiche, la disciplina stessa comprendeva poco oltre alla meccanica, ma con le scoperte sull'elettromagnetismo si ritenne che anche questa costruzione organica dovesse sottostarvi, come ogni altra legge fisica precedentemente nota. E da ciò sorgono delle difficoltà: nelle leggi di Maxwell non vi è una alcuna dipendenza esplicita dalla velocità del sistema di riferimento impiegato, dunque in ognuno di questi sistemi le onde elettromagnetiche viaggiano ad una velocità pari a c , cosa che è in aperta contraddizione con la semplice ed intuitiva formula di addizione delle velocità. Da questa incoerenza scaturiranno varie speculazioni, di cui le più famose sono l'ipotesi dell'etere luminifero come mezzo di propagazione della luce e la profonda rivisitazione

della fisica a partire da un nuovo principio di relatività formulato da Einstein e Poincaré. Il cambio di paradigma che seguirà la seconda di queste due sarà così importante da dare il nome di “fisica classica” a tutta la fisica che venne prima.

4.5 I teoremi di Gauss e di Stokes

Per una trattazione completa dell'elettrodinamica è necessaria la familiarità con molti degli strumenti non elementari forniti dall'analisi vettoriale. Nonostante questa non sia necessaria per comprendere anche alcuni dei concetti più sofisticati dell'elettrodinamica (in questa lezione abbiamo evitato l'uso esplicito degli operatori differenziali), abbiamo raccolto qui i due teoremi più importanti per questa teoria fisica, che permettono infatti la riscrittura delle leggi di Maxwell nella loro forma differenziale.

Definiamo intanto la notazione, che spesso fa uso del simbolo nabla $\vec{\nabla}$; dette f e $\vec{F}$ una funzione scalare ed un campo vettoriale (ed omettendo il punto in cui le funzioni sono calcolate):

$$\vec{\nabla} f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (\text{gradiente})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \equiv \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \quad (\text{divergenza})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \quad (\text{rotore})$$

dove un vettore è indicato qui come una terna. Questa notazione permette di interpretare nabla come un vettore $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ che agisce sulle funzioni tramite rispettivamente una moltiplicazione per uno scalare, un prodotto scalare, ed un prodotto vettoriale. Possiamo adesso enunciare i teoremi:

Teorema 4.1 (Gauss). *Se $\vec{F}$ è un campo vettoriale e S è una superficie chiusa, allora detto V_S il volume racchiuso da S vale l'uguaglianza:*

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d^3r$$

Teorema 4.2 (Stokes). *Se $\vec{F}$ è un campo vettoriale e γ è una curva chiusa, allora per ogni superficie S_γ con bordo in γ vale l'uguaglianza:*

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_\gamma} \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{S}$$

Applicando questi teoremi alle leggi di Maxwell otteniamo delle uguaglianze fra integrali sullo stesso dominio; eguagliando gli integrandi per arbitrarietà della scelta del dominio otteniamo le leggi di Maxwell in forma differenziale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{legge di Gauss})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{assenza di monopoli})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{legge di Faraday})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{legge di Ampère-Maxwell})$$

La forma differenziale delle equazioni rende più facile lo studio analitico dell'elettrodinamica, anche se è spesso più facile sfruttare le simmetrie di molti problemi usando le leggi in forma integrale.

4.6 Potenziale vettore

Come visto nella sezione precedente, il campo di magnetico $\vec{B}$ ha divergenza nulla; per questo motivo²³ esiste un potenziale vettore $\vec{A}$ tale che $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. Per configurazioni finite di corrente un potenziale vettore per il campo magnetico è dato da:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r',$$

come si può verificare calcolandone il rotore lungo la variabile $\vec{r}$, ed ottenendo così la legge di Biot-Savart. Approssimando questa formula al prim'ordine nonnullo a distanze grandi dalla distribuzione di corrente – localizzata in una regione di spazio finita – otteniamo con molta fatica:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ \vec{m} &\equiv \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d^3r', \end{aligned}$$

e dunque:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2\vec{m}}{r^5}.$$

²³Il motivo è simile al motivo per cui campi vettoriali con rotore nullo, come $\vec{E}$, ammettono un potenziale scalare su tutto lo spazio.

5 Problemi

In questa sezione proponiamo alcuni problemi significativi sugli argomenti trattati in questa lezione. Abbiamo attribuito a ciascuno una valutazione della loro difficoltà e impegnatività in stelline da uno a quattro.

Nota: in questi problemi useremo dei termini specifici per descrivere alcune situazioni fisiche, spesso proprie dei circuiti elettrici; se si hanno dubbi sul significato dei termini o sul modo corretto di trattare questi oggetti, consigliamo di cercare informazioni online o su libri di testo. Si consiglia inoltre la lettura della sezione 1.6 dato che sono utili in molti problemi (anche non riguardanti fenomeni di magnetizzazione) la legge di Ohm e l'effetto Joule in forma locale.

Problema 5.1 (Flusso concatenato (*)). Si mostri che per i campi vettoriali $\vec{J}$, nel caso magnetostatico, e $\vec{B}$, il flusso del campo concatenato ad una curva chiusa è ben definito, ovvero per ogni S_γ con bordo γ il flusso è lo stesso.

Problema 5.2 (Cavo spesso (**)). Trovare il campo magnetostatico relativo ad una corrente I uniforme sulla sezione di un filo cilindrico infinito di raggio a . Se poi si scava in questo filo un foro cilindrico di raggio $b < a$ parallelo all'asse del filo, ma non necessariamente coassiale, quale sarà il campo magnetico all'interno del foro?

Problema 5.3 (Globo di corrente (*)). Trovare il campo magnetostatico relativo ad una corrente superficiale che si propaga dal polo nord al polo sud di un globo di raggio a viaggiando parallelamente ai meridiani, e che ritorna dal polo sud al polo nord risalendo in linea retta (la corrente mantiene una simmetria cilindrica rispetto all'asse nord-sud).

Problema 5.4 (Momento di dipolo di una spira piana (*)). Data una spira piana giacente sul piano xy , mostrare che il suo momento di dipolo è dato da:

$$\vec{m} = IS\hat{z}.$$

Problema 5.5 (Interfaccia fra diamagnetici (**)). Sia lo spazio suddiviso in due semispazi con permeabilità magnetica μ_1 e μ_2 . Se nel primo semispazio il campo magnetico è uniforme $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1$, trovare $\vec{B}$ e $\vec{H}$ in tutto lo spazio in un opportuno sistema di coordinate. Mostrare più in generale che se all'interfaccia scorre una densità superficiale di corrente $\vec{J}_S$ valgono le relazioni:

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{J}_S,\end{aligned}$$

dove $\hat{n}$ è la normale alla superficie fra i due mezzi nel verso $1 \rightarrow 2$ nel punto considerato.

Problema 5.6 (Corrente di spostamento in un condensatore (***)). Consideriamo un semplice circuito composto da un condensatore piano con lastre di area A , a distanza d , con un dielettrico di permittività ϵ , ed un filo di lunghezza L , sezione S , e resistività ρ . Inizialmente il condensatore viene caricato per induzione fino a raggiungere una differenza di potenziale V , ed al tempo $t = 0$ inizia il processo di scarica. Si scriva la legge di $\vec{J}$ nel filo e di $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ nel dielettrico del condensatore. Si mostri esplicitamente che dato un anello γ perpendicolare al filo in prossimità del condensatore, il flusso di ciascuno dei due tipi di corrente attraverso γ dipende dalla scelta di S_γ , mentre mostrare come per varie superfici significative il flusso della somma delle due correnti rimane costante.

Problema 5.7 (Solenoidi e circuiti LR (**)). Consideriamo un circuito formato da una pila con differenza di potenziale V_0 , una resistenza R , ed un solenoide di raggio a , lunghezza ℓ , e densità di spire n . Trovare in funzione di I il campo magnetico all'interno del solenoide assumendo $\ell \gg a$, trovare la legge del circuito, e risolverla data la condizione iniziale $I(t = 0) = 0$.

Problema 5.8 (Sfera bucata (**)). Sia data una palla di raggio a con magnetizzazione uniforme $\vec{M}$ ed un piccolo foro di raggio $b \ll a$ lungo il diametro parallelo alla magnetizzazione. Si trovi il campo magnetico nel foro della sfera, sapendo che per una sfera uniformemente polarizzata con polarizzazione $\vec{P}$ il campo elettrico interno è uniforme ed uguale a $\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$.

Problema 5.9 (Sperimentale Senigallia 2017 (***)). Facendo scivolare un cilindro magnetizzato su un piano inclinato liscio conduttore (si assume un conduttore non ferromagnetico, e.g. l'alluminio) si osserva che questo raggiunge rapidamente una velocità limite. Modellizzando il magnete come una spira quadrata dai lati molto grandi, separata dal piano infinito da una distanza h , si trovi v_{lim} .

Problema 5.10 (Spira in moto uniforme (***)). Consideriamo una spira di raggio a e di resistenza R , immersa in un campo magnetico con simmetria azimutale $\vec{B}(r, z)$. Calcolare la forza che è necessario esercitare sulla spira per poterla mantenere a velocità $\vec{v} = v\hat{z}$ in funzione delle caratteristiche della spira e della sola componente $B_z(r, z)$ del campo magnetico, assumendo che il raggio a sia sufficientemente piccolo da permettere di considerare il campo approssimativamente costante sulla superficie della spira. Si confrontino i risultati ottenuti studiando l'effetto Joule con quelli ricavati dal calcolo della forza magnetica agente sulla corrente che fluisca nella spira. Problema adattato da [Mac19].

Problema 5.11 (Effetto Hall (**)). Un conduttore parallelepipedale di dimensioni $d \times \ell \times h$ con $h \ll \ell, d$ e lo spigolo h parallelo a $\hat{z}$ si muove a velocità costante $v\hat{x}$ in un campo magnetico uniforme $B_0\hat{y}$. Si trovino all'equilibrio la densità di carica sulle due facce di dimensione maggiore.

Problema 5.12 (Solenoido attorno ad un conduttore (***)). Un solenoide di n spire per unità di lunghezza è avvolto attorno a un cilindro di ferrite, le cui dimensioni sono $\ell \gg R$. La ferrite ha permeabilità magnetica μ e conducibilità σ . Nel solenoide fluisce una corrente alternata $I = I_0 \cos \omega t$. Trovare il campo elettrico interno al solenoide e la potenza media dissipata per effetto Joule. Trovare la soluzione anche per un guscio cilindrico di ferrite di spessore $\delta \ll R$. Problema adattato da [Mac19].

Problema 5.13 (Arresto di una cascata di corrente (***)). Sul piano yz scorre nel verso $-\hat{z}$ una densità superficiale di corrente uniforme J_S . Trovare il campo magnetico in tutto lo spazio. A distanza d dal piano è posta una spira circolare – non conduttrice – di raggio a parallela al piano zx , e con densità di carica lineare λ . In un tempo δt la corrente sul piano si arresta totalmente, e la spira comincia a ruotare attorno al suo asse. Spiegare il fenomeno e trovare il momento angolare $\vec{L}$ della spira. Si noti che il momento angolare meccanico del sistema non si conserva.

Problema 5.14 (Dipolo magnetico e griglia superconduttrice (***)). Un dipolo magnetico di intensità m è posizionato davanti a una griglia potenzialmente superconduttrice, a distanza a dalla griglia, e orientato di modo che $\vec{m}$ sia perpendicolare al piano della griglia. Il passo reticolare della griglia è molto più piccolo di a . La griglia è inizialmente in uno stato non superconduttore ed il sistema è in equilibrio. Successivamente la griglia viene resa superconduttrice. Il dipolo magnetico viene spostato a una distanza $a + \delta$ dalla griglia, con $\delta \ll a$. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni risultanti. Problema adattato da: EuPhO 2017-P3.

Problema 5.15 (Tensione in un cilindro superconduttore (**)). Un cilindro cavo con le pareti laterali superconduttrici è attraversato da un flusso di campo magnetico Φ_0 . Calcolare la tensione longitudinale cui è soggetta la parete laterale a metà del cilindro. Problema adattato da: IPhO 2012-P1C.

6 Soluzioni

Nelle soluzioni ai problemi useremo ma non spiegheremo i sistemi di coordinate [cartesiane](#), [cilindriche](#), e [sferiche](#). Indicheremo le componenti ed i [versori](#) di tali sistemi di coordinate con la notazione standard.

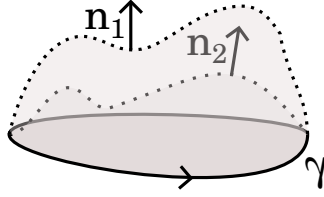


Figura 16: Soluzione del problema *Flusso concatenato*.

Soluzione 6.1 (Flusso concatenato). Nel caso magnetostatico $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ e in generale $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$. Mostriamo che per un campo vettoriale $\vec{F}$ tale che per ogni superficie chiusa S vale $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ si ha che il flusso concatenato a una curva γ non dipende dalla particolare scelta di S_γ . Siano S_1 e S_2 due scelte di superfici di bordo γ . Allora si ha che la superficie S data dall'unione di S_1 e $-S_2$ (abbiamo invertito il versore normale per avere una superficie orientata consistentemente) è chiusa, quindi $0 = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{-S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ cioè $\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$

Soluzione 6.2 (Cavo spesso). Per la simmetria del problema, scegliamo di lavorare in coordinate cilindriche (ρ, ϕ, z) dove $\hat{z}$ è l'asse del filo. $\vec{B}$ non può avere componenti lungo $\hat{z}$ perché, riflettendo il problema rispetto a un piano ortogonale a z (quindi parallelo a xy) B_z deve rimanere invariato per le proprietà di pseudovettore, ma deve anche cambiare segno perché le sorgenti (cioè la corrente) si invertono. Inoltre, $\vec{B}$ non può avere componente radiale, ovvero lungo $\hat{\rho}$, perché effettuando una simmetria lungo un piano passante per l'asse $\hat{z}$, B_r deve rimanere invariato dato che le sorgenti rimangono invariate sotto la trasformazione, ma deve anche cambiare segno dato che $\vec{B}$ è uno pseudovettore e $\hat{\rho}$ è parallelo al piano di simmetria. Questi due ragionamenti valgono solo se calcoliamo $\vec{B}$ in una posizione $\vec{r}$ giacente sul piano di simmetria (dato che in tal caso $\vec{r}$ va a finire in sé stesso dopo la trasformazione), ma in entrambi i casi esiste per ogni posizione $\vec{r}$ un piano di simmetria con le proprietà cercate e passante per $\vec{r}$. Per invarianza rotazionale attorno a $\hat{z}$ e traslazionale lungo $\hat{z}$ possiamo concludere infine che la componente tangenziale B_ϕ (l'unica che non è necessariamente nulla per simmetria) dipende solo dalla distanza dall'asse $\hat{z}$, ovvero $\vec{B}(\rho, \phi, z) = B_\phi(\rho)\hat{\phi}$.

A questo punto, presa una circonferenza γ ad altezza $z = 0$ ($\vec{B}$ non dipende da z , quindi possiamo scegliere z a piacere) sul piano xy , usiamo $\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S}$ per ottenere:

$$2\pi\rho\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0\pi\rho^2 J\hat{\phi} & \text{per } \rho \leq a \\ \mu_0\pi a^2 J\hat{\phi} & \text{per } \rho > a \end{cases} \Rightarrow \vec{B}(\vec{\rho}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 J \rho}{2} \hat{\phi} & \text{per } \rho \leq a \\ \frac{\mu_0 J a^2}{2\rho} \hat{\phi} & \text{per } \rho > a \end{cases}$$

dove $\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$. L'espressione del campo magnetico, come ci ricorda la legge di Biot-Savart, può essere più manifestamente riscritta in termini dei vettori $\vec{r}$ e $\vec{J}$. In effetti dato che $\rho \hat{\phi} = \hat{z} \times \vec{r}$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r} & \text{per } r \leq a \\ \frac{\mu_0 a^2}{2\rho^2} \vec{J} \times \vec{r} & \text{per } r > a \end{cases}$$

Per ottenere il campo magnetico dopo aver praticato il foro cilindrico, è sufficiente sovrapporre al filo di raggio a e corrente $\vec{J}$ un secondo filo di raggio b e corrente $-\vec{J}$. Sommando le correnti, infatti, la situazione ottenuta sarà equivalente a quella voluta. Supponiamo di voler centrare il foro a una distanza $\vec{d}$ dall'asse del filo di raggio a . Se chiamiamo $\vec{B}(\vec{r}; R, \vec{J})$ il campo magnetico di un filo di raggio R e corrente $\vec{J}$ nel punto $\vec{r}$, di cui conosciamo l'espressione per quanto fatto sopra, abbiamo che in questa nuova situazione il campo magnetico risultante è dato da:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}; a, \vec{J}) + \vec{B}(\vec{r} - \vec{d}; b, -\vec{J}).$$

Per studiare il campo magnetico nel foro, delle due possibili espressioni del campo magnetico sceglieremo quella con $\rho \leq b$, cioè $\vec{B}(\vec{r}; b, \vec{J}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r}$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r} - \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times (\vec{r} - \vec{d}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{d}.$$

Il campo è quindi uniforme all'interno del foro.

Soluzione 6.3 (Globo di corrente). Come nel problema precedente, il primo approccio riguarderà le simmetrie. Le coordinate che il problema ci suggerisce sono quelle sferiche (r, θ, ϕ) . Per invarianza rotazionale attorno all'asse $\hat{z}$, passante per i poli, le componenti del campo magnetico dipenderanno al più da r e θ . Consideriamo il campo magnetico in un punto del piano xz ; stiamo così scegliendo $\phi = 0$, il che non è restrittivo per quanto appena osservato. Le componenti di $\vec{B}$ lungo $\hat{r}$ e lungo $\hat{\theta}$, se riflettiamo il problema rispetto al piano xz , devono cambiare segno per pseudovettorialità, ma le sorgenti (cioè le correnti dentro e sulla sfera) rimangono invariate, e perciò il campo magnetico deve anche rimanere lo stesso. Quindi le componenti lungo $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ sono nulle. Il risultato è altresì valido per ogni scelta di ϕ . Possiamo adesso individuare il valore di $\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r, \theta) \hat{\phi}$: applichiamo la legge di Ampère, scegliendo opportunamente la superficie S_γ presa una circonferenza γ parallela al piano xy , di raggio $r \sin \theta$ e centrata in $(0, 0, r \cos \theta)$ (in modo che i punti della circonferenza si trovino a distanza r dall'origine). Se ci troviamo dentro la sfera, la scelta più comoda è la superficie piana racchiusa dalla circonferenza: la corrente concatenata è quella che fluisce dal polo sud al

polo nord e pertanto $2\pi r \sin \theta B_\phi(r, \theta) = \mu_0 I$ ovvero $\vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin \theta} \hat{\phi}$. Fuori della sfera, conviene scegliere è una qualunque superficie che non intersechi la sfera. In questo caso si nota immediatamente che la corrente concatenata è nulla, perciò $\vec{B}(r, \theta) = 0$.

Soluzione 6.4 (Momento di dipolo di una spira piana). Abbiamo visto che $\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d^3 r'$. Per una spira piana l'integrazione avviene lungo il filo γ e al posto della densità di corrente $\vec{J}$ usiamo la corrente I , ovvero usiamo $\vec{J}(\vec{r}) d^3 r' \rightarrow I(\vec{r}) d\vec{\ell}'$. In questi casi, una rapida verifica dimensionale ci può assicurare sulla riscrittura che stiamo operando. Si noti anche che abbiamo sostituito una quantità vettoriale con una vettoriale. A questo punto $\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_\gamma \vec{r}' \times I(\vec{r}') d\vec{\ell}'$. Poiché sia $\vec{r}'$ sia $d\vec{\ell}'$ giacciono sul piano xy , $\vec{m}$ sarà diretto lungo $\hat{z}$. Inoltre, essendo la corrente costante lungo la spira, portiamo I fuori dall'integrale: $\vec{m} = I \hat{z} \oint_\gamma \frac{1}{2} r' d\ell' \sin \theta'$. Si ha infine che $\frac{1}{2} r' d\ell' \sin \theta'$ è l'elemento di area dS (col segno) del triangolo che ha lati $\vec{r}'$, $d\vec{\ell}'$, e $\vec{r}' + d\vec{\ell}'$. Perciò, integrando su tutta la spira, $\vec{m} = I \hat{z} \oint_\gamma dS = IS \hat{z}$.

Soluzione 6.5 (Interfaccia fra diamagnetici). Consideriamo un cilindretto con basi parallele alla superficie di separazione tra i due mezzi, localmente la superficie è approssimativamente planare, con una base nella regione 1 e l'altra nella regione 2; nel limite in cui l'altezza del cilindro è molto piccola rispetto al raggio di base nell'integrale di flusso del campo magnetico possiamo considerare soltanto il flusso attraverso le basi:

$$0 = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}.$$

Consideriamo ora un rettangolino con due lati di lunghezza ℓ paralleli alla superficie di separazione e gli altri due lati di lunghezza trascurabile e perpendicolari alla superficie. Sia $\hat{t}$ la normale alla superficie S' del rettangolino, scelta coerentemente con la scelta dell'orientazione del rettangolo secondo la regola della mano destra. Se ora è presente sulla superficie di separazione una densità superficiale di corrente $\vec{J}_S$ allora si ha che:

$$\int_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \ell \vec{J}_S \cdot \hat{t}$$

nel limite in cui ℓ è piccolo rispetto alle variazioni di corrente. In questo limite si ha anche, detto γ' il bordo del rettangolo:

$$\oint_{\gamma'} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \ell(\hat{t} \times \hat{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \ell(\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)) \cdot \hat{t},$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'identità del prodotto triplo. Sfruttando l'arbitrarietà di $\hat{t}$ e la legge di Ampère si ottiene quindi:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S$$

Soluzione 6.6 (Corrente di spostamento in un condensatore). Detta $C = \epsilon \frac{A}{d}$ la capacità del condensatore, $R = \rho \frac{L}{S}$ la resistenza del filo, e $\tau = RC$, possiamo scrivere che, supponendo che percorrendo il circuito si abbia $\mathcal{E} = 0$ (ovvero trascurando i campi magnetici indotti durante il processo):

$$0 = \mathcal{E} = \frac{Q(t)}{C} + \frac{dQ}{dt}(t)R,$$

dove $Q(t)$ è la carica immagazzinata nel condensatore al tempo t . Dato che $Q(0) = VC$, la soluzione all'equazione è:

$$Q(t) = VCe^{-\frac{t}{\tau}} \quad I(t) = -\frac{dQ}{dt}(t) = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Si ha dunque, ricordando la definizione di I , e supponendo che la corrente viaggi nel filo uniformemente lungo la sezione, che:

$$\vec{J}(t) = \frac{V}{SR}e^{-\frac{t}{\tau}}\hat{t},$$

dove $\hat{t}$ è il versore tangente al filo. Notiamo brevemente che applicando la legge di Ohm in forma locale otteniamo che nel filo $\vec{E} = \rho \vec{J} = \frac{V}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\hat{t}$, e quindi la differenza di potenziale ai capi del filo risulta essere $V(t) = Ve^{-\frac{t}{\tau}}$, coerentemente con i risultati ottenuti finora.

Nell'approssimazione di condensatore ideale si ha che fra le piastre del condensatore:

$$\vec{D}(t) = \frac{Q(t)}{A}\hat{n},$$

con $\hat{n}$ perpendicolare alle due facce del condensatore e nello stesso verso della corrente; si avrà dunque:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{V}{RA}e^{-\frac{t}{\tau}}\hat{n}.$$

Consideriamo ora un cilindro con asse parallelo al filo e basi parallele alle lastre del condensatore, la cui superficie laterale non intersechi le lastre, con una base fuori dal condensatore ed una dentro. Consideriamo ora come cammino il perimetro della base esterna al condensatore e consideriamo due superfici che per bordo hanno questa curva: la base esterna al condensatore del cilindro, S_1 , e la restante superficie del cilindro, S_2 .

Calcoliamo ora su entrambe il flusso della densità di corrente e della corrente di spostamento:

$$\int_{S_1} \vec{J}(t) \cdot \hat{t} dS = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

ricordando che nell'approssimazione di condensatore infinito non vi è un campo elettrico fuori dal condensatore:

$$\int_{S_1} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{t} dS = 0,$$

mentre per la seconda superficie, in quanto non vi sono cariche in moto nel dielettrico attraverso la superficie laterale:

$$\int_{S_2} \vec{J}(t) \cdot \hat{n} dS = 0,$$

e dato che dove è presente il campo elettrico è tangente alla superficie laterale e perpendicolare alla base nel condensatore:

$$\int_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Osserviamo dunque come solo la somma di entrambi i tipi di corrente non dipende dalla superficie scelta, e come dunque il termine aggiuntivo dovuto a Maxwell nell'equazione di Faraday sia fondamentale.

Soluzione 6.7 (Solenoidi e circuiti LR). Un circuito attraversato da una corrente variabile nel tempo genera un campo magnetico variabile, che per la legge di Faraday induce a sua volta nel circuito una f.e.m. che si oppone alle variazioni osservate; in sostanza il circuito autoinduce in sé una nuova variazione della corrente. Si definisce quindi l'autoinduttanza di un circuito, una grandezza legata alle caratteristiche geometriche delle correnti e definita nel seguente modo:

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

dove Φ è il flusso magnetico attraverso il circuito e I è la corrente passante per il circuito. L non dipende da I dato che la (3) è lineare nella corrente. Osserviamo ora che se L rimane costante (ovvero il circuito non si deforma nel tempo):

$$\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}.$$

Ora però, come noto per la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

e dunque:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Calcoliamo ora L per il solenoide il questione, sfruttando le osservazioni svolte alla fine della sezione 4.2 ed applicando la legge di Ampère:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\pi a^2 \ell n \cdot B}{I} = \frac{\pi a^2 \ell n \cdot \mu_0 n I}{I} = \mu_0 \pi a^2 \ell n^2.$$

Nel nostro circuito possiamo trascurare l'autoinduttanza del filo conduttore rispetto a quella del solenoide, ma bisogna tener conto invece della f.e.m. del generatore, e quindi $\mathcal{E} = V_0 - L \frac{dI}{dt}$. Per la legge di Ohm $\mathcal{E} = IR$, e quindi:

$$V_0 = RI + L \frac{dI}{dt}.$$

L'equazione si risolve come somma di una soluzione particolare dell'equazione completa $I_p = \frac{V_0}{R}$ e di una di quella omogenea (dove si pone $V_0 = 0$), $I_o = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$, dove A si ricava imponendo la condizione iniziale. Si ha dunque:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}).$$

Soluzione 6.8 (Sfera bucata). Possiamo considerare il sistema come sovrapposizione di una sfera uniformemente magnetizzata con magnetizzazione $\vec{M}$ e di un cilindro con magnetizzazione uniforme $-\vec{M}$. Possiamo usare il risultato dato nel testo del problema sul campo elettrostatico sfruttando la simmetria fra campo elettrico e campo magnetico nelle leggi di Maxwell nei rispettivi casi statici:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Queste equazioni rimangono infatti invariate se si scambia, in assenza di sorgenti, $\vec{D}$ con $\vec{B}$ e $\vec{E}$ con $\vec{H}$; inoltre dato che $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ e $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$, possiamo sostituire quindi μ_0 a ϵ_0 e $\mu_0 \vec{M}$ a $\vec{P}$ ed ottenere che nel nostro problema, una sfera uniformemente magnetizzata ha $\vec{H}_{\text{int}} = -\frac{\vec{M}}{3}$. Quindi:

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 (\vec{H}_{\text{int}} + \vec{M}) = \mu_0 \frac{2\vec{M}}{3}.$$

Il cilindretto di polarizzazione $-\vec{M}$ si comporta invece come un solenoide, infatti sostituendo nelle leggi di Maxwell $\mu_0 \vec{H} = \vec{B} + \mu_0 \vec{M}$ si hanno le equazioni:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = - \oint_\gamma \mu_0 \vec{M} \cdot d\vec{\ell}.$$

Da queste si nota immediatamente la soluzione $\vec{B}_{\text{cil}} = -\mu_0 \vec{M}$, che può essere giustificata dal fatto che si può sostituire la circuitazione della magnetizzazione con il flusso attraverso un certo S_γ di correnti amperiane superficiali, che a causa della forma del campo $\vec{M}$ saranno disposte come le correnti di un solenoide; notiamo infatti che per rendere tale circuitazione non nulla, γ deve intersecare la superficie del cilindro.

Sommando i due contributi si ha all'interno della cavità un campo di intensità:

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_{\text{int}} + \vec{B}_{\text{cil}} = -\mu_0 \frac{\vec{M}}{3},$$

in accordo col fatto che, essendo i campi paralleli all'asse del cilindro, $\vec{H}$ deve essere continuo attraverso la superficie laterale del cilindro stesso.

La soluzione a questo problema può essere ricavata senza fare ricorso al caso di una sfera uniformemente polarizzata: sfruttando il fatto che $\vec{M}$ è uno pseudovettore vi invitiamo a provare a dimostrare che all'interno di una sfera uniformemente magnetizzata si trova un campo $\vec{H}_{\text{int}} = -\frac{\vec{M}}{3}$.

Soluzione 6.9 (Sperimentale Senigallia 2017). Nel testo del problema non sono state volutamente fornite le grandezze necessarie alla risoluzione con l'intento di invitare il risolutore a riflettere autonomamente quali fossero le grandezze fisiche di rilievo.

Tentiamo innanzitutto di capire la struttura qualitativa del fenomeno. Scorrendo sul piano conduttore il campo magnetico in un punto fissato varia a causa della variazione della distanza dalla spira che modella il magnete (si noti che la presenza di materia, i.e. il piano conduttore, non richiede l'utilizzo delle leggi di Maxwell nei mezzi materiali proprio poiché si è supposto $\mu_r \approx 1$). Dunque a queste variazioni di flusso, applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz, sono associate delle circuitazioni non nulle del campo elettrico; essendo il piano conduttore ciò comporta che della corrente inizierà a fluire al suo interno, ma sappiamo che tra le correnti del piano e quelle della spira si esercitano forze, che possiamo attenderci essere frenanti data la necessità di conservare l'energia (una motivazione simile alla legge di Lenz). Inoltre dato che l'induzione è tanto più intensa quanto più rapide sono le variazioni di campo magnetico, ci si attende che all'equilibrio la velocità sarà tale da generare una forza frenante pari alla componente parallela al piano della forza peso.

Procediamo ora ad una valutazione quantitativa: come prima ulteriore semplificazione notiamo che i fili disposti parallelamente alla velocità limite non contribuiscono alla forza poiché, il campo magnetico di un filo lungo dipende solo dalla distanza da questo, e quindi il loro campo magnetico calcolato in un punto del piano rimane approssimativamente costante, e non

causa quindi induzione. Inoltre essendo gli altri due fili – quelli orientati perpendicolarmente al moto – molto distanti, possiamo limitarci a considerare individualmente un unico filo infinito che scorre ad altezza h sul piano, disposto lungo l'asse y con corrente nel verso positivo e con velocità diretta lungo l'asse delle x positivo. Chiaramente con questa modellizzazione, dove consideriamo oggetti di dimensioni infinite, dovremo effettuare il calcolo delle quantità in gioco (i.e. la forza) per unità di lunghezza, altrimenti non troveremo altro che grandezze infinite. Risulta agevole, al fine di determinare la struttura delle linee di corrente nel piano conduttore, porsi nel s.d.r. della spira: in questo sistema quello che si osserva è un piano con cariche libere di muoversi che scorre a velocità costante in presenza di un campo magnetico di intensità non uniforme ma costante nel tempo. Dato ciò le cariche risentono di una forza di Lorentz pari a:

$$\vec{F}(x) = q\vec{v} \times \vec{B}(x) = qv_{\text{lim}}\hat{x} \times B_z(x)\hat{z} = qv_{\text{lim}}\frac{\mu_0 I h}{2\pi(h^2 + x^2)}\hat{y},$$

dove con q si è indicata la carica della singola particella ed x la coordinata del punto del piano in cui si trova la carica, ricordando che il filo è posto sopra all'asse delle y ad una altezza h . Il campo magnetico è l'usuale campo magnetico di un filo infinito carico, diretto quindi tangenzialmente, che nell'ultimo passaggio è stato proiettato lungo l'asse z poiché nel prodotto vettore la componente x si annulla. Notiamo che l'espressione è stata calcolata per il semipiano positivo delle x , l'espressione per quello negativo è semplicemente cambiata di segno. Questa forza agisce sulle cariche in un modo analogo ad un campo elettrico di intensità F/q , innescando dunque una densità di corrente pari a:

$$\vec{J}(x) = \frac{\sigma \vec{F}(x)}{q},$$

dove con σ si indica la conducibilità elettrica del piano, pari all'inverso della resistività. A questo punto per calcolare la forza per unità di lunghezza totale è sufficiente integrare la forza tra correnti e moltiplicare per un fattore 4 (un fattore due per i due semipiani, ed un secondo fattore due per i due fili). Se poniamo pari a δ lo spessore, molto piccolo, del piano si ha:

$$(F_{\text{tot}})_x = 4 \int_0^{+\infty} -\frac{\mu_0^2 \sigma \delta h I^2 v_{\text{lim}} x}{4\pi^2(x^2 + h^2)} dx = -\frac{\mu_0^2 \sigma \delta h I^2 v_{\text{lim}}}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + h^2)^2} dx = \frac{\mu_0^2 \sigma \delta h I^2 v_{\text{lim}}}{2h^2 \pi^2}.$$

Per effettuare il calcolo dell'integrale si è riconosciuto che al numeratore, a meno di fattori numerici, è presente la derivata del denominatore al quadrato, potendo dunque applicare al contrario la regola di derivazione della potenza di una funzione. Per ottenere quindi la velocità limite è sufficiente imporre

l'equilibrio meccanico lungo l'asse, inclinato ad un angolo θ rispetto all'orizzontale, che rappresenta la pendenza del piano. Ricordando che $(F_{\text{tot}})_x$ è espresso per unità di lunghezza, detta ℓ la larghezza della spira:

$$mg \sin \theta = \frac{\mu_0^2 \sigma \delta I^2 v_{\text{lim}}}{2\pi^2 h} \ell$$

$$v_{\text{lim}} = \frac{2\pi^2 h m g \sin \theta}{\mu_0^2 \sigma \delta I^2 \ell}.$$

Con questo il problema si conclude anche se ricondurre il risultato ad un magnete reale non è facile, e dipende dalla scelta della modellizzazione del magnete tramite questa spira (ci sono infatti vari modi per ottenere un dato momento di dipolo magnetico avendo ℓ e I come parametri liberi).

Soluzione 6.10 (Spira in moto uniforme). In primo luogo calcoliamo la corrente che scorre nella spira; applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la variazione di flusso dovuta alla variazione nello spazio di $\vec{B}$ si può scrivere:

$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \pi a^2 \frac{B_z(z + dz, r) - B_z(z, r)}{dz} = \pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} v,$$

dove si è sfruttato che il campo magnetico lungo la direzione z è approssimativamente costante sulla superficie della spira. Applicando la legge di Ohm al circuito:

$$I = \frac{\pi a^2}{R} \frac{\partial B_z}{\partial z} v.$$

Per la conservazione dell'energia, la potenza dissipata per effetto Joule deve essere uguale a quella assorbita dalla forza esterna. Ricordando che istantaneamente la potenza di una forza è pari al prodotto scalare con la velocità del corpo su cui è esercitata si deduce:

$$F = \frac{I^2 R}{v} = \frac{(\pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z})^2 v}{R} \rightarrow P = \frac{(\pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} v)^2}{R}.$$

Per calcolare direttamente la forza magnetica è utile capire in prima battuta quali componenti del campo magnetico contribuiscono alla forza resistiva. Poiché la spira e la corrente che scorre in essa giacciono su un piano perpendicolare all'asse z , la componente del campo magnetico che produce forza lungo l'asse delle z è quella diretta radialmente rispetto al centro della spira. Procediamo al calcolo della potenza per mezzo della definizione:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F dz}{dt} = \frac{dz \int_0^{2\pi} B_{\perp} I a d\theta}{dt}.$$

L'integrale rappresenta la somma di ogni elemento infinitesimo di forza applicato ad ogni tratto $d\ell = a d\theta$ della circonferenza e $B_{\perp}$ rappresenta il campo magnetico perpendicolare ad ogni $d\ell$. Osserviamo che se portiamo dentro l'integrale dz ed inoltre facciamo uscire I possiamo riconoscere nell'integrale il flusso del campo magnetico uscente dalla superficie esterna di un cilindro ottenuto dalla traslazione nello spazio della spira. Ma allora applicando la legge di Gauss magnetica possiamo sostituire l'integrale con il flusso attraverso le due basi del cilindro sopra individuato diviso per dt . Quest'ultimo è già stato calcolato all'inizio della risoluzione, quindi sostituendo si ha:

$$P = \frac{(\pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} v)^2}{R},$$

cioè lo stesso valore ottenuto precedentemente.

Soluzione 6.11 (Effetto Hall). A causa della presenza del campo magnetico, le cariche nel conduttore sperimentano una forza di Lorentz pari a $q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\hat{z}$. A causa di ciò le cariche si spostano lungo lo spigolo h , ma questa separazione di cariche comporta la comparsa di un campo elettrico lungo l'asse z , in particolare verso la direzione negativa di questo asse, accumulandosi le cariche positive sulla faccia superiore. Nei fatti, sfruttando l'approssimazione suggerita, è come se fossimo in presenza di due piani infiniti carichi. Il processo di carica prosegue fino a che la forza elettrica non reinstaura l'equilibrio. Operando lungo l'unico asse di rilievo, quello z , otteniamo:

$$qvB = qE \rightarrow E = vB,$$

che, ricordando la formula della capacità di un condensatore piano (ottenuta applicando la legge di Gauss), porta a:

$$\sigma = \epsilon_0 v B.$$

Soluzione 6.12 (Solenoido attorno ad un conduttore). Nella risoluzione del problema useremo chiaramente le coordinate cilindriche. Il campo magnetico generato dal solenoide vale, come sempre, in prima approssimazione $B_z = \mu n I \cos(\omega t)$. Notiamo però che qui, oltre ad approssimare il solenoide come infinito, stiamo anche trascurando i cosiddetti termini di ordine superiore del campo elettromagnetico: per le ultime due leggi di Maxwell si ha che la variazione di uno dei due campi causa una variazione nell'altro, fenomeno che si può schematizzare tramite una serie di correzioni sempre più piccole ai campi elettromagnetici. Poiché all'interno del cilindro è presente un campo magnetico variabile, dalla terza legge di Maxwell deduciamo che deve essere presente un campo elettrico indotto. Data la sua origine ci si attende che si

presenti con linee chiuse, più precisamente circonferenze, data la simmetria cilindrica del sistema che le crea. Dunque:

$$-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = 2\pi r E_\phi(r, t),$$

dove con r si è indicato il raggio della circonferenza su cui si sta valutando la circuitazione di $E_\phi(r, t)$, cioè il campo elettrico tangenziale in funzione del tempo e della distanza dall'asse. Calcolando il flusso di $\vec{B}$ si ottiene:

$$E_\phi(r, t) = \frac{\mu n I \omega r}{2} \sin(\omega t).$$

Applicando dunque la legge di Ohm in forma microscopica si ottiene che la densità di corrente cresce linearmente con la distanza dall'asse e varia nel tempo con carattere sinusoidale:

$$J_\phi(r, t) = \sigma E_\phi(r, t) = \frac{\sigma \mu n I \omega r}{2} \sin(\omega t).$$

Il calore dissipato si ottiene applicando la legge di Joule, sempre espressa in forma microscopica ($p = \frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E}$). Per ottenere però il risultato richiesto sarà necessario mediare su un periodo e poi integrare sul volume del cilindro:

$$p(r, t) = E_\phi(r, t) J_\phi(r, t) = \frac{\sigma(\mu n I \omega r)^2}{4} \sin^2(\omega t)$$

Ricordando che in un periodo, $\sin^2(x)$ vale in media $\frac{1}{2}$:

$$P = \ell \int_0^R 2\pi r p(r) dr = \frac{\pi \sigma \ell (\mu n I \omega)^2}{4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \sigma \ell (\mu n I \omega)^2 R^3}{16}$$

dove l'integrale è stato effettuato sommando corone cilindriche di raggio interno r , altezza ℓ e spessore dr infinitesimo, avendo quindi volume pari a $2\pi r \ell dr$, al cui interno il valore di $p(r)$, la densità di potenza media dissipata, può essere considerata uniforme.

Se vogliamo calcolare una prima correzione al valore del campo magnetico dobbiamo tener conto della corrente aggiuntiva che scorre nel cilindro e della corrente di spostamento, cioè delle variazioni di campo elettrico. Calcoliamoli separatamente: per calcolare il contributo delle correnti reali aggiuntive si può osservare che, nei fatti, ogni singolo strato di corrente a distanza r dall'asse e di spessore dr si comporta come un solenoide con prodotto $In = J(r) dr$ dunque per ottenere la correzione al campo magnetico ad una certa distanza dovremo integrare i contributi di tutte le corone cilindriche di corrente più esterne:

$$B_z^{(1)}(r, t) = \int_r^R \mu J_\phi(r') dr' = \int_r^R \mu \frac{\sigma \mu n I \omega r'}{2} \sin(\omega t) dr' = \frac{\mu^2 \sigma n I \omega}{4} \sin(\omega t) (R^2 - r^2).$$

Per calcolare invece la correzione del termine della corrente di spostamento calcoleremo la circuitazione del campo magnetico lungo un rettangolo giacente in uno dei piani di simmetria contenenti l'asse del solenoide e con un lato lungo a coincidente con l'asse stesso. Al solito per motivi di simmetria non sono presenti componenti radiali di $\vec{B}$ dunque:

$$aB_z^{(2)}(r, t) = \mu \frac{d\Phi(\vec{D})}{dt} = a \int_0^r \frac{\epsilon \mu^2 n I \omega^2 r'}{2} \cos(\omega t) dr' = \frac{\epsilon \mu^2 n I \omega^2}{4} \cos(\omega t) r^2.$$

A posteriori si verifica che le correzioni siano effettivamente di ordine maggiore, cioè che i rapporti $B_z^{(1,2)}/B_z$ siano piccoli, ove piccolo è al solito da intendersi in relazione alla precisione che una eventuale procedura sperimentale è in grado di raggiungere. Notiamo che il rapporto $B_z^{(2)}/B_z^{(1)}$ tra le due correzioni può, sotto certe ipotesi, rendere trascurabile il termine dovuto alla corrente di spostamento. Infatti questo è dell'ordine $\frac{\epsilon \omega}{\sigma}$. Aggiungiamo poi che, se lo si volesse, si potrebbero calcolare le correzioni alle correzioni. Il caso del guscio cilindrico si presenta identico nelle idee e nei passaggi però, nell'eventualità in cui si potesse trascurare il termine della corrente di spostamento si può ottenere una soluzione diretta e completa del problema; come sopra si ottengono applicando le ultime due leggi di Maxwell:

$$2\pi R E_\phi(R, t) = -\pi R^2 \frac{\partial B_z(t)}{\partial t} \quad B_z(t) = \mu(nI \cos(\omega t) + \delta \sigma \epsilon E_\phi(R, t)),$$

da cui, disaccoppiando e risolvendo l'equazione differenziale cercando una soluzione del tipo $B_z(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$ con α e β costanti opportune si ha:

$$\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) = \mu n I \cos(\omega t) - \frac{\mu \epsilon \delta \omega \sigma R}{2} \alpha \cos(\omega t) + \frac{\mu \epsilon \delta \omega \sigma R}{2} \beta \sin(\omega t).$$

Eguagliando i termini con la stessa dipendenza temporale ricaviamo α e β :

$$\alpha = \frac{\mu \epsilon \delta \sigma \omega R}{2} \frac{\mu n I}{1 + \frac{(\mu \epsilon \delta \sigma \omega R)^2}{2}} \quad \beta = \frac{\mu n I}{1 + \frac{(\mu \epsilon \delta \sigma \omega R)^2}{2}}.$$

Soluzione 6.13 (Arresto di una cascata di corrente). Prima di procedere alla soluzione osserviamo che nella situazione fisica descritta dal problema non è facile descrivere l'evoluzione temporale dei campi: l'arresto della cascata porta ad una variazione del campo magnetico nello spazio, che a sua volta

causa la formazione di un campo elettrico a causa della terza equazione di Maxwell. Durante l'arresto si forma quindi sulla superficie del piano un'onda elettromagnetica che viaggia a velocità c nei versi $\pm \hat{x}$; questa viaggiando "spazza via" il campo magnetostatico della cascata di corrente, "trascinandosi dietro" la nuova soluzione del campo elettromagnetico (che possiamo assumere stazionaria).

Cerchiamo adesso di descrivere la nuova soluzione. Questa avrà certamente campo magnetico nullo: per simmetria traslazionale il campo magnetico dipenderà solo dalla distanza dal piano, e per simmetria planare (lungo il piano della corrente (yz) e lungo un piano perpendicolare al piano della corrente ma parallelo al verso di questa (zx)), per pseudovettorialità del campo magnetico, questo avrà direzione lungo $\hat{y}$ e sarà dispari rispetto al piano della corrente; applicando la legge di Ampère ad un rettangolo parallelo a xy e simmetrico rispetto al piano della corrente yz , si avrà che $\vec{B}$ è nullo, essendo la corrente nulla dopo l'arresto della cascata. Per ragionamenti di simmetria analoghi si trova che il campo elettrico sarà diretto lungo $\hat{z}$ e costante in tutto lo spazio, ma essendo questo pari rispetto al piano della corrente, è impossibile dichiarare a priori che questo sarà nullo dopo l'arresto della corrente. È quindi possibile che, in questa situazione ipotetica ben poco realizzabile, le cariche sull'anello sentano ad ogni tempo dopo l'arresto della cascata un'accelerazione costante: una quantità illimitata di quantità di moto sarebbe trasmessa alle cariche nella direzione $\hat{z}$ (si noti che il verso è lo stesso della cascata).

Fortunatamente il problema chiede semplicemente di trovare il momento angolare trasferito all'anello. Ci viene detto che l'anello ruota attorno al suo asse di simmetria rotazionale, parallelo a $\hat{y}$. Chiamando γ la curva che delinea l'anello:

$$\frac{d}{dt}L_y = \tau_y = \left(\oint_{\gamma} (\vec{r} - d\hat{x}) \times d\vec{F} \right) \cdot \hat{y} = \oint_{\gamma} a\vec{E} \cdot \lambda d\vec{\ell} = a\lambda \mathcal{E} = -a\lambda \frac{d\Phi}{dt},$$

dove $\mathcal{E}$ è la forza elettromotrice lungo γ e Φ è il flusso magnetico lungo γ ; il passaggio intermedio si può giustificare usando l'identità vettoriale del prodotto triplo, quello più a sinistra con le equazioni cardinali, e quello più a destra con la legge di Faraday-Neumann-Lenz. A questo punto integrando gli estremi si ha, ricordando il campo magnetostatico di un piano infinito di corrente:

$$L_y = a\lambda\Phi(t=0) = -\lambda\pi a^3 \frac{\mu_0 J_S}{2}.$$

Riferimenti bibliografici

- [Gri17] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics Fourth Edition*, page 312. Cambridge University Press, 2017.
- [Jac98] John David Jackson. *Classical Electrodynamics Third Edition*. Wiley, 1998.
- [Mac19] Andrea Macchi. Fisica 2: problems and solutions, 2019. Pubblicato sul [sito dell'autore](#).