

Meccanica Celeste

Antonio Matteri*

8 Febbraio 2022, Pisa

Sommario

Incominceremo parlando delle coordinate polari, molto utili per parametrizzare le orbite. In seguito si troveranno le costanti del moto in campo gravitazionale e da esse si ricaveranno le forme delle orbite possibili. Verrà poi trattato il caso di Sole non a simmetria sferica introducendo il successivo ordine di approssimazione, con un accenno alle armoniche sferiche.

1 Moto in campo centrale

1.1 Coordinate polari

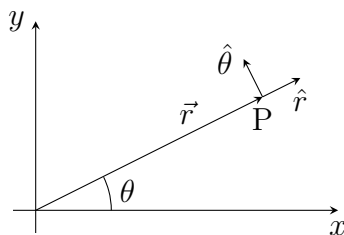


Figura 1: Individuazione di un punto sul piano attraverso le coordinate polari. Ogni punto è univocamente determinato dai parametri r e θ .

Conosciamo tutti come individuare univocamente punti sul piano attraverso le coordinate cartesiane: per molti sistemi fisici tuttavia risulta più comodo e significativo utilizzare un altro sistema di coordinate, normalmente chiamate *coordinate polari*, in cui ogni punto (tranne l'origine) è identificato

*antonio.matteri@sns.it

da due parametri (siamo sempre su un piano, quindi avremo sempre due gradi di libertà!), di solito indicati con r (la distanza del punto in questione dall'origine) e θ (l'angolo orientato tra la congiungente punto-origine e l'asse x), come indicato in Figura 1. Risulta immediato verificare che è sempre possibile passare da coordinate polari a cartesiane mediante le relazioni:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

così come, viceversa, passare dalle cartesiane alle polari:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan \left(\frac{y}{x} \right)^1\end{aligned}$$

Osserviamo che questa operazione non è altro che un cambio della base, ossia del sistema di versori, che utilizziamo per rappresentare i nostri vettori nel piano: se prima i nostri versori erano $\hat{x}$ ed $\hat{y}$ (vettori di modulo 1 diretti rispettivamente lungo l'asse x ed y), ora abbiamo scelto di considerare $\hat{r}$ (il versore radiale, un vettore di modulo 1 diretto lungo la congiungente origine-punto) e $\hat{\theta}$ (sempre di modulo 1, che possiamo considerare perpendicolare a $\hat{r}$ e diretto in modo che il verso positivo sia quello antiorario). In quest'ottica facciamo attenzione a non confonderci tra le *componenti* e i *versori*: questi ultimi, caratterizzati da una notazione con il “cappellino” (come $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{r}$, $\hat{\theta}$), sono vettori e ci dicono “in che direzione ci stiamo muovendo” per trovare il punto, mentre le prime (indicate come x , y , r , θ associate ai rispettivi versori) sono degli scalari che ci dicono “di quanto ci muoviamo” in ciascuna direzione.

1.2 Vettori in coordinate polari

Ora che sappiamo cosa sono le coordinate polari e come usarle per descrivere i vettori, vogliamo scoprire come operare su di essi: l'operatore più importante che non risulta di immediata formalizzazione in questo sistema è probabilmente quello di derivata temporale, che passiamo quindi ad illustrare (nel seguito utilizzeremo la notazione “puntata” per indicare la derivata rispetto al tempo dell'oggetto, ad esempio $\frac{dx}{dt}$ sarà indicato con $\dot{x}$). Ricordando il formalismo di prima, un punto può essere individuato come:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

¹Questa relazione in realtà vale solo per $x > 0$; possiamo dare una definizione leggermente diversa che dia sempre $\theta \in [-\pi, \pi]$ ed è $\theta = \frac{\pi}{2}\text{sign}(y) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$.

dove r è lo scalare che ci indica di quanto ci siamo allontanati dall'origine e $\hat{r}$ ci dice in che direzione. Ora, per effettuare la derivata temporale di $\vec{r}$ in realtà dobbiamo calcolare due derivate temporali diverse, che tengano conto delle due diverse quantità che possono cambiare nel tempo, ossia r ed $\hat{r}$, per poi combinarle tra loro (utilizzando la normale regola del prodotto):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

Il primo termine è la derivata di una normalissima funzione scalare che moltiplica un vettore, mentre il secondo termine ci preoccupa un po' di più: come può cambiare un versore nel tempo? Riflettiamo: il suo modulo non può cambiare (è fisso a 1 per definizione) e non risente di traslazioni del sistema poiché l'unica informazione che porta è una direzione; l'unico modo in cui si modifica l'informazione di cui si fa carico è una rotazione (l'unico modo di cambiare direzione, in un certo senso), che può essere rappresentata da un vettore $\vec{\Omega}$ di modulo Ω (la velocità angolare con cui ruota il vettore) e perpendicolare al piano del moto (quindi parallelo all'asse di rotazione).

Ruotando il versore di un angolo infinitesimo Ωdt , è facile convincersi che esso varia di un vettore infinitesimo di modulo Ωdt e perpendicolare a $\hat{r}$. Ciò può essere scritto compattamente con la formula

$$\dot{\hat{r}} = \vec{\Omega} \times \hat{r}$$

che prenderemo d'ora in poi per buona².

Dato che in questo caso stiamo assumendo che $\vec{r}$ sia sempre sul piano xy , il sistema di coordinate polari ci permette di scrivere:

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$$

che con le dovute sostituzioni ci porta a:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{z} \times \hat{r}$$

Ossia, sviluppando $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{1}$$

Questa formula ce la potevamo aspettare, vediamo un metodo più intuitivo e meno formale per ricavarla.

La velocità ha in generale 2 componenti, una lungo $\hat{r}$ e una lungo $\hat{\theta}$. Per la parte radiale ci si aspetta che non conti θ per invarianza sotto rotazioni;

²Una dimostrazione rigorosa di questo risultato è riportata nell'Appendice A.

non conta nemmeno $\dot{\theta}$ in quanto, a patto di prendere un tempo abbastanza piccolo, uno spostamento in direzione ortogonale a $\hat{r}$ non cambia il valore di r . Per la parte angolare, non ci si aspetta una dipendenza da θ sempre per invarianza sotto rotazioni, mentre ci si aspetta che sia proporzionale a $\dot{\theta}$ (se $\dot{\theta} = 0$ allora la velocità angolare sarà nulla); del resto per analisi dimensionale si può notare che il coefficiente è proporzionale proprio a r e non dipende da $\dot{r}$ per un ragionamento analogo a quello per cui la velocità radiale non dipende da $\dot{\theta}$. A questo punto il valore del fattore numerico può essere trovato pensando al moto circolare uniforme: la velocità quando $\dot{r} = 0$ è proprio $r\dot{\theta}\hat{\theta}$.

Derivando la velocità si ottiene l'accelerazione, e dunque, riapplicando l'operazione di derivata a $\dot{\vec{r}}$ si ottiene l'accelerazione espressa in coordinate polari:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{z} \times \hat{r} + \dot{r}\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\hat{z} \times \hat{\theta} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}$$

Quindi, quando si ha tra le mani un problema di dinamica, bisogna risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f_r \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = f_\theta \end{cases} \quad (2)$$

che corrisponde proprio alla seconda legge di Newton ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}$). Vediamo ora un'applicazione di questa *nuova* metodologia, molto utile nel caso di forze dirette verso un punto fisso.

Consideriamo una molla vincolata nell'origine, con costante elastica k , alla cui estremità è agganciata una massa m libera di ruotare nel piano xy , come in Figura 2.

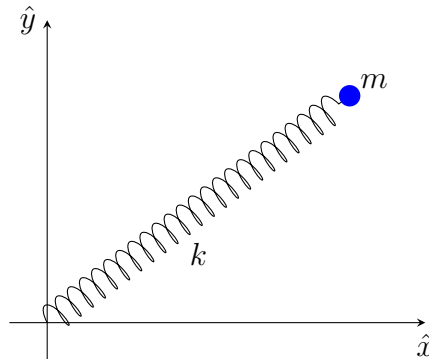


Figura 2: Massa collegata a una molla.

In questo caso il sistema (2) diventa

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -kr \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

Per trovare il raggio di equilibrio (quello per cui si ha un moto circolare) basterà imporre $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ che riduce le equazioni di prima a:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \frac{k}{m} \\ \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

A questo punto, fissato un punto di riferimento O , definiamo *campo radiale* un campo vettoriale i cui vettori puntano sempre nella direzione radiale $\hat{r}$, mentre un *campo centrale* è un campo radiale in cui vale la condizione aggiuntiva che il modulo di ciascun vettore dipende solo dalla sua distanza dal centro. A titolo di esempio, il campo $\vec{F}_1 = 3r^2 \cos \theta \hat{r}$ è solo radiale a causa della dipendenza dalla coordinata angolare, mentre il campo $\vec{F}_2 = 3r^2 e^{-\alpha r} \hat{r}$ è centrale.

Detto questo, tornando alle equazioni del moto del sistema massa-molla, possiamo vedere come in un campo radiale si conserva il momento angolare calcolato rispetto all'origine O . Infatti dalla prima equazione della dinamica si ha che la componente tangenziale della forza è nulla, dunque

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

Moltiplicando per r si ottiene:

$$m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0$$

in cui riconosciamo una derivata temporale:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

da cui la quantità $L = mr^2\dot{\theta}$ risulta costante. Essa non è nient'altro che il modulo del momento angolare del corpo in rotazione. In questo caso il momento angolare si conserva perché la forza elastica agente sulla massa non produce alcun momento torcente, essendo una forza radiale.

2 Gravitazione

La base di partenza per descrivere il moto dei pianeti è la legge di gravitazione universale, che esprime la forza di attrazione tra due masse puntiformi poste ad una certa distanza

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

Mettiamoci nell'ipotesi in cui una delle due masse sia molto più grande dell'altra ($M \gg m$)³, in modo da interessarci solo al moto della seconda (ad esempio, se consideriamo l'attrazione tra un satellite e la Terra, quest'ultima può considerarsi ferma). In questo modo possiamo fissare l'origine del sistema di coordinate nel centro del corpo grande. Eliminando i pedici, la forza agente sul corpo piccolo potrà scriversi come

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Questa è una forza centrale che ammette un potenziale, esprimibile come

$$U = -\frac{GMm}{r} \equiv -\frac{\alpha}{r}$$

A partire da queste semplici relazioni è possibile ricavare le famose *Leggi di Keplero*, che recitano

1. Le orbite descritte dai pianeti sono delle ellissi, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro dei pianeti spazza aree uguali in tempi uguali.
3. I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo dei semiassi maggiori delle rispettive ellissi.

La prima legge stabilisce il tipo di traiettoria percorsa dai pianeti. Per i pianeti del sistema solare sono solo ellissi, ma nel caso generale le orbite

³Quest'ipotesi è superflua, infatti si può trattare anche il caso generico del problema a due corpi. Con un cambiamento di coordinate è possibile passare al sistema del centro di massa e del moto relativo, ottenendo che le formule trovate in seguito sono ancora valide a patto di cambiare M nella somma delle masse dei due corpi $m_1 + m_2$ e m nella massa ridotta del sistema $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.

possibili sono delle coniche, quindi circonferenze, ellissi, parabole od iperboli. L'equazione generale delle coniche in coordinate polari è

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (3)$$

dove l è un parametro con le dimensioni di una lunghezza e ϵ è l'eccentricità dell'orbita, che vale

- $\epsilon = 0$ per le circonferenze;
- $0 < \epsilon < 1$ per le ellissi;
- $\epsilon = 1$ per le parabole;
- $\epsilon > 1$ per le iperboli.

In questa sezione siamo interessati solamente alle orbite limitate, quindi ci limiteremo al caso $0 < \epsilon < 1$. Nella sezione seguente vedremo alcune strategie con cui affrontare parte dei problemi di meccanica celeste.

2.1 Quantità conservate

Generalmente esistono due modi di risolvere un problema di meccanica: il primo consiste nel trovare le leggi orarie dei corpi del sistema a partire dalla seconda legge di Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$), mentre il secondo si basa su alcune leggi di conservazione che legano la velocità alla posizione. Noi useremo quest'ultima strada per trovare alcuni risultati importanti della meccanica orbitale, riguardanti il *problema dei due corpi* nello specifico. Durante il moto di un pianeta attorno ad una stella, sono tre le quantità che si conservano:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{\alpha}{|\vec{r}|} && \text{Energia Meccanica} \\ \vec{L} &= m\vec{r} \times \vec{v} && \text{Momento Angolare} \\ \vec{A} &= m\vec{v} \times \vec{L} - m\alpha\hat{r} && \text{Vettore di Lenz} \end{aligned}$$

L'energia meccanica si conserva perché la forza gravitazionale è una forza conservativa e sul sistema non agiscono forze dissipative. Come già detto nella parte iniziale della lezione, il momento angolare si conserva perché la forza gravitazionale è una forza radiale (più particolarmente è una forza centrale) che non produce alcun momento torcente sul sistema. Prima di passare a discutere la terza quantità conservata, vale la pena sfruttare la conservazione di E e $\vec{L}$ per caratterizzare le orbite chiuse, cioè ellissi e circonferenze.

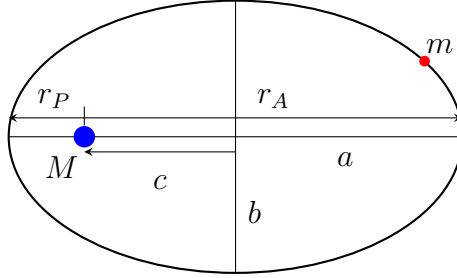


Figura 3: Satellite in moto su un'orbita ellittica di semiassi a e b .

Utilizzando la conservazione dell'energia e del momento angolare tra l'afelio e il perielio, possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P}$$

$$L = mr_A v_A = mr_P v_P \longrightarrow v_P = v_A \frac{r_A}{r_P}$$

dove r_A e r_P sono rispettivamente la massima e minima distanza dal corpo attrattore, tali che

$$r_A + r_P = 2a \quad r_A - r_P = 2c$$

Ricavando v_P dalla conservazione del momento angolare e sostituendola nella conservazione dell'energia, otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_A^2 \left(1 - \frac{r_A^2}{r_P^2}\right) = GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = GMm \left(\frac{r_P - r_A}{r_A}\right) \frac{r_P}{r_P^2 - r_A^2}$$

Avendo trovato un'espressione per l'energia cinetica all'afelio, possiamo usarla per trovare l'energia meccanica totale

$$E = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{GMm}{r_A} \left(\frac{r_P}{r_P + r_A} - 1\right) = -\frac{GMm}{2a}$$

che, ovviamente, è indipendente dal punto dell'ellisse in cui ci troviamo. Notiamo inoltre che $E < 0$, caratteristica di ogni traiettoria limitata in un campo coulombiano come quello gravitazionale. Questa relazione è importantissima per risolvere problemi di meccanica spaziale. Notiamo che nel limite di circonferenza $a \rightarrow R$ e l'energia è proprio quella di un satellite in moto circolare uniforme attorno al corpo attrattore. Per quanto riguarda il momento angolare, invece, possiamo scrivere

$$L = mr_A v_A = m \sqrt{2GM \frac{r_A r_P}{r_P + r_A}} = m \sqrt{2GM \frac{b^2}{2a}} = mb \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Notiamo che nel caso di ellisse degenera (ovvero il segmento orizzontale di lunghezza $2a$) il momento angolare è nullo. Ciò ha senso perché il moto avviene lungo una retta, quindi il prodotto vettoriale tra raggio vettore e quantità di moto è sempre nullo.

L'ultima quantità conservata è la più esotica tra le tre. Essa, come è chiaro dalla sua espressione, è necessariamente collocata sul piano dell'orbita. Vedremo a breve che il vettore di Lenz è legato all'eccentricità dell'orbita percorsa dal pianeta. Per mostrare che il vettore di Lenz è una costante del moto, dimostriamo che la sua derivata rispetto al tempo è nulla. Sfruttiamo il fatto che $\vec{L}$ è a sua volta una costante del moto:

$$0 = \frac{d\vec{A}}{dt} = m \frac{d(\vec{v} \times \vec{L} - \alpha \hat{r})}{dt} \iff \alpha \dot{\hat{r}} = \vec{a} \times \vec{L}$$

Usando l'espressione della forza gravitazionale, la definizione di momento angolare, le proprietà del prodotto vettoriale e l'espressione della velocità in coordinate polari, troviamo la seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{L} &= \left(-\frac{\alpha}{mr^2} \hat{r} \right) \times (m\vec{r} \times \vec{v}) = -\frac{\alpha}{r} (\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{v})) = -\frac{\alpha}{r} (\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\hat{r} \cdot \hat{r})) = \\ &= -\frac{\alpha}{r} (\hat{r}\dot{r} - \vec{v}) = \frac{\alpha}{r} (r\dot{\hat{r}}) = \alpha \dot{\hat{r}} \end{aligned}$$

Dove la terza uguaglianza segue da un'identità vettoriale dimostrata nell'appendice C:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Ciò conclude la dimostrazione della conservazione del vettore di Lenz.

2.2 Potenziale efficace

Prima di procedere e ricavare l'equazione delle orbite, introduciamo un approccio alternativo a quello usato in seguito, ma molto utile in generale.

L'energia di un corpo in orbita si può scrivere come:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r}$$

Che differisce dalla scrittura solita in quanto è stata esplicitata la dipendenza dalle coordinate polari.

Un'altra quantità conservata abbiamo detto che è il momento angolare, ovvero:

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

Possiamo dunque usare la conservazione del momento angolare per eliminare la dipendenza da $\dot{\theta}$ in E :

$$E = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{L^2}{m^2 r^4} \right) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{GMm}{r}$$

Ora si può notare che l'energia ha due termini ben distinti: uno che dipende da r (termine potenziale) e uno che dipende da $\dot{r}$ (termine cinetico). Il termine potenziale è detto potenziale efficace:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

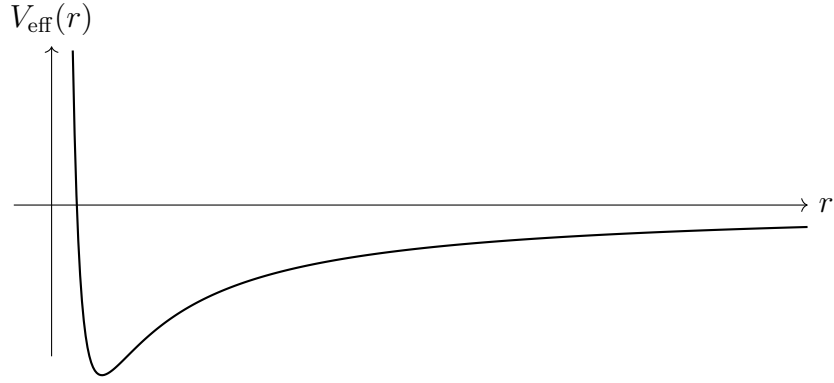


Figura 4: Grafico del potenziale efficace in funzione della distanza

Nel grafico precedente si nota un punto di minimo, ponendo la derivata del potenziale efficace pari a 0, si ottiene che esso è a:

$$r_{\min} = \frac{L^2}{GMm^2} \qquad V_{\min} = -\frac{m}{2} \left(\frac{GMm}{L} \right)^2$$

Vediamo tra un attimo che importanza ha questo punto.

Il potenziale ci dice molte cose sulla natura delle orbite, vediamo di capire cosa in maniera grafica. Immaginiamo di avere fissato il momento angolare e le masse in gioco, possiamo dunque tracciare il grafico del potenziale efficace, come in Fig. 4. A questo punto possiamo fissare l'energia dell'orbita e, poiché ha le stesse dimensioni del potenziale efficace, possiamo disegnarla sul grafico come una retta orizzontale con ordinata pari al valore scelto. A questo punto si può notare che: se la retta è sopra il grafico in un punto, significa che il termine cinetico a quella distanza è positivo e dunque siamo in un punto

permesso; se la retta interseca il grafico in un punto, allora in esso il termine cinetico è nullo e dunque è un punto estemale (afelio o perielio); se la retta è sotto il grafico, siamo in un punto non permesso in quanto l'energia cinetica dovrebbe essere negativa.

Dal grafico in Fig. 4 e dalle considerazioni precedenti, possiamo dedurre alcune idee qualitative sulle orbite possibili:

- Se $E \geq 0$ allora abbiamo un solo punto estemale, dunque se ci stiamo avvicinando al Sole raggiungeremo una distanza minima per poi allontanarci indefinitamente.
- Se $0 \geq E > V_{\min}$ allora abbiamo 2 punti estremali e la regione permessa è limitata; dalla prima legge di Keplero se ne deduce che questo è il caso di orbita ellittica.
- Se $E = V_{\min}$ allora abbiamo un solo punto permesso, ovvero una sola distanza dal Sole; questo è il caso di orbita circolare.

2.3 Equazione delle orbite

Sfruttando la conservazione del vettore di Lenz, è possibile ricavare l'equazione delle possibili orbite percorribili dai satelliti. Consideriamo il seguente prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \theta$$

Dalla definizione di $\vec{A}$ segue che

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (m\vec{v} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - m\alpha \hat{r} \cdot \vec{r} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{L} - m\alpha r = \vec{L} \cdot \vec{L} - m\alpha r = L^2 - m\alpha r$$

Dove è stata usata la seguente identità vettoriale dimostrata nell'appendice C:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Questo ci conduce all'espressione finale

$$\begin{aligned} Ar \cos \theta &= L^2 - m\alpha r \\ \implies r(\theta) &= \frac{L^2}{m\alpha + A \cos \theta} = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \theta} \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso il modulo del vettore $\vec{A}$ sfruttando la perpendicolarità di $\vec{v}$ e $\vec{L}$:

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{m^2} &= \alpha^2 - 2\alpha \hat{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{L}) + |\vec{v} \times \vec{L}|^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha L^2}{mr} + v^2 L^2 \\ &= \alpha^2 + \frac{2L^2}{m} \left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \right) = \alpha^2 + \frac{2EL^2}{m} \end{aligned}$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione per $r(\theta)$, otteniamo

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \theta} \quad (4)$$

Mettendo a confronto le equazioni (3) e (4) notiamo che i parametri dell'orbita possono scriversi come

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GMm)^2 m}}$$

Osservando l'espressione dell'eccentricità, notiamo che l'unica quantità che può essere negativa all'interno della radice è l'energia E . Questo ci porta alla seguente caratterizzazione delle orbite in base all'energia meccanica totale

- $E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}$ per orbite circolari;
- $-\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} < E < 0$ per orbite ellittiche;
- $E = 0$ per orbite paraboliche;
- $E > 0$ per orbite iperboliche.

3 Sole non sferico

In questa parte della lezione vogliamo trattare il caso in cui, sempre nell'approssimazione $m \ll M$, il Sole abbia delle deformazioni di qualche tipo che influenzano il campo da esso generato.

3.1 Legge della gravitazione in forma integrale

Per prima cosa vorremmo passare dalla solita forma del potenziale gravitazionale (ovvero l'energia potenziale che avrebbe un campione posizionato in un certo punto per unità di massa) generato da un corpo puntiforme (o comunque a simmetria sferica) a una che tenga conto di più corpi. Indicizziamo i corpi con j e per principio di sovrapposizione otteniamo dalla formula dell'energia potenziale riportata nella sezione precedente:

$$V(\vec{r}) = \sum_j -\frac{Gm_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

Passando al limite di tanti corpi la somma può diventare scomoda da trattare. Conviene introdurre la funzione $\rho(\vec{r})$, che rappresenta la densità nel punto $\vec{r}$, e integrare nel volume:

$$V(x, y, z) = \int -\frac{G\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'$$

I 3 differenziali moltiplicati sono l'elemento di volume infinitesimo in cui si integra. Una notazione equivalente molto usata in fisica è:

$$V(\vec{r}) = \int -\frac{G\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Dove l'integrale ha come variabile di integrazione $\vec{r}'$ e la forma del differenziale indica proprio un'integrazione nel volume.

3.2 Quadrupolo

Ora abbiamo quindi una forma integrale per il potenziale. Vorremmo trattare un caso molto particolare: quello in cui un corpo di forma generica è fisso con il centro di massa nell'origine e vogliamo trovare il potenziale gravitazionale in un punto $\vec{r}$ molto lontano dall'origine, cioè a una distanza dall'origine in rapporto molto maggiore del punto più lontano del primo corpo.

Il potenziale scritto in precedenza è esatto ed è chiaramente applicabile a questo caso, ma la questione può essere spinosa: potremmo non sapere tutto del nostro corpo e non riuscire a calcolare numericamente quell'integrale. Vorremmo quindi approssimare l'equazione sopra usando la condizione sulle distanze.

Per prima cosa vogliamo riscrivere l'integrale sopra raccogliendo dei fattori r a denominatore:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \int -\frac{G\rho(\vec{r}')}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2}} d^3r' = \int -\frac{G\rho(\vec{r}')}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}} d^3r' = \\ &= \int -\frac{G\rho(\vec{r}')}{\sqrt{r^2 \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)}} d^3r' \end{aligned}$$

A questo punto si può approssimare quel denominatore ricordando che $r \gg r'$ e i primi termini dello sviluppo in Taylor della potenza di un binomio:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$$

Si approssima dunque l'integrale sopra notando che siamo nel caso di $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$V(\vec{r}) = \int -\frac{G\rho(\vec{r}')}{\sqrt{r^2 \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)}} d^3r'$$

$$\approx \int -\frac{G}{r}\rho(\vec{r}') \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \left(-\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}\right)^2\right) d^3r'$$

Consideriamo i termini che appaiono nell'integrale sopra in base alla potenza di r' che vi appare.

Abbiamo un termine che non dipende da r' :

$$V_0(\vec{r}) = \int -\frac{G}{r}\rho(\vec{r}') d^3r' = -\frac{GM}{r}$$

Questo termine dunque tiene conto solo della massa totale dell'oggetto e la considera come posizionata tutta nell'origine.

Il termine che dipende da r' linearmente è più interessante:

$$V_1(\vec{r}) = -\frac{G}{r^2} \int \rho(\vec{r}')(\hat{r} \cdot \vec{r}') d^3r'$$

Questo è il termine di dipolo, che probabilmente risulta più chiaro se scritto nel seguente modo:

$$V_1(\vec{r}) = -\frac{G}{r^2} \hat{r} \cdot \int \rho(\vec{r}')\vec{r}' d^3r'$$

Infatti il termine dentro l'integrale è proprio il momento di dipolo "gravitazionale" del nostro corpo. Notiamo però che, se assumiamo che il centro di massa del corpo sia nell'origine, allora questo termine sparisce, infatti l'integrale è equivalente alla massa M per la posizione del centro di massa del corpo.

In un certo senso si può dire quindi che in gravitazione il dipolo non ha davvero importanza se scegliamo il centro di massa esatto come origine del sistema, dunque l'ordine di approssimazione davvero nuovo è il prossimo.

Il termine che scala con r'^2 è:

$$V_2(\vec{r}) = -\frac{G}{2r^3} \int \rho(\vec{r}') \left(3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^2} - r'^2\right) d^3r'$$

Questo termine è chiamato quadrupolo ed è molto interessante in quanto è il primo termine di approssimazione a rendere il potenziale gravitazionale non centrale.

3.3 Esercizio: Momento di quadrupolo di un disco

Per capire quello con cui abbiamo a che fare è utile svolgere un esercizio:

Problema 3.1. Dato un disco piatto uniforme di massa M e raggio R , trovare il termine correttivo legato al quadrupolo del potenziale gravitazionale prodotto

Soluzione 3.1. Per risolvere i problemi è comodo fissare un sistema di coordinate che tenga conto della simmetria del problema. In particolare il sistema più comodo in questo caso ha l'origine nel centro di massa del disco, l'asse $\hat{z}$ coincidente con l'asse di simmetria del disco e gli assi $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sul piano del disco.

Riscrivendo l'integrale sopra in cartesiane si ottiene (indico con r la quantità $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e allo stesso modo con i termini primati):

$$V_2(x, y, z) = -\frac{G}{2r^3} \int \rho(\vec{r}') \left(3 \frac{(xx' + yy' + zz')^2}{r'^2} - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \right) dx' dy' dz'$$

L'integrale in z' è quello più semplice: la densità è non nulla solo se $z' = 0$, dunque si può togliere z' ponendolo a 0 e non integrandolo, la densità inoltre diventa una densità superficiale in quanto abbiamo tolto la terza dimensione:

$$V_2(x, y, z) = -\frac{G}{2r^3} \int \sigma(x', y') \left(3 \frac{(xx' + yy')^2}{r'^2} - (x'^2 + y'^2) \right) dx' dy'$$

Sviluppando il quadrato del binomio e raccogliendo un r^2 :

$$V_2(x, y, z) = -\frac{G}{2r^5} \int \sigma(x', y') (3x^2x'^2 + 3y^2y'^2 + 6xyx'y' - r^2(x'^2 + y'^2)) dx' dy'$$

A questo punto è molto comodo passare in coordinate polari per svolgere l'integrale:

$$x' = \rho \cos \theta \quad y' = \rho \sin \theta \quad dx' dy' = \rho d\rho d\theta$$

In maniera intuitiva, abbiamo espresso in altro modo x' e y' , dunque non c'è niente di strano nella sostituzione nell'integrando, mentre i differenziali trasformano in maniera un po' strana: stiamo integrando sulle corone circolari invece che su una griglia. L'idea è vedere l'integrale come la somma dei contributi della funzione integranda pesati con un'area, in maniera analoga a come è definito l'integrale in una variabile. Se si prende un rettangolino in polari, esso avrà il lato in direzione radiale lungo $d\rho$ e l'altro lungo $\rho d\theta$,

dove il termine ρ è dovuto al fatto che il segmento di cui mi sposto è l'arco di circonferenza di centro l'origine, raggio ρ e angolo al centro $d\theta$.

È comodo ora scrivere bene gli estremi di integrazione e sostituire la densità superficiale con $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$:

$$\begin{aligned} &= -\frac{G}{2r^5} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma (3x^2 \cos^2 \theta + 3y^2 \sin^2 \theta + 6xy \cos \theta \sin \theta - r^2) \rho^3 d\rho d\theta \\ &= -\frac{G}{2r^5} \sigma \pi (3x^2 + 3y^2 - 2r^2) \frac{R^4}{4} = -\frac{GMR^2}{8r^5} (3x^2 + 3y^2 - 2r^2) \\ &= -\frac{GMR^2}{8r^5} (r^2 - 3z^2) \end{aligned}$$

Questo risultato ci dice che se $z = 0$, cioè se il potenziale è calcolato nel piano in cui giace il disco, allora la correzione di quadrupolo al potenziale è proporzionale a r^{-3} .

4 Potenziali perturbati

Consideriamo di voler studiare il caso di un potenziale Newtoniano perturbato da un termine che non rispetta la legge di gravitazione universale, che sarà solitamente proporzionale a una potenza della distanza dall'origine, e di voler studiare come cambiano le orbite. Possiamo considerare il caso di una perturbazione generica se ci restringiamo al caso di orbita quasi circolare o possiamo considerare un'orbita ellittica se assumiamo che la perturbazione sia piccola rispetto al termine Newtoniano del potenziale.

4.1 Orbita quasi circolare

Consideriamo un potenziale del tipo

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^\beta}$$

in cui il termine α/r è il solito potenziale Newtoniano e β è un generico esponente che caratterizza il termine perturbativo. Abbiamo quindi che il potenziale efficace sarà

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^\beta} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Potremmo seguire una strategia generale che consiste nello scrivere l'energia totale del corpo in orbita come:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}$$

ma in questo caso è possibile seguire una strategia più sintetica che ci permetterà di trovare la frequenza con cui oscilla la coordinata r intorno al suo valore centrale che sarà quello corrispondente all'orbita perfettamente circolare. La condizione di essere in un'orbita quasi circolare ci dice che il raggio dell'orbita oscilla intorno al valore del minimo del potenziale efficace, possiamo quindi imporre che la derivata del potenziale efficace sia uguale a 0 per ottenere un'equazione che coinvolge il raggio dell'orbita circolare:

$$\begin{aligned}\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}(r) &= \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\varepsilon\beta}{r^{\beta+1}} - \frac{L^2}{mr^3} \\ 0 &= \frac{\alpha}{r_0^2} - \frac{\varepsilon\beta}{r_0^{\beta+1}} - \frac{L^2}{mr_0^3}\end{aligned}\quad (5)$$

In generale non è possibile risolvere questa equazione per r_0 , ma possiamo calcolare la frequenza di oscillazione derivando ancora il potenziale, si ottiene quindi:

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}(r) = -\frac{2\alpha}{r^3} + \frac{\varepsilon\beta(\beta+1)}{r^{\beta+2}} + \frac{3L^2}{mr^4}$$

possiamo ora usare:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\frac{d^2V}{dr^2}(r_0)}{m}}$$

che unita alla condizione (5) trovata su r_0 diventa:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\alpha}{mr_0^3}(\beta-1) + \frac{L^2}{m^2r_0^4}(2-\beta)}$$

che differisce dalla frequenza con cui si compie il moto lungo θ . Abbiamo sostituito la relazione (5) in quanto altrimenti abbiamo un parametro sovrabbondante: si nota infatti che nell'espressione finale non è presente il coefficiente ε .

Possiamo valutare $\dot{\theta}$ considerando come potrebbe verificarsi la situazione descritta: immaginiamo di prendere un oggetto in orbita circolare a distanza r_0 dal centro attrattore e imprimergli un impulso nella direzione radiale ovvero perpendicolare alla velocità iniziale, questo processo non cambia il momento angolare L in quanto il momento torcente rispetto al centro attrattore è nullo. Di conseguenza il raggio attorno al quale oscilla il punto materiale rimane r_0 perché, come si vede dalla relazione (5), questo dipende solo da costanti naturali, dalla massa e dal momento angolare. Possiamo concludere quindi che in questo caso vale la formula analoga al moto circolare ovvero

$$\dot{\theta} = \omega_\theta = \frac{L}{mr_0^2}$$

Siamo interessati ora a vedere come si comportano le orbite percorse, in particolare il fatto che $\omega_r \neq \omega_\theta$ implica che le orbite precedono ovvero non si chiudono dopo una oscillazione del valore di r , come invece accadeva per le orbite ellittiche.

Si ottiene quindi che in un tempo $T = 2\pi/\omega_r$ il raggio sarà passato da un minimo al minimo successivo e avrà percorso un angolo intorno all'origine di $\Delta\theta = \omega_\theta T$ che in generale sarà diverso da 2π e quindi l'orbita precede di:

$$\delta\theta = \Delta\theta - 2\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{(\beta-1)\left(\frac{\alpha m r_0}{L^2} - 1\right) + 1}} - 2\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m\varepsilon\beta(\beta-1)}{L^2 r_0^{\beta-2}} + 1}} - 2\pi \quad (6)$$

Notiamo che l'angolo di precessione non dipende dall'ampiezza della perturbazione, che deve comunque rimanere piccola⁴ per poter usare le approssimazioni fatte.

4.2 Piccola perturbazione

Nel caso di piccola perturbazione dal potenziale Newtoniano vogliamo trovare un'espressione valida anche per orbite ellittiche di eccentricità ϵ generica, per fare questo ci servirà una teoria più generale.

Supponiamo di avere un potenziale noto $V_0(r)$, ovvero sappiamo come si comporta un corpo immerso nel potenziale V_0 , e consideriamo una perturbazione $\delta V(r)$ che considereremo piccola rispetto al termine noto, otteniamo quindi:

$$V(r) = V_0(r) + \delta V(r)$$

Se consideriamo la relazione:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

possiamo risolvere per $\dot{r}$ e ottenere la seguente equazione differenziale

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}$$

Essendo di solito interessati alla forma delle orbite piuttosto che a come queste vengono percorse nel tempo possiamo cambiare variabile da t a θ usando la relazione:

$$L = mr^2\dot{\theta} = mr^2 \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt}$$

⁴Lasciamo al lettore come esercizio di quantificare cosa si intende con piccola

con il vantaggio che L è una costante del moto e non dipende né da r né da θ ; potrà, quindi, essere considerato come un parametro o una variabile indipendente come vedremo in seguito. Sostituendo, troviamo così:

$$d\theta = \pm \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} dr \quad (7)$$

da cui otteniamo la seguente espressione per l'angolo spazzato dal raggio nel passare da un minimo al minimo successivo:

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} dr$$

Notiamo che è possibile trovare una primitiva della funzione integranda se questa è vista come una funzione di L :

$$\Delta\theta = -2 \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}} dr$$

Finora non abbiamo usato alcuna approssimazione, è il momento di sfruttare l'espressione del potenziale per espandere l'integrando in termini di oggetti più semplici. Possiamo usare l'approssimazione data dalla serie di Taylor in funzione di $V = V_0 + \delta V$:

$$\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}} = \sqrt{2m(E - V_0(r)) - \frac{L^2}{r^2}} - \frac{m\delta V(r)}{\sqrt{2m(E - V_0(r)) - L^2/r^2}}$$

sostituendo nell'espressione per θ si trova:

$$\begin{aligned} \Delta\theta = -2 \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - V_0(r)) - \frac{L^2}{r^2}} dr + \\ + 2m \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\delta V(r)}{\sqrt{2m(E - V_0(r)) - L^2/r^2}} dr \quad (8) \end{aligned}$$

Il primo termine non contiene la perturbazione e quindi corrisponde all'angolo spazzato seguendo un'orbita Kepleriana che sappiamo valere 2π . Per valutare il secondo termine possiamo usare ancora che la perturbazione è piccola e dunque l'orbita seguita sarà vicina a un'ellisse e possiamo integrare lungo questa traiettoria; l'errore introdotto da questa approssimazione sarà almeno quadratico nel termine perturbativo e per i nostri scopi può essere ignorato. Questo, nel nostro caso, significa che assumeremo che alla variazione del raggio da $r_{\min}$ a $r_{\max}$ corrisponde (all'ordine 0) una variazione dell'angolo da

0 a π e che potremo usare la relazione (7) per effettuare il cambio di variabile, otteniamo quindi:

$$\delta\theta = 2m \frac{\partial}{\partial L} \frac{1}{L} \int_0^\pi r^2 \delta V(r) d\theta$$

questa è una formulazione generale, valida per ogni tipo di piccola perturbazione del potenziale Newtoniano.

Per integrare questa funzione sarà necessario fare uso ancora una volta del fatto che l'orbita sia quasi ellittica per usare la relazione:

$$r = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

A titolo di esempio calcoliamo l'angolo di precessione nel caso $\delta V(r) = \epsilon/r^3$, dobbiamo quindi valutare:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{r} = \frac{\pi}{L^2/m\alpha}$$

troviamo quindi:

$$\delta\theta = \frac{6\pi m^2 \epsilon \alpha}{L^4}$$

Possiamo inoltre notare che sostituendo $\beta = 3$ nell'equazione (6) ed espandendo per ϵ piccoli si trova che le due espressioni di $\delta\theta$ sono in accordo tra di loro.

Appendici

A Derivate dei versori

I versori $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ possono essere scritti in coordinate cartesiane:

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad (9)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \quad (10)$$

Possiamo calcolare le derivate dei secondi membri delle Equazioni (9) e (10) senza particolari problemi, perchè i versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono fissi. Si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= -\hat{x}\dot{\theta} \sin \theta + \hat{y}\dot{\theta} \cos \theta = \dot{\theta}\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\hat{x}\dot{\theta} \cos \theta - \hat{y}\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta}\hat{r} \end{aligned}$$

Queste derivate sono proprio della forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \vec{\Omega} \times \hat{r} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \vec{\Omega} \times \hat{\theta} \end{aligned}$$

a patto di porre $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$.

Più in generale, consideriamo un vettore $\vec{v}$ di modulo costante ed eseguiamo su di esso una rotazione attorno ad un asse $\hat{n}$ di un angolo θ , come in Figura 5. La componente di $\vec{v}$ parallela a $\hat{n}$, ossia

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

è lasciata inalterata dalla trasformazione. Al contrario, la componente perpendicolare:

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$$

è ruotata di un angolo θ e rimane nel piano perpendicolare ad $\hat{n}$. In particolare, se indichiamo con un apice i vettori dopo la rotazione si avrà:

$$\vec{v}'_{\perp} = (\vec{v} - \vec{v}_{\parallel}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Di conseguenza il vettore ruotato sarà:

$$\vec{v}' = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Supponiamo ora che un vettore $\vec{v}$ ruoti a velocità angolare ω (in generale dipendente dal tempo) attorno ad un asse $\hat{n}$. Se $d\theta = \omega dt$ è l'angolo

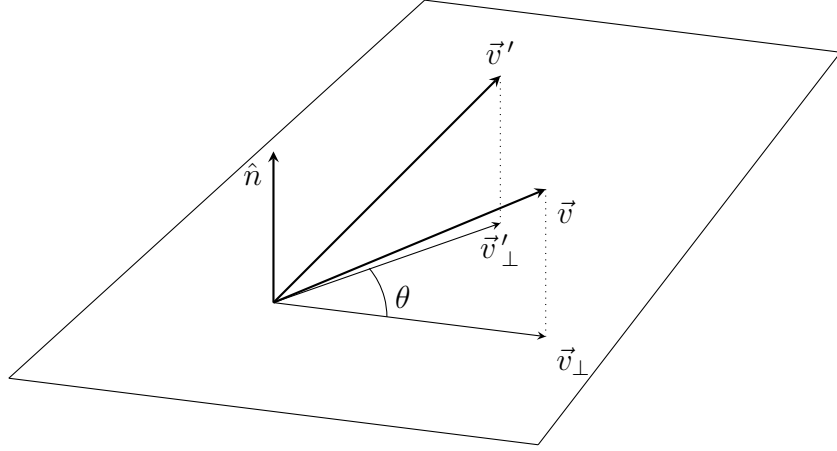


Figura 5: rotazione di $\vec{v}$ intorno a $\hat{n}$.

infinitesimo di cui ruota $\vec{v}$, al primo ordine in dt (e anche in $d\theta$ attorno a $\theta = 0$) abbiamo:

$$\vec{v}(t+dt) = (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v}(t) - (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n}) + (\hat{n} \times \vec{v}(t))\omega dt = \vec{v}(t) + \omega(\hat{n} \times \vec{v}(t)) dt$$

Ossia:

$$\frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}(t)$$

e al limite $dt \rightarrow 0$ si ha:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

B Armoniche sferiche

Le armoniche sferiche sono una famiglia di funzioni complesse $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ utili per approssimare il potenziale newtoniano generato da un corpo. Solitamente vengono introdotte in elettrostatica, ma il fatto che la forza di Newton e quella di Coulomb abbiano la stessa forma le rende utili anche in questo caso.

L'utilità di queste funzioni sta nel fatto che potremmo voler descrivere il potenziale generato da un corpo di forma generica in maniera veloce e approssimata a piacere. In particolare, a livello computazionale sarebbe scomodo e inutile ripetere l'integrale per trovare il potenziale in ogni punto, mentre è molto più veloce valutare una funzione.

In sostanza supponiamo di avere un corpo contenuto in una sfera di raggio R e centrata nell'origine, allora il potenziale calcolato in un punto $\vec{r}$ può

essere descritto esattamente (a meno di una costante additiva) come:

$$V(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l c_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

Dove r è il modulo di $\vec{r}$, θ e ϕ sono gli angoli delle coordinate sferiche e i $c_{l,m}$ sono coefficienti complessi opportuni. Si noti come non tutte le coppie (l, m) hanno un'armonica sferica associata, ma solo quelle per cui $|m| \leq l$.

Per definizione, di solito le armoniche sferiche sono ortogonali e normalizzate, ovvero sono tali per cui:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l,m}^*(\theta, \phi) Y_{l',m'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \begin{cases} 1 & \text{se } l = l' \text{ e } m = m' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove l'asterisco indica il complesso coniugato, verrà usata questa convenzione anche nelle formule successive. In sostanza, la formula sopra significa che se ho un certo potenziale, allora esso è esprimibile in modo unico come somma di armoniche sferiche.

La cosa più interessante delle armoniche sferiche è la loro simmetria: quelle con l pari sono simmetriche per inversione delle coordinate, mentre quelle con l dispari sono antisimmetriche. Oltre a questa simmetria ce ne sono altre legate al parametro m : ad esempio, fissato $l = 2$ se si considerano le armoniche sferiche con m pari rispettivamente a 0, 1 e 2, allora si nota che la prima è invariante sotto rotazione, la seconda è dispari in ϕ e la terza è antisimmetrica per rotazioni di $\frac{\pi}{2}$. In particolare, fissato m , tutte le armoniche sferiche con quel valore dipendono da ϕ come $e^{im\phi}$.

I coefficienti dello sviluppo in armoniche sferiche sono calcolabili con il seguente integrale:

$$c_{l,m} = \frac{4\pi}{2l+1} \int r^l \rho(\vec{r}) Y_{l,m}^*(\theta, \phi) d^3r$$

Se si vuole dunque trovare il potenziale generato da una certa distribuzione di carica in maniera approssimata a un certo ordine (ovvero che scala con una certa potenza della distanza), è possibile cercare eventuali simmetrie e ridursi a calcolare solo pochi coefficienti delle armoniche sferiche.

Di seguito una tabella con le prime armoniche sferiche:

l	m	$Y_{l,m}$
0	0	$\frac{1}{4\pi}$
1	0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
1	± 1	$\mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta$
2	0	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
2	± 1	$\mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta \cos \theta$
2	± 2	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{\pm 2i\phi} \sin^2 \theta$

Si noti come il quadrupolo sia il termine con $l = 2$ delle armoniche sferiche e come nel caso del disco ci sia solo il termine con $m = 0$. Questo risultato si poteva ottenere direttamente notando che il disco è invariante per rotazioni attorno al suo asse e a quel punto calcolare solo il coefficiente dell'armonica sferica rimasta.

C Identità vettoriali

C.1 Doppio prodotto vettore

Dimostriamo che:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Per farlo ci ridurremo a dimostrare che la componente x dei due membri è la stessa, infatti sarà possibile estendere la dimostrazione anche alle altre 2 componenti.

Per prima cosa espandiamo il membro di sinistra (il pedice indica che sto considerando solo quella componente del vettore):

$$L_x = (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_x = a_y(\vec{b} \times \vec{c})_z - a_z(\vec{b} \times \vec{c})_y$$

Posso quindi espandere i due prodotti vettori in componenti:

$$L_x = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z)$$

Raccogliendo opportunamente i termini con lo stesso pedice si ottiene:

$$L_x = b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z)$$

Sommando e sottraendo $a_x b_x c_x$ si ottiene:

$$L_x = b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z c_z)$$

Che si nota essere la componente x del membro di destra dell'uguaglianza iniziale. $\square$

C.2 Prodotto scalare e vettoriale

La formula da dimostrare è la seguente:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Come prima, proviamo a scrivere in componenti il membro di sinistra:

$$a_x(\vec{b} \times \vec{c})_x + a_y(\vec{b} \times \vec{c})_y + a_z(\vec{b} \times \vec{c})_z$$

Espandendo anche i prodotti vettori in coordinate si ottiene:

$$a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)$$

Se ora raccogliamo i termini che condividono la stessa componente di $\vec{c}$, otteniamo:

$$c_x(a_y b_z - a_z b_y) + c_y(a_z b_x - a_x b_z) + c_z(a_x b_y - a_y b_x)$$

Si può ora notare che i termini tra parentesi sono proprio le componenti di $\vec{a} \times \vec{b}$ e dunque la forma ottenuta è la scrittura in coordinate del membro di destra della formula iniziale. $\square$

5 Problemi

5.1 Esercizio base

Consideriamo un satellite di massa m su un'orbita circolare di raggio R attorno alla Terra (di massa M), che supporremo ferma.

1. Trova la velocità v_R ed il periodo orbitale T del satellite.
2. Trova l'energia meccanica totale del satellite ed il suo momento angolare.
3. Trova il valore di R nel caso dell'orbita geostazionaria.

Supponiamo adesso che il satellite si muova su un'orbita ellittica (di semiasse maggiore a ed eccentricità ϵ) attorno alla Terra.

4. Trova v_m e v_M , rispettivamente la velocità minima e massima del satellite durante il moto orbitale
5. Trova il periodo T del moto orbitale.
6. Dimostra che

$$a = \frac{T}{2\pi} \sqrt{v_m v_M}$$

7. Trova l'energia meccanica totale del satellite.

5.2 Farfalle kamikaze

Per spiegare il motivo che porta una farfalla notturna a cadere a spirale sulla fiamma di una candela, si può fare l'ipotesi che normalmente esse facciano riferimento alla luce della luna per guidarsi, mantenendo costante l'angolo tra la direzione di provenienza di questa e la propria direzione di volo. Mostrare che questa è una strategia suicida se la luce di riferimento è quella di una fiamma vicina. Perché invece funziona se la luce è molto lontana?

5.3 Razzo su Marte

Marte è un pianeta roccioso con approssimativamente la stessa densità della Terra, solo che la sua gravità in superficie è $k = 0.38$ volte quella terrestre.

1. Detta V_T la velocità di fuga dalla superficie della Terra, e V_M la velocità di fuga dalla superficie di Marte, calcolare V_T/V_M .

2. Modellizziamo un razzo come una massa m , corrispondente a tutta la struttura del razzo, e una massa M di propellente, che viene espulso ad una velocità w dal razzo. Noto che la densità tipica di un pianeta roccioso è di 5500 kg m^{-3} e che sulla Terra $g_T = 9.81 \text{ m s}^{-2}$, calcolare il rapporto minimo M/m che permetta al razzo di raggiungere lo spazio nel caso della Terra e nel caso di Marte.

5.4 Missile verso l'equatore

Un missile viene lanciato dal polo Nord (con la prima velocità cosmica) in modo tale da farlo cadere su un punto posto all'equatore.

1. Trova il semiasse maggiore dell'orbita del missile.
2. Qual è la massima altezza dalla superficie terrestre a cui il satellite arriva?
3. Quanto vale il tempo di volo del satellite? (Ricorda che l'area di un'ellisse vale $S = \pi ab$)

5.5 Asteroide dentro l'orbita terrestre

Un asteroide di massa m si muove su una traiettoria parabolica intorno al Sole (la cui massa è M_s) nello stesso piano dell'orbita terrestre, che si assume essere circolare e di raggio R . Trascurare l'attrazione tra asteroide e Terra.

1. Sia p la distanza di minimo avvicinamento dell'asteroide dal Sole. Nel caso in cui $p < R$, trovare il tempo T che la cometa spende all'interno dell'orbita terrestre.
2. Calcolare il massimo valore possibile di T in giorni. Per quale valore di p avviene ciò?

Se, invece, p è minore del raggio del Sole, l'asteroide ci cadrà dentro e la massa del Sole aumenterà di una frazione $\alpha \equiv \frac{m}{M_s}$.

3. Studiare come cambiano i parametri dell'orbita terrestre (asse maggiore ed eccentricità) al variare di α .

5.6 Impatto imminente

Supponiamo di essere su un'astronave di massa m ferma a distanza d dal Sole. Per via dell'attrazione gravitazionale ci avviciniamo verso il Sole (oggetto puntiforme di massa $M \gg m$) fino a scontrarci con esso. Quanto tempo passa tra l'istante iniziale (astronave ferma) e l'impatto con il Sole?

Supponiamo invece di porre 2 oggetti di massa m a distanza d l'uno dall'altro. Muovendosi solo per la reciproca attrazione gravitazionale, quanto tempo impiegano per scontrarsi?

5.7 Pianeti e palline

Due pianeti identici, di raggio $R = 1000$ km, sono fissi nello spazio e i loro centri distano fra loro $d = 5R$. Su uno di questi pianeti ci sono n palline in contatto l'una sopra l'altra, con masse $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$ (denominando con 1 la pallina più in basso, con 2 quella soprastante e così via), poste in modo che i baricentri di tutte le palline si trovano sulla congiungente dei centri dei due pianeti. La pallina più in basso viene lasciata libera di cadere da un metro d'altezza dalla superficie di uno dei pianeti. Supponendo che tutti gli urti siano elastici e che le dimensioni delle palline siano trascurabili, determinare il minimo valore di n tale che almeno una pallina possa arrivare sull'altro pianeta.

5.8 Punti di Lagrange

I punti di Lagrange sono i punti di equilibrio nel piano dell'orbita terrestre per il potenziale gravitazionale. Sono 5 in tutto, vediamo di individuarli.

In tutto il problema supporre il Sole di massa M_S e la Terra di massa $M_T \ll M_S$. Potrebbe essere utile ricordare che per x abbastanza piccolo in modulo, vale:

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

I primi 3 punti giacciono sulla retta passante per il Sole e la Terra:

1. Ponendosi nel sistema di riferimento rotante che ha origine nel Sole e asse $\hat{x}$ che punta sempre verso la Terra, trovare le posizioni lungo tale asse in cui è possibile inserire una massetta di prova che subisca una forza totale nulla.

Nota: Supporre che la Terra giri intorno al centro del Sole su un'orbita circolare di raggio R

2. Ripetere il punto precedente, ma considerando l'origine del sistema di riferimento nel baricentro del sistema Terra-Sole, attorno a cui ruotano

su orbite circolari il Sole e la Terra. I due corpi mantengono comunque una distanza R costante tutto il tempo. I risultati ottenuti sono diversi da quelli del punto precedente?

Gli altri 2 punti di Lagrange sono invece fuori dall'asse di simmetria.

3. Restando nel sistema inerziale del baricentro del sistema, supporre che il Sole sia nel punto $\vec{R}_S$ e la Terra nel punto $\vec{R}_T$. Scrivere la forza percepita da una massetta m posta nel punto $\vec{r}$.

HINT: usare la notazione vettoriale, ovvero cercate di non passare in componenti

4. Trovare la distanza tra $\vec{r}$ e uno degli altri due corpi affinché la forza subita dalla massetta sia diretta verso il baricentro del sistema Terra-Sole e abbia il giusto modulo per farla restare in orbita.

5.9 Missile Balistico

Un missile balistico viene lanciato da un punto A della superficie terrestre, con una velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ (inferiore alla velocità di fuga) ad un angolo α dall'orizzontale. Dopo aver percorso un arco di ellisse, il missile si schianta in un certo punto B, la cui posizione dipende dalle condizioni di lancio (Figura 6).

1. Trova i parametri dell'orbita ellittica in funzione di v_0 e α .
2. Trova la distanza tra punto di partenza e di arrivo sulla superficie terrestre. Quanto dista il punto più alto dalla superficie terrestre?
3. Quanto dovrebbe essere la velocità iniziale v_0 di un missile lanciato ad un dato angolo α in modo che esso impatti nell'antipode (Figura 7)?

5.10 Quadrupoli vari

Calcolare il potenziale generato dai seguenti corpi fino al termine di quadrupolo:

1. Cubo omogeneo di massa M
2. Cilindro omogeneo di massa M
3. Due masse puntiformi, ciascuna di massa $\frac{M}{2}$, a distanza d fissa

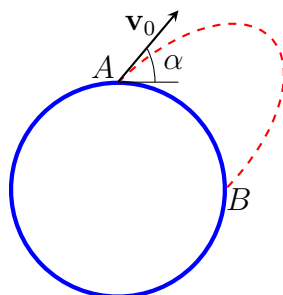


Figura 6: Esempio di moto di un proiettile all'interno del campo gravitazionale della Terra.

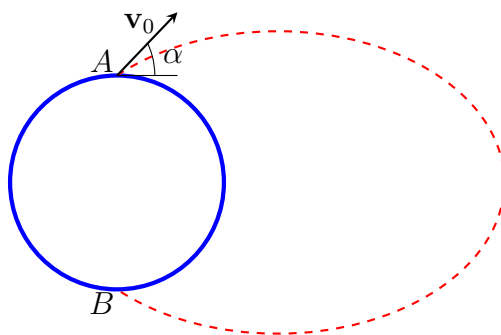


Figura 7: Moto di un proiettile da un punto verso l'antipode.

5.11 Orbite poligonali

Trovare un potenziale del tipo $V(r) = \lambda r^\beta$ per cui l'orbita generata da una piccola perturbazione dall'orbita circolare sia chiusa e abbia n raggi minimi e n raggi massimi.

5.12 Perturbazione del potenziale armonico

Cosa cambia nella trattazione dei potenziali perturbati se come potenziale noto consideriamo il potenziale armonico $V(r) = \alpha r^2$ invece del potenziale Newtoniano $V(r) = \alpha r^{-1}$?

5.13 Potenziale Miracoloso

Trovare *esattamente* il moto di un corpo soggetto a un potenziale $V(r) = \alpha/r + \lambda/r^2$. Calcolare quanto vale l'angolo di precessione nel caso di orbita limitata e verificare che il risultato sia concorde con quanto trovato nei due casi trattati a lezione.

6 Soluzioni

6.1 Esercizio base

1. Eguagliando la forza gravitazionale a quella centripeta si trova

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Dall'equazione dell'energia segue

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}m \left(\frac{GM}{R} \right) - \frac{GMm}{R}$$

Il periodo del moto non è altro che la lunghezza della circonferenza divisa per la velocità del satellite

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$$

2. L'energia meccanica totale è pari alla somma di energia cinetica e potenziale

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$$

Il momento angolare, dalla definizione, vale

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mRv \hat{z} = m\sqrt{GMR} \hat{z}$$

dove $\hat{z}$ è la direzione perpendicolare al piano dell'orbita.

3. L'orbita geostazionaria ha lo stesso periodo della rotazione terrestre (1 giorno). Allora, usando nuovamente la seconda legge di Newton, troviamo

$$m \left(\frac{2\pi}{T_{Giorno}} \right)^2 R_{GEO} = \frac{GMm}{R_{GEO}^2} \longrightarrow R_{GEO} = \left(\frac{GMT_{Giorno}^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 42000 \text{ Km}$$

4. La velocità massima sarà assunta in corrispondenza del perielio, mentre la minima all'afelio. I valori desiderati si trovano facilmente uguagliando l'energia totale a $-\frac{GMm}{2a}$. Si trova che

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{GM r_{\max}}{a r_{\min}}}$$
$$v_{\min} = \sqrt{\frac{GM r_{\min}}{a r_{\max}}}$$

5. Il periodo del moto orbitale è semplicemente dato dalla legge di Keplero

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

6. Questa identità segue direttamente dalle due richieste precedenti.

7. Infine, questo ultimo punto non è altro che la dimostrazione della famosa relazione usata in precedenza

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Esistono tanti modi per dimostrarla, uno lo abbiamo visto nella parte di teoria. Un modo alternativo consiste nell'utilizzare un'operazione di media temporale dell'energia meccanica. Abbiamo visto che nel caso di un'orbita circolare

$$E = -\frac{GMm}{2R}$$

Cosa succede se R non è costante nel tempo? Calcoliamo la media temporale dell'energia

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{GMm}{2r(t)} dt$$

dove T è il periodo orbitale. Ricordando che $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ e che $r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2(1+\varepsilon \cos \theta)}$ e sostituendo sopra, si ottiene

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{GMm}{2r(t)} dt = -\frac{L}{2T} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = -\frac{GMm}{2a}$$

6.2 Farfalle kamikaze

Posta la sorgente nell'origine, nel formalismo delle coordinate polari la velocità della farfalla, può essere scritta come

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{r} + R\dot{\theta}\hat{\theta} = -v \cos \alpha \hat{r} + v \sin \alpha \hat{\theta}$$

dove v è il modulo della velocità (non necessariamente costante), e α è l'angolo fissato tra la direzione del moto e la direzione della sorgente. Da questo segue

$$\begin{aligned}\dot{R} &= v \cos \alpha \\ R\dot{\theta} &= -v \sin \alpha\end{aligned}$$

e quindi

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{R}}{R} \tan \alpha$$

da cui integrando si ha

$$R = R_0 e^{-\frac{\theta}{\tan \alpha}}$$

che per $\tan \alpha > 0$ rappresenta una spirale logaritmica attorno all'origine. Se R_0 è molto grande possiamo osservare che la traiettoria diventa quasi essenzialmente rettilinea.

6.3 Razzo su Marte

1. Nell'approssimazione in cui un pianeta è un corpo sferico di massa M e raggio R , con densità ρ :

$$g = G \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho R \quad ; \quad \frac{1}{2} V_f^2 = G \frac{M}{R} = \frac{4}{3} \pi G \rho R^2$$

$$\Rightarrow \frac{V_T^2}{V_M^2} = \frac{R_T^2}{R_M^2} = \frac{g_T^2}{g_M^2} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{V_T}{V_M} = \frac{1}{k} \approx 2.63$$

2. Ci chiediamo innanzitutto quale velocità può raggiungere un razzo come quello descritto dal testo: analizziamo il problema nel sistema tangente (ovvero quello che è inerziale e con la stessa velocità del razzo al tempo t). Sia λ la massa rimanente di combustibile. In un istante dt il razzo perde una massa $d\lambda$ e prende un impulso $-w d\lambda$, da redistribuire su una massa $\lambda + m$, per cui prende una velocità $\frac{-w d\lambda}{\lambda + m}$. Il valore iniziale di λ è M e quello finale è 0:

$$\Delta V = \int_M^0 \frac{-w d\lambda}{\lambda + m} = w \int_0^M \frac{1}{\lambda + m} d\lambda = w \log \frac{M + m}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} = e^{\Delta V/w} - 1$$

Possiamo a questo punto osservare che:

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{g}{\frac{4}{3}\pi \rho G}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} V_f^2 = \frac{4}{3} \pi G \rho R^2 \Rightarrow V_f = \sqrt{\frac{3}{2\pi \rho G}} g$$

Richiedendo che il ΔV sia proprio V_f :

$$\left(\frac{M}{m}\right)_T = e^{V_T/w} - 1 \quad , \quad V_T = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} g_T \approx 11.2 \text{ km/s}$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)_M = e^{V_M/w} - 1 \quad , \quad V_M = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} g_T k \approx 4.3 \text{ km/s}$$

6.4 Missile verso l'equatore

1. Dall'equazione dell'energia segue

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}m \left(\frac{GM}{R} \right) - \frac{GMm}{R}$$

Segue quindi che $a = R$.

2. L'ellisse ha la proprietà per cui la somma delle distanze da ciascun punto ai due fuochi è costante (ed uguale a $2a$). Quindi il secondo fuoco dell'ellisse (quello che non sta nel centro della Terra) sta a distanza R sia dal polo che dall'equatore. Quindi, l'altezza desiderata può essere trovata con un semplice ragionamento geometrico.

Ad esempio, si può notare che la distanza tra il punto ad altezza massima e il fuoco "esterno" alla Terra si può trovare come la somma delle distanze dai fuochi ($2R$), meno la distanza tra i fuochi ($\sqrt{2}R$) e poi diviso per 2. Il risultato ottenuto è $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})R$. A questo punto basta sommare $(\sqrt{2} - 1)R$ per trovare l'altezza cercata, ovvero $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

3. Il tempo di volo può essere trovato ricordando che esso è proporzionale all'area spazzata dal raggio vettore. In questo caso vale

$$T = (\pi + \sqrt{2})\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Il risultato può essere trovato sommando l'area della semiellisse ($\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R^2$) a quella del triangolo rettangolo formato con il centro della Terra ($\frac{R^2}{2}$) e dividendo per la velocità areolare ($\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{GMR}$)

6.5 Asteroidi dentro l'orbita terrestre

1. Se la traiettoria è parabolica, allora l'energia meccanica totale è nulla

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM_S}{r} = 0$$

Nel punto della parabola più vicino al sole si ha $r = r_{\min} = p$ e $\dot{r} = 0$, quindi sostituendo si trova $L^2 = 2m^2 p G M_S$. Per un generico valore di r si ha che

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{GmM_S}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}$$

Separando le variabili da quest'ultima equazione è possibile integrare entrambi i membri e trovare che

$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \left[\frac{2}{m} \left(\frac{GmM_S}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2GM_S}} \int_p^R \frac{r dr}{\sqrt{r-p}}$$

Questo integrale è risolvibile operando la sostituzione $y = \sqrt{r-p}$. Quello che si ottiene è

$$T = \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2GM_S}} \left(1 + \frac{2p}{R} \right) \sqrt{1 - \frac{p}{R}}$$

2. Considerando T come una funzione della variabile p e annullando la sua derivata prima si trova che il valore massimo viene assunto per $p = \frac{R}{2}$ ed è

$$T_{Max} = \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{GM_S}} = \frac{2}{3\pi} T_t \simeq 77 \text{ giorni}$$

3. L'energia meccanica della Terra dopo la caduta dell'asteroide sul Sole è

$$-\frac{GM_S(1+\alpha)M_T}{2a} = \frac{GM_S M_T}{2R} - \frac{GM_S(1+\alpha)M_T}{R}$$

dove a è il semiasse maggiore della nuova orbita ed è stata usata la formula per l'energia cinetica dell'orbita circolare. Semplificando si trova

$$a = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha} R$$

Come era prevedibile, $a < R$ perché quello che prima era R adesso è la distanza massima dal fuoco.

$$R = a + c \longrightarrow e \equiv \frac{c}{a} = \frac{R}{a} - 1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Questa eccentricità è una funzione crescente di α , limitata superiormente dal valore unitario. Quindi per ogni valore di $\alpha > 0$ si hanno delle orbite ellittiche.

6.6 Impatto imminente

L'orbita in questo caso è chiaramente un segmento che congiunge la posizione iniziale e il centro del Sole. Si può vedere questo segmento come un'ellisse degenera di semiasse maggiore $\frac{d}{2}$ e semiasse minore 0. A questo punto, sempre pensando al limite dell'orbita ellittica appiattita, si può applicare la terza legge di Keplero:

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}} = \frac{\pi d^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2GM}}$$

Dove T è il tempo necessario per compiere un'orbita completa, ovvero tornare a distanza d , il tempo richiesto dal problema è invece $t = \frac{T}{2}$

Il caso con due corpi di masse uguali si può approcciare passando al sistema del centro di massa e utilizzando la legge di Keplero per il problema dei due corpi di massa generica. Poiché questo approccio non è stato mostrato a lezione, si segue una via alternativa.

Ognuno dei due corpi sente una forza attrattiva diretta verso il centro di massa del sistema, dello stesso modulo di quella generata da una massa $\frac{m}{4}$ posizionata nel centro di massa stesso. In un certo senso questo problema è dunque equivalente al precedente in quanto ciascun corpo non vede davvero l'altro, ma ne sente solo la forza attrattiva. In questo caso il semiasse maggiore dell'orbita di ciascun corpo è $\frac{d}{4}$ e la massa del "Sole equivalente" è $\frac{m}{4}$, dunque il risultato è:

$$t = \frac{\pi d^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{Gm}}$$

6.7 Pianeti e palline

Essendo i due pianeti identici, basta che una pallina arrivi a metà strada tra i due con una velocità infinitesimale, in modo da cadere sul pianeta di arrivo. Calcoliamo quanto deve essere la velocità di lancio per fare avvenire ciò. Usando la conservazione dell'energia meccanica si trova

$$v_{\text{lancio}} = \sqrt{\frac{9GM}{10R}}$$

D'altra parte, la velocità di rimbalzo della pallina 1 è (considerando i contributi di entrambi i pianeti)

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2h \frac{15GM}{16R^2}}$$

dove $h = 1m$. Dalla teoria degli urti elastici, sotto le ipotesi date nella traccia, segue che la velocità di rimbalzo della pallina n -esima vale

$$v_n = (2^n - 1)v_1 = (2^n - 1)\sqrt{\frac{15GMh}{8R^2}}$$

Uguagliando la velocità di lancio necessaria affinché la pallina arrivi a metà strada e la velocità di rimbalzo della pallina n -esima, si trova

$$n = \log_2 \left(1 + \sqrt{\frac{12R}{25h}} \right) \approx 9.44$$

Il primo intero utile è quindi $n = 10$.

6.8 Punti di Lagrange

1. Poniamo la massetta di prova, di massa m , a una distanza $\vec{x}$ dal Sole. Le forze che essa subisce sono: Forza centrifuga:

$$\vec{F}_C = m\omega^2\vec{x} = m\frac{GM_S}{R^3}\vec{x}$$

Forza gravitazionale del Sole:

$$\vec{F}_S = -\frac{GM_S m}{x^3}\vec{x}$$

Forza gravitazionale della Terra:

$$\vec{F}_T = \frac{GM_T m}{(R \pm x)^3}(\vec{R} - \vec{x})$$

Dove il segno va deciso in base al lato della Terra in cui ci si trova.

Iniziamo a cercare dalla parte opposta del Sole rispetto alla Terra. La forza totale va posta nulla:

$$0 = m\frac{GM_S}{R^3}x - \frac{GM_S m}{x^2} - \frac{GM_T m}{(R + x)^2}$$

$$0 = x^3(R + x)^2 - R^3(R + x)^2 - \frac{M_T}{M_S}x^2R^3$$

Dividendo per R^5 e definendo $1 + \epsilon \equiv \frac{x}{R}$:

$$0 = (1 + \epsilon)^3(2 + \epsilon)^2 - (2 + \epsilon)^2 - \frac{M_T}{M_S}(1 + \epsilon)^2$$

Usando l'approssimazione data nel testo (assumendo quindi ϵ piccolo):

$$\begin{aligned}
0 &= 4(1 + 3\epsilon)(1 + \epsilon) - 4(1 + \epsilon) - \frac{M_T}{M_S}(1 + 2\epsilon) \\
0 &= 12\epsilon^2 + \left(12 - 2\frac{M_T}{M_S}\right)\epsilon - \frac{M_T}{M_S} \\
\epsilon &= \frac{-12 + 2\frac{M_T}{M_S} \pm \sqrt{144 - 48\frac{M_T}{M_S} + 4\frac{M_T^2}{M_S^2} + 48\frac{M_T}{M_S}}}{24}
\end{aligned}$$

Trascurando il termine in $\frac{M_T^2}{M_S^2}$, si ottiene:

$$\epsilon = \frac{-1 + \frac{M_T}{6M_S} \pm 1}{2}$$

Da cui la soluzione accettabile è $\epsilon = \frac{M_T}{12M_S}$.

Ripetiamo i passaggi per il caso in cui la massetta si trovi tra il Sole e la Terra:

$$\begin{aligned}
0 &= m\frac{GM_S}{R^3}x - \frac{GM_Sm}{x^2} + \frac{GM_Tm}{(R-x)^2} \\
0 &= x^3(R-x)^2 - R^3(R-x)^2 + \frac{M_T}{M_S}x^2R^3
\end{aligned}$$

Dividendo per R^5 e definendo $1 + \epsilon \equiv \frac{x}{R}$:

$$0 = (1 + \epsilon)^3\epsilon^2 - \epsilon^2 + \frac{M_T}{M_S}(1 + \epsilon)^2$$

Usando l'approssimazione data nel testo (assumendo quindi ϵ piccolo):

$$0 = (1 + 3\epsilon)\epsilon^2 - \epsilon^2 + \frac{M_T}{M_S}(1 + 2\epsilon)$$

$$0 = \frac{M_T}{M_S}(1 + 2\epsilon)$$

Ma questo ci darebbe $\epsilon = -\frac{1}{2}$, che non è piccolo. Dunque teniamo fino al terzo ordine (il secondo dà lo stesso problema):

$$3\epsilon^3 = -\frac{M_T}{M_S}(1 + 2\epsilon + \epsilon^2)$$

A questo punto si può notare che la più piccola potenza di $\frac{M_T}{M_S}$ che appare in ϵ^3 è quella con esponente 1. Ne consegue che i termini in ϵ nel

membro di destra sono trascurabili rispetto a 1, in quanto contengono delle potenze non nulle di una quantità piccola, e si possono dunque eliminare. Il risultato è dunque:

$$\epsilon = -\sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}$$

Infine dobbiamo considerare il caso della massetta oltre la Terra:

$$0 = m \frac{GM_S}{R^3} x - \frac{GM_S m}{x^2} - \frac{GM_T m}{(x-R)^2}$$

$$0 = x^3(R-x)^2 - R^3(R-x)^2 - \frac{M_T}{M_S} x^2 R^3$$

Dividendo per R^5 e definendo $1 + \epsilon \equiv \frac{x}{R}$:

$$0 = (1 + \epsilon)^3 \epsilon^2 - \epsilon^2 - \frac{M_T}{M_S} (1 + \epsilon)^2$$

Ragionando come prima:

$$3\epsilon^3 = \frac{M_T}{M_S} (1 + 2\epsilon + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}$$

2. La distanza del baricentro del sistema dal Sole è:

$$d = \frac{M_T R}{M_T + M_S} \approx R \frac{M_T}{M_S} \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) \approx R \frac{M_T}{M_S}$$

Riscriviamo l'equilibrio delle forze nel caso in cui la massetta sia dalla parte opposta del Sole:

$$0 = m \frac{GM_S}{R^3 \left(1 - \frac{d}{R}\right)} x - \frac{GM_S m}{(x-d)^2} - \frac{GM_T m}{(R+x-d)^2}$$

$$0 = x(x-d)^2(x+R-d)^2 - R^3(R+x-d)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) - \frac{M_T}{M_S} R^3 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) (x-d)^2$$

I termini con d possono essere approssimati come:

$$(x-d)^2 = x^2 \left(1 - \frac{d}{x}\right)^2 \approx x^2 \left(1 - 2\frac{d}{R}\right)$$

$$(R + x - d)^2 = (R + x)^2 \left(1 - \frac{d}{R + x}\right)^2 \approx (R + x)^2 \left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

Dove si approssima x con R nel termine correttivo proporzionale a d .
Usando le approssimazioni si ottiene:

$$0 = x^3 \left(1 - 2\frac{M_T}{M_S}\right) (x + R)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) - R^3 (R + x)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right)^2 - \\ - \frac{M_T}{M_S} R^3 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) x^2 \left(1 - 2\frac{M_T}{M_S}\right)$$

Dividendo come prima per R^5 , definendo $1 + \epsilon \equiv \frac{x}{R}$ e tenendo solo i termini al primo ordine in $\frac{M_T}{M_S}$, si ottiene:

$$0 = (1 + \epsilon)^3 (2 + \epsilon)^2 \left(1 - 3\frac{M_T}{M_S}\right) - (2 + \epsilon)^2 \left(1 - 2\frac{M_T}{M_S}\right) - \frac{M_T}{M_S} (1 + \epsilon)^2 \\ 0 = 4(1 + 4\epsilon) \left(1 - 3\frac{M_T}{M_S}\right) - 4(1 + \epsilon) \left(1 - 2\frac{M_T}{M_S}\right) - \frac{M_T}{M_S} (1 + 2\epsilon)$$

Portiamo a sinistra i termini che non contengono ϵ :

$$5\frac{M_T}{M_S} = \epsilon \left(12 - 42\frac{M_T}{M_S}\right)$$

Da cui:

$$\epsilon = \frac{5}{12} \frac{M_T}{M_S}$$

La distanza dal Sole è però:

$$x - d = (1 + \epsilon)R - d = \left(1 - \frac{7}{12} \frac{M_T}{M_S}\right) R$$

Come si nota, questo risultato è diverso da quello precedente. Questo perché il risultato del conto precedente era al primo ordine in $\frac{M_T}{M_S}$, che è lo stesso dell'approssimazione del baricentro.

Ripetiamo per la posizione tra Sole e Terra:

$$0 = m \frac{GM_S}{R^3 \left(1 - \frac{d}{R}\right)} x - \frac{GM_S m}{(x + d)^2} + \frac{GM_T m}{(R - x - d)^2}$$

$$0 = x(x+d)^2(R-x-d)^2 - R^3(R-x-d)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right) + \frac{M_T}{M_S} R^3(x+d)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S}\right)$$

Dividendo per R^5 e definendo $1 + \epsilon \equiv \frac{x}{R}$:

$$0 = (1 + \epsilon)^3 \left(1 + 2\frac{M_T}{M_S} \right) \left(\epsilon + \frac{M_T}{M_S} \right)^2 - \left(\epsilon + \frac{M_T}{M_S} \right)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S} \right) + \\ + \frac{M_T}{M_S} (1 + \epsilon)^2 \left(1 - \frac{M_T}{M_S} \right) \left(1 + 2\frac{M_T}{M_S} \right)$$

Tenendo solo i termini al primo ordine in $\frac{M_T}{M_S}$:

$$0 = (1 + \epsilon)^3 \left(\epsilon^2 + 2\epsilon \frac{M_T}{M_S} (\epsilon + 1) \right) - \left(\epsilon^2 + 2\epsilon \frac{M_T}{M_S} - \frac{M_T}{M_S} \epsilon^2 \right) + \frac{M_T}{M_S} (1 + \epsilon)^2$$

Tenendo fino al terzo ordine in ϵ :

$$0 = 3\epsilon^3 \left(1 + 4\frac{M_T}{M_S} \right) + 10\epsilon^2 \frac{M_T}{M_S} + 2\epsilon \frac{M_T}{M_S} + \frac{M_T}{M_S}$$

Con lo stesso ragionamento del punto 1 si possono eliminare i termini in cui ϵ appare moltiplicato per $\frac{M_T}{M_S}$, ottenendo:

$$\epsilon = -\sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}$$

E allo stesso modo si otterrebbe il risultato opposto per il punto oltre la Terra. Come si vede, il risultato trovato al punto 1 era corretto. Questo perché è un risultato a un ordine $\frac{1}{3}$ nel rapporto tra le masse ed è dunque molto più marcato della correzione dovuta alla posizione del baricentro, che è all'ordine 1.

3. Scegliamo il baricentro come origine del nostro sistema. Se poniamo una massetta nel punto $\vec{r}$, essa subisce una forza pari alla somma delle forze gravitazionali. La forza gravitazionale del Sole vale:

$$\vec{F}_S = \frac{GM_S m}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} (\vec{R}_S - \vec{r})$$

La forza gravitazionale della Terra vale:

$$\vec{F}_T = \frac{GM_T m}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3} (\vec{R}_T - \vec{r})$$

La forza totale è la somma delle due.

4. Vogliamo che la forza totale sia diretta verso l'origine (ovvero lungo $-\vec{r}$):

$$\begin{aligned}\vec{F}_T &= \frac{GM_S m}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3}(\vec{R}_S - \vec{r}) + \frac{GM_T m}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3}(\vec{R}_T - \vec{r}) = \\ &= Gm \left(\frac{M_S}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} + \frac{M_T}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3} \right) (-\vec{r}) + Gm \left(\frac{M_S \vec{R}_S}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} + \frac{M_T \vec{R}_T}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3} \right)\end{aligned}$$

Per avere una forza diretta verso l'origine serve che il secondo addendo sia nullo. Usando il fatto che il centro di massa è nell'origine si ottiene che $M_S \vec{R}_S = -M_T \vec{R}_T$ e la condizione da soddisfare si riduce dunque a:

$$\frac{1}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} = \frac{1}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3}$$

Tale condizione è equivalente a dire che la massetta deve essere equidistante dalla Terra e dal Sole.

Per far tornare il modulo, iniziamo a calcolare quanto deve vale la forza centrifuga da compensare:

$$\vec{F}_C = m\omega^2 \vec{r} = m \frac{GM_S}{R_T |\vec{R}_T - \vec{R}_S|^2} \vec{r}$$

Chiamando R la distanza Terra-Sole, si può ricavare che $R_T = \frac{M_S}{M_T + M_S} R$ e $R_S = \frac{M_T}{M_T + M_S} R$. Imponiamo quindi che la forza centrifuga abbia lo stesso modulo della componente restante della forza gravitazionale:

$$Gm \left(\frac{M_S}{|\vec{R}_S - \vec{r}|^3} + \frac{M_T}{|\vec{R}_T - \vec{r}|^3} \right) = m \frac{GM_S}{R_T R^2}$$

Chiamando d la distanza tra la massetta e il Sole e sostituendo R_T :

$$\frac{M_S}{d^3} + \frac{M_T}{d^3} = \frac{M_T + M_S}{R^3}$$

Da qui segue immediatamente che $d = R$, dunque i due punti di equilibrio sono quelli tali per cui le tre masse sono disposte a triangolo equilatero. Si noti che abbiamo trascurato solo il contributo gravitazionale della massetta, mentre non abbiamo assunto nulla sul rapporto tra le masse di Terra e Sole, dunque questo risultato è più generale degli altri.

6.9 Missile Balistico

1. Per prima cosa calcoliamo l'energia del missile:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R}$$

Da cui possiamo ricavare il semiasse maggiore dell'orbita:

$$a = \frac{GM R}{2GM - Rv_0^2}$$

Il momento angolare rispetto al centro della Terra vale:

$$L = mRv_0 \cos \alpha$$

Il semiasse minore vale dunque:

$$b = \frac{L}{m} \sqrt{\frac{a}{GM}} = Rv_0 \cos \alpha \sqrt{\frac{R}{2GM - Rv_0^2}}$$

2. Calcoliamo il vettore di Lenz:

$$\vec{A} = m(\vec{v} \times \vec{L} - GMm\hat{r}) = m((v_0L - GMm)\hat{r} - v_0L \sin \alpha \hat{\theta})$$

L'angolo tra il vettore di Lenz e $\hat{r}$ è la metà dell'angolo tra il punto di partenza e quello di arrivo, tale angolo è:

$$\theta = \arctan \left(\frac{v_0L \sin \alpha}{v_0L - GMm} \right)$$

E dunque la distanza percorsa sulla superficie terrestre:

$$d = 2R\theta$$

Per quanto riguarda il punto di massima altezza, si può trovare partendo dalla forma delle orbite:

$$r(\phi) = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

E notando che quindi l'apogeo è quando $\phi = \pi$. Basta quindi sostituire i valori di energia e momento angolare nella formula trovata a lezione per ottenere:

$$h_{max} = \frac{\frac{R^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{GM}}{1 - \sqrt{1 + \frac{(mv_0^2 R^2 - 2GMmR)v_0^2 \cos^2 \alpha}{G^2 M^2 m}}} - R$$

3. La richiesta è equivalente a porre l'angolo percorso 2θ pari a π :

$$\frac{vL \sin \alpha}{vL - GMm} = \tan \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Che si ottiene quando il denominatore si annulla, ovvero quando:

$$v_0 L = GMm$$

$$Rv_0^2 \cos \alpha = GM$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R \cos \alpha}}$$

Bisogna stare attenti in quanto questo risultato è valido solo se l'orbita è chiusa, altrimenti non è possibile effettuare la manovra in quanto la velocità richiesta è maggiore della velocità di fuga.

6.10 Quadrupoli vari

1. Ponendo l'origine nel centro del cubo e gli assi ortogonali a 3 delle sue facce, abbiamo, per quanto detto a lezione, un termine di monopolio pari a:

$$V_0(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}$$

Mentre il dipolo è assente.

Per il quadrupolo, si può scrivere l'integrale in questione in coordinate cartesiane (detto $2L$ il lato del cubo):

$$\begin{aligned} V_2(\vec{r}) &= -\frac{GM}{16r^3 L^3} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L \left(3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^2} - r'^2 \right) dx' dy' dz' = \\ &= -\frac{GM}{16r^3 L^3} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L \left(3 \frac{(xx' + yy' + zz')^2}{r^2} - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \right) dx' dy' dz' \end{aligned}$$

Dato che gli integrali hanno gli estremi simmetrici rispetto allo 0, i termini dispari in anche solo una delle variabili di integrazione si annullano. Ne consegue che i doppi prodotti del trinomio al quadrato danno contributo nullo e possono essere eliminati:

$$V_2(\vec{r}) = -\frac{GM}{16r^3 L^3} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L \left(3 \frac{x^2 x'^2 + y^2 y'^2 + z^2 z'^2}{r^2} - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \right) dx' dy' dz'$$

Si può notare che c'è una simmetria nella funzione integranda in x' , y' e z' , ovvero stiamo sempre integrando uno dei tre al quadrato e gli estremi di integrazione sono sempre gli stessi. Possiamo dunque raccogliere questo integrale e notare che ciò che resta è un fattore nullo:

$$V_2(\vec{r}) = -\frac{GM}{16r^3L^3} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L x'^2 dx' dy' dz' \left(3\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} - 3 \right) = 0$$

Dunque il cubo ha momento di quadrupolo nullo.

2. Poniamo l'origine nel centro di simmetria del cilindro, poniamo l'asse $\hat{z}$ lungo il suo asse e sul piano parallelo alle basi descriviamo i punti in coordinate polari. Questa scelta di coordinate è quella delle coordinate cilindriche. Il monopolo vale sempre:

$$V_0(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}$$

E il dipolo è assente.

Per il quadrupolo impostiamo il conto come fatto a lezione per il disco (chiamando R il raggio del cilindro e h la sua altezza):

$$\begin{aligned} V_2(\vec{r}) &= -\frac{GM}{2r^3\pi R^2h} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^2} - r'^2 \right) \rho' d\rho' d\phi' dz' = \\ &= -\frac{GM}{2r^3\pi R^2h} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(3\frac{(\rho' \cos \phi' x + \rho' \sin \phi' y + z' z)^2}{r^2} - (\rho'^2 + z'^2) \right) \rho' d\rho' d\phi' dz' \end{aligned}$$

In questo caso l'integrale in ϕ' elimina i doppi prodotti del quadrato del trinomio in quanto l'intervallo di integrazione è multiplo del periodo delle funzioni che appaiono, dunque restano i singoli termini al quadrato:

$$-\frac{GM}{2r^3\pi R^2h} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(3\frac{\rho'^2 \cos^2 \phi' x^2 + \rho'^2 \sin^2 \phi' y^2 + z'^2 z^2}{r^2} - (\rho'^2 + z'^2) \right) \rho' d\rho' d\phi' dz'$$

Si possono quindi svolgere gli integrali ricordando che la media di seno e coseno al quadrato su 2π è $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} V_2(\vec{r}) &= -\frac{GM}{2r^3\pi R^2h} \left(\frac{3x^2\pi h R^4}{4r^2} + \frac{3y^2\pi h R^4}{4r^2} + \frac{3z^2h^3 R^2 2\pi}{24r^2} - \frac{2\pi h R^4}{4} - \frac{2\pi R^2 h^3}{6} \right) = \\ &= -\frac{GM}{2r^3\pi R^2h} \left(\frac{(3x^2 + 3y^2 - 2r^2)\pi h R^4}{4r^2} + \frac{(3z^2 - 4r^2)h^3 R^2 \pi}{12r^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{GM}{24r^5} ((9x^2 + 9y^2 - 6r^2)R^2 + (3z^2 - 4r^2)h^2) =$$

Si nota che ponendo $h = 0$ si ritrova il risultato del disco visto a lezione.

3. Anche in questo caso una scelta opportuna del sistema di coordinate ci elimina il termine di dipolo, per comodità poniamo l'origine a metà tra le due masse e l'asse $\hat{z}$ che punta verso una delle due. Il termine di monopolo è lo stesso dei precedenti.

Per il quadrupolo si avrà una somma invece del solito integrale:

$$\begin{aligned} V_2(\vec{r}) &= -\frac{GM}{4r^3} \left(\frac{3\frac{d^2}{4}z^2}{r^2} - \frac{d^2}{4} + \frac{3\frac{d^2}{4}z^2}{r^2} - \frac{d^2}{4} \right) = \\ &= \frac{GMd^2}{8r^3} \frac{3z^2 - r^2}{r^2} = \frac{GMd^2}{8r^5} (3z^2 - r^2) \end{aligned}$$

6.11 Orbite poligonali

Scriviamo l'energia totale del satellite come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \lambda r^\beta$$

per le piccole oscillazioni intorno all'orbita circolare vale

$$L = mr_0^2\dot{\theta}$$

dove r_0 è il raggio dell'orbita circolare, che possiamo trovare derivando il potenziale efficace e imponendo che sia nullo

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} &= -\frac{L^2}{mr^3} + \lambda\beta r^{\beta-1} \\ \frac{L^2}{mr_0^2} &= \lambda\beta r_0^\beta \end{aligned}$$

possiamo trovare la frequenza con cui il raggio oscilla intorno alla posizione di equilibrio derivando ancora il potenziale efficace

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = \frac{3L^2}{mr^4} + \lambda\beta(\beta-1)r^{\beta-2}$$

quindi sostituendo r_0 dalla relazione trovata prima troviamo

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = 3\lambda\beta r_0^{\beta-2} + \lambda\beta(\beta-1)r_0^{\beta-2} = \lambda\beta(\beta+2)r_0^{\beta-2}$$

possiamo adesso usare la relazione per ω_r che si può esprimere come $\sqrt{\frac{d^2V}{dr^2}(r_0)}$, la condizione che l'orbita abbia n raggi massimi e n raggi minimi si traduce come $\omega_r = n\dot{\theta}$, sostituendo all'interno di questa relazione quanto abbiamo trovato prima si trova

$$\frac{\lambda\beta(\beta+2)}{m}r_o^{\beta-2} = n^2\frac{\lambda\beta}{m}r_0^{\beta-2}$$

ovvero $\beta = n^2 - 2$, l'unica condizione su λ si trova dalla condizione che esista il minimo del potenziale efficace, per $n > 1$ si ha $\beta > 0$ e quindi dalla formula $\frac{L^2}{mr_0^2} = \lambda\beta r_0^\beta$ si trova che anche λ deve essere positivo, per $n = 1$ si trova $\beta = -1$ che è il caso ben noto di potenziale Newtoniano in cui $\lambda < 0$.

6.12 Perturbazione del potenziale armonico

Ripercorrendo la trattazione generale dei potenziali perturbati si nota che si è solo usato alla fine che il potenziale non perturbato ammetta orbite ellittiche, il potenziale armonico ammette orbite ellittiche chiuse (con il Sole nel centro e non nel fuoco), quindi i risultati finali ottenuti dal caso generale valgono anche in questo caso a meno di alcuni fattori 2. Il fattore è dovuto al fatto che con il Sole al centro dell'ellisse si hanno due minimi e due massimi nella distanza a ogni orbita, dunque ci sono 4 passaggi da minimo a massimo, uno ogni $\frac{\pi}{2}$. Si deve anche stare attenti al fatto che la dipendenza di r da θ è diversa: in coordinate cartesiane con gli assi paralleli a quelli dell'ellisse si vedono due moti armonici indipendenti con la stessa frequenza e ampiezze differenti sulle due coordinate x e y .

6.13 Potenziale Miracoloso

Scriviamo l'espressione generale per l'energia totale del satellite

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{r^2}$$

essendo interessati alla forma delle orbite cambiamo la variabile indipendente passando da t a θ quindi sostituiamo $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ e usando la relazione per il momento angolare $L = mr^2\dot{\theta}$ troviamo

$$E = \frac{L^2}{2mr^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{r^2}$$

è utile adesso il cambio di variabile $u = 1/r$, $du = -\frac{1}{r^2} dr$ sostituendo troviamo

$$E = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2 u^2}{2m} + \alpha u + \lambda u^2$$

L'energia è una costante del moto quindi possiamo derivare rispetto a θ e imporre che la derivata sia nulla,

$$0 = \frac{L^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{L^2 u}{m} + 2\lambda u + \alpha$$

se chiamiamo

$$\chi = \sqrt{1 + \frac{2m\lambda}{L^2}}$$

le soluzioni dipendono qualitativamente dal segno di χ^2 . Se questo è nullo si trova che $u(\theta)$ segue una parabola la cui concavità dipende dal segno di α , se χ^2 è negativo $u(\theta)$ assume la forma di un esponenziale che può essere divergente o convergente a seconda delle condizioni iniziali. Nel caso di χ^2 positivo si hanno le soluzioni oscillanti

$$u = c_1 \cos(\sqrt{\chi}\theta + \phi) - \alpha \left(\frac{L^2}{m} + 2\lambda \right)^{-1}$$

e da questa si trova che l'angolo di precessione nel caso di orbita limitata (chiaramente anche questo caso ammette orbite illimitate) è

$$\delta\theta = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\chi}} - 1 \right)$$

quindi vediamo che il verso in cui precedono le orbite dipende dal modulo di χ ed in particolare cambia segno per $\chi = 1$, che corrisponde al potenziale Newtoniano in cui $\delta\theta = 0$.