

Modulo di Analisi avanzato

Luca Vantaggio *

7 febbraio 2022

Sommario

In questo modulo si parlerà di continuità e differenziabilità di funzioni in più variabili. Si comincerà approfondendo i concetti di differenziale, gradiente e derivata di una curva e la chain rule. Si giungerà così alla formulazione di Taylor in più variabili. Successivamente si definiranno gli integrali doppi, tripli, di linea e di superficie, per poi analizzare rapidamente il concetto di campo conservativo. Si definiranno rotore e divergenza di un campo di vettori e si giungerà ad una dimostrazione intuitiva dei teoremi di Stokes e della divergenza. Si concluderà con le equazioni differenziali, di cui si analizzeranno le principali tecniche risolutive per poi andare a discutere metodi elementari di approssimazione delle soluzioni.

*luca.vantaggio@sns.it

1 Calcolo differenziale

1.1 Il caso di funzioni in una variabile

Definizione 1.1. Dati due insiemi A, B , una funzione $f : A \rightarrow B$ è una legge che associa ad ogni elemento di $x \in A$ uno ed un solo elemento di $y \in B$. Scriveremo conseguentemente $y = f(x)$.

Gli insiemi A e B si dicono rispettivamente *dominio* e *codominio* della funzione f . Chiameremo invece *insieme immagine* di f l'insieme di tutti i valori $y \in B$ che vengono effettivamente ottenuti come $f(x)$ per qualche x elemento di A .

La definizione appena data è generalissima, ma per i nostri scopi saremo essenzialmente interessati ad analizzare funzioni $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ è un qualche insieme sufficientemente regolare di m -uple di numeri reali.

In ogni caso, per avere un'intuizione di quel che andremo ad analizzare, consideriamo un caso "semplice", cioè quello delle funzioni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ reali a valori in un intervallo.

La prima osservazione che andiamo a fare è che una funzione è un oggetto così generico che può sfuggire molto facilmente alla nostra intuizione.

Esempio 1.1. Consideriamo la funzione $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è un numero razionale} \\ 1 & \text{se } x \text{ è un numero irrazionale} \end{cases}$$

Si può avere un'intuizione molto vaga di come sarà fatto il suo grafico, ma in qualche senso c'è qualcosa che ci disturba. Ma questo è già un esempio in giacca e cravatta: esistono funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il cui grafico è addirittura denso nel piano! Questo per dire che una funzione generica può fare davvero arbitrariamente schifo.

Una delle caratteristiche che rende queste funzioni così strane è che non sono *continue* in nessun punto, ovvero preso un valore x , ad esempio 0.5, esistono incrementi dx arbitrariamente piccoli per cui $f(x + dx)$ non approssima $f(x)$.

Definizione 1.2. (Continuità) Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Diremo che f è continua in x_0 se $f(x_0 + dx) \approx f(x_0)$ quando dx è sufficientemente piccolo. Detto meglio, devo poter rendere $|f(x_0 + dx) - f(x_0)|$ arbitrariamente piccolo per $dx \rightarrow 0$. Diremo infine che f è continua se e solo se è continua in ogni suo punto.

Facciamo un esempio per capire operativamente cosa significa che una funzione è continua.

Esempio 1.2. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 10x$ e mostriamo che è continua in 1. Da

$$f(1 + dx) = 10 \cdot (1 + dx) = 10 + 10dx = f(1) + 10dx$$

ricaviamo che quando $dx \rightarrow 0$ allora $|f(1 + dx) - f(1)| = |10dx| \rightarrow 0$. Quindi f è continua in 1.

Si può verificare che se f, g sono continue in x_0 allora anche $f + g$ e fg sono continue in x_0 . Se vale inoltre l'ipotesi burocratica $g(x_0) \neq 0$ allora f/g è definita "nei dintorni di x_0 " ed è continua in x_0 .

Abbiamo visto che se f è una funzione continua allora vale $f(x+dx) \approx f(x)$ per dx sufficientemente piccolo. Tuttavia quest'informazione non è molto quantitativa, nel senso che non è chiaro quanto deve essere piccolo dx per dire che $f(x+dx)$ è un'approssimazione buona di $f(x)$ e viceversa. Fortunatamente, per la stragrande maggioranza delle funzioni a cui siamo interessati, l'errore che commettiamo va linearmente con lo scarto, ovvero

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + a \cdot dx \tag{1}$$

per qualche numero reale a . Ad esempio, la funzione definita nell'esempio 1.2. verifica che

$$f(1 + dx) \approx f(1) + 10 \cdot dx$$

Ma operativamente come facciamo a stabilire se f verifica (1)? Riscrivendola come

$$a \approx \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}$$

capiamo che

$$a = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Definizione 1.3. (Differenziabilità) Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Diremo che la funzione f è *differenziabile* in $x_0 \in (a, b)$ se esiste un numero reale a per cui

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + a \cdot dx + o(dx)_{dx \rightarrow 0}$$

dove $o(dx)_{dx \rightarrow 0}$ è una funzione infinitesima per $dx \rightarrow 0$ che va a zero più velocemente di ogni funzione lineare non nulla, ovvero vale

$$o(dx)_{dx \rightarrow 0} = dx \cdot o(1)_{dx \rightarrow 0} \quad \text{con} \quad \lim_{dx \rightarrow 0} o(1)_{dx \rightarrow 0} = 0$$

Si dice che a è la derivata di f in x_0 e si scrive $a = f'(x_0)$. Vale la relazione

$$f'(x_0) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Infine, si può verificare che l'esistenza e finitezza del limite precedente sono di fatto equivalenti alla differenziabilità.

Notiamo infine che la differenziabilità esprime che il grafico della funzione f è simile a quello di una retta nelle vicinanze di x_0 , detta retta tangente a f in $(x_0, f(x_0))$. In particolare, la derivata ne esprime la pendenza.

Non ripeteremo tutte le regole di calcolo delle derivate perché sono argomento del modulo di Analisi semplice. Ci limitiamo a ricordare due fatti utili che avremo modo di estendere nel caso di più variabili.

Proposizione 1.1. *Sia $g : (a, b) \rightarrow (c, d)$ una funzione differenziabile in $x_0 \in (a, b)$ e $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $g(x_0) \in (c, d)$. Allora $f \circ g$ è una funzione differenziabile in $x_0 \in (a, b)$ e risulta*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Questo risultato è conosciuto come chain-rule e in sostanza ci dice che se $z = f(y)$ e $y = g(x)$ allora

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Esempio 1.3. La derivata di $z = (\sin \theta)^3$ rispetto a θ è

$$z' = \frac{dz}{d \sin \theta} \cdot \frac{d \sin \theta}{d \theta} = 3(\sin \theta)^2 \cos \theta$$

Proposizione 1.2. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $x_0 \in (a, b)$ punto di massimo o minimo locale per f . Allora $f'(x_0) = 0$.*

Il nostro obiettivo sarà estendere tutti questi concetti al caso di funzioni in più variabili.

1.2 Continuità e differenziabilità

Il contesto in cui vogliamo introdurre e generalizzare i concetti precedentemente esposti è quello delle funzioni $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ per qualche m, n intero positivo e Ω insieme con sufficiente regolarità.

Una primissima osservazione è che ad ogni vettore di \mathbb{R}^n è associato un concetto naturale di lunghezza, detta anche *norma*. Difatti, dato $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, la sua norma è la quantità $\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. In particolare dalla geometria sappiamo che la norma verifica le seguenti proprietà:

- $\|v\| \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e che $\|v\| = 0$ se e solo se $v = (0, 0, \dots, 0)$;
- $\lambda v = |\lambda| \|v\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$, cioè le omotetie conservano i rapporti delle lunghezze;
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$, detta disuguaglianza triangolare.

Avendo a disposizione un concetto di lunghezza, sarà anche possibile esprimere la distanza fra due punti: se $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono dei punti, la loro distanza sarà espressa da $d(v, w) = \|v - w\|$. A questo punto vale la pena chiedersi come si esprimerà la continuità puntuale per una mappa generica $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sia $x_0 \in \Omega$ un punto nel dominio di f : la funzione sarà continua in x_0 se e solo se $f(x) \approx f(x_0)$ quando $x \approx x_0$. Questo concetto, del tutto analogo a quello reale, è espresso nella seguente definizione.

Definizione 1.4. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$: diremo che f è continua in x_0 se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$ quando $\|x - x_0\| < \delta$. Essenzialmente questa definizione stabilisce che a patto di scegliere x sufficientemente prossimo a x_0 si può rendere $f(x)$ un'approssimazione arbitrariamente precisa di $f(x_0)$.

Definizione 1.5. Una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua se e solo se lo è in ogni punto del suo dominio.

Quindi, a patto di doversi ingegnare un pochino, siamo riusciti a estendere il concetto di continuità anche al caso in più variabili. Inoltre la seguente proposizione stabilisce che esprimere un vettore per componenti può essere uno strumento utile quando si studia la continuità di una funzione vettoriale.

Proposizione 1.3. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione e siano f_1, f_2, \dots, f_n le funzioni reali che descrivono le componenti di $f(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Allora f è continua in $x_0 \in \Omega$ se e solo se f_1, f_2, \dots, f_n lo sono.

Facciamo un esempio.

Esempio 1.4. Supponiamo che una particella si muova di moto circolare uniforme (nel piano). La sua legge oraria sarà descritta dalla funzione $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ con $\omega \neq 0$ costante. È chiaro intuitivamente che la curva è continua, e una maniera facile per verificarlo è notare che ognuna delle componenti della posizione è una funzione continua nel tempo.

Esempio 1.5. Dimostriamo che la mappa $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$ è una mappa continua. Infatti l'identità è chiaramente una mappa continua, e per la proposizione lo sarà anche la mappa π perché ne descrive la prima componente.

Come per le funzioni reali in una variabile reale, la continuità si trasmette per composizione e per operazioni burocratiche come la somma, il prodotto scalare tra vettori, il prodotto di una mappa vettoriale con una mappa scalare, ecc. Non ci soffermiamo troppo su questi dettagli perché alla fine non sono essenziali per la comprensione dell'argomento.

Ci preoccupiamo ora di estendere il concetto di *differenziabilità* al caso in più variabili. Premettiamo una definizione che ci semplificherà di molto la notazione.

Definizione 1.6. Siano $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$. Diremo che $f = o(g)_{x \rightarrow x_0}$ se e solo se per ogni x in un intorno di x_0 risulta $f(x) = \|g(x)\| \delta(x)$ con δ funzione infinitesima, ovvero $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} \delta(x) = 0$.

È solo una maniera comoda di scrivere che f diventa "trascurabile" rispetto a g per valori di x vicini a x_0 .

La differenziabilità si estende in maniera naturale anche al caso in più variabili.

Definizione 1.7. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$. Diremo che f è differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare $Df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)[h] + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

dove $Df(x_0)[h]$ denota l'immagine di h attraverso la funzione $Df(x_0)$.

Definizione 1.8. Una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice differenziabile se e solo se lo è in ogni punto del dominio.

A questo punto è bene vedere degli esempi che chiarifichino il concetto.

Esempio 1.6. Riconsideriamo il caso della particella che si muove di moto circolare uniforme, ovvero il cui moto è descritto dalla curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$. In ogni istante la particella avrà una velocità, che sappiamo essere $\mathbf{v}(t) = \omega \cdot (-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$. Come sappiamo, la velocità sarà un vettore tangente alla curva e tale per cui $ds = \|\mathbf{v}\| dt = \omega dt$, dove con ds, dt abbiamo indicato rispettivamente lo spostamento scalare e l'intervallo di tempo infinitesimi. Da un punto di vista vettoriale, quanto detto esprime il fatto che $d\mathbf{s} = \gamma(t + dt) - \gamma(t) = \mathbf{v}(t)dt$, ovvero che

$$\gamma(t + h) = \gamma(t) + \mathbf{v}(t)h + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

Se per ogni $t \in \mathbb{R}$ chiamiamo $D\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione tale che $D\gamma(x_0)[h] = \mathbf{v}(t)h$, questa è chiaramente una funzione lineare. che verifica

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + D\gamma(t)[h] + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

Fissato un istante t , l'insieme dei punti della forma $\gamma(t) + \mathbf{v}(t)h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$ descrive sul piano una retta, ovvero la retta tangente alla curva γ nel punto $\gamma(t)$, quindi anche in questo caso la differenziabilità ha un'interpretazione geometrica chiara. È bene osservare che in questo contesto vale che $\mathbf{v}(t) = D\gamma(t)[1]$, cioè $\mathbf{v}(t)$ è ben identificato dalla nostra teoria, perché esprime dove va 1, che è la base canonica di \mathbb{R} visto come spazio di vettori.¹ Detto in maniera intuitiva, se la particella impazzisse e decidesse di abbandonare la sua circonferenza e continuare il suo percorso sulla retta tangente con la stessa velocità $\mathbf{v}(t)$, allora il vettore $\mathbf{v}(t)$ esprimerebbe anche lo spostamento della particella sulla retta dopo un secondo. Si noti infine che le componenti di $\mathbf{v}(t)$ in ogni punto sono proprio le derivate delle funzioni $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$. Questo non è un caso: infatti da

$$\cos(\omega(t+h)) = \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)h + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

$$\sin(\omega(t+h)) = \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)h + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

si ricava che

$$\begin{aligned} \gamma(t+h) &= \begin{pmatrix} \cos(\omega(t+h)) \\ \sin(\omega(t+h)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)h + o(h)_{h \rightarrow 0} \\ \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)h + o(h)_{h \rightarrow 0} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} o(h)_{h \rightarrow 0} \\ o(h)_{h \rightarrow 0} \end{pmatrix} = \gamma(t) + \mathbf{v}(t)h + o(h)_{h \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Rimane infine da chiarire quale sia la relazione fra il vettore $\mathbf{v}(t)$ e il grafico di γ . Come sappiamo il grafico di γ è l'insieme $\{(t, \cos(\omega t), \sin(\omega t)) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Questo lo possiamo vedere come l'immagine della funzione

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad \phi(t) = (t, \cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

Ragionando in maniera analoga a prima abbiamo che ϕ è differenziabile in ogni $t \in \mathbb{R}$ e la sua derivata è data dal vettore $(1, \mathbf{v}(t))$. Quindi la retta tangente al grafico in $\phi(t) = (t, \gamma(t))$ è data dall'insieme dei punti della forma $\phi(t) + (1, \mathbf{v}(t))h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$. Questo non deve disturbare: a ben vedere nel caso della derivata prima di funzioni in una variabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il vettore tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$ è dato da $(1, f'(x_0))$. A seguito di quanto visto, vista la chiara analogia con le funzioni reali a variabile reale, ha pienamente senso dire che $\mathbf{v}(t)$ è la *derivata* della curva γ .

¹Per quanto la cosa sia profonda, mi rendo conto che taluni rideranno in questo momento.

Esempio 1.7. Sul piano x, y sono poste due cariche $q, -q$, quella positiva in $(1, 0)$ e quella negativa in $(-1, 0)$. Come è noto, il potenziale in ogni punto (x, y) del piano associato alla configurazione in oggetto è dato dalla funzione $V : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$V(x, y) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}$$

Vogliamo dimostrare che V è una funzione differenziabile. Sia (x, y) un generico punto del dominio: vogliamo dimostrare che esiste una funzione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$V((x, y) + (h_1, h_2)) = V(x, y) + L \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o \left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \right)_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)}$$

Una mappa lineare da $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione della forma $L \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = ah_1 + bh_2$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$. Quindi ci chiediamo se

$$V(x + h_1, y + h_2) = V(x, y) + ah_1 + bh_2 + o \left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \right)_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)}$$

Innanzitutto ci serve un claim sui numeri a e b . Notiamo che se poniamo $h_2 = 0$ abbiamo che la precedente equazione diventa

$$V(x + h, y) = V(x, y) + ah + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

che è lo sviluppo al primo ordine nel punto $t = x$ della funzione $G : (x - \epsilon, x + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ data da $G(t) = V(t, y)$, in cui essenzialmente si fissa la seconda componente di V . Quindi abbiamo che $a = G'(x) = (V(t, y))'|_{t=x}$. Si scrive in questo caso $a = \frac{\partial}{\partial x} V(x, y)$ con leggerissimo abuso di notazione di cui però non ci curiamo.² Analogamente $b = \frac{\partial}{\partial y} V(x, y)$. Nella fattispecie:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} = \\ &= \frac{q(x-1)}{4\pi\epsilon_0[(x-1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{q(x+1)}{4\pi\epsilon_0[(x+1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

e analogamente

$$\frac{\partial}{\partial y} V(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{-q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} =$$

²La x è stata usata sia come variabile fissata sia come variabile libera...

$$= \frac{qy}{4\pi\epsilon_0[(x-1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{qy}{4\pi\epsilon_0[(x+1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Quindi dovremmo dimostrare che

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{V(x+h_1, y+h_2) - V(x, y) - ah_1 - bh_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

dove ad a e b vanno sostituiti i numeri trovati prima. Ringraziando il cielo questo conto si *SKIPPA DI SANA PIANTA* perché qualcuno prima di noi ha mostrato dei teoremi generalissimi che vedremo a breve.

Denotiamo con $\nabla V(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x}V(x, y), \frac{\partial}{\partial y}V(x, y))$ il vettore delle derivate parziali: d'ora in poi lo chiameremo *gradiente* della funzione V in (x, y) . Notiamo che abbiamo mostrato che la funzione lineare $DV(x, y)$ è della forma $L(h) = \nabla V(x, y) \cdot h$, ovvero lo sviluppo al primo ordine di una funzione $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è della forma

$$V(\bar{x} + h) = V(\bar{x}) + \nabla V(\bar{x}) \cdot h + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

Questo ci permette di vedere $\nabla V(x, y)$ sia come applicazione lineare che come vettore di \mathbb{R}^2 . Ad esempio qual è la direzione v in cui la crescita della funzione V è massima? In sostanza ci stiamo chiedendo per quali v di norma 1 la funzione

$$\frac{\partial}{\partial v} V(\bar{x}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(\bar{x} + tv) - V(\bar{x})}{t}$$

è massima. La risposta è che grazie alla differenziabilità noi sappiamo che

$$\frac{V(\bar{x} + tv) - V(\bar{x})}{t} = \nabla V(\bar{x}) \cdot v + o(1)_{t \rightarrow 0} \rightarrow \nabla V(\bar{x}) \cdot v = \|\nabla V(\bar{x})\| \cos \theta_{\nabla V(\bar{x}), v}$$

che è massimo quando $\theta = 0$, cioè quando v è parallelo ed equiverso a $\nabla V(\bar{x})$. Viceversa il minimo si ha quando $\theta = \pi$, nel qual caso v ha verso opposto rispetto al gradiente. In generale se il gradiente di una funzione è non nullo, questo ci indica le direzioni di "massima variazione" della funzione V . Invece le direzioni di massima stabilità della funzione V sono sempre *ortogonali* al gradiente, in quanto verificano $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Questo mostra per corollario che il gradiente è sempre ortogonale alle curve di livello. Come è noto il campo elettrico in (x, y) è proprio $-\nabla V(x, y)$, da cui abbiamo ritrovato che il campo elettrico è sempre ortogonale alle superfici equipotenziali.

Consideriamo ora la funzione $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\phi(x, y) = \nabla V(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x}V(x, y), \frac{\partial}{\partial y}V(x, y))$. Ragionando in maniera analoga all'esempio 1.6 si ricava che ϕ è differenziabile se e solo se lo sono le mappe che ne danno le componenti, ovvero se e solo se sono differenziabili le derivate parziali di V .

Sempre per teoremi generali, anche in questo caso possiamo dire che le due derivate parziali sono differenziabili, e per quanto già visto abbiamo che

$$\frac{\partial}{\partial x} V(\bar{x} + h) = \frac{\partial}{\partial x} V(\bar{x}) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} V(\bar{x}), \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} V(\bar{x}) \right) \cdot h + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} V(\bar{x} + h) = \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{x}) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{x}), \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{x}) \right) \cdot h + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} V(\bar{x} + h) \\ \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{x} + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} V(\bar{x}) \\ \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} V(\bar{x}), \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} V(\bar{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{x}), \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{x}) \end{pmatrix} h + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

La matrice appena scritta è detta *matrice hessiana* del potenziale V in (x, y) e si indica con $HV(x, y)$. Vale che se la funzione è differenziabile due volte allora la matrice $HV(x, y)$ è simmetrica e come per le derivate seconde di funzioni reali in una variabile verifica che

$$V(\bar{x} + h) = V(\bar{x}) + \nabla V(x, y) \cdot h + \frac{1}{2} h^t HV(x, y) h + \|h\|^2 o(1)_{h \rightarrow 0}$$

Quindi, ad esempio, per verificare che il punto \bar{x} è un punto di equilibrio stabile per una carica positiva è sufficiente verificare che

$$\begin{cases} \nabla V(\bar{x}) = 0 \\ h^t HV(x, y) h > 0 \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

che è equivalente a richiedere che \bar{x} sia un punto di minimo locale stretto per V . Si può dimostrare che questa condizione è verificata se e solo se

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} V(\bar{x}) > 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} V(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{x}) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{x}) \right)^2 > 0 \end{cases}$$

È tempo di trarre le conclusioni di questo discorso.

Teorema 1.4. *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione e $x_0 \in \Omega$. La funzione f è differenziabile in x_0 se e solo se le funzioni $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ sono a loro volta differenziabili in x_0 . Inoltre la matrice J che rappresenta il differenziale di f verifica*

$$J = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f \mid \frac{\partial}{\partial x_2} f \mid \dots \mid \frac{\partial}{\partial x_m} f \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_m} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_m} f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_n & \frac{\partial}{\partial x_2} f_n & \dots & \frac{\partial}{\partial x_m} f_n \end{pmatrix}$$

Teorema 1.5. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione e $\bar{x} \in \Omega$. Se la matrice J è continua in \bar{x} allora la funzione è differenziabile in \bar{x} .³

Teorema 1.6. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $\bar{x} \in \Omega$ tale che f è differenziabile in \bar{x} . Se $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ allora quest'ultimo indica la direzione di massima pendenza con massima crescita.

Teorema 1.7. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $\bar{x} \in V_c = \{x \in \Omega : f(x) = c\}$ insieme di livello per la funzione f . Se f è differenziabile in \bar{x} allora il gradiente è ortogonale a V_c .

Teorema 1.8. Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione civile allora $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x})$.

Teorema 1.9. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile due volte in \bar{x} . Allora

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dx + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dy + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) dx^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) dy^2 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx dy \right]$$

Ovviamente anche questo teorema si estende per dimensioni generiche ma non lo trattiamo per brevità.

1.3 Chain rule

Partiamo con un'osservazione preliminare che può anche essere vista come conseguenza del teorema 1.4, ovvero che il differenziale $Df(x_0)$, se esiste, è unico. Analizziamo a questo punto le proprietà delle funzioni differenziabili. In particolare vediamo come si comporta la differenziabilità per somma, prodotto scalare e per composizione.

Esempio 1.8. Siano $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzioni differenziabili in $x_0 \in \Omega$. Allora $f + g$ è differenziabile in Ω e vale $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$. Infatti

$$f(x_0+h)+g(x_0+h) = f(x_0)+Df(x_0)[h]+o(h)_{h \rightarrow 0}+g(x_0)+Dg(x_0)[h]+o(h)_{h \rightarrow 0}$$

$$f(x_0 + h) + g(x_0 + h) = f(x_0) + g(x_0) + (Df(x_0) + Dg(x_0))[h] + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

³La continuità della matrice J in \bar{x} coincide con la continuità nel punto medesimo delle sue entrate.

Esempio 1.9. Siano $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzioni differenziabili in $x_0 \in \Omega$. Allora $f \cdot g = \langle f|g \rangle$ è differenziabile e il suo differenziale in x_0 è la mappa

$$L(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad L(x_0)[h] = \langle Df(x_0)[h]|g(x_0) \rangle + \langle f(x_0)|Dg(x_0)[h] \rangle$$

La verifica è simile all'esempio precedente, ma serve la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Veniamo ora al caso della composizione, che è di gran lunga il più importante.

Teorema 1.10. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile in $x_0 \in \Omega$. Sia inoltre $g : \Omega' \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile in $f(x_0) \in \Omega'$. Allora la composizione è una funzione differenziabile in x_0 e risulta che

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$$

Dimostrazione. Dalla differenziabilità della funzione g in $f(x_0)$ ricaviamo che

$$g(f(x_0) + h) = g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))[h] + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

Dalla differenziabilità della funzione f nel punto x_0 ricaviamo che quando $x \rightarrow x_0$ allora $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$, da cui ponendo $h = f(x) - f(x_0)$ nella precedente relazione otteniamo

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))[f(x) - f(x_0)] + o(f(x) - f(x_0))_{x \rightarrow 0} \quad (2)$$

Operando il cambio di variabile $x = x_0 + h$ con $h \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x_0$ si ottiene

$$g(f(x_0+h)) = g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))[f(x_0+h) - f(x_0)] + o(f(x_0+h) - f(x_0))_{h \rightarrow 0}$$

Dalla differenziabilità di f in x_0 sappiamo che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)[h] + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

da cui

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0)) + Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)[h] + \delta(h)$$

dove

$$\delta(h) = Dg(f(x_0))[o(h)_{h \rightarrow 0}] + o(f(x_0 + h) - f(x_0))_{h \rightarrow 0}$$

Per vedere che questa funzione è $o(h)_{h \rightarrow 0}$ servono dei teoremi elementari sulle funzioni lineari che però non possiamo dimostrare con gli strumenti di cui disponiamo. \square

A questo punto è bene vedere operativamente come funziona il macchinario offertoci dalla chain rule.

Esempio 1.10. Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni differenziabili. Come sappiamo $Df(x_0)[h] = f'(x_0)h$, mentre $Dg(f(x_0))[h] = g'(f(x_0))h$. Per la chain rule

$$D(g \circ f)(x_0)[h] = Dg(f(x_0))[Df(x_0)[h]] = g'(f(x_0)) \cdot Df(x_0)[h] = g'(f(x_0))f'(x_0)h$$

che è equivalente a dire che $\frac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ che è proprio il teorema sulla derivata di una composizione di funzioni derivabili.

Esempio 1.11. Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva che descrive la posizione di una particella nell'istante t . Allora la derivata di $f \circ \gamma$ nel punto t_0 è data da

$$\nabla f(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\gamma(t_0))\dot{x}(t_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(\gamma(t_0))\dot{y}(t_0) + \frac{\partial}{\partial z} f(\gamma(t_0))\dot{z}(t_0)$$

che se la riscriviamo un attimo diventa qualcosa di a noi familiare:

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

2 Calcolo integrale

2.1 Integrali doppi e tripli

Nel calcolo in una variabile, di notevole rilevanza è il concetto di *integrale*. Quest'ultimo permette in primis di codificare un primo concetto intuitivo di area. Successivamente si giunge al teorema fondamentale del calcolo integrale, che mette in relazione integrali e derivate.

Teorema 2.1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ per ogni $x \in [a, b]$. Risulta che

$$\frac{dF}{dx}(x_0) = f(x_0)$$

Estendere la trattazione fatta per funzioni in una variabile non è immediato come nel caso precedente, ed estenderla nel miglior modo possibile lo è ancor meno. Noi ci accontenteremo di definire i concetti in maniera un po' informale e incompleta, ma per i nostri scopi sarà più che sufficiente. Partiamo con la definizione di integrale doppio di una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Per semplicità supporremo che $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ dove α, β sono due funzioni continue. Siano $\alpha = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n = \beta$ funzioni continue sull'intervallo $[a, b]$, ognuna maggiore o uguale della precedente per ogni $x \in [a, b]$. Siano inoltre $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ dei numeri reali. Definiamo la somma integrale superiore di f associata alle α_i e agli x_j come

$$S = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{(x,y) \in D_{j,i}} f(x, y) \cdot m(D_{j,i})$$

dove $D_{j,i} = \{(x, y) \in D : x_j \leq x \leq x_{j+1} \text{ e } \alpha_i(x) \leq y \leq \alpha_{i+1}(x)\}$ e $m(D_{j,i}) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\alpha_{i+1}(t) - \alpha_i(t)) dt$. La somma integrale inferiore associata alle α_i e agli x_j è definita analogamente come

$$s = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{(x,y) \in D_{j,i}} f(x, y) \cdot m(D_{j,i})$$

Se prendendo suddivisioni sempre più fini è possibile rendere $|S - s|$ arbitrariamente piccolo, si dice che la funzione f è integrabile secondo Riemann e il valore a cui tendono le S e le s è detto integrale di f sul dominio D ed è denotato con

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

Come sempre il simbolo spiega l'euristiche che ci sta dietro: moralmente stiamo facendo una somma di infiniti contributi del tipo $f(x, y) dx dy$ dove $dx dy$ è l'elemento di area infinitesimo in coordinate cartesiane. In maniera simile si può definire l'integrale triplo di una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e si indicherà con

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

Come è ragionevole, tutte le funzioni continue sono integrabili se il dominio D è abbastanza regolare da non permettere che la funzione f diverga o oscilli arbitrariamente tanto. Del resto questo non è un fenomeno nuovo: anche in una dimensione si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty \quad \text{o anche} \quad \int_0^1 -\frac{\cos(1/x)}{x^2} dx \quad \text{non è definito.}$$

A questo punto si pongono due problemi essenziali:

- come si calcolano questi integrali;
- come posso cambiare coordinate all'interno dell'integrale.

Per la prima questione vale che

$$\iint f(x, y) dx dy = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy$$

e analogamente per gli integrali tripli.

Esempio 2.1. Sia $D = [0, 1] \times [2, 4]$ e si consideri la funzione identicamente 1. Allora

$$\iint_{[0,1] \times [2,4]} 1 dx dy = m([0, 1] \times [2, 4]) = 2$$

e

$$\int_2^4 \int_0^1 1 dx dy = \int_2^4 1 dy = 2$$

Per quanto riguarda il cambio di coordinate, si tratta di capire chi è l'elemento di area nel nuovo sistema di coordinate. Ad esempio in polari l'elemento di area è $r dr d\theta$, e quindi se scriviamo $f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = g(r, \theta)$, avremo che

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint g(r, \theta) r dr d\theta$$

Esempio 2.2. Immaginiamo di voler calcolare

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

Ci sono almeno due modi per calcolarli.

Primo modo: Scriviamo

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy + \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \end{aligned}$$

Poiché la funzione integranda è pari nella variabile x , i due integrali appena scritti sono uguali, per cui abbiamo

$$2 \cdot \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = 2 \cdot \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1/y}{\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}} dx dy$$

A questo punto cambio di variabile nell'integrale più interno, dove pongo $z = \frac{x}{y}$ e conseguentemente $dz = \frac{1}{y} dx$, da cui si ottiene

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^1 \int_{-\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}}^{\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz dy &= 2 \cdot \int_0^1 \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{y^2}-1} \right) - \sinh^{-1} \left(-\sqrt{\frac{1}{y^2}-1} \right) dy = \\ &= 4 \cdot \int_0^1 \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{y^2}-1} \right) dy = 4 \cdot \int_0^1 \cosh^{-1} \left(\frac{1}{y} \right) dy \end{aligned}$$

A questo punto integriamo per parti, ottenendo

$$\begin{aligned} &= 4y \cdot \cosh^{-1} \left(\frac{1}{y} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} - 4 \cdot \int_0^1 y \cdot \frac{-1}{\sqrt{(\frac{1}{y})^2-1} \cdot y^2} dy = 4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \\ &= 4 \sin^{-1}(y) \Big|_{y=0}^{y=1} = 2\pi \end{aligned}$$

Secondo modo: Cambiamo sistema di coordinate e parametrizziamo tutto in funzione di r, θ . In particolare

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \iint_{r^2 \leq 1} \frac{1}{r} \cdot r dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\pi$$

È immediato verificare che il secondo modo è stato notevolmente più efficiente del primo. Questo per dire che cambiare coordinate può essere di fondamentale importanza per computare in maniera pulita integrali come questo. Dunque può essere ragionevole cercare di capire cosa significa in generale cambiare coordinate e se c'è una formula chiusa per un generico cambio di coordinate. Per cercare di capire cosa sta succedendo, facciamo delle osservazioni per il caso del cambio di coordinate dalle cartesiane alle polari. Noi sappiamo che ad un punto $(x, y) \neq (0, 0)$ possiamo associare una coppia (r, θ) tramite la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, +\infty) \times [0, 2\pi] \quad \text{data da} \quad F(x, y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arg(x, y))$$

che è C^1 , invertibile con inversa C^1 . Consideriamo una funzione $g(r, \theta)$ e sia $f(x, y) = g(F(x, y))$. Immaginiamo di prendere un rettangolino di lati

dx, dy centrato in (x, y) e di applicargli F : questo verrà deformato ad un parallelogramma di area $|\det J_F(x, y)|dxdy$, dove J_F è la matrice Jacobiana di F . Questo vuol dire aver messo in corrispondenza i rettangolini di una qualsiasi suddivisione del piano con dei parallelogrammi dello spazio delle coppie (r, θ) , e i rapporti delle aree dei parallelepipedi e dei rettangolini è dato "puntualmente" da $|\det J_F(x, y)|$, ed è in questo senso che diciamo che $drd\theta = |\det J_F(x, y)|dxdy$. Dunque deve valere

$$\iint f(x, y)dxdy = \iint \frac{g(r, \theta)}{|J_F(x, y)|}drd\theta = \iint g(r, \theta)|\det J_{F^{-1}}(r, \theta)|drd\theta$$

Come quanto scritto lascia intuire, deve valere che $\det J_F(x, y) \neq 0$. Notiamo inoltre che da $dxdy = |\det J_{F^{-1}}(r, \theta)|drd\theta$ ritroviamo al secondo membro l'elemento infinitesimo di area scritto in polari. Giungiamo così al teorema generale di cambio di variabile.

Teorema 2.2. *Sia $\phi : B \rightarrow A$ una mappa C^1 , invertibile e ad inversa C^1 con $\det J_\phi \neq 0$. Allora risulta che*

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \iint_B f(\phi(z, w))|\det J_\phi(z, w)|dzdw$$

Come sempre ci sono ipotesi di regolarità di A, B che omettiamo per brevità.

Nel precedente teorema essenzialmente $\phi = F^{-1}$ dell'esempio visto. Un risultato del tutto analogo vale per gli integrali tripli. Ad ogni modo, se questo è il macchinario teorico che sta dietro i cambi di variabile, nella pratica ragionare in termini di elementini di area/volume infinitesimi dà i medesimi risultati in un tempo minore, quantomeno per le parametrizzazioni più comuni. Ad esempio non sarà difficile convincersi del fatto che l'elementino di volume in cilindriche è $rdrd\theta dz$. O ancora l'elemento di volume in sferiche è $r^2 \sin \theta drd\theta d\phi$.

2.2 Integrali di linea

Nella sezione precedente abbiamo appreso come sia possibile integrare funzioni reali con domini in \mathbb{R}^3 o \mathbb{R}^2 . Tuttavia è ragionevole ci possa definire un concetto di integrale per domini che, se opportunamente deformati, rassomigliano ad una retta o ad un piano ecc. Ad esempio in fisica si incontra spesso il lavoro, che non è altro che un particolare integrale lungo una curva che a priori *non* è rettilinea. In questa sezione ci occupiamo di definire un integrale curvilineo per funzioni a valori in \mathbb{R} .

Definizione 2.1. Si dice curva una funzione $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 . Generalmente per noi l'insieme di arrivo di γ sarà \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 .

Se facciamo un parallelo con la meccanica, il concetto di curva codifica ben di più di quello di orbita o traiettoria: essenzialmente la curva descrive *la legge oraria* del punto. Diremo che però due curve γ_1, γ_2 sono essenzialmente la stessa a meno del verso se esiste una riparametrizzazione $\phi : \text{dom}\gamma_1 \rightarrow \text{dom}\gamma_2$ mappa C^1 strettamente monotona per cui $\gamma_2 \circ \phi = \gamma_1$, ovvero se l'una si ottiene dall'altra cambiando variabile in maniera sensata. Se vogliamo codificare l'informazione del *verso* di percorrenza, dobbiamo chiedere che ϕ sia strettamente crescente. Adesso siamo pronti per introdurre il concetto di integrale di linea di una funzione scalare.

Definizione 2.2. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ una curva e $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare. Definiamo

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{r}) ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Questa definizione è indipendente dalla particolare parametrizzazione scelta per la curva.

Come sempre la notazione rende molto intuitivo il significato di questo oggetto: è né più né meno l'integrale per funzioni di una variabile che conosciamo, nel caso in cui però l'intervallo $[a, b]$ viene preso e deformato fino a farlo coincidere con γ . Ed è chiaro che $\|\gamma'(t)\| dt$ gioca il ruolo dell'elementino di lunghezza infinitesimo per la curva. Questa è la ragione per cui, ad esempio, la lunghezza di γ si definisce come

$$\int_{\gamma} 1 ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Se f non è più una funzione scalare ma un campo di vettori, siamo interessati a definire il lavoro di f lungo la curva γ .

Definizione 2.3. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Definiamo il lavoro del campo f lungo la curva γ come

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

dove il prodotto che compare all'interno dell'integrale è un prodotto scalare fra vettori di \mathbb{R}^k . La definizione è indipendente dalla parametrizzazione della curva, *purché il verso di percorrenza sia lo stesso*. In particolare, se indichiamo con γ_{inv} la curva gamma percorsa nel verso opposto, abbiamo che

$$\int_{\gamma_{inv}} f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\gamma} f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$$

2.3 Integrali di superficie

Per gli integrali di superficie l'idea è identica, ovvero i problemi che ci poniamo sono:

- Come possiamo definire una superficie?
- Come possiamo identificare l'elemento infinitesimo di area sulla superficie?

Per semplicità diamo la seguente definizione, non molto distante dall'essere la più generale.

Definizione 2.4. Una superficie è una mappa $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 .

L'elemento infinitesimo di area sarà invece $\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| dudv$. Perché? Immaginiamo di aver suddiviso Ω in rettangolini di lati du, dv , e immaginiamo la griglia che avremo ottenuto a seguito di questa definizione. Ogni celletta avrà area $dudv$ e verrà mandata dalla ϕ in qualcosa che al primo ordine è il parallelogramma delimitato dai vettori $\frac{\partial \phi}{\partial u} du$ e $\frac{\partial \phi}{\partial v} dv$. Quindi abbiamo creato una corrispondenza fra quadratini e parallelogrammini, ognuno di area $\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} du \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} dv \right\| = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| dudv$. Questo giustifica la seguente definizione:

Definizione 2.5. Sia $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare. Definiamo

$$\int_{\phi} f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} := \iint_{\Omega} f(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| dudv$$

Anche in questo caso abbiamo la possibilità di definire un integrale per campi di vettori, detto integrale di flusso. Questo esprime se per la superficie sono mediantemente di più (o più rilevanti) le linee di campo uscenti o quelle entranti nella superficie. Un esempio classico è il teorema di Gauss per il campo elettrico, secondo cui *per una superficie chiusa* vale

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Se immaginiamo che la carica interna sia perlopiù negativa, ci aspettiamo mediantemente più linee di campo entranti di quelle uscenti, e il contrario vale se la carica interna è positiva. È interessante osservare come $Q_{int} = 0$ sia la condizione che esprime il perfetto bilancio fra linee entranti ed uscenti.

Definizione 2.6. Sia $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori. Definiamo

$$\int_{\phi} f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi} f(\mathbf{r}) \cdot \hat{n} dS$$

dove \hat{n} è un campo (continuo) di versori ortogonale al sostegno alla superficie ϕ in ogni suo punto. È chiaro che c'è una certa libertà nello scegliere i versori normali alla superficie (e una tale scelta può modificare anche il risultato dell'integrale), tranne quando è *chiusa*, caso in cui di norma si considera il campo di versori ortogonali alla superficie e rivolti esternamente rispetto al volume racchiuso dalla superficie stessa.

2.4 Campi conservativi

Come esercizio importante su quello che abbiamo fatto, in questa sezione ci occuperemo di dare delle condizioni necessarie e sufficienti perché un dato campo di forze sia conservativo, ovvero tale che il lavoro del campo su una curva dipenda solo dal punto iniziale e da quello finale. Per semplicità supponiamo che $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia definito su tutto lo spazio. Discuteremo quando si possono presentare delle possibili patologie se il dominio non è carino ed enunceremo alcune tecniche generali per ovviare ad eventuali problemi.

Supponiamo che F sia un campo conservativo e sia A un generico punto dello spazio, che supporremo essere l'origine per semplicità. Definiamo $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ come $V(x, y, z) = \int_{\gamma(x, y, z)} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$, dove $\gamma(x, y, z)$ è una qualunque curva che va dall'origine a (x, y, z) . Ovviamente la nostra precedente definizione perde di significato se il campo non è conservativo, ovvero se il lavoro dipende non solo dal punto iniziale e dal punto finale, ma anche dal percorso scelto. Chiediamoci se questa V è una funzione sufficientemente regolare: ad esempio è perlomeno differenziabile?

Il primo step consiste nel verificare se ammette le derivate parziali. Sia $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un punto fissato dello spazio. Allora

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(\bar{x} + h, \bar{y}, \bar{z}) - V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{h}$$

Notiamo che $V(\bar{x} + h, \bar{y}, \bar{z})$ codifica il lavoro che ci vuole per andare dall'origine a $(\bar{x} + h, \bar{y}, \bar{z})$ seguendo un percorso qualsiasi. Proprio per l'arbitrarietà della scelta di tale percorso, possiamo prenderlo come la concatenazione di un qualsiasi percorso che va dall'origine in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con uno che parte da $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e arriva in $(\bar{x} + h, \bar{y}, \bar{z})$. È chiaro che la differenza $V(\bar{x} + h, \bar{y}, \bar{z}) - V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

restituirà il lavoro compiuto dal campo F per andare da $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ a $(\bar{x} + h, \bar{y}, \bar{z})$. Sia $\psi_h : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\psi_h(t) = (\bar{x} + t, \bar{y}, \bar{z})$. Allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(\bar{x} + h, \bar{y}, \bar{z}) - V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\psi_h} F(\mathbf{r}) \mathbf{ds}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h F_x(\bar{x} + t, \bar{y}, \bar{z}) dt}{h}$$

Se F è un campo vettoriale continuo, allora anche la funzione integranda è continua. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, risulta che

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = F_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

Inoltre dalla continuità di F ci dà gratuitamente la differenziabilità di V . Moralmente stiamo dicendo che

$$dV = d\mathcal{L} = F(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{ds} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

dove $d\mathcal{L}$ indica il lavoro infinitesimo. In effetti vale il seguente teorema:

Teorema 2.3. *Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo. Allora le seguenti sono equivalenti:*

- F è conservativo;
- per ogni γ cammino chiuso risulta $\oint_{\gamma} F(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{ds} = 0$;
- esiste una funzione V tale che $\nabla V = F$.

Inoltre, se $A, B \in \mathbb{R}^3$ e γ ha per estremi A, B in questo ordine, allora

$$\int_{\gamma} F(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{ds} = V(B) - V(A)$$

La V che abbiamo trovato è quasi il potenziale a cui siamo abituati in fisica: difatti in fisica si prende convenzionalmente la funzione $W = -V$ che verifica

$$-\nabla W = F$$

La ragione è che se γ ha per estremi con A, B allora la W verifica

$$W(B) + \int_{\gamma} F(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{ds} = W(A)$$

Ad esempio, in meccanica classica la precedente relazione diventa per il moto di una particella di massa m la seguente

$$W(B) + \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W(A)$$

$$W(B) + \frac{1}{2}mv_B^2 = W(A) + \frac{1}{2}mv_A^2$$

che è la conservazione dell'energia meccanica della particella, nel caso in cui F sia la risultante delle forze che agiscono sulla particella in ogni istante del suo moto e che fanno lavoro (ad esempio la normale ad una superficie non fa lavoro).

Supponiamo ora che il campo F sia differenziabile. Sappiamo che esiste una funzione V tale che $F = \nabla V$, e che dunque tale funzione V è differenziabile due volte. Quindi, per quanto sappiamo, possiamo scrivere delle uguaglianze tra le derivate miste di V . Ad esempio

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} V = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} V = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

E in generale

$$\partial_{x_i} F_{x_j} - \partial_{x_j} F_{x_i} = 0$$

Quando queste relazioni sono soddisfatte, si dice che il campo F è chiuso. A questo punto ci si potrebbe chiedere se questa condizione è equivalente all'essere conservativo. Purtroppo la risposta è no in generale, in quanto il dominio della F non deve presentare patologie particolari.⁴ Tuttavia, nel caso che stiamo analizzando, non ci sono problemi, perché il dominio del campo è tutto lo spazio.

Teorema 2.4. *Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale in $C^1(\mathbb{R}^3)$. Allora le seguenti sono equivalenti:*

- F è chiuso;
- F è conservativo.

Tuttavia in fisica si incontrano spesso campi conservativi che non sono definiti in tutto lo spazio, come il campo gravitazionale, il campo elettrico ecc. D'altro canto per questi ultimi si conosce un'espressione esplicita di un potenziale, per cui non ci poniamo grandi problemi. Vale però il seguente teorema, che in ogni caso ci assicura che sono davvero conservativi (a patto di aver verificato che sono chiusi):

Teorema 2.5. *Sia $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con Ω sufficientemente regolare e tale che $x \in \Omega$ implica $tx \in \Omega$ per ogni $t > 0$. Se F è α -omogeneo, ovvero verifica $F(tx) = t^\alpha F(x)$ per ogni $t > 0$, e $\alpha \neq -1$ allora le seguenti sono equivalenti:*

- F è chiuso;

⁴Intuitivamente non deve avere buchi, ma non ci dilunghiamo.

- F è conservativo.

Nel caso del campo gravitazionale, se viene posta una massa m_0 in \mathbf{r}_0 si ha

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{m_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

È chiaro che \mathbf{g} è conservativo se e solo se $\mathbf{g}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)$, ovvero l'essere un campo conservativo è indipendente da dove posizione l'origine del mio sistema di riferimento. Posso dunque supporre senza perdita di generalità che $\mathbf{r}_0 = 0$. Si ottiene perciò

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{m_0}{r^2} \hat{r}$$

che è α -omogeneo con $\alpha = -2$. È noto (e comunque si può verificare) che \mathbf{g} è un campo chiuso, e conseguentemente è conservativo. Chi sarà il potenziale? Si può claimare che si deve avere $V(\mathbf{r}) = f(r)$ con

$$\frac{df}{dr}(r) = G \frac{m_0}{r^2}$$

e quindi $V(\mathbf{r}) = -G \frac{m_0}{r}$. La dimostrazione formale di questo fatto discende dalle simmetrie del campo e dalla formula del gradiente in coordinate sferiche.

3 Divergenza e rotore

3.1 Teorema della divergenza

Nella precedente sezione ci siamo occupati di caratterizzare i campi conservativi, e dalla proprietà globale che per un campo conservativo F e per ogni γ curva chiusa vale

$$\oint_{\gamma} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

siamo giunti all'equazione differenziale

$$F = \nabla V$$

che sappiamo avere soluzione. Nelle sezioni che seguono ci proponiamo di studiare sistematicamente come le proprietà integrali di un campo si riflettono localmente e viceversa.

Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori e Σ una superficie chiusa. Vogliamo studiare da vicino il flusso di F sulla superficie Σ , ovvero

$$\oiint_{\Sigma} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

Immaginiamo di tagliare il volume di interesse racchiuso da Σ con un piano. Allora Σ si spezza in due superfici *non chiuse*, diciamo S_1 e S_2 . Se ad ognuna di queste aggiungiamo la parte di piano θ che sconnette il volume di interesse, otteniamo due superfici chiuse Σ_1 e Σ_2 . Notiamo che vale

$$\oiint_{\Sigma} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\Sigma_1} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{\Sigma_2} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

La ragione è che vale certamente

$$\iint_{\Sigma} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

Sia \hat{n} il campo di vettori ortogonali a θ diretti uscenti rispetto alla parte di volume racchiusa da Σ_1 . Allora

$$\oiint_{\Sigma_1} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{\theta} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oiint_{\Sigma_2} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} - \oiint_{\theta} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

Sommando membro a membro si ottiene la tesi. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano, e sezioniamo il nostro volume di interesse in cubetti di volume $dx dy dz$. Per quanto visto prima il flusso totale sarà la somma di tutti i contributi delle superfici esterni dei singoli cubetti. Ma il contributo di un cubetto è al primo ordine

$$\begin{aligned} & [F_x(x+dx, y, z) - F_x(x, y, z)] dy dz + [F_y(x, y+dy, z) - F_y(x, y, z)] dx dz + \\ & \quad + [F_z(x, y, z+dz) - F_z(x, y, z)] dx dy \approx \\ & \approx \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz \approx \iiint_{\text{cubetto}} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz \end{aligned}$$

Nel limite dei cubetti che diventano sempre più piccoli, sommando i contributi otteniamo il seguente.

Teorema 3.1. *Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori C^1 e Σ una superficie chiusa che racchiude al suo interno un volume V . Allora vale che*

$$\oiint_{\Sigma} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot F(\mathbf{r}) dr^3$$

dove $\nabla \cdot F(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)(\mathbf{r})$ è detto *divergenza del campo F* .

Studiamo un po' da vicino la divergenza di un campo \mathbf{F} . É chiaro che è lineare, in quanto somma di funzioni lineari. La cosa interessante è che è un oggetto che sembra dipendere dal particolare sistema di coordinate in cui ci mettiamo, mentre il teorema della divergenza ci dice che se F ha un minimo di regolarità allora vale

$$\nabla \cdot F(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Sigma(V)} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}{V}$$

dove intendiamo dire che prendiamo dei volumi, ad esempio sferici, che si contraggono fino a coincidere, nel limite, con il punto \mathbf{r} . E il secondo membro intuitivamente non dipende dal particolare sistema di coordinate in cui ci mettiamo. In effetti la divergenza non dipende dal sistema di coordinate: la verifica di questo fatto può essere trovata nell'appendice.

3.2 Teorema del rotore

In questa sezione ci proponiamo di studiare meglio la circuitazione di un campo lungo una curva chiusa. D'ora in poi, se S è una superficie, ne denoteremo con ∂S il suo bordo. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori e una curva chiusa γ e Σ una superficie che ha γ come bordo. Fissiamo un orientamento per il campo di vettori normale alla superficie. Questo induce un orientamento dei vettori tangenti su γ dato dalla regola della mano destra. Come prima osserviamo che se spezziamo la superficie Σ con una curva θ allora Σ si divide in due sottosuperfici Σ_1, Σ_2 con bordo ognuna i due pezzi in cui viene divisa γ con l'arco θ . Se orientiamo i bordi sempre con la regola della mano destra otteniamo che

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \Sigma} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{\gamma} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\gamma_1} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\gamma_2} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \oint_{\gamma_1} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\gamma_2} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\theta} F(\mathbf{r}) - \oint_{\theta} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \oint_{\partial \Sigma_1} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\partial \Sigma_2} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Sfruttando questa proprietà possiamo immaginare di spezzare la nostra superficie in tanti piccoli quadratini un po' ricurvi la cui somma dei contributi della circuitazione dà quella iniziale. Per semplificarci di molto la vita supporremo che la superficie Σ in partenza sia planare e che quindi i pezzi di superficie siano davvero dei rettangolini $dx dy$. Se facciamo i conti supponendo senza

perdita di generalità che la superficie sia sul piano xy e la normale abbia lo stesso verso di \hat{z} otteniamo che

$$\begin{aligned} & \oint_{\text{bordo quadratino}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \approx \\ & \approx [F_y(x+dx, y, z) - F_y(x, y, z)]dy + [F_x(x, y, z) - F_x(x, y+dy, z)]dx \approx \\ & \approx (\partial_x F_y - \partial_y F_x) dx dy \approx \iint_{\text{quadratino}} \nabla \wedge \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

dove con $\nabla \wedge \mathbf{F}(\mathbf{r})$ indichiamo il *rotore* di F , che è dato da

$$\nabla \wedge \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \partial_x & F_x \\ \hat{y} & \partial_y & F_y \\ \hat{z} & \partial_z & F_z \end{pmatrix}$$

Per come è scritta la precedente notazione non è formale, però è ben indicativa di come si fanno le cose. Facendo tutto per bene in effetti si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 3.2. *Sia Σ una superficie e \hat{n} un dato campo di vettori normali alla superficie stessa. Sia γ il bordo di σ orientato con la regola della mano destra. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori C^1 . Allora risulta che*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} \nabla \wedge \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

Come nel caso della divergenza, il teorema 3.2 suggerisce che il rotore di un dato campo non dipenda dal sistema di riferimento (purché continui ad essere descritto da una terna ortogonale levogira). Di questo fatto ne omettiamo la dimostrazione per brevità.

4 Equazioni differenziali ordinarie

4.1 Introduzione alle equazioni differenziali

Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che rispetta le seguenti caratteristiche:

- l'incognita x è una funzione in una variabile t , ovvero una *curva*;
- esprime una relazione fra $x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ che deve essere verificata in ogni punto t dell'intervallo in cui si vuole che x sia definita.

Ad esempio un'equazione differenziale può essere

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

le cui soluzioni sono della forma $x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$. Questo è un esempio "fortunato", nel senso che le soluzioni che otteniamo

- innanzitutto esistono, nel senso che non è banale a priori che un'equazione differenziale ammetta davvero soluzioni. Comunque vedremo che salvo casi patologici succede sempre;
- sono definite globalmente, e anzi in questo caso sono addirittura periodiche;
- sono uniche a patto di dare posizione e velocità in un dato istante di tempo.

Inoltre sappiamo che per una particella che si muove in questo modo c'è una quantità conservata, ovvero

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = \frac{2}{m} E = \text{costante}$$

In più è facile verificare che la somma di soluzioni della precedente equazione differenziale è ancora una soluzione, e lo stesso dicasi del prodotto di una soluzione per uno scalare. Si dice in tal caso che l'equazione differenziale è *lineare*, che è una proprietà molto comoda perché queste si sanno sempre risolvere. Immaginiamo ora di avere un'equazione del tipo

$$\ddot{x} = -\sin(x) \quad \text{con } x(0), \dot{x}(0) \approx 0$$

All'inizio per $t \ll 1$ abbiamo che $x \approx 0$, da cui $-\sin(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \dots \approx -x$. Potremmo essere tentati a dire che quindi la funzione x è ben approssimata, quantomeno per tempi piccoli, da una y che risolve

$$\ddot{y} = -y \quad \text{con } y(0), \dot{y}(0) \approx 0$$

Ma per quanto visto sappiamo che y è una combinazione lineare di seni e coseni, che sono funzioni limitate. Quindi ci aspettiamo che la y che troviamo sia una buona approssimazione per tempi anche sufficientemente lunghi. A questo punto potremmo però chiederci se la y è una buona approssimazione per tutti i tempi, e se sì perché. Un modo potrebbe essere quello di interpretare l'equazione differenziale iniziale come quella di un pendolo matematico, in cui l'asserzione che stiamo facendo è quasi evidente, anche solo per conservazione dell'energia. Tutti gli aspetti che sono usciti da questi esempi saranno quelli che verranno trattati nelle prossime sezioni.

4.2 Esistenza e unicità delle soluzioni

Partiamo da un esempio negativo per capire che le equazioni differenziali possono fare schifo. Supponiamo di avere l'equazione differenziale

$$\dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2} \quad \text{con } x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

È chiaro che una soluzione esiste, ed è la funzione identicamente nulla. La cosa forse controintuitiva è che *non è l'unica*: la funzione

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t^3 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

è soluzione del problema. Ringraziando il cielo, abbiamo i seguenti teoremi che ci danno delle sicurezze circa le equazioni differenziali.

Teorema 4.1. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove si ricercano funzioni $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ curve derivabili che verifichino puntualmente la prima equazione con il dato iniziale della seconda equazione (I deve essere un intervallo che contiene lo 0). Se f è una funzione continua allora l'equazione ha soluzione. In generale non è unica.

Teorema 4.2. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

come prima. Se nelle vicinanze di ogni punto $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ la funzione f è continua ed è L -Lipschitz nella x uniformemente nella t , ovvero esiste una costante L tale che per ogni $t' \in \mathbb{R}$ prossimo a t e per ogni $a, b \in \mathbb{R}^n$ vicini a \bar{x} vale che

$$\|f(a, t') - f(b, t')\| \leq L\|a - b\|$$

allora la soluzione esiste localmente e tutte le soluzioni coincidono sulle intersezioni dei loro domini. Inoltre esiste un unico prolungamento massimale di ogni soluzione.

Si noti che se in particolare f è C^1 allora siamo nelle ipotesi del teorema.

Teorema 4.3. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

come prima. Se nelle ipotesi del teorema precedente la costante L è globale allora la soluzione massimale è definita su tutto \mathbb{R} .

Tuttavia i teoremi appena visti sembrano poco utili, visto che le equazioni che abbiamo scritto sono solo del primo ordine, quindi all'apparenza non hanno nulla a che vedere con equazioni del tipo $\ddot{x} = F(x)$. In realtà così non è: consideriamo ad esempio l'equazione

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

con una qualche condizione arbitraria. Poniamo $y = \dot{x}$ e scriviamo le relazioni che intercorrono fra x, y :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

Se poniamo $g(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ e $f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x - y \end{pmatrix}$ otteniamo

$$\dot{g} = f(g)$$

che è un'equazione del primo ordine. Viceversa se g verifica l'equazione di sopra allora la sua prima componente $x(t)$ è una soluzione dell'equazione di partenza. Quindi un'equazione del secondo ordine nello spazio è equivalente ad un'equazione differenziale del primo ordine nello spazio delle fasi spazio-velocità. Le condizioni iniziali nello spazio delle fasi spazio-velocità saranno la posizione iniziale e la velocità iniziale della particella, il che spiega come da questi teoremi si deduca che servono posizione iniziale e velocità iniziale per determinare il moto. Nelle prossime sezioni impareremo ad apprezzare di più questo "trucchetto" e il tipo di intuizione che porta con sé.

4.3 Equazioni differenziali alle variabili separabili

Come riscaldamento, studiamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x} = f(x)g(t)$$

con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ e f, g funzioni continue. Cominciamo dicendo che se $f(x_0) = 0$ allora la funzione costantemente x_0 è soluzione.

Come abbiamo visto nella sezione precedente, a priori non possiamo dire nulla sull'unicità. Supponiamo adesso $f(x_0) \neq 0$ e per semplicità $f(x_0) > 0$. Allora in un intorno di x la permanenza del segno ci assicura che $f(\zeta) > 0$. Quindi se x è soluzione (e sappiamo che almeno una c'è) allora x verifica

$$\frac{\dot{x}}{f(x)} = g(t)$$

Se integriamo da t_0 a t otteniamo

$$\int_{t_0}^t g(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(t')}{f(x(t'))} dt' = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(\zeta)} d\zeta$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal cambio di variabile $\zeta = x(t')$. Sia F la funzione data da $F(z) = \int_{x_0}^z \frac{1}{f(\zeta)} d\zeta$: la sua derivata è positiva in un intorno di x_0 , ragion per cui è localmente invertibile, con inversa F^{-1} . Quindi la soluzione è data localmente da

$$x(t) = F^{-1} \int_{t_0}^t g(t') dt'$$

In particolare è anche unica. Questo mostra che per le equazioni differenziali a variabili separabili il problema dell'unicità si pone solo per i punti di equilibrio. Supponiamo di avere esistenza e unicità delle soluzioni: allora il grafico di una data soluzione non costante non può mai intersecare in alcun punto quello di una soluzione costante. Supponiamo ad esempio il caso più semplice in cui $g(t) \equiv 1$. In questo caso sappiamo che per unicità non ci possono essere istanti di tempo \bar{t} per cui $f(x(\bar{t})) = 0$, visto che in tal caso si perderebbe l'unicità delle soluzioni. In particolare la derivata della funzione x non si annulla mai, e di conseguenza non cambia mai di segno. Quindi x è strettamente monotona. Facciamo un esempio per chiarire: consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

con condizione iniziale $x(0) = 0$. Sappiamo che le funzioni costantemente 1 o -1 sono soluzioni, da cui la funzione che stiamo cercando è strettamente monotona e verifica $|x(t)| < 1$. Quest'ultima condizione ci dice intuitivamente che la soluzione è definita globalmente, in quanto non può divergere in un tempo finito, essendo limitata in modulo da 1. Essendo monotona, ammette limiti a $\pm\infty$ che ci aspetta siano proprio 1 e -1 . Mostriamo infatti che se l è un valore limite allora deve valere $l^2 - 1 = 0$. Difatti se x ammette limite allora anche $\dot{x} = x^2 - 1$ ammette limite finito, diciamo $l^2 - 1$. Il fatto che ammette limite ci dice che non può fare cose strane, ovvero ci aspettiamo che

il suddetto limite tenda a 0, la qual cosa si vede bene con l'Hopital, in quando $\frac{f(x)}{x}$ tenderà a 0 e di conseguenza anche il rapporto delle derivate. Quindi $l = \pm 1$, come voluto. Mostriamo ora che $x(t) = -x(-t)$. Per dimostrarlo consideriamo la funzione $y(t) = -x(-t)$ definita globalmente. Si ha che

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(-t) = x^2(-t) - 1 = y^2(t) - 1$$

e $y(0) = 0$. Ne segue che x, y risolvono lo stesso problema di Cauchy, e quindi per unicità coincidono. Notiamo ora che x è C^∞ , come si può facilmente verificare per induzione. Deriviamo ambo i membri dell'equazione, ottenendo

$$\ddot{x} = 2x\dot{x} = 2x(x^2 - 1)$$

Verifichiamo che vale una proprietà ragionevole, ovvero che $\ddot{x} < 0$ per $t < 0$, $\ddot{x} > 0$ per $t > 0$ e $\ddot{x} = 0$ per $t = 0$. In particolare in prossimità di 0 si ha un punto di flesso. Potremmo chiederci se è analitica, o se addirittura è una serie di potenze. Per verificarlo calcoliamo tutte le derivate in 0. Dalla disparità sappiamo già che le derivate $(2k)$ -esime in 0 ci devono venire nulle. Supponiamo $x(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i t^i$ con $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0$ e $a_1 = -1$. Troviamo la ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -1 \\ na_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i} \quad \text{per } n \geq 2 \end{cases}$$

Che chiaramente ha soluzione e che ragionevolmente dà un raggio di convergenza non nullo, da cui per unicità la soluzione $x(t)$ è analitica in un intorno di 0. Scriviamo un po' di termini otteniamo

$$a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{2}{15}, \dots$$

ovvero $x(t) = -t + \frac{t^3}{3} - \frac{2t^5}{15} + \dots$. Ultima osservazione, ma non per importanza: in questo caso possiamo scrivere esplicitamente la soluzione dell'equazione. Difatti abbiamo che $\int_0^{x(t)} \frac{1}{z^2-1} dz = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{x(t)} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} dz = \log\left(\frac{1-x(t)}{1+x(t)}\right)$ da cui

$$\frac{1-x(t)}{1+x(t)} = e^t$$

$$x(t) = \frac{1-e^t}{1+e^t} = -\tanh(t)$$

e in effetti non ci vuole molto a verificare che tutto quello che abbiamo detto con considerazioni astratte è vero per la tangente iperbolica.

4.4 Equazioni differenziali autonome

Consideriamo a questo punto un'equazione differenziale del tipo

$$\dot{x} = f(x)$$

dove si cerca una funzione $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e di conseguenza diciamo che f è una funzione continua da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n , e supponiamo che ci sia unicità delle soluzioni. La prima osservazione da fare è non c'è una dipendenza esplicita dal tempo, se non nella misura in cui la funzione che stiamo cercando dipende dal tempo e basta. Cioè, ci aspettiamo che se mettiamo la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ o se mettiamo la condizione $x(t_1) = x_0$ la traiettoria della particella nello spazio non cambierà. Detto più intuitivamente, se questa è l'equazione che esprime il moto di una particella quando la mettiamo in x_0 nell'istante t_0 , ci aspettiamo che ripetendo l'esperimento nell'istante t_1 otterremo gli stessi identici risultati sperimentali.

Teorema 4.4. *Consideriamo i problemi di Cauchy con esistenza e unicità*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(t_1) = x_0 \end{cases}$$

con soluzioni x, y rispettivamente. Allora $y(t) = x(t + t_0 - t_1)$, ovvero si ottengono l'una dall'altra per traslazione sull'asse dei tempi.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che la funzione $h(t) = x(t + t_0 - t_1)$ risolve lo stesso problema di Cauchy di y e si conclude per unicità. Innanzitutto h è una funzione derivabile e definita in un intorno di t_1 . Inoltre

$$\dot{h}(t) = \dot{x}(t + t_0 - t_1) = f(x(t + t_0 - t_1)) = f(h(t))$$

$$h(t_1) = x(t_0) = x_0$$

Quindi $h(t) = y(t)$ nell'intersezione dei loro domini, come voluto. \square

Questo fatto può essere considerato banale, eppure rende l'interpretazione di questi sistemi più semplice. Vediamo un'applicazione di questo risultato.

Esempio 4.1. Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = x$$

con $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ e dato iniziale $x(t_0) = x_0$. Innanzitutto che c'è esistenza globale e unicità delle soluzioni in quanto l'identità è 1-Lipschitz. Consideriamo il problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = 1$, e diciamo che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ne

è la soluzione. Per linearità dell'equazione differenziale abbiamo che allora $x_0 f(t)$ è soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = x_0$. Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione dell'equazione differenziale con dato iniziale $g(t_0) = 1$. Siccome il sistema è autonomo allora una soluzione è data da

$$g(t) = f(t - t_0)$$

Quindi $g(0) = f(-t_0)$ e di conseguenza $g(t) = f(-t_0)f(t)$. Ne segue che

$$f(t - t_0) = f(t)f(-t_0)$$

Come sappiamo la funzione f non è altro che l'esponenziale reale, ovvero abbiamo dimostrato che $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Si noti inoltre che per quanto visto sulle equazioni a variabili separabili abbiamo che \exp è strettamente crescente, tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$ e tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre dall'equazione differenziale possiamo claimare la sua espansione in serie: difatti in 0 tutte le derivate sono 1, da cui ci possiamo aspettare che

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

perlomeno in un intorno dell'origine. Tuttavia la serie di potenze scritta sopra converge per tutti i reali e i coefficienti di x^n soddisfano le ricorrenze giuste, da cui effettivamente l'esponenziale è globalmente espresso dalla serie di sopra. A questo punto la verifica che abbiamo fatto sopra astrattamente si riduce al conto

$$\exp(a + b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a + b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k \cdot b^{n-k}}{k!(n-k)!} = \exp(a)\exp(b)$$

4.5 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Vediamo ora un'importante sottoclasse di equazioni differenziali, che sono le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Consideriamo l'equazione

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x^{(1)} + a_0x = f(t)$$

con $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Con il trucco del passaggio ad un'equazione al primo ordine si ottiene che siamo in regime di esistenza globale e unicità delle soluzioni (date le condizioni iniziali). Inoltre l'equazione è *lineare non omogenea*, da cui le soluzioni dell'equazione si ottengono sommando ad una soluzione particolare l'insieme delle soluzioni di

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x^{(1)} + a_0x = 0$$

Notiamo che queste funzioni sono C^∞ , quindi ha senso derivare la x un numero arbitrario di volte. Sia

$$X = \{x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ è soluzione dell'equazione lineare omogenea}\}$$

L'insieme X è chiuso per somma e prodotto per scalare, in quanto l'equazione in partenza è lineare. Si dice che è uno spazio vettoriale: del resto l'unicità ci dice che ogni soluzione è identificata dalle sue condizioni iniziali e che alla somma di soluzioni corrisponde la somma delle condizioni iniziali e viceversa, e lo stesso per i prodotti per scalari. In breve $X \simeq \mathbb{R}^n$. Sia D l'operatore di derivazione sulle funzioni C^∞ e I l'applicazione identica. Allora lo spazio X è l'insieme delle funzioni per cui

$$(D^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k)(x) = 0$$

dove con 0 intendiamo la funzione identicamente nulla, che è chiaramente una soluzione. L'osservazione cruciale è che poiché l'operatore di derivazione è lineare allora la composizione di "polinomi" nell'operatore di derivazione coincide con l'usuale prodotto di polinomi, che è commutativo. Mostriamo a questo punto che lo spazio X è chiuso per l'operatore di derivazione, ovvero che se X è soluzione allora anche $\dot{x} = Dx$ è soluzione. Infatti

$$(D^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k)D(x) = D(D^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k)(x) = D(0) = 0$$

Del resto, sarebbe bastato derivare una volta l'equazione in partenza per rendersene conto... Chiamiamo ora $X_{\mathbb{C}}$ l'insieme delle funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{C} che sono soluzioni dell'equazione differenziale e consideriamo come D sempre l'operatore di derivazione. Notiamo che x, y sono soluzioni reali se e solo se $x + iy$ sono soluzioni complesse e viceversa, da cui

$$X_{\mathbb{C}} = X + iX$$

Inoltre tutte le osservazioni fatte su D e i polinomi rimangono invariate. Come sappiamo tutti i polinomi in \mathbb{C} si fattorizzano completamente, da cui otteniamo che

$$D^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = (D - \lambda_1 I)^{\alpha_1} \cdots (D - \lambda_j I)^{\alpha_j} = (D - \lambda_l I)^{\alpha_l} p_l(D)$$

per ogni $1 \leq l \leq j$. A questo punto notiamo che se x è soluzione allora $p_l(D)(x)$ è soluzione di

$$(D - \lambda_l I)^{\alpha_l} y = 0$$

oltre che dell'equazione di partenza ovviamente. Sia ora Y_l la mappa sulle funzioni C^∞ che alla funzione x associa $e^{\lambda_l t} x$ e verifichiamo che $Y_l^{-1}(D - \lambda_l I)Y_l = D$. Difatti

$$\begin{aligned} Y_l^{-1}(D - \lambda_l I)Y_l(y) &= Y_l^{-1}(D - \lambda_l I)(e^{\lambda_l t} y) = Y_l^{-1}(\lambda_l e^{\lambda_l t} y + e^{\lambda_l t} \dot{y} - \lambda_l e^{\lambda_l t} y) = \\ &= Y_l^{-1}(e^{\lambda_l t} \dot{y}) = \dot{y} = Dy \end{aligned}$$

Quindi per ogni x abbiamo che $z = p_l(D)x$ è tale che

$$Y_l D^{\alpha_l} Y_l^{-1}(z) = 0$$

ovvero $Y_l^{-1}z$ è un polinomio di grado strettamente minore di α_l . Quindi

$$z = e^{\lambda_l t} q(t)$$

con $\deg q(t) \in \{0, 1, \dots, \alpha_l - 1\}$. Siccome i polinomi $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$ non hanno globalmente fattori irriducibili in comune allora per un noto teorema di matematica esistono per un noto teorema di matematica (Teorema di Bézout) esisteranno dei polinomi $a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)$ per cui

$$a_1(x)p_1(x) + \dots + a_k(x)p_k(x) = 1$$

che in termini di D significa

$$a_1(D)p_1(D) + \dots + a_k(D)p_k(D) = I$$

da cui

$$[a_1(D)p_1(D) + \dots + a_k(D)p_k(D)](x) = x$$

A questo punto si tratta di notare che questo ci dice che x è somma di soluzioni del tipo $t^m e^{\lambda_s t}$ con $0 \leq m < \alpha_s$. Invece una funzione di questo tipo è chiaramente soluzione, i che caratterizza tutte e sole le funzioni che risolvono globalmente l'equazione differenziale in \mathbb{C} . In \mathbb{R} le soluzioni saranno parti reali e immaginarie delle soluzioni trovate, ovvero per le radici complesse abbiamo polinomi per seni e coseni. Questo risolve il problema della parte omogenea dell'equazione di partenza. Per la soluzione particolare la tecnica spesso più efficace è claimarla, sebbene c'è un metodo, detto metodo della variazione delle costanti, che ne fornisce sempre almeno una.

4.6 Integrali primi

L'ultimo argomento che vediamo sono gli integrali primi, di cui però discuteremo solo con un esempio, che però sarà molto esplicativo. Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -x$$

È chiaro che con tutto quello che abbiamo visto sappiamo dire esattamente chi sono le soluzioni. Proviamo a dare però un'interpretazione geometrica all'equazione differenziale vedendola sullo spazio delle fasi spazio-velocità. Sappiamo che

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x \end{cases}$$

Immaginiamo di avere una particella che si muove nello spazio delle fasi: la sua orbita dovrà essere tangente al campo di vettori $(v, -x)$ in ogni suo punto. Se facciamo un disegno nel piano, è chiaro che le orbite saranno delle circonferenze, in quanto ci aspettiamo che stiano sulle circonferenze che però vengono percorse con velocità costante. Il fatto che le orbite siano circonferenze ci dice che

$$\dot{x}^2 + x^2 = R^2$$

è una costante del moto. Per vedere questo basta notare che la funzione $F(x, v) = x^2 + v^2$ ha gradiente $2(x, v)$, che in ogni punto è ortogonale al vettore $(v, -x)$. Per la chain rule, se $\gamma(t) = (x(t), v(t))$ è una soluzione allora $F(\gamma(t))' = 2(x(t), v(t)) \cdot (v(t), -x(t)) = 0$ e quindi è una costante. Si dice in tal caso che l'espressione trovata è un integrale primo del moto, e in effetti corrisponde alla conservazione dell'energia meccanica. Dal fatto che l'orbita viene percorsa con velocità costante ricaviamo che

$$(x(t), v(t)) = (R \cos(t + \phi_0), R \sin(t + \phi_0))$$

che è proprio la soluzione che conosciamo. Se avessimo avuto l'equazione

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

con il cambio di variabile $t' = \omega t$, ponendo $y(t') = x(t'/\omega) = x(t)$ ricaviamo

$$\ddot{y} = -y$$

La soluzione è dunque $y(t') = R \cos(t' + \phi_0) = R \cos(\omega t + \phi_0)$, mentre la quantità conservata è

$$\dot{y}^2 + y^2 = \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} + x^2 = R^2$$

che implica la conservazione di $\dot{x}^2 + \omega^2 x^2$, che è nuovamente equivalente alla conservazione dell'energia meccanica.

Un'ultima cosa riguarda l'importanza degli integrali primi quando lo spazio delle fasi spazio-velocità è due dimensionale: in tal caso in molti contesti la conservazione dell'energia permette di ottenere che l'orbita nello spazio delle fasi è limitata. In tal caso per un noto teorema sui sistemi dinamici

l'insieme dei punti a cui l'orbita si avvicina infinite volte nel tempo o è un punto di equilibrio o è un'orbita periodica. Questo *generalmente* (ma non è necessariamente vero) permette di concludere che o il punto raggiunge in tempo infinito un equilibrio o esso stesso dà un'orbita periodica.

5 Appendice

5.1 Indipendenza della divergenza dal sistema di coordinate

In questa sezione verificheremo esplicitamente che la divergenza di un campo vettoriale $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è indipendente dal sistema di coordinate quando questo è differenziabile. Dalla differenziabilità di F sappiamo che

$$\begin{pmatrix} F_x(\mathbf{r} + h) \\ F_y(\mathbf{r} + h) \\ F_z(\mathbf{r} + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(\mathbf{r}) \\ F_y(\mathbf{r}) \\ F_z(\mathbf{r}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_x(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial y} F_x(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial z} F_x(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial y} F_y(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial z} F_y(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_z(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial y} F_z(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial z} F_z(\mathbf{r}) \end{pmatrix} h + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

Ora, ci sono essenzialmente due modi per cambiare sistema di riferimento: possiamo ruotare gli assi o cambiare origine (o entrambi). Di questi, ci aspettiamo che i problemi siano legati al ruotare gli assi, che in termini di componenti è codificato dal moltiplicare i vettori per una matrice di rotazione S . Detto meglio, nel nuovo sistema di riferimento il vettore \mathbf{r} è identificato da $\mathbf{r}' = S\mathbf{r}$ e il campo di forze sarà codificato da una funzione W tale che

$$W(\mathbf{r}') = SF(\mathbf{r}) = SF(S^{-1}\mathbf{r}')$$

Conseguentemente si avrà che

$$\begin{aligned} SF(S^{-1}(\mathbf{r}' + \mathbf{h}')) &= SF(S^{-1}\mathbf{r}' + S^{-1}\mathbf{h}') = \\ &= SF(S^{-1}\mathbf{r}') + S \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_x(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial y} F_x(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial z} F_x(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial y} F_y(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial z} F_y(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_z(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial y} F_z(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial z} F_z(\mathbf{r}) \end{pmatrix} S^{-1}\mathbf{h}' + o(h')_{h' \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Conseguentemente $\nabla \cdot W(\mathbf{r}')$ è la somma degli elementi diagonali della matrice $J_W = SJ_V S^{-1}$. Questa si chiama traccia, ed è un fatto noto che se A è una matrice allora per ogni matrice invertibile M vale che $\text{tr } A = \text{tr } MAM^{-1}$ (si può dimostrare a mano, e se proprio ci tenete fatelo per esercizio; tuttavia ci sono delle ragioni profonde di algebra lineare per cui è vero). Questo conclude che effettivamente la divergenza di un campo di vettori non dipende dal sistema di riferimento in cui ci mettiamo.

6 Esercizi

Come esercizi si ripresentano quelli dell'anno scorso.

6.1 Legenda

Il simbolo ★ indica il livello di difficoltà. Il simbolo ☆ indica quanto ci sembra utile il problema.

6.2 Basic

- ☆☆☆ *Esercizio Zero* Dato un triangolo con due lati lunghi a e b , e un angolo compreso di θ , trovare la lunghezza del lato opposto.
- ☆ Quanto vale la superficie laterale di una sfera di raggio R , compresa tra le altezze h e $h + dh$ (con $-R \leq h < R$)?
- ☆☆☆ La derivata logaritmica di $f(x)$ è definita come $\frac{d}{dx} \ln(f(x))$. Trovare la derivata logaritmica di x^n e di e^x (spesso è più facile calcolare la derivata logaritmica invece che la derivata classica). Calcolare la derivata logaritmica di $\frac{e^x \arctan(x) \sin(x)}{x^4 \ln(x)}$. Da essa ricavare la derivata classica.
- ☆ Calcola la derivata di x^x nei seguenti due modi: $x^x = e^{x \ln(x)}$ oppure $x^x = f(x, x)$ dove $f(x, y) = x^y$ (derivata totale di una funzione in due variabili).
- Dimostrare che $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ è il volume del parallelepipedo tridimensionale i cui lati sono i tre vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} . Capire a che cosa è associato il segno di questa espressione. Accorgersi ora che $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
- Verificare se la formula $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ fornisce risposte corrette in alcuni casi banali. Solo dopo aver fatto questo, dimostrarla per componenti (questa formula è chiamata “bac meno cab”).
- ☆☆☆ Se \mathbf{a}, \mathbf{b} sono funzioni del tempo, calcolate la derivata di $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (potete farlo in più modi: se volete anche per componenti).

6.3 ODE e PDE

- Consideriamo l'ODE di un oscillatore forzato con forzante x^5 , ovvero:

$$\omega_0^2 y + \ddot{y} = \alpha x^5$$

- (i) Trovare la soluzione dell'omogenea associata (ovvero l'equazione dello stesso problema senza la forzante).
- (ii) Per trovare la soluzione particolare, scrivete il lato sinistro come $(\omega_0^2 + D^2)y$, dove D è l'operatore che deriva rispetto a x . Per esplicitare y , che cosa vi viene spontaneo fare? (*Nota*: d non commuta con le funzioni scalari, perché $Df \neq fD$. Quindi occhio a quello che fate)

9. Usare gli stessi metodi del problema precedente con l'ODE

$$\omega_0^2 y + \ddot{y} = \alpha \sin(\omega t).$$

Provare lo stesso metodo e vedere che non funziona (*in effetti dovrebbe funzionare se $\omega < \omega_0$*). Trovare la soluzione con $\omega_0 = 2$, $\omega = 2$, $\alpha = 1$. Provare come soluzione un qualche polinomio di grado basso moltiplicato per coseno e seno della frequenza che vi aspettate e vedere se funziona.

10. ☆ Risolvi con una serie di potenze attorno a $x = 0$ l'ODE

$$\ddot{y} + xy = 0.$$

(*Soluzione*: una delle soluzioni è $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4x^6}{6!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7x^9}{9!} + \dots$) (MTP4.20)

11. ☆☆☆ Risolvere l'ODE

$$y\dot{y} = x(4 - y^2)$$

(*Suggerimento*: usare la separazione delle variabili)

- 12. ★ ☆☆☆ Che equazione ha una *Cicloide*? (traiettoria di un punto sul cerchione di una ruota di raggio R) Quale ODE risolve la Cicloide (*Soluzione*: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}$)?
- 13. ★ ☆☆☆ Verifica che l'Equazione delle Onde $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$ ammette come soluzioni le funzioni che si propagano a velocità costante $\pm c$ e le loro combinazioni lineari.

6.4 Volumetti Infinitesimi

- 14. ☆☆☆ *Formule di Pappo* Vediamo i Teoremi di Pappo. Il primo afferma che la superficie di una superficie di rotazione (ottenuta ruotando la figura bidimensionale di contorno lungo l) è uguale alla lunghezza l per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè $2\pi r$, con r distanza del baricentro del contorno dall'asse di rotazione. Il secondo afferma che il volume di un volume di rotazione (ottenuto ruotando la figura bidimensionale di area S) è uguale all'area S per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè $2\pi r$, con r raggio del baricentro della superficie dall'asse di rotazione.

- (i) Dire perché i due teoremi sono veri, pensando a quale superficie è generata dalla rotazione di un segmento dl e a quale volume è generato dalla rotazione di una superficie dS
 - (ii) Trovare superficie e volume di un toro
 - (iii) Trovare il volume di un toro a sezione rettangolare.
 - (iv) Calcolarne la resistenza elettrica data una resistività ρ costante.
15. ★★ ☆☆☆ Trova la formula del raggio di curvatura nel punto (x_0, y_0) della funzione $y = f(x)$ in funzione di y, \dot{y}, \ddot{y} . (Suggerimento: usare gli infinitesimi)
16. ★ ☆☆☆ Il *momento d'inerzia* è definito come $I_0 = \int \rho(\mathbf{r})r^2 d^3r$ dove \mathbf{r} è la distanza dall'asse attorno a cui avviene la rotazione. Calcolare il momento d'inerzia di qualunque cosa. Esempi: sfera, guscio sferico, lastra rettangolare di spessore trascurabile, parallelepipedo a basi rettangolari, asta sottile rispetto al centro, asta sottile rispetto a un estremo, cono rispetto all'asse, insieme di Cantor.

6.5 Ordini e Limiti

17. ☆☆☆ Data $y^5 - y = x$ e $y(0) = 0$, calcolare $y(x)$ fino al quinto ordine non nullo. (*Soluzione:* $y = -x - x^5 + 5x^9 - 15x^{13} + O(x^{17})$)
18. ☆☆☆ Calcolare al sesto ordine $e^{x^2+\alpha x}$ in x .
19. ☆☆☆ Calcolare al sesto ordine $e^{x^2+\alpha x}$ in α .
20. ☆☆☆ Calcolare al second'ordine $\frac{1}{\sqrt{1-2x \cos \theta + x^2}}$ in x .
21. ☆☆☆ Trovare l'espansione al quint'ordine di $\tan x$. (*Soluzione:* $\tan x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 + O(x^9)$)
22. ☆☆☆ Calcolare se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \ln(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}}$$

23. ☆☆☆ Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x})$ (MTP2.15)
24. ☆☆☆ Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{x} + \frac{1}{1-\sqrt{1+x}})$ (MTP2.16)
25. ☆☆☆ Trovare l'espansione in Taylor dell'arcoseno, sapendo quello della sua derivata.

26. ☆☆☆ L'espressione dell'entropia nell'oscillatore armonico quantistico è $S = k\left(\frac{x}{e^x - 1} - \log(1 - e^{-x})\right)$, dove k è la costante di Boltzmann e $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$. Calcolare ai primi ordini il valore dell'entropia nei limiti di temperatura alta e bassa. Poiché alta e bassa non vuol dire niente, si intende alta e bassa rispetto a cosa, secondo voi?
27. ☆☆☆ Se $1 \gg \alpha \gg \beta$, ha più senso approssimare $1 + \alpha + \beta$ al primo ordine in α o al primo ordine in β ?

6.6 Fisica

28. ☆☆☆ Ad una certa ora del mattino inizia a nevicare, e a mezzogiorno uno spalaneve parte per pulire le strade. La neve continua a cadere con intensità costante. Si sa che la velocità con cui procede lo spazzaneve è inversamente proporzionale all'altezza della neve. Nelle prime due ore di lavoro lo spazzaneve riesce a pulire 4 km di strada. Nelle due ore successive invece se ne liberano solo 2 km. A che ora ha iniziato a nevicare? (C3.14)
29. ★★★ Ho un campo elettrico \mathbf{E} e un campo magnetico \mathbf{B} ortogonali. Una particella di carica q parte da ferma e su di essa agisce la forza elettrica $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ e la forza di Lorentz $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Che forma assume la traiettoria? (*Soluzione:* è una Cicloide, basta saper risolvere la ODE $\ddot{y} = -y + c$)
30. ☆☆☆ Una corda lunga l di massa m è distesa orizzontalmente su un tavolo eccetto per l'estremità che pende verticalmente per una lunghezza x_0 . In presenza di gravità, come evolve il sistema? (C5.17)
31. Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica k) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0$ s in modo tale che la massa si muova di moto uniforme? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto. (C5.18)
32. Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica M) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t^2$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0$ s in modo tale che la massa si muova di moto uniformemente accelerato? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto. (C5.19)
33. ★ Un punto materiale si muove su una guida parabolica di equazione $y = -ax^2$. È possibile che il punto si stacchi dalla guida? (*Suggerimento:* usare la formula per il raggio di curvatura (farsela dire se non la si è calcolata) e la conservazione dell'energia).

34. ☆ Esprimere il periodo di un pendolo come integrale. (Suggerimento: scrivere l'equazione della conservazione dell'Energia, esplicitare dt , integrare dt)
35. Un proiettile di massa m viene lanciato da terra con una velocità iniziale di modulo v_0 che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. Oltre a un campo di gravità costante è presente una forza di attrito viscoso $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$. Trovare l'equazione esplicita della traiettoria, e discutere il limite nel quale si può considerare "piccolo" l'attrito, dicendo in modo preciso che cosa si intende con questo. (C5.128)
36. ★ ☆ L'equipaggio di un razzo inizialmente fermo vuole aumentare la propria velocità espellendo una massa ηm di gas. La velocità del gas al momento dell'emissione relativa al razzo è sempre $-v_0$. La massa iniziale di quest'ultimo è m e chiaramente $0 \leq \eta < 1$. Indicheremo con $\mu(t)$ la massa espulsa al tempo t . Calcolare $\mu(t)$ nei due casi seguenti:
- (i) tutta la massa viene espulsa istantaneamente a $t = 0$ s;
 - (ii) la massa espulsa per unità di tempo è costante, e viene espulsa tutta in un tempo τ .
- Dette v_f^1 e v_f^2 le velocità finali del razzo nel primo e nel secondo caso, stabilire se è vero che $\lim_{\tau \rightarrow 0} v_f^{(1)} = v_f^{(2)}$. (C5.133)
37. ★ ☆☆☆ Consideriamo un oscillatore armonico forzato, senza attrito, con una forzante $F = F_0 \cos(\omega t)$, e sia ω_0 la frequenza naturale dell'oscillatore. Come ci si aspetta che sia la soluzione, qualitativamente? Claimare la soluzione e verificare che soddisfa l'equazione differenziale.
38. ★★ ☆☆☆ Una *molla massiva* può essere pensata come tante masse infinitesime separate da molle infinitesime identiche. Indichiamo con x una coordinata che varia da 0 a 1 e che conta la percentuale di masse infinitesime che distano da un capo della corda. Se la molla massiva viene appesa in verticale al capo con $x = 0$, trovare:
- (i) la tensione in funzione di x .
 - (ii) l'altezza $h(x)$ in funzione della coordinata x
 - (iii) l'allungamento totale della molla e la sua lunghezza. (C5.139)
39. Una curva piana senza attrito ha la forma di una funzione i cui estremi sono alla stessa altezza. Una catena di densità lineare uniforme viene adagiata sulla curva da un estremo all'altro. Mostrare, considerando la forza netta di gravità sulla curva, che la catena non si muove. (M1.3)

40. ★ ☆☆☆ Data un'asta semi-infinita (cioè una semiretta) con densità lineare $\lambda(x)$ che dipende dalla posizione, calcolare $\lambda(x)$ in modo che abbia la seguente proprietà: se l'asta è tagliata in una posizione arbitraria x_0 , allora la parte semi-infinita rimasta sarà in equilibrio se bilanciata su un perno a distanza fissata l dall'estremo (cioè nel punto a coordinata $x_0 + l$). (M1.18)
41. ★★ ☆☆☆ Dire esplicitamente quali integrali bisogna fare per risolvere l'equazione $F = ma$ nei tre casi in cui F dipende solo da: (i) x , (ii) v , (iii) t . (M2)
42. ★ ☆☆☆ Una palla viene lanciata in aria in verticale. L'attrito è $F = -\gamma v$. Trovare velocità e altezza in funzione del tempo. (M2) (Questo è bello perché non ci si deve confondere quando si trova il logaritmo di una quantità dimensionale...)
43. ★ Un motociclista vuole percorrere un cerchio di raggio R . Il coefficiente di attrito tra le ruote e il suolo è μ . Il motociclista parte da fermo. Qual è la minima distanza che il motociclista deve percorrere per ottenere la massima velocità possibile? (M2.E12)
44. ☆☆☆ Un razzo di massa m e a velocità v ha ugelli con velocità di scarico pari a u . Trovare l'equazione del razzo che mette in relazione la massa di carburante consumata e il Δv . Trovare la massa corrispondente a $\Delta v = 3u$.
45. ★ ☆☆☆ *Strato di ghiaccio su un lago* Supponendo che la temperatura dell'aria sulla superficie di un lago ghiacciato rimanga costantemente pari a $-5,2$ gradi centigradi per 60 giorni, si formuli un modello per descrivere la rapidità con cui cresce lo spessore del ghiaccio a partire dal suo valore iniziale $h_0 = 25$ cm. Sapendo, in particolare, che dopo 12 giorni si misura uno spessore di 37 cm e dopo 21 giorni uno spessore di 44 cm, si stimi lo spessore h_f raggiunto dal ghiaccio dopo 60 giorni. (SNS 2015 1).
46. ☆☆☆ La resistenza elettrica di un resistore a due piastre vicine è $R = \frac{l}{S\sigma}$ dove σ è la conducibilità. La capacità di un condensatore a due piastre vicine è $C = \frac{S\epsilon}{l}$ dove ϵ è la costante dielettrica del materiale. Se due conduttori con carica $+Q$ e $-Q$ rispettivamente sono immersi in un materiale con conducibilità σ e costante dielettrica ϵ , trovare $Q(t)$ sul primo conduttore. Cosa si può dire sul prodotto RC indipendentemente dalla forma del conduttore?
47. ☆☆☆ Calcolare l'energia potenziale posseduta da una corda di lunghezza l e massa per unità di lunghezza ρ appesa per un estremo al soffitto.
48. ★★★ ☆☆☆ Calcolare il tempo impiegato da un'onda a propagarsi sulla corda dell'esercizio precedente, partendo dall'estremo più alto a quello più basso.

49. ★ ☆☆☆ Un corpo è soggetto a una forza di attrito che in modulo è pari a $F = bv^n$, dove v è la velocità e b un'opportuna costante. Esso viene lanciato con una velocità iniziale pari a v_0 ; trova, **attraverso l'analisi dimensionale**, una stima del tempo impiegato a fermarsi e della distanza che ha percorso dal punto di lancio. Il risultato ha senso? Rispondere alle domande precedenti *per bene* (trovando l'equazione del moto) e poi si confrontino i risultati.
50. ★ ☆☆☆ *Molla massiva*. Si vuole trattare approssimativamente l'effetto della massa non nulla μ di una molla sulla frequenza di oscillazione. Per fare questo si scrive l'energia del sistema supponendo che la molla si muova nello stesso modo in cui si muoverebbe se la sua massa fosse nulla. Usando tale metodo si determini la frequenza di oscillazione del sistema dato dal soffitto a cui è appesa la molla alla quale è appesa un oggetto di massa M , supponendo la molla di lunghezza a riposo nulla (C5.43).
51. ★★★ ☆ Ricavare l'equazione del telegrafista. Si schematizzi la seguente situazione: vi sono due cavi paralleli molto lunghi. A ogni passettino dx , vi è una resistenza $r dx$ sul primo cavo, un'induttanza $l dx$ sul primo cavo, una capacità $c dx$ tra i due cavi e, in parallelo a questa, una resistenza tra i due cavi di conduttanza $g dx$ (la conduttanza è la grandezza fisica reciproca della resistenza. Perché in questo caso si usa la conduttanza secondo voi?). Ricavare l'ODE soddisfatta dalla corrente e quella soddisfatta dalla tensione.

6.7 Derivate e Integrali

52. Calcolare $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. (*Suggerimento*: dove avete già visto questa espressione?)
53. ☆☆☆ Usare l'integrazione per parti per dimostrare l'utile formula ricorsiva

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{nx} \theta \, d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{(n-2)x} \theta \, d\theta.$$

Dimostrare che funziona anche con i seni e anche da 0 a π . Calcolare il valore per $n = 8$. Calcolare poi $\int_0^{\pi/2} \cos(5\theta) \, d\theta$. (*Suggerimento*: usare de Moivre)

54. ☆☆☆ Usare l'integrazione per parti per dimostrare la formula

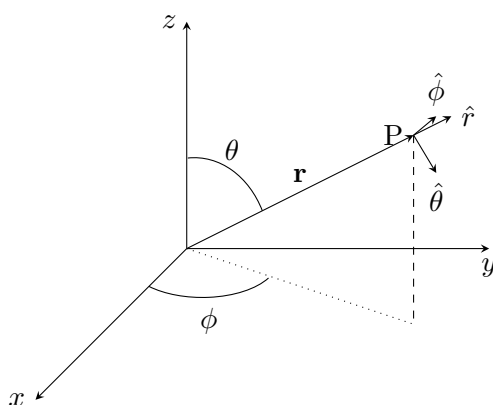
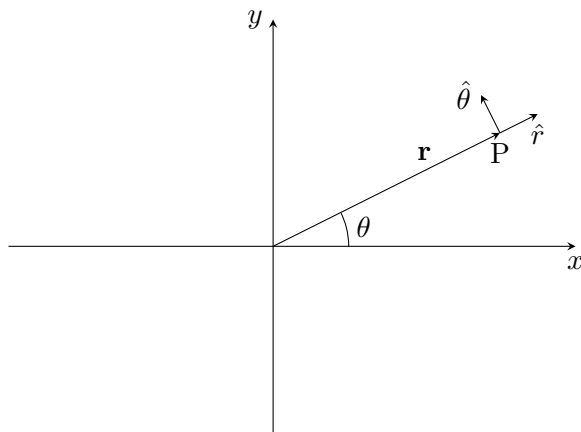
$$x! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, dt$$

Tale espressione è la *funzione Gamma di Eulero*. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$. (*Suggerimento*: ricondursi a $(-1/2)!$ con un cambio di variabili)

55. ★ ☆☆☆ Ridimostrare il valore della funzione Gamma di Eulero usando l'integrazione parametrica: per calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ calcolo $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x dt$ e derivo per α trovando così una formula ricorsiva.
56. ☆☆☆ Ricalcolare $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ in questo modo: calcolare I^2 (l'integrale di una gaussiana in due dimensioni) e passare in coordinate polari.
57. ☆☆☆ Scrivere $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ in funzione di $t = \tan(\frac{\alpha}{2})$. Questa è la sostituzione che permette di risolvere molti integrali trigonometrici.
58. ★★ ☆☆☆ A volte, invece, serve trasformare integrali polinomiali o con radici quadrate in integrali trigonometrici in seni e coseni (o seni e coseni iperbolici). Ad esempio, cosa vi ricordano i seguenti integrali?, quanto valgono?
- (i) $\int \frac{du}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$
- (ii) $\int \frac{du}{\sqrt{(u^2-a^2)}}$
- (iii) $\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+a^2)}}$
- (iv) $\int \frac{du}{\sqrt{(-u^2-a^2)}}$
- (v) $\int \frac{du}{a^2+u^2}$
- (vi) $\int \frac{du}{a^2-u^2}$
59. ★ ☆☆☆ Dimostrare il seguente lemma, molto utile in termodinamica: data una qualche relazione tra le quantità x , y e z (ad esempio, del tipo $f(x, y, z) = 0$), si ha

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$$

6.8 Calcolo sui Vettori, per Meccanica



60. ★ ☆ Scrivere i versori delle *coordinate polari* \hat{r} e $\hat{\theta}$ e trovare $\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{dt}$ e $\dot{\hat{\theta}} = \frac{d\hat{\theta}}{dt}$. Dato un vettore generico espresso in coordinate radiali, $\mathbf{r} = r\hat{r}$, calcolare $\dot{\mathbf{r}}$ e $\ddot{\mathbf{r}}$. Fare lo stesso in *coordinate sferiche* (*Suggerimento*: le derivate agiscono sia sulle componenti sia sui versori!).
61. ★ ☆ Se un sistema di riferimenti di versori \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} ruota con velocità angolare ω , quanto vale la derivata temporale dei versori? E di un vettore generico? (*Suggerimento*: guardare lo spostamento infinitesimo).
62. ★ ☆☆☆ Usare quanto appena scoperto per ricalcolare le derivate dei versori in polari. Usarlo anche per le sferiche: una rotazione che cambia ϕ a quale vettore ω corrisponde? A che raggio corrisponde? Qual è l'accelerazione centripeta corrispondente?

6.9 Avanzati

63. ★☆☆ La *catenaria* è la funzione che rappresenta la disposizione di una corda massiva inestensibile (con $\lambda = dm/dx$ costante) i cui due capi sono appesi a due muri, ad altezze non necessariamente uguali. Usando gli infinitesimi, trovare l'equazione della catenaria (*Suggerimento*: guardare la forza che agisce su un piccolo tratto infinitesimo. Una delle componenti della forza è costante su tutta la corda.)
64. ★★ *Operatori (I parte)*. Immaginiamo che α e β siano due operatori, cioè “numeri” che non commutano. Essi possono essere moltiplicati con scalari e restano operatori. Essi sono indipendenti da t a meno che non sia indicato esplicitamente. Risolvere i seguenti quesiti:
- (i) $(\alpha + \beta)^2$.
 - (ii) Dire se è vero che $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$ e perché.
 - (iii) Dire se la derivata di un operatore è un operatore (sì, dovreste saperlo).
 - (iv) Calcolare $\frac{d}{dt}(\alpha(t)\beta(t))$ usando gli infinitesimi.
65. ★★★ *Operatori (II parte)*.
- (v) Calcolare $\frac{d}{dt}e^{\alpha t}$ usando le serie infinite.
 - (vi) Calcolare $\frac{d}{dt}e^{\alpha(t)}$ come serie infinita.
 - (vii) Rifare il conto usando la definizione di esponenziale come $e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ e vedere se si trova lo stesso risultato.
 - (viii) Calcolare $e^{\alpha t} \beta e^{-\alpha t}$.
 - (ix) Definendo $\hat{\alpha}$ come un operatore tale che $\hat{\alpha}\beta = \alpha\beta - \beta\alpha$. Notare che $e^{\alpha t} \beta e^{-\alpha t} = e^{\hat{\alpha} t} \beta$.
 - (x) Provare a rifare il punto (vi) seguendo questo approccio:
- $$\frac{d}{dt}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)} e^{-\alpha(t)} \frac{d}{dt}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)} e^{-\hat{\alpha}(t)} \frac{d}{dt} = \dots$$
- (Soluzione: $\frac{de^{\alpha(t)}}{dt} = e^{\alpha(t)} \frac{1-e^{-\hat{\alpha}(t)}}{\hat{\alpha}(t)} \dot{\alpha}(t)$)
66. ★★☆☆ Si consideri una curva parametrizzata da λ . A ogni punto $(x(\lambda), y(\lambda))$ consideriamo un segmento tangente dello stesso verso di $(\dot{x}(\lambda), \dot{y}(\lambda))$, lungo $l(\lambda)$. Il *Teorema di Mamikon* afferma che l'area spazzata da questo segmento (di cui un estremo è sempre sulla curva) è uguale all'area spazzata dallo stesso segmento, con uguale direzione e verso, ma di cui l'estremo è tenuto fisso. Dire:

- (i) Perché questo teorema è vero guardando i triangolini infinitesimi.
 - (ii) Calcolare l'area dell'anello circolare in cui la tangente alla circonferenza interna interseca la circonferenza esterna in due punti a distanza $2a$
 - (iii) Calcolare l'area sottesa dalla cicloide. (*Soluzione:* $3\pi r^2$)
 - (iv) Un bambino si trova nell'origine $(0, 0)$ e tiene in mano un laccio inestensibile in tensione legato a una macchina giocattolo a $(a, 0)$. Il bambino cammina verso $(0, +\infty)$. L'area spazzata diverge? Se no, quanto vale?
67. ★★ Trovare l'equazione della curva tracciata dal giocattolo nel punto (iv) del problema precedente. Tale curva prende il nome di *Trattrice*. Calcolarne l'area sottesa e verificare se è uguale al valore trovato con i triangolini infinitesimi (*Soluzione:* su wikipedia).

68. ★ ☆☆☆ Definiamo la *Trasformata di Fourier* di $f(x)$ come la seguente funzione in ω :

$$F[f(x)](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt$$

Si noti come da una funzione in x ottengo dunque una funzione in ω , che non dipende più da x . Calcolare:

- (i) $F[e^{i\alpha} f(x)](\omega)$.
 - (ii) $F[\frac{d}{dx} f(x)]$.
 - (iii) $\frac{d}{d\omega} F[f(x)](\omega)$.
 - (iv) La trasformata di Fourier di una funzione che vale 1 nell'intervallo tra -1 e 1 , e 0 fuori da quell'intervallo (*funzione rettangolo*).
69. ☆☆☆ Si consideri $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt$, con $f(x)$ continua e con un integrale finito. Quale ci si aspetta che sia il valore dell'integrale nel limite $\omega \rightarrow +\infty$? Spiegare visivamente.
70. ★ ☆☆☆
- (i) Calcolare $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$ e descrivere qualitativamente cosa succede al grafico della funzione (considerandola come una funzione di x).
 - (ii) Calcolare $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} dx$.
 - (iii) Descrivere qualitativamente cosa succede al grafico di $\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$ quando si manda ϵ a 0.
 - (iv) Calcolare, ragionando visualmente, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} f(x) dx$ dove $f(x)$ è una funzione qualunque (*Nota:* vedere il problema successivo).
71. ☆ Definiamo $\delta(x)$ come una *gaussiana* di area 1 e di ampiezza infinitesima. Ragionando visivamente, capire perché $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

72. ☆ Usando l'integrazione per parti, dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x) dx = -f'(0)$

73. ☆ Più in generale calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)f(x) dx$

74. ★★ Una molla massiva fa piccole oscillazioni in verticale. Considerandola come tante masse infinitesime separate da molle infinitesime identiche, ricavare l'equazione differenziale che descriva l'evoluzione nel tempo di questo sistema (Essa sarà l'*equazione delle onde*).

75. ★★ ☆☆☆ Consideriamo il seguente modello per la *diffusione del calore* in un materiale: lo spazio è una griglia cubica, e ciascun vertice ha una quantità di calore Q . A un passo infinitesimo dt questo calore viene distribuito equamente tra le sei celle adiacenti. Ricavare l'*equazione del calore* (*Suggerimento*: provare prima il caso analogo unidimensionale, con punti equispaziati invece che una griglia cubica. Tra l'altro, ricordate la definizione qualitativa del Laplaciano).

76. ★ ☆☆☆ Sapendo quando vale la Funzione Gamma di Eulero trattata nei problemi precedenti, espanderla al second'ordine attorno al suo punto di massimo (trovatelo!), ottenendo

$$\int_0^{+\infty} e^{-n+n \ln t - \frac{(t-n)^2}{2n}} t^x dt.$$

Riconoscendo l'integrale della *Gaussiana*, trovare l'*approssimazione di Stirling* $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

77. ★★ ☆ Volume dell'*ipersfera n-dimensionale*. Denotando sempre con

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

scrivere I^n e mettersi in coordinate polari (ovvero distinguere l'integrale sul raggio dall'integrale sulle superfici $(n-1)$ -dimensionali delle ipersfere n -dimensionali). In questo modo è possibile trovare quanto vale la superficie $(n-1)$ -dimensionale, e quindi quanto vale il volume n -dimensionale dell'ipersfera. (*Soluzione*: $V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{(\frac{n}{2})!}$)

78. ★★★ La *funzione Beta di Eulero* è definita come

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Dimostrare con un cambio di variabili che è uguale a

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta.$$

Poi, dimostrare che $\frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!} = B(x, y)$. (*Suggerimento:* (i) partire da $(x-1)!$ e $(y-1)!$ espressi come Gamma di Eulero con variabili d'integrazione t e t' , (ii) fare il cambio di variabili da t ad $a = t^2$ e da t' a $b = t'^2$, (iii) considerare l'integrale doppio in a e in b come un integrale sul piano, e passare in coordinate polari)

79. ★ Provatelo a fattorizzare $\sin(x)$ come se fosse un polinomio (dopo tutto sapete dove sono i suoi zeri e sapete che molteplicità hanno). Che problemi ha questa espressione? Cambiatela in modo che ogni fattore vada a 1 quando $x = 0$.

80. ★★★ Dimostrate la formula trovata nel punto precedente lavorando prima con $\sinh(x)$:

(i) Espandere $\sinh(x)$ usando la definizione di esponenziale come $(1 + \frac{x}{N})^N$

(ii) Usare che

$$(a-b)^N = (a-b)(a^2+b^2-2ab\cos(1\cdot\theta)) \dots (a^2+b^2-2ab\cos((N-1)\theta))$$

dove $\theta = \frac{2\pi i}{N}$ ed esprimere quindi $\sinh(x)$ come produttoria (prendete N dispari per poter fare questa cosa).

(iii) In questa produttoria, all'inizio θ è piccolo, mentre alla fine $\theta \approx 1$. Spezzare la sommatoria in una prima parte, dove si approssima il coseno usando che θ è piccolo, e una seconda parte, che *non dipende da* x , e che chiameremo B .

(iv) Dai conti scoprite che viene proprio quello che vi aspettavate, a meno di un altro fattore che non sapete quanto vale ma che non dipende da x . Chiamatelo A .

(v) Dimostrate che $AB = 1$ approssimando la funzione al prim'ordine e imponendo che faccia x .

81. Guardare il terzo ordine dell'espansione di $\sin(x)$ dell'esercizio precedente. Concludere che $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ (*Problema di Basilea*).

7 Problemi

Problema 7.1 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange). Supponi di voler minimizzare una data funzione $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω sufficientemente regolare e g di classe C^1 . Supponi inoltre di avere dei vincoli C^1 , che esprimeremo nella forma compatta $g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 0, \dots, g_k(x, y, z) = 0$ con k numero naturale positivo. Convinciti intuitivamente che se (x_0, y_0, z_0) è localmente un minimo allora $\nabla g(x_0, y_0, z_0), \nabla g_i(x_0, y_0, z_0)$ con $1 \leq i \leq k$ sono linearmente dipendenti.

Suggerimento 7.1. Distingui un po' di casi. Supponi prima che $k = 1$ e dividi in due sottocasi: $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Dai un nome al luogo L dei punti che rispettano il vincolo g_1 e prova a immaginare come sia fatto.

Suggerimento 7.2. Ricordati che il gradiente di una funzione differenziabile è sempre ortogonale alle direzioni di massima stabilità al primo ordine.

Problema 7.2 (Espansioni e simmetrie, parte 1). Sia dato un sistema di riferimento cartesiano con un vertice nell'origine e le facce parallele ai piani xy, xz, yz . Sia dato un potenziale V di classe C^∞ che si annulla lungo le facce del cubo adiacenti all'origine. Qual è il primo termine della sua espansione di Taylor che vi aspettate possa non essere nullo?

Problema 7.3 (Espansioni e simmetrie, parte 2). Supponi di avere una funzione f di periodo 2π che si possa scrivere come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

dove i coefficienti A_n, B_n sono univocamente determinati. Cosa puoi dedurre sull'espansione nei seguenti casi:

- f è pari;
- f è dispari;
- $f(x) = f(x + \frac{2\pi}{3})$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Problema 7.4 (Teorema della media). Data una funzione scalare $V : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo *laplaciano* il seguente operatore

$$\nabla^2 V := \nabla \cdot (\nabla V) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V$$

Sia V una *funzione armonica*, ovvero tale che in ogni punto \mathbf{r} del suo dominio verifichi $\nabla^2 V = 0$. Sia S una superficie sferica di centro \mathbf{x} e raggio R . Si dimostri che

$$\frac{\int_S V(\mathbf{r})dS}{4\pi R^2} = V(\mathbf{x})$$

ovvero il valor medio di una funzione armonica sulla su una superficie sferica coincide con il valore assunto nel centro della stessa.

Problema 7.5 (Non unicità). Sia dato un campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = F(x)\hat{x}$ indipendente dalla variabile temporale. Attraverso degli esperimenti si riscontra che una particella di massa m può avere legge oraria

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\alpha}{m^{\frac{5}{2}}} \cdot (t^5, 0, 0)$$

dove α è un opportuna costante. Che regolarità ti aspetti per la F ? (Continua in ogni punto, derivabile in ogni punto, C^1, \dots) Confronta il tuo claim con la "verità" esplicitando $F(x)$.

Problema 7.6 (Impossibile). Studiare qualitativamente $\dot{x} = t - x^2$.

8 Soluzioni esercizi

1. ☆☆☆ $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$
2. ☆ $2\pi R \partial h$
3. ☆☆☆ n/x ; 1 ; $1 + \frac{1}{(1+x^2) \arctan x} + \cot(x) - \frac{4}{x} - \frac{1}{x \ln x}$. La derivata classica si ottiene moltiplicando per la funzione originaria.
4. ☆ $\frac{\partial}{\partial x} e^{x \ln(x)} = e^{x \ln(x)} (\ln(x) + 1)$;
 $[\frac{\partial}{\partial x} x^y + \frac{\partial}{\partial y} x^y]_{x=y} = [x^y \frac{y}{x} + x^y \ln(x)]_{x=y} = x^x + x^x \ln(x)$
5. $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ha come modulo la superficie della base del parallelepipedo. Chiamando θ l'angolo tra $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ e \mathbf{a} , si vede che si ha $\mathbf{a} \cdot |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \pm a \cos(\theta) |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \pm h |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$, dove $h = a \cos(\theta)$ è l'altezza del parallelepipedo. Quindi si ottiene il volume del parallelepipedo
 Il segno è positivo se a, b, c sono una terna destrorsa (cioè se posso ricavare c da a, b usando la regola della mano destra).
 Ora bisogna accorgersi che le altre equazioni esprimono tutte il volume del parallelepipedo (badando al segno corretto).
6. Il prodotto vettore è un operatore lineare, cioè $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, e $\mathbf{a} \times k\mathbf{b} = k\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ con k un numero reale.
 Si calcoli il prodotto vettore tra i versori \mathbf{x}, \mathbf{y} e \mathbf{z} , che sono i vettori di lunghezza 1 rivolti come gli assi cartesiani.
 Ora, scomponendo i due vettori lungo gli assi, si ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{x} + a_y \mathbf{y} + a_z \mathbf{z}) \times (b_x \mathbf{x} + b_y \mathbf{y} + b_z \mathbf{z}) = \dots = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{z}$, dove si sono usati i prodotti vettoriali tra i vettori rivolti lungo gli assi cartesiani.
 Ora si dimostri che la formula “bac meno cab” è vera se si guarda solo la componente x . Ci si accorda che, ciclando le variabili (cioè mandando x in y , y in z , z in x), la dimostrazione appena fatta vale anche per la componente y e per la componente z .
7. ☆☆☆ La definizione di derivata impone che $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a} + \partial \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} + \partial \mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{b} + \partial \mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{dt}$, dove si è correttamente eliminato l'ultimo termine perché è infinitesimo.
 Il calcolo con il prodotto vettore è uguale, solo che al posto dei prodotti scalari ci sono i prodotti vettori.
 Si notino le cose importanti: (1) la derivata di un vettore è un vettore, perché per fare la derivata bisogna fare una differenza e poi una divisione per un numero, (2) le operazioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale sono lineari, cioè “si comportano bene” con la somma.

8.1 ODE e PDE

8. $\omega_0^2 y + \ddot{y} = 0$ ha come soluzione $y = e^{\pm i\omega_0 t}$, così come visto a lezione. Per trovare y da $(\omega_0^2 + D^2)y = fx^5$ viene spontaneo portare nel lato destro il membro di parentesi, invertito, ottenendo $y = \frac{1}{\omega_0^2 + D^2} fx^5$, che ha senso solo se si interpreta la frazione come una serie di potenze, cioè $\frac{1}{\omega_0^2 + D^2} fx^5 = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{1 + (D/\omega_0)^2} fx^5 = \frac{1}{\omega_0} (1 - (D/\omega_0)^2 + (D/\omega_0)^4 - (D/\omega_0)^6 + \dots) fx^5 = \frac{f}{\omega_0} (x^5 - 20x^3/\omega_0^2 + 120x/\omega_0^4)$ poiché tutti gli altri termini fanno zero. Può sembrare assurdo usare un metodo simile quando D non è un numero, eppure esso diventa un numero dopo essere stato applicato a fx^5 . Inoltre l'approssimazione di $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ funziona solo quando a destra si sommano termini via via sempre più trascurabili: in questo caso D , agendo su fx^5 , diventa in effetti trascurabile (in particolare nullo), quindi la formula è valida. Ciò che fugge ogni possibile dubbio è comunque verificare che la soluzione trovata in effetti sia una soluzione dell'equazione di partenza. La nota era riferita al fatto che quando si porta il termine con D a destra, bisogna tenerlo a destra (affinché la derivata agisca su fx^5), altrimenti non funziona. Il motivo è che quel passaggio si ottiene mettendo, sulla sinistra di ambo i membri, il fattore $\frac{1}{\omega_0^2 + D^2}$, che si semplifica con $\omega_0^2 + D^2$ e che si ritrova quindi sul lato destro, ma a sinistra di fx^5 .
9. L'equazione è $4y + \ddot{y} = \sin(2t)$. Si provi $y = (At + B) \sin(2t) + (Ct + D) \cos(2t)$ (l'unica frequenza che compare nell'equazione è $2!$, quindi mi aspetto che sia anche la frequenza della soluzione!). Poiché posso sommare o sottrarre le soluzioni dell'omogenea associata $4y + \ddot{y} = 0$, ovvero $\sin(2t)$ e $\cos(2t)$, è chiaro che posso porre $B = D = 0$. La domanda è quanto valgono A e C . Provo a inserire la soluzione nell'ODE. Facendo infiniti conti si trova $y = -\frac{1}{4}t \cos(2t)$. A questa soluzione particolare è possibile sommare una soluzione dell'omogenea, e si trovano altre soluzioni. La soluzione più generale è dunque $y = -\frac{1}{4}t \cos(2t) + A \sin(2t) + B \cos(2t)$. Come atteso le costanti arbitrarie sono due.
10. (Soluzione: una delle due soluzioni è $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \star 4x^6}{6!} + \frac{1 \star 4 \star 7x^9}{9!} + \dots$) (MTP4.20)
11. ☆☆☆ $y = \pm \sqrt{4 + ce^{-x^2}}$
12. ★ ☆☆☆ $x(t) = Rt - R \sin t$ e $y(t) = R - R \cos t$. Ricavando $\cos t$ dalla seconda equazione, si calcolano $\sin t$ e t e li si inseriscono nella prima equazione, ottenendo $x = -\sqrt{y(2R - y)} + R \arccos(1 - y/R)$ (Soluzione: $\dot{y} = \frac{2R}{y} - 1$)

13. ★ ☆☆☆ Una funzione che si propaga a velocità costante $\pm c$ si può scrivere come $f(x \mp ct)$, con $f(x)$ funzione arbitraria. La soluzione generale è dunque $Af(x + ct) + Bg(x - ct)$, con f e g funzioni arbitrarie.

8.2 Volumetti Infinitesimi

14. ☆☆☆ *Formule di Pappo* Un segmento ∂l a distanza r dall'asse di rotazione genera un'area $2\pi r \partial l$ (il fatto che non tutto il segmento è alla stessa distanza dall'asse di rotazione genera correzioni di second'ordine, che quindi si trascurano). L'integrale di $r \partial l$ sulla superficie è uguale al valore medio di r per la lunghezza del contorno ($r_{medio} = \int r \partial l / \int \partial l$ per definizione). Allo stesso modo per il volume: una superficie ∂S che giace su un piano che viene fatto ruotare genera una superficie $2\pi r \partial S$, dove r è la distanza di ∂S dall'asse di rotazione. L'integrale è $2\pi r_{medio} S$, dove $r_{medio} = \int r \partial S / \int \partial S$.

Il toro che si ottiene facendo ruotare una circonferenza di raggio r attorno a un asse che dista R dall'origine della circonferenza, ha superficie $4\pi^2 Rr$ e volume $2\pi^2 Rr^2$.

Il toro che si ottiene facendo ruotare un rettangolo di lati a e b attorno a un asse che dista R dal baricentro del toro, ha volume $2\pi abR$.

La resistenza di un toro rettangolare di base b e di altezza h (quest'ultima parallela all'asse di rotazione) è $\frac{2\pi\rho}{h \ln(b/a)}$: è formata da tante fettine di torta messe in serie (ottenute con tagli radiali), ciascuna delle quali è formata da tante resistenze di forma curva messe in parallelo (ottenute con tagli tangenziali), ciascuna delle quali ha resistenza $\rho l/S$, con l e S infinitesimi e che potete calcolarvi dai dati.

15. ★★ ☆☆☆ L'idea è di considerare l'espansione al second'ordine $y(x) = y(0) + x\dot{y}(0) + \frac{1}{2}x^2\ddot{y}(0)$. Ora considero i tre punti di ascisse x , $x + dx$ e $x + ddx$, e li collego con due segmenti, che approssimano la funzione. Posso calcolare ora le equazioni degli assi dei due segmenti, e poi calcolare il punto dove le rette si intersecano. Questo è il centro della circonferenza che, vicino a (x, y) , approssima al meglio la funzione (può anche essere una circonferenza degenere, cioè una retta). Il raggio di curvatura è il raggio di questa circonferenza, che dai conti viene $R = \frac{(1+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{y}|}$.

16. ★ ☆☆☆ La pagina di wikipedia sul Momento d'Inerzia è esauriente. L'insieme di Cantor si può ottenere così: si prenda un segmento lungo l a cui si sottrae il terzo centrale, ottenendo due segmenti uguali lunghi $l/3$. A ciascuno di questi si sottragga il loro terzo centrale, e così via per ogni segmento che si ottiene.

Se si immagina che l'insieme di Cantor abbia massa m , si vede che facendolo ruotare attorno al centro, e immaginando che sia rigido, esso ha momento di inerzia aml^2 , dove a è un numero reale ignoto. Si sa anche che è uguale

al momento d'inerzia di due sbarre decentrate, per cui si può applicare il teorema degli assi paralleli: quindi $aml^2 = 2(a(m/2)(l/3)^2 + (m/2)(l/3)^2)$, da cui si ottiene $a = \frac{1}{8}$.

8.3 Ordini e Limiti

17. ☆☆☆ (Soluzione: $y = -x - x^5 + 5x^9 - 15x^{13} + O(x^{17})$)
18. ☆☆☆ $e^{x^2+\alpha x} = e^{x^2}e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + (1 + \frac{\alpha^2}{2!})x^2 + (\alpha + \frac{\alpha^3}{3!})x^3 + (\frac{1}{2!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!})x^4 + (\frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!})x^5 + (\frac{1}{3!} + \frac{\alpha^2}{2!2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{\alpha^6}{6!})x^6 + o(x^6)$.
19. ☆☆☆ $e^{x^2+\alpha x} = e^{x^2}(1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 x^3 + \frac{1}{4}\alpha^4 x^4 + \frac{1}{5}\alpha^5 x^5 + \frac{1}{6}\alpha^6 x^6 + o(\alpha^6))$
20. ☆☆☆ $\frac{1}{\sqrt{1-2x \cos \theta + x^2}} = 1 + \cos(\theta)x + (\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2})x^2 + o(x^3)$. Bisogna ricordarsi che $(1 + \epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\epsilon^2 + \dots$
21. ☆☆☆ Sapendo che la derivata di $t = \tan(x)$ è uguale a $1 + t^2$, si possono calcolare rapidamente le prime sei derivate della funzione e inserirle nell'espansione in Taylor (nell'espansione in Taylor le derivate vanno valutate in 0, quindi bisogna ricordarsi che $t(0) = \tan(0) = 0$) ($\tan x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 + O(x^9)$)
22. ☆☆☆ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \ln(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}} = -1$
23. ☆☆☆ $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}) = \frac{1}{3}$ (MTP2.15)
24. ☆☆☆ Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{x} + \frac{1}{1-\sqrt{1+x}}) = \frac{1}{2}$ (MTP2.16)
25. ☆☆☆ $\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1}$
26. ☆☆☆ Per T alta e bassa si intende rispettivamente x basso e alto: x è un numero puro, quindi si intende confrontato rispetto a 1, il che è come chiedere che T sia confrontato con $\frac{h\omega}{k}$, che tra l'altro è l'unica altra temperatura nelle equazioni...
Per T alto si ha $S \approx k(1 - \log(x))$.
Per T basso si ha $S \approx k(xe^{-x} + e^{-x})$.
27. ☆☆☆ In entrambi i casi il valore approssimato è $1 + \alpha + \beta$. È vero che in un caso è $(1 + \alpha) + \beta$ e nell'altro è $(1 + \beta) + \alpha$ dando l'idea erronea che α sia piccolo rispetto a β , ma non ha senso lamentarsi per delle parentesi.

8.4 Fisica

28. ☆☆☆ (C3.14)
29. ★★★ Prendiamo $\mathbf{E} = E\hat{x}$ e $\mathbf{B} = B\hat{z}$. L'equazione del moto $m\ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$ diventa il sistema di due equazioni:
 (1) $\ddot{x} = \frac{qE}{m} + \frac{qB}{m}\dot{y}$
 (2) $\ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}$
 Ora è possibile derivare la prima equazione e sostituire a destra \dot{y} con la seconda equazione: $\ddot{x} = -(\frac{qB}{m})^2\dot{x}$, da cui $\dot{x} = A \sin(\omega t)$, dove si definisce $\omega = \frac{qB}{m}$ (è un seno e non un coseno perché la velocità all'inizio è nulla per ipotesi).
 Ora nella prima equazione possiamo calcolare \ddot{x} e trovare agevolmente $\dot{y} = A \cos(\omega t) - \frac{E}{B}$. Imponendo che la velocità iniziale sia nulla si ottiene $A = \frac{E}{B}$.
 Integrando \dot{x} e \dot{y} e imponendo che la posizione iniziale sia l'origine, si ottiene:
 (1) $x = R(1 - \cos(\omega t))$
 (2) $y = R(\sin(\omega t) - \omega t)$
 Effettuando la sostituzione $R = \frac{Em}{qB^2}$. Questa si vede essere l'equazione di una cicloide.
30. ☆☆☆ (C5.17)
31. (C5.18)
32. (C5.19)
33. ★ Ovviamente c'è la gravità. Il punto si stacca non appena l'accelerazione gravitazionale ortogonale alla guida $g \cos(\theta)$ diventa minore dell'accelerazione centripeta di un'orbita circolare (che approssima localmente la traiettoria parabolica).
 Sapendo che $\tan(\theta) = |\frac{dy}{dx}| = 2ax$, si trova $g \cos(\theta) = \frac{g}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} = \frac{g}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$,
 mentre l'accelerazione centripeta è $\frac{v^2}{R} = \frac{-2gy}{R} = \frac{-2gy|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{4ga^2x^2}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$.
 Imponendo l'uguaglianza tra le due accelerazioni si trova che nel punto in cui inizia a staccarsi vale $1 = \frac{4a^2x^2}{1+4a^2x^2}$ il che non si può verificare.
34. ☆ $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16})$, dove θ_{\max} è l'angolo massimo raggiunto nelle oscillazioni.
35. (C5.128)
36. ★ ☆ (C5.133)
37. ★ ☆☆☆ L'equazione del moto è $m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos(\omega t)$, ed è simile ad un'altalena alla quale venga applicata una spinta a una certa frequenza, che

non è necessariamente la frequenza tipica dell'altalena $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ci si aspetta, come su un'altalena, che il moto sia periodico con lo stesso periodo della forzante; dunque ω e non ω_0 . Si prova dunque la soluzione $A \cos(\omega t)$ (ma anche $A \sin(\omega t)$ andrà bene).

Si ottiene $-mA\omega^2 \cos(\omega t) = -kA \cos(\omega t) + F_0 \cos(\omega t)$, da cui $A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Si vede che se la forzante ha frequenza vicina alla frequenza di risonanza ω_0 , l'ampiezza delle oscillazioni diventa molto alta.

38. ★★ ☆☆☆ (C5.139)
39. (M1.3)
40. ★ ☆☆☆ (M1.18)
41. ★★ ☆☆☆ (M2, nella parte di teoria)
42. ★ ☆☆☆ (M2, nella parte di teoria)
43. ★ (M2.E12)
44. ☆☆☆ In un istante il razzo ha massa m ed è fermo nel suo sistema. Poi la massa del razzo cambia di ∂m (negativo) e viene eiettato dall'ugello $-\partial m$ di carburante a velocità u rispetto al razzo. La conservazione della quantità di moto impone $0 = -\partial m(-u) + (m + \partial m)\partial v$. Ignorando il differenziale di second'ordine si trova $\partial v = -u \frac{\partial m}{m}$, ed integrando $\Delta v = -u \ln\left(\frac{m_{fin}}{m_{in}}\right) = u \ln\left(1 + \frac{m_c}{m_0}\right)$, dove m_c è la massa del carburante e m_0 è la massa finale, cioè del razzo che ha esaurito il carburante.
 $\Delta v = 3u$ corrisponde a $m_c = m_0(e^3 - 1) \approx 19m_0$.
45. ★ ☆☆☆ *Strato di ghiaccio su un lago* (SNS 2015 1) (si trova online).
46. ☆☆☆ Poiché $V = R\dot{Q}(t)$ e $C = \frac{Q(t)}{V}$, si ha $\dot{Q}(t) = \frac{1}{RC}Q(t)$, e quindi $Q(t) = Q(0)e^{-t/RC}$. RC è dunque il tempo caratteristico della decrescita esponenziale (cioè il tempo in cui la carica diminuisce di un fattore e).
 In un conduttore a forma di prisma, le cui facce sono le piastre del condensatore, Si vede bene che $RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$.
 Ora consideriamo un conduttore di forma arbitraria con due piastre di forma arbitraria. Posso dividere ogni piastra in tante aree infinitesime e per ciascuna di esse considerare il percorso che fa la corrente per arrivare all'altra piastra. Questo condensatore è localmente un prisma (così come un cavo di alimentazione è localmente un cilindro), e ciascun condensatore è indipendente dagli altri, quindi la carica decresce di un fattore $\frac{\epsilon}{\sigma}$. Poiché il valore totale di RC è uguale al tempo caratteristico, è uguale ancora a $\frac{\epsilon}{\sigma}$.
47. ☆☆☆ $U = -\rho g l^2 / 2$

48. ★★★ ☆☆☆ $v(x) = \sqrt{T(x)/\rho}$ (come viene dall'esercizio di ricavare l'equazione delle onde), dove $v(x)$ è la velocità dell'onda ad altezza x dall'alto, e $T(x)$ è la tensione della corda in quel punto. Poiché la tensione della corda è dovuta al peso della massa sottostante, vale $T = g\rho(l-x)$. Quindi $v(x) = \sqrt{g(l-x)}$. Il tempo impiegato è $T = \int dt = \int_l^0 \frac{dx}{v(x)} = \int_l^0 \frac{dx}{\sqrt{g(l-x)}} = [-2\sqrt{\frac{l-x}{g}}]_l^0 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$

49. ★ ☆☆☆ Poiché le uniche grandezze in gioco sono m , $g = [l]/[t^2]$, $v_0 = \frac{[l]}{[t]}$, $b = \frac{[m][l]}{[t]^n}$, si vede come per ottenere un tempo si potranno usare solo g , v_0 e $\frac{b}{m}$. Queste sono tre grandezze in $[l]$ e $[t]$, quindi esiste una loro combinazione adimensionale, cioè $v_0 \sqrt[n]{\frac{b}{mg}}$. In generale quindi v si può esprimere come una combinazione a caso che abbia le unità di misura giuste (ad esempio $\frac{v_0}{g}$) moltiplicata per una qualche funzione analitica f_n (che dipenderà da n visto che al cambiare di n le equazioni del moto da integrare cambieranno!) della quantità adimensionale: $v = \frac{v_0}{g} f_n(v_0 \sqrt[n]{\frac{b}{mg}})$. Fin qui si arriva solo con la Matematica, ora bisogna usare anche la fisica. Se b tende a 0, il tempo per arrivare al punto più alto deve diventare $\frac{v_0}{g}$, quindi $f_n(+\infty) = 1$.

Integrando invece le equazioni del moto (ricordandosi che ci si trova nel caso $F(v)$ affrontato nell'esercizio 52) si trova:

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = F(v) = -mg - bv^n$$

$$t = \int dt = \int_{v_0}^0 \frac{m \partial v}{-mg - bv^n} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{\partial v}{1 + bv^n/mg}$$

Ora, con il cambio di variabili nella variabile adimensionale $w = \sqrt[n]{\frac{b}{mg}} v$, ottengo:

$$t = \frac{1}{g} \sqrt[n]{\frac{mg}{b}} \int_{\sqrt[n]{\frac{b}{mg}} v_0}^0 \frac{\partial w}{1+w^n}, \text{ integrale che può essere fatto con l'analisi complessa (ma probabilmente non con metodi più facili).}$$

In ogni caso si può verificare che per b che tende a 0, si sta integrando 1, e la soluzione tende effettivamente a $\frac{v_0}{g}$ come desiderato.

La distanza compiuta orizzontalmente si può calcolare in questo modo: ripetendo i conti dati per velocità verticale $v_0 \sin(\theta)$ con gravità g , e per velocità orizzontale $v_0 \sin(\theta)$ con gravità 0. I metodi utilizzati sono gli stessi.

50. ★ ☆☆☆ (C5.43).

51. ★★★ ☆ Si rimanda alla pagina di wikipedia "Equazioni dei telegrafisti". Si faccia attenzione al fatto che lì si usano R , L , C e G per indicare rispettivamente la resistenza, induttanza, capacità e conduttanza *per unità di lunghezza*, mentre nel testo dell'esercizio si è indicato il valore per unità di lunghezza con le lettere minuscole per sottolineare la differenza.

Si è scelto di usare la conduttanza per il resistore tra i due cavi perché la conduttanza è infinitesima, mentre la resistenza sarebbe stata infinita; inoltre

perché la conduttanza $g dx$ è additiva in dx (i resistori che collegano i due cavi lunghi sono in parallelo). Quando si usa $r dx$, invece, esso è infinitesimo ed è additivo poiché i resistori lungo ciascun cavo sono in serie.

8.5 Derivate e Integrali

52. L'espressione $1 + x^2$ è già stata vista quando si calcola la derivata della tangente $t = \tan(x)$, ovvero $\frac{dt}{dx} = 1 + t^2$, da cui $\frac{\partial(\arctan(t))}{t} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$. Si ha quindi $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.
53. ☆☆☆ Sia che gli estremi siano 0 e $\pi/2$ oppure 0 e π , è facile verificare che nell'integrale per parti il termine non sotto il segno d'integrale è nullo. Poi basta usare $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Sia nel caso dei coseni che dei seni. $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta d\theta = \frac{1}{5}$, che tra l'altro viene molto più velocemente con il cambio di variabili $\alpha = 5\theta$.
54. ☆☆☆ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = (-1/2)!$ usando il cambio di variabili $t = x^2$. In effetti non si sa ancora quanto vale $(-1/2)!$...
55. ★ ☆☆☆ $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x dt = \frac{1}{\alpha^{x+1}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^x ds$ per cambio di variabili $s = \alpha t$.
Chiamiamo $f(x, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x dt$. Si vede che $f(0, \alpha) = \alpha^{-1}$. Inoltre $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x dt = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-\alpha t} t^x dt = -f(x+1, \alpha)$. Questo permette di scoprire che $f(n, \alpha) = (-\frac{\partial}{\partial \alpha})^n \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{(n+1)}}$. Ponendo $\alpha = 1$ si trova $f(n, 1) = n!$, che era quello che volevamo.
56. ☆☆☆ $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-s} ds/2 = \pi$ con $s = r^2$. Quindi $I = (-1/2)! = \sqrt{\pi}$
57. ☆☆☆ Se $t = \tan(\alpha/2)$ si ricavano facilmente $1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha/2}$ e quindi si trovano $\cos \alpha/2$ e, moltiplicando per t , $\sin \alpha/2$. Con le formule di duplicazione del seno e del coseno è facile trovare $\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
58. ★★ ☆☆☆ Convieni sempre effettuare la sostituzione $x = u/a$, in modo che al denominatore ci sia $\pm 1 \pm x^2$ o una sua radice. Ci si aspetta che si troveranno arcoseni, arcotangenti, magari anche iperboliche. Quindi bisogna fare le derivate delle funzioni trigonometriche ed iperboliche per vedere quale corrisponde a quale integrale.
Quanto basta sapere di seno iperbolico e coseno iperbolico è che sono l'uno la derivata dell'altro, e che $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$: questo permetterà di esprimere uno in funzione dell'altro. Ad esempio $\frac{\partial}{\partial x} \sinh(x) = \cosh(x) =$

$\sqrt{1 + \sinh^2(x)}$, quindi ho scoperto che $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arcsinh}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$, che ricorda il terzo integrale dopo un cambio di variabili.

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(a^2-u^2)}} = \arcsin(u/a)$$

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(u^2-a^2)}} = \operatorname{arccosh}(u/a)$$

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(u^2+a^2)}} = \operatorname{arcsinh}(u/a)$$

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(-u^2-a^2)}} = \pm i \operatorname{arcsinh}(u/a)$$

$$\int \frac{\partial u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \arctan(u/a)$$

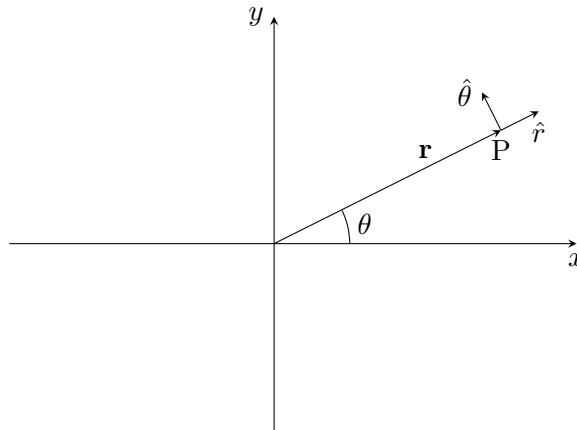
$$\int \frac{\partial u}{a^2-u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctanh}(u/a)$$

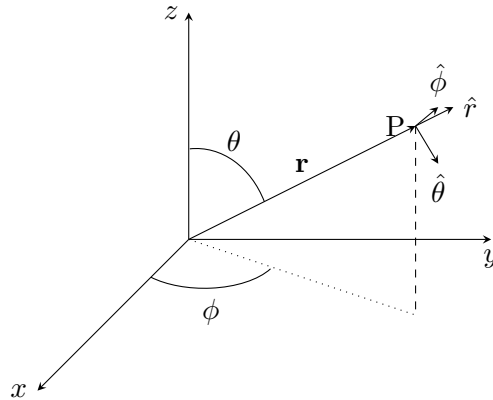
59. ★ ☆☆☆ $f(x, y, z) = 0$ localmente al punto di interesse avrà l'equazione di un piano $Ax + By + Cz = D$.

Ora, tenendo y fisso, si ha $A dx + C dz = 0$, quindi $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{A}{C}$, e analogamente si ottiene $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{B}{C}$ e $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{A}{B}$.

Quindi si ha $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{A}{C} = -(-\frac{B}{C})(-\frac{A}{B}) = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ e si spiega la presenza del segno meno.

8.6 Calcolo sui Vettori, per Meccanica





60. ★ ☆ In polari:

$$\hat{r} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ e } \hat{\theta} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} \text{ e } \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}.$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}.$$

In sferiche:

$$\hat{r} = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))$$

$$\hat{\theta} = (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), -\sin(\theta))$$

$$\hat{\phi} = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin(\theta)\hat{\phi}; \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r} + \dot{\phi}\cos(\theta)\hat{\phi}; \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\sin(\theta)\hat{r} - \dot{\phi}\cos(\theta)\hat{\theta}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin(\theta)\hat{\phi}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + (2\dot{r}\dot{\phi}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta) + r\ddot{\phi}\sin(\theta))\hat{\phi}$$

61. ★ ☆ Scelgo un sistema di riferimento in cui il vettore velocità angolare è $\boldsymbol{\Omega} = \omega\hat{z}$. Allora $\dot{\hat{x}} = \omega\hat{y}$; $\dot{\hat{y}} = -\omega\hat{x}$; $\dot{\hat{z}} = 0$, e quindi per un vettore generico vale $\dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$. Quindi questa formula vale sempre.

62. ★ ☆☆☆ Una rotazione in polari può cambiare solo l'angolo θ e avviene attorno all'asse z : è quindi $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$, dove $z = r \times \phi$. In questo modo si possono ricalcolare le derivate dei versori \hat{r} e $\hat{\theta}$.

Una rotazione in sferiche può cambiare sia l'angolo θ ruotando attorno all'asse del versore $\hat{\phi}$, sia l'angolo ϕ ruotando attorno all'asse z . La velocità angolare è dunque la somma di questi due effetti (così l'istante successivo θ cambia di $\dot{\theta}dt$ e ϕ cambia di $\dot{\phi}dt$, esattamente come deve avvenire): $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z} + \dot{\phi}\hat{z}$, dove \hat{z} è il versore verticale che può essere espresso come combinazione lineare di \hat{r} e $\hat{\theta}$.

Quindi la rotazione che cambia ϕ ha come $\boldsymbol{\Omega}$ corrispondente $\dot{\phi}\hat{z}$, ha come raggio corrispondente la distanza tra la punta del vettore che ruota con l'asse di rotazione, quindi $r\sin(\theta)$, e l'accelerazione centripeta corrispondente è $a_{centripeta} = -r\sin(\theta)\dot{\phi}^2\hat{y} = -r\sin(\theta)\dot{\phi}^2(\sin(\theta)\hat{r} + \cos(\theta)\hat{\theta}) = -r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta)\hat{r} -$

$r\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\hat{\theta}$, che sono due dei nove termini dell'accelerazione in sferiche $\ddot{\mathbf{r}}$ calcolata negli esercizi precedenti.

8.7 Avanzati

63. ★ ☆☆☆ In un piccolo tratto infinitesimo la forza che agisce è la gravità verticale più le due forze laterali, le quali hanno dunque uguale componente orizzontale, che chiamiamo $T_0 = T \cos(\phi)$. Nel punto più basso della corda, la tensione è tutta orizzontale; partendo da lì, la tensione in un punto spostato a margine è dato dalla forza peso della corda, quindi è $T \sin(\phi) = \lambda s g$, dove s è la lunghezza della corda. Quindi $\frac{dy}{dx} = \tan(\phi) = \frac{\lambda s g}{T_0} = \frac{s}{a}$ dove si definisce per semplicità $a = \frac{T_0}{\lambda g}$. Questa equazione differenziale si può risolvere in tanti modi.
- Ad esempio, poiché $dy = \frac{s}{a} dx$, so che $\partial s = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}} dx$, e quindi $x = \int dx = \int \frac{\partial s}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}} = a \operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right) + \text{costante}$. Si ponga la costante a zero cambiando l'origine degli assi. Ora $s = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$. Inserendola nell'equazione di partenza abbiamo $\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$, ovvero $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.
64. ★★ *Operatori (I parte)*. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2$. Infatti $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ in generale.
 Si intendeva chiaramente se $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$ (il + mancava nella domanda). Questo è falso in generale perché già al secondo ordine, nel secondo membro ho la combinazione $\beta\alpha$, che non si può mai ottenere nel primo membro.
 La derivata di un operatore è la differenza tra due operatori, diviso uno scalare, e poi facendo tendere lo scalare a zero. Il risultato di questa operazione, in base alle definizioni, è ancora un operatore.
 $\frac{\partial}{\partial t}(\alpha(t)\beta(t)) = \frac{\partial\alpha(t)}{\partial t}\beta(t) + \alpha(t)\frac{\partial\beta(t)}{\partial t}$. Si noti che l'ordine è importante.
65. ★★★ *Operatori (II parte)*. $\frac{\partial}{\partial t}e^{\alpha t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \dots\right) = \left(\alpha + \alpha^2 + \frac{\alpha(\alpha t)^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha t)^3}{3!} + \dots\right) = \alpha e^{\alpha t}$
 $\frac{\partial}{\partial t}e^{\alpha t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^N = N\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^{N-1} \frac{\alpha}{N} = \left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^N \left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^{-1} \alpha = \alpha e^{\alpha t} \left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^{-1} = \alpha e^{\alpha t}$ dove nell'ultimo passaggio si è eliminato un termine che tende a 1. Si nota come α commuti con i termini tra parentesi poiché l'unico operatore all'interno è α stesso, e chiaramente α commuta con se stesso.
 $e^{\alpha t}\beta e^{-\alpha t} = \left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^N \beta \left(1 - \frac{\alpha t}{N}\right)^N$, che vuol dire applicare N volte a β una moltiplicazione a sinistra e una moltiplicazione a destra per i due fattori dentro le parentesi. Vediamo meglio cosa succede: $\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)\beta\left(1 - \frac{\alpha t}{N}\right) = \left(\beta + \frac{t}{N}(\alpha\beta - \beta\alpha)\right)$. Ora, se uso la definizione suggerita $\hat{\alpha}\beta = \alpha\beta - \beta\alpha$, ho

che $\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)\beta\left(1 - \frac{\alpha t}{N}\right) = \left(1 + \frac{\hat{\alpha}t}{N}\right)\beta$, e applicarla N volte significa trovare $\left(1 + \frac{\hat{\alpha}t}{N}\right)^N \beta = e^{\hat{\alpha}t}\beta$ (la t all'esponente è mancante nel testo dato).
 $\frac{\partial}{\partial t}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)}e^{-\alpha(t)}\frac{\partial}{\partial t}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)}e^{-\hat{\alpha}(t)}\frac{\partial}{\partial t}$. Per semplicità di notazione si scrive $e^{(\alpha)}e^{-\hat{\alpha}}D$, dove è sottinteso che $\alpha = \alpha(t)$. Ora si ottiene $e^{\alpha}(D - \hat{\alpha}D + \frac{\hat{\alpha}^2}{2!}D - \frac{\hat{\alpha}^3}{3!}D + \dots)$. Ora usando che D con niente a destra è $D1 = 0$, e che $\hat{\alpha}D = \alpha D - D\alpha = D\alpha = \dot{\alpha}$, si può scrivere $e^{\alpha}(0 + \dot{\alpha} - \frac{\hat{\alpha}}{2!}\dot{\alpha} + \frac{\hat{\alpha}^2}{3!}\dot{\alpha} - \dots) = e^{\alpha}\frac{1-e^{-\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}}\dot{\alpha}$, dove nell'ultimo passaggio si è riconosciuta la serie di Taylor di $\frac{1-e^{-x}}{x}$. Si noti come $\dot{\alpha}$ non commuti necessariamente con α , poiché $\alpha(t)$ non commuta necessariamente con $\alpha(t')$.

66. ★★ ☆ Il Teorema di Mamikon è vero perché il segmento tangente può solo ruotare o muoversi parallelamente a se stesso (il segmento e il versore tangente alla traiettoria $(\dot{x}(\lambda), \dot{y}(\lambda))$ sono paralleli per ipotesi!). Ora, l'area spazzata è dovuta alla rotazione del segmento, non al suo moto parallelo a se stesso! Un'asta che si muove parallelamente a se stessa infatti non spazza area.

Anche senza sapere i raggi dei due cerchi che formano l'anello circolare, si vede che l'area dell'anello è spazzata dal segmento lungo a (che parte tangente dal cerchio e arriva al cerchio esterno), se lo si fa ruotare attorno al cerchio interno (ruoterà di un angolo 2π). Per il Teorema di Mamikon è l'area spazzata da un segmento lungo a che ruota di 2π , ovvero l'area di un cerchio di raggio a , cioè πa^2 .

L'area sottesa dalla cicloide è un problema complicato, perché non bisogna mantenere il segmento tangente di lunghezza costante. Si rimanda alla pagina di wikipedia in inglese "Visual Calculus".

Il laccio tenuto dal bambino è lungo a , si muove parallelamente a se stesso come richiesto dal Teorema di Mamikon, e ruota in tutto di $\pi/2$. L'area spazzata è dunque quella di un quarto di cerchio, cioè $\pi a^2/4$.

67. ★★ Per come è stata definita, si chiede che il segmento parallelo alla curva verso l'asse y sia lungo a , ovvero $a^2 = x^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x^2$, da cui, isolando la derivata, si trova $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ (si ricorda che la funzione è decrescente per come sono stati scelti gli assi).
 L'ODE trovata può essere integrata, ma non è illuminante.

68. ★ ☆☆☆ I risultati si ottengono se $f(x)$ è una funzione che va a 0 all'infinito più velocemente di qualunque polinomio (cioè con ordine di infinitesimo maggiore), altrimenti alcuni integrali non convergono e non scompare un termine quando si fa l'Integrale per Parti.

Nel primo esercizio c'è un lapsus all'esponente (mancava la x , senza la quale l'esercizio è banale perché la costante esce fuori): $F[e^{i\alpha x} f(x)](\omega) =$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega+\alpha)x} f(t) dt = F[f(x)](\omega + \alpha).$
 $F\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial t} f(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (e^{i\omega t}) f(t) dt =$
 $-i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\omega t}) f(t) dt = -i\omega F[f(x)](\omega),$ dove nell'Integrale per Parti l'altro termine è nullo.
 $\frac{\partial}{\partial \omega} F[f(x)](\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} i t f(t) dt$
 $= F[ixf(x)](\omega).$ Se chiamiamo la funzione rettangolo $R(x)$ si ha:

$$F[R(x)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} R(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{i\omega t} dt \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \right]_{-1}^{+1} = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2\pi i\omega} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

69. ☆☆☆ Se moltiplico una funzione continua e con integrale finito per una sinusoidale di frequenza molto alta, mi aspetto che l'ansa alta e quella bassa della sinusoidale, essendo molto vicine e molto strette, siano alte uguali (vengono moltiplicate per valori quasi uguali di $f(x)$). Quindi aumentando sempre più la frequenza il valore dell'integrale va a zero.
70. ★ ☆☆☆ $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = 0$ chiaramente, visto che il numeratore decresce e il denominatore è circa x^2 , che è un numero finito. L'unico problema si ha se $x = 0$: in questo caso il limite è $1/\epsilon$, ovvero infinito. Il grafico diventa una sorta di campana centrata in 0 che diventa via via più stretta e alta. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1}$ dove $y = x/\epsilon$. L'integrale è $\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) = \pi$.
 E' chiaro che mentre la funzione a campana diventa stretta e alta, l'area sottesa resta costante.
 Per fare $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} f(x) dx$ basta notare che la campana stretta e alta fa in modo che contino solo i valori di $f(x)$ con x vicino a 0: quelli lontani vengono moltiplicati per valori molto piccoli, e sono irrilevanti. Al limite, conta solo il valore $f(0)$ e i valori vicini (che sono praticamente identici), moltiplicati per π . Il risultato è dunque $\pi f(0)$.
71. ☆ La gaussiana è una funzione a campana (anche se non è quella dell'esercizio precedente). In ogni caso come $\delta(x)$ va bene una funzione di qualunque forma, anche a rettangolo, o a triangolo, o a pinna di squalo, purché abbia area 1 e ampiezza infinitesima. I motivi per cui $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$ sono gli stessi dell'esercizio precedente: avente la funzione ampiezza infinitesima, contano solo i valori $f(x)$ con $x \approx 0$, che sono tutti all'incirca $f(0)$ (se f è continua). Quindi sto facendo la media di questi valori (l'integrale di una funzione moltiplicata per un'altra funzione di area 1 corrisponde a una media!), e troverò necessariamente $f(0)$.

72. ☆ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x) dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f'(x)dx = -f'(0)$
73. ☆ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)f(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f^{(n)}(x) dx$ applicando n volte l'integrazione per parti, ottenendo infine $(-1)^n f^{(n)}(x)$
74. ★★ (C5.139 e C5.140)
75. ★★ ☆☆☆ In base a quanto detto, una regione perde calore se ha più calore della media del calore delle regioni circostanti (delle celle circostanti nel nostro modello a cubetti, oppure della superficie sferica circostante se prendiamo una regione sferica). Quindi $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}$ deve essere proporzionale al laplaciano $\nabla^2 Q(x,t)$, e la costante di proporzionalità è positiva: infatti se la regione ha meno calore che le regioni circostanti, si è visto che il laplaciano è positivo (la somma delle derivate seconde è positiva!) e con costante positiva si ha un aumento del calore nel tempo. L'equazione quindi è $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = D\nabla^2 Q(x,t)$, dove $D > 0$ include tutte le informazioni sul tipo di materiale. Si noti come si è usato il postulato sottointeso che il calore non viene mai creato né distrutto, ma solo trasportato per diffusione nel metodo indicato. Questa è l'equazione del calore o equazione di diffusione.
76. ★ ☆☆☆ $n! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$. Per trovare il massimo dell'integrando (al variare di t), poiché $e^{-t} t^n = e^{-t+n \ln(t)}$, basta imporre che $-t + n \ln(t)$ abbia valore massimo, cioè derivata nulla: $-1 + n/t = 0$, ovvero si ha massimo per $t = n$. Espandendo $f(t) = -t + n \ln(t)$ per $t \approx n$ si ottiene con Taylor $f(t) = f(n) + f''(n)(t-n)^2/2$ (poiché la derivata prima si annulla perché è un massimo!) ovvero $-n + n \ln(n) - (t-n)^2/2n$, che reinserito nell'esponente dell'integrando da l'integrale voluto: $\int_0^{+\infty} e^{-n+n \ln n - \frac{(t-n)^2}{2n}} dt$ (nel testo del problema c'erano un paio di lapsus).
- Tirando fuori le costanti troviamo $e^{-n+n \ln n} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}} dt$. Poiché l'integrando decresce rapidamente quando ci si allontana da n , si può estendere questo integrale da $-\infty$ a $+\infty$ commettendo un errore trascurabile. Ora, noi sappiamo l'area totale sottesa da una gaussiana grazie alla formula dell'esercizio 73 ritoccata con un cambio di variabili, ovvero $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Si ottiene dunque $e^{-n} n^n \sqrt{2n\pi}$, che è esattamente l'approssimazione di Stirling.
77. ★★ ☆ Si definisce $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (c'era un lapsus nel testo riguardo agli estremi di integrazione). Ora $I^n = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} S_n(r) \partial r$, dove $S_n(r)$ è la superficie $(n-1)$ -dimensionale di un'ipersfera a n dimensioni. Calcoliamola: chiaramente $S_n(r) = S_n(1)r^{n-1}$, quindi ottengo $I^n = S_n(1) \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} \partial r = S_n(1) \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{(n-2)/2} \partial s \frac{1}{2} = \left(\frac{n-2}{2}\right)! S_n(1) \frac{1}{2}$. Quindi $S_n(r) = r^{n-1} S_n(1) = r^{n-1} \frac{2\pi^{n/2}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}$. Per trovare il volume basta integrare: $V_n(R) = \int_0^R S_n(r) \partial r = \frac{R^n}{n} \frac{2\pi^{n/2}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$ usando il fatto che

$\frac{(n-2)!}{2} = (\frac{n}{2})!$ per le proprietà del fattoriale.

78. ★★★ Il suggerimento dato nel testo è sufficiente. I conti sono fatti, ad esempio, sulla pagina di wikipedia “Beta di Eulero”.

79. ★ Si può provare a dire $\sin(x) = \dots(x + 3\pi)(x + 2\pi)(x + \pi)x(x - \pi)(x - 2\pi)(x - 3\pi)\dots$, ma questa espressione non converge mai (esistono sempre infinite radici da cui sono molto distanti). Se l’espressione deve andare a 1 quando $x = 0$, si fa in modo che tutti i fattori vadano a 1, dividendo per il fattore giusto (ovviamente si intendono tutti i fattori tranne x , per soddisfare $\sin(x) \approx x$ quando x va a 0). Si ottiene così $\sin(x) = \dots(1 + \frac{x}{3\pi})(1 + \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{\pi})x(1 - \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 - \frac{x}{3\pi})\dots = x(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})\dots = x \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2})$, dove la \prod indica la produttoria per tutti i k , in questo caso da 1 a $+\infty$.

Si noti come questa espressione non è stata effettivamente dimostrata in quanto potrebbero esserci altri zeri nel piano complesso che stiamo ignorando, oppure potrei moltiplicare per esponenziali (che non aggiungono nuovi zeri), oppure altro. In ogni caso questa espressione è giusta.

80. ★★★ $\sinh(x) = \frac{1}{2}((1 + \frac{x}{N})^N - (1 - \frac{x}{N})^N) = \frac{1}{2}((1 + \frac{x}{N}) - (1 - \frac{x}{N})) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} ((1 + \frac{x}{N})^2 + (1 - \frac{x}{N})^2 - 2(1 + \frac{x}{N})(1 - \frac{x}{N}) \cos(\frac{2\pi k}{N})) = \frac{x}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (2 + 2\frac{x^2}{N^2} - 2 \cos(\frac{2\pi k}{N}) + 2\frac{x^2}{N^2} \cos(\frac{2\pi k}{N}))$.

Ora $\cos(2\pi k/N) = 1 - \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 k^2}{N^2} + O(\frac{k^4}{N^4})$. Si ottiene:

$\sinh(x) = \frac{x}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (4\frac{x^2}{N^2} + \frac{4\pi^2 k^2}{N^2} + O(\frac{k^4}{N^4}) + O(\frac{k^2 x^2}{N^4}))$, ma l’ultimo O si può omettere poiché, quando $x \gg k$ è più piccolo di $O(\frac{1}{N^4})$, e poiché $k > 1$ si può includere nell’altra O ; mentre quando $k \gg x$, il termine è più piccolo di $O(\frac{k^4}{N^4})$, e quindi è già incluso nell’altra O .

Si ottiene così qualcosa da cui si riesce a intravedere il risultato che ci si aspettava: infatti, raccogliendo, si trova:

$\sinh(x) = \frac{x}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (4\frac{k^2 \pi^2}{N^2}) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} + O(\frac{k^2}{N^2}))$ (al contrario dell’esercizio precedente qui c’è il $+$ poiché si sta parlando del seno iperbolico).

Un grosso problema è che, verso la fine della produttoria $k \approx N$, e $\frac{k}{N}$ diventa non trascurabile. Come però fatto notare nel suggerimento (iii), quando questo avviene il contenuto della produttoria non dipende più da x : infatti $\frac{x^2}{k^2} \approx \frac{x^2}{N^2}$, che tende a zero ed è trascurabile in confronto a $1 - O(\frac{k^2}{N^2})$. La produttoria si può quindi dividere in due parti: all’inizio $k \ll N$ e quindi $O(\frac{k^2}{N^2})$ è trascurabile, mentre alla fine $N \approx k \gg x$, e in questo caso posso trascurare il termine che dipende da x (a essere precisi c’è una fase intermedia in cui entrambi i termini sono trascurabili, e quindi contribuisce con degli 1 alla produttoria...). Il prodotto sulla parte finale non dipende da x e viene chiamato B . Il prodotto sulla parte iniziale può essere reso eliminando $O(\frac{k^2}{N^2})$ ed estendendo l’estremo superiore della produttoria fino a $+\infty$ (dopo un po’ si sta praticamente moltiplicando solo per 1). Si ottiene quindi:

$$\sinh(x) = B \frac{x}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(4 \frac{k^2 \pi^2}{N^2}\right) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

Ora, ho ottenuto quello che volevo a parte per il fattore $\frac{1}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(4 \frac{k^2 \pi^2}{N^2}\right)$, che chiamo A e che non dipende da x . Ho quindi:

$$\sinh(x) = ABx \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

Al prim'ordine questa espressione fa $x = ABx$. Ottengo così che $AB = 1$, e quindi:

$$\sinh(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) \quad \text{Da } \sin(x) = \frac{1}{i} \sinh(ix) \text{ si ottiene facilmente anche:}$$

$$\sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

81. Guardando il terzo ordine dell'espressione precedente si ottiene: $-\frac{x^3}{3!} = -\frac{x^3}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right)$, da cui si conclude facilmente che $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ (*Problema di Basilea*).

9 Soluzioni problemi

Problema 7.1. Risolviamo il problema distinguendo più casi:

- $k = 1$, ovvero abbiamo un solo vincolo. Se $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0) = 0$ la tesi è vera. Supponiamo quindi che $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Allora il vincolo $g_1(x_0, y_0, z_0)$ nelle vicinanze di (x_0, y_0, z_0) esprime l'equazione di una superficie che nel punto (x_0, y_0, z_0) è tangente al piano ortogonale a $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0)$. Questo perché il gradiente è ortogonale alle direzioni di massima stabilità al primo ordine, e se mi muovo lungo la superficie di equazione $g_1(x_0, y_0, z_0) = 0$, il valore non g_1 non cambia a tutti gli ordini. Ora, se in (x_0, y_0, z_0) ho un minimo locale per la funzione g sull'insieme descritto dal vincolo $g_1(x_0, y_0, z_0) = 0$, vuol dire la funzione g deve rimanere stabile al primo ordine per tutti i possibili spostamenti lungo il piano tangente alla superficie di equazione $g_1(x_0, y_0, z_0) = 0$. Quindi $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ deve essere ortogonale al piano tangente alla superficie, e dunque deve essere allineato con $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0)$, da cui la tesi.
- $k = 2$, ovvero abbiamo due vincoli. Supponiamo senza perdita di generalità che $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g_2(x_0, y_0, z_0)$ non siano allineati. Ragionando in maniera analoga a prima deduciamo che l'insieme descritto dai due vincoli debba essere tangente all'intersezione dei due piani ortogonali a $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g_2(x_0, y_0, z_0)$. Questa descrive una retta, parallela ad un certo vettore \mathbf{v} . Se (x_0, y_0, z_0) è un punto di minimo locale per g sull'insieme descritto dai vincoli di g_1, g_2 vuol dire che $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ è ortogonale a \mathbf{v} . Questo significa che $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ giace sul piano ortogonale a \mathbf{v} , che è proprio il piano generato da $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g_2(x_0, y_0, z_0)$. Anche in questo caso la tesi segue.

- $k \geq 3$, ovvero abbiamo tre vincoli. In questo la tesi discende dal fatto che 4 o più vettori di \mathbb{R}^3 sono sempre linearmente dipendenti.

Problema 7.2 L'osservazione cruciale è che le derivate miste in cui non compaiono *tutte* le variabili sono nulle. Ad esempio $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} V(0, 0, 0) = 0$. La ragione è la seguente: consideriamo la funzione $V(x, y, 0)$. Se l è il lato del cubo, sappiamo che

$$V(x, y, 0) = 0 \quad \text{quando} \quad 0 \leq x, y \leq l$$

Non è difficile convincersi del fatto che questo fa sì che tutta l'espansione in serie di Taylor della funzione V centrata nell'origine deve avere coefficienti nulli. Ma i coefficienti che compaiono nell'espansione di $V(x, y, 0)$ sono proprio le derivate parziali (prime, doppie, triple ecc.) in cui si deriva solo rispetto a x e y e mai rispetto a z . Ragionando analogamente per le funzioni $V(x, 0, z)$ e $V(0, y, z)$ si ottiene che

$$\frac{\partial^a}{\partial x^a} \frac{\partial^b}{\partial y^b} \frac{\partial^c}{\partial z^c} V(0, 0, 0) = 0 \quad \text{se} \quad a = 0 \text{ oppure } b = 0 \text{ oppure } c = 0$$

Quindi il più piccolo ordine possibile nell'espansione di Taylor di V centrata nell'origine è xyz .

Problema 7.3. Il fatto cruciale è che i coefficienti A_n, B_n sono *univocamente determinati* dalla funzione, ovvero che se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n \cos(nx) + D_n \sin(nx))$$

allora per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ deve valere $A_n = C_n$ e $B_n = D_n$. Vediamo nel dettaglio i casi che ci viene chiesto di studiare.

- f pari: questo vuol dire che per ogni x vale $f(x) = f(-x)$. Quindi per ogni x vale che

$$\begin{aligned} f(x) = f(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(-nx) + B_n \sin(-nx)) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(nx) - B_n \sin(nx)) \end{aligned}$$

L'ultima espressione non è altro che una nuova espansione di f come serie di seni e coseni, con coefficienti A_n e $-B_n$. Di conseguenza per ogni $n > 0$ deve valere

$$\begin{cases} A_n = A_n \\ B_n = -B_n \end{cases}$$

Se ne deduce che $B_n = 0$ per ogni $n > 0$, ovvero che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(nx)$$

- f dispari: il ragionamento per questo caso è perfettamente analogo e si deduce che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(nx)$$

- $f(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Procediamo come prima, scrivendo

$$f(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos\left(nx + \frac{2\pi n}{3}\right) + B_n \sin\left(nx + \frac{2\pi n}{3}\right) \right)$$

Usiamo ora le seguenti identità

$$\cos\left(nx + \frac{2\pi n}{3}\right) = \cos(nx) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin(nx) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

$$\sin\left(nx + \frac{2\pi n}{3}\right) = \sin(nx) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \cos(nx) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Sostituendo queste espressioni si trova

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \cos(nx) + \\ & + \left(-A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \sin(nx) \end{aligned}$$

Quindi per ogni $n > 0$ risulta che

$$\begin{cases} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = A_n \\ -A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = B_n \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} A_n \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 1 \right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = 0 \\ -A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + B_n \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 1 \right) = 0 \end{cases}$$

Affinché le condizioni sopra non implicino che $A_n = B_n = 0$, deve verificarsi che

$$\det \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 1 & \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

ovvero

$$\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 1\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = 0$$

che svolgendo i conti risulta essere equivalente a

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = 1$$

Quindi deve esistere un $k \in \mathbb{N}_{>0}$ ⁵ tale che

$$\frac{2\pi n}{3} = 2\pi k$$

ovvero $n = 3k$. Quindi se n non è un multiplo di 3 vale che $A_n = B_n = 0$, da cui

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (A_{3k} \cos(3kx) + B_{3k} \sin(3kx))$$

E' chiaro che non possono esserci vincoli sugli A_{3k}, B_{3k} : non è un caso che se $n = 3k$ si ha che

$$\begin{cases} \cos(2\pi k) - 1 = 0 \\ \sin(2\pi k) = 0 \end{cases}$$

e quindi il sistema scritto sopra per ogni n ha tutti i coefficienti nulli se n è un multiplo di 3.

Problema 7.4. Supponiamo inizialmente che $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ per semplificarci le notazioni. Denotiamo con S_R la superficie sferica con centro l'origine e raggio R . Scriviamo

$$\int_{S_R} V(\mathbf{r}) dS = \int_{S_R} V(\mathbf{r}) \left(\frac{\mathbf{r}}{R} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} \right) dS = \frac{1}{R} \int_{S_R} V(\mathbf{r}) \mathbf{r} \cdot \mathbf{dS} \quad (6)$$

A destra abbiamo il flusso del campo vettoriale $V(\mathbf{r})\mathbf{r}$ lungo la superficie sferica S_R , dove abbiamo usato che $\mathbf{r}dS = r\hat{n}dS = R\mathbf{dS}$. Se indichiamo con

⁵a priori sarebbe in \mathbb{Z} ma sarà chiaro che k deve essere positivo.

$B_R = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{z}\| \leq 1\}$, che è il volume racchiuso dalla superficie sferica, abbiamo che

$$\int_{S_R} V(\mathbf{r})\mathbf{r} \cdot \mathbf{dS} = \int_{B_R} \nabla \cdot (V(\mathbf{r})\mathbf{r}) dx dy dz \quad (7)$$

Verifichiamo la seguente formula: se $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione scalare e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale, allora

$$\nabla \cdot (f\mathbf{g})(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r})$$

Infatti

$$\nabla \cdot (f\mathbf{g})(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}(fg_i)(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 (\partial_{x_i}f(\mathbf{r}))g_i(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r})\partial_{x_i}g_i(\mathbf{r})$$

Se spezziamo le due somme riconosciamo che

$$\sum_{i=1}^3 (\partial_{x_i}f(\mathbf{r}))g_i(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r})$$

e

$$\sum_{i=1}^3 f(\mathbf{r})\partial_{x_i}g_i(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r})$$

Applicando quanto dimostrato a (7) otteniamo che

$$\int_{B_R} \nabla \cdot (V(\mathbf{r})\mathbf{r}) dx dy dz = \int_{B_R} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} dx dy dz + \int_{B_R} V(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{r} dx dy dz \quad (8)$$

Mostriamo che

$$\int_{B_R} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} dx dy dz = 0$$

Per calcolare questo integrale, calcoliamo innanzitutto l'integrale di superficie per le superfici sferiche S_r con $0 \leq r \leq R$ e poi integriamo il risultato rispetto a dr , ovvero

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} dx dy dz &= \int_0^R \left(\int_{S_r} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} dS \right) dr = \\ &= \int_0^R r \left(\int_{S_r} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dS} \right) dr \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = r\hat{n}dS = r\mathbf{dS}$. Se applichiamo il teorema della divergenza agli integrali più interni abbiamo

$$\int_0^R r \left(\int_{S_r} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dS} \right) dr = \int_0^R r \left(\int_{B_r} \nabla \cdot (\nabla V)(\mathbf{r}) dx dy dz \right) dr = 0$$

in quanto $\nabla \cdot (\nabla V) = 0$ per ipotesi. Per la (8) ne segue che

$$\int_{B_R} \nabla \cdot (V(\mathbf{r})\mathbf{r}) dx dy dz = \int_{B_R} V(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{r} dx dy dz$$

Da $\nabla \cdot \mathbf{r} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3$, mettendo assieme i risultati di (6), (7) e (8) si ottiene

$$\int_{S_R} V(\mathbf{r}) dS = \frac{3}{R} \int_{B_R} V(\mathbf{r}) dx dy dz$$

Come prima integriamo prima sui gusci sferici e poi in dr , ottenendo

$$\int_{S_R} V(\mathbf{r}) dS = \frac{3}{R} \int_0^R \left(\int_{S_r} V(\mathbf{r}) dS \right) dr \quad (9)$$

Sia $f(R) = \int_0^R \left(\int_{S_r} V(\mathbf{r}) dS \right) dr$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo $f'(R) = \int_{S_R} V(\mathbf{r}) dS$. Quindi la (9) si può riscrivere come

$$f'(R) = \frac{3}{R} f(R)$$

E' immediato verificare che le soluzioni sono della forma $f(R) = \alpha R^3$. Ne segue che

$$\frac{\int_{S_R} V(\mathbf{r}) dS}{4\pi R^2} = \frac{3\alpha R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\alpha}{4\pi} = \text{costante}$$

A questo punto non sarà difficile convincersi del fatto che $\int_{S_R} V(\mathbf{r}) dS = 4\pi R^2 V(0, 0, 0)(1 + o(1)_{R \rightarrow 0})$ da cui il valore della costante deve essere necessariamente $V(0, 0, 0)$. La tesi è dimostrata. Per ottenere il caso generale basta notare che V è armonica se e solo se $W(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \mathbf{x})$ è armonica. A questo punto è sufficiente applicare il risultato visto alla funzione W per dedurre il teorema della media nel caso generale.

Problema 7.5. L'osservazione cruciale è che la funzione

$$x(t) = \frac{\alpha}{m^{\frac{5}{2}}} t^5$$

ha derivate prima e seconda nulle in $t = 0$. Questo significa che la particella in $t = 0$ aveva velocità nulla e nessuna forza agiva su di essa. Questo è indice

del fatto che il campo vettoriale $F(x)\hat{x}$ non è abbastanza regolare per $x = 0$, ovvero $\frac{d}{dx}F(x)$ se esiste non è continuo in $x = 0$. In effetti con la teoria vista si potrebbe dedurre che F non è derivabile in $x = 0$, ma non ci dilunghiamo. Mostriamo che le nostre predizioni corrispondono alla verità con una verifica diretta.

Dato un x , sia t_x l'istante in cui la particella si trova in x . Allora

$$F(x) = m\ddot{x}(t_x) = \frac{20\alpha}{m^{\frac{5}{2}}}t_x^3 = m\frac{20\alpha}{m^{\frac{5}{2}}}\sqrt[5]{\left(\frac{m^{\frac{5}{2}}x}{\alpha}\right)^3} = kx^{\frac{3}{5}}$$

con $k \neq 0$, che non è derivabile in $x = 0$.

Problema 7.6. Ricordo che dobbiamo studiare qualitativamente l'equazione differenziale

$$\dot{x} = t - x^2$$

Se la deriviamo rispettivamente una e due volte otteniamo

$$\ddot{x} = 1 - 2x\dot{x} = 1 - 2x(t - x^2)$$

$$\ddot{x} = -2\dot{x}^2 - 2x\ddot{x} = -2(t - x^2)^2 - 2x[1 - 2x(t - x^2)]$$

Osserviamo che l'insieme $A = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t - x^2 \geq 0\}$ è *positivamente invariante*, ovvero se $x(t_0) = t_0 - x(t_0)^2 \geq 0$ allora per ogni $t \geq t_0$ risulta che $\dot{x}(t) = t - x(t)^2 \geq 0$. Per dimostrarlo è sufficiente notare che se $\dot{x}(\bar{t}) = 0$ allora $\ddot{x}(\bar{t}) = 1 - 2x(\bar{t})\dot{x}(\bar{t}) = 1$. Quindi in un intorno destro di \bar{t} dovrà valere che $\dot{x}(t) \geq \dot{x}(\bar{t}) \geq 0$. Di conseguenza, una volta che una soluzione $x(t)$ entra nella regione A non può più uscirvi. Con un ragionamento del tutto analogo si mostra che la regione $B = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2x(t - x^2)\}$ è *positivamente invariante*. A questo punto si possono fare molte altre osservazioni, ma richiedono un po' di lavoro. Di conseguenza ci limitiamo a intuirle senza dimostrarle. Si osserva che la gran parte delle soluzioni manifesta uno e uno solo dei seguenti comportamenti:

- intersecano la curva $t - x^2 = 0$: nel punto di intersezione assumeranno il loro minimo. Da quel punto in poi cresceranno strettamente. Per un breve intervallo di tempo nel futuro saranno convesse, dopodiché entreranno in B e saranno definitivamente concave. Tenderanno asintoticamente a coincidere con la curva $t - x^2 = 0$;
- sono sempre decrescenti, entrano nella regione B ed esplodono in tempo finito.

E' ragionevole ritenere che ci sarà un fascio di soluzioni che separerà la regione di piano dei punti che presentano il primo comportamento da quella dei punti che presentano il secondo comportamento. Le soluzioni in questione dovranno essere funzioni decrescenti e convesse, ed è facile convincersi che tenderanno asintoticamente alla curva di equazione $t - x^2 = 0$. Tuttavia si può mostrare che di tali soluzioni decrescenti e convesse ve n'è al più una, che in effetti esiste.

Alcune delle dimostrazioni dei fatti precedenti non sono per niente banali e potrebbero richiedere dei seguenti fatti:

- la dipendenza dai dati iniziali è continua;
- \mathbb{R}^2 è connesso, ovvero non si può scrivere come unione disgiunta di aperti non vuoti;
- una famiglia numerabile di funzioni continue che converge puntualmente e in maniera monotona ad una f continua su un compatto vi converge uniformemente.

Riferimenti bibliografici

- [Cel18] Giancarlo Cella. *Un esercizio al giorno*. 2018. Reperibile [qui](#).
- [Mor08] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2008.
- [Nea10] James Nearing. *Mathematical Tools for Physics (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 2010.