Introduzione all'Analisi matematica

Sirio Resteghini[*], Giovanni Marzenta [†]

7 febbraio 2022

Sommario

In questa lezione spiegheremo come usare alcuni strumenti matematici indispensabili per la risoluzione di molti problemi di fisica, ovvero i numeri complessi, il calcolo infinitesimale, le derivate, gli sviluppi di Taylor, gli integrali ed un'introduzione alle equazioni alle derivate ordinarie (ODE). Non saremo molto formali, dato che l'obiettivo è solo quello di fornire gli strumenti per affrontare i problemi delle Olifis.

[*]sirio.resteghini@sns.it
[†]giovanni.marzenta@sns.it

1 Prerequisiti

1.1 Notazione

1.1.1 Simboli insiemistici

In questa dispensa useremo vari simboli insiemistici, che per completezza vengono riportati di seguito:

- Il simbolo $\in$ indica l'appartenenza ad un insieme, quindi per esempio $a \in A$ significa che l'elemento a appartiene all'insieme A.
- Se A, B sono due insiemi, con $A \cup B$ si indica la loro unione e con $A \cap B$ la loro intersezione.
- Con $\emptyset$ si indica l'insieme vuoto.
- Con $\mathbb{N}$ si indicano i numeri naturali. Con numeri naturali noi intendiamo $\{0, 1, 2, \dots\}$, ma alcuni testi escludono lo zero.
- Con $\mathbb{Z}$ si indicano i numeri interi, ovvero $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Con $\mathbb{R}$ si indicano i numeri reali. Inoltre, se a, b sono numeri reali con $a < b$, indichiamo con (a, b) l'insieme dei numeri reali compresi tra a e b, estremi esclusi, ovvero $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Indichiamo poi con $[a, b]$ l'insieme dei numeri reali compresi tra a e b, estremi inclusi, ovvero $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Analogamente sono definiti $[a, b), (-\infty, b), [a, +\infty)$, eccetera.

1.1.2 Definizioni

Talvolta in questa dispensa utilizzeremo il simbolo $:=$, che indica che stiamo definendo il primo membro come uguale al secondo membro. Per fare un esempio con le notazioni definite sopra:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

1.1.3 Sommatorie e produttorie

Quando si usano serie ed espansioni (vedi Taylor) è molto comodo poter scrivere una somma (anche di infiniti addendi) in modo compatto, senza indicare i primi termini e poi mettere i puntini (che non è poi così compatto...). Introduciamo quindi il simbolo di sommatoria $\sum$, che riporta sotto il più piccolo indice a partire dal quale si somma e sopra l'indice fino al quale si somma. Questa definizione vale quando l'insieme degli indici è contenuto (non in modo stretto) in $\mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

si legge come "somma per i che va da 1 a n di effe di x con i[1]" e significa, come è prevedibile, che sommo $f(x_i)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ compreso tra 1 ed n.

Introduciamo il concetto di somma su un generico insieme I di indici, che si indica con:

$$\sum_{i \in I}$$

In particolare, per definizione, la somma vuota è nulla:

$$\sum_{i \in \emptyset} f(i) = 0$$

Possiamo inoltre scrivere:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i \in \{k \in \mathbb{Z} : a \leq k \leq b\}} f(i)$$

Inoltre, la sommatoria è lineare (il che deriva dalle proprietà dell'addizione), ovvero

$$\sum_{i \in I}(f(i) + g(i)) = \sum_{i \in I} f(i) + \sum_{i \in I} g(i)$$

$$\sum_{i \in I} \lambda f(i) = \lambda \sum_{i \in I} f(i)$$

$$(A \cup B = I) \wedge (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \sum_{i \in I} f(i) = \sum_{i \in A} f(i) + \sum_{i \in B} f(i)$$

Indichiamo con $\prod$ la produttoria (ovvero l'analogo della sommatoria per l'operazione prodotto), allora analogamente vale

$$(A \cup B = I) \wedge (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \prod_{i \in I} f(i) = \Big(\prod_{i \in A} f(i)\Big) \cdot \Big(\prod_{i \in B} f(i)\Big)$$

$$\prod_{i \in I}(f(i)g(i)) = \Big(\prod_{i \in I} f(i)\Big)\Big(\prod_{i \in I} g(i)\Big)$$

[1] dove x_i è una famiglia di elementi di un insieme A indicizzati sull'insieme I degli indici ed è una notazione equivalente a indicare una funzione $x : I \to \mathbb{R}$

In particolare, nel caso di g costante uguale a λ,

$$\prod_{i\in I}(\lambda f(i)) = \prod_{i\in I} f(i) \prod_{i\in I} \lambda$$

e, in particolare, se $|I| = n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i\in I}(\lambda f(i)) = \lambda^n \prod_{i\in I} f(i)$$

Inoltre, per definizione,

$$\prod_{i\in\emptyset} f(i) = 1$$

Infine, analogamente al caso delle sommatorie:

$$\prod_{i=a}^{b} f(i) = \prod_{i\in\{k\in\mathbb{Z}: a\leq k\leq b\}} f(i)$$

1.2 Combinatoria

Gli elementi di combinatoria che stiamo per trattare sono fondamentali per molti altri argomenti affrontati in questa dispensa, tra cui l'espansione di Taylor, e hanno anche una diretta applicazione in termodinamica.

1.2.1 Permutazioni

Per permutazione di n elementi si intende una funzione bigettiva σ da $\{1, 2, \dots, n\}$ in sé. Si può visualizzare questo oggetto matematico come un modo di mischiare un mazzo di n carte distinte, oppure come un anagramma di una parola di n lettere tutte diverse tra loro.

Vogliamo sapere quante sono le permutazioni di n elementi. Cominciamo con l'osservare che abbiamo n modi di scegliere $\sigma(1)$, che può infatti assumere qualunque valore in $\{1, 2, \dots, n\}$. Dopo di che osserviamo che, una volta scelto $\sigma(1)$, abbiamo $n - 1$ modi di scegliere $\sigma(2)$, ovvero tutti gli elementi di $\{1, 2, \dots, n\}$ tranne $\sigma(1)$. Analogamente otteniamo che abbiamo $n - 2$ modi per scegliere $\sigma(3)$ e così via. Infine, abbiamo un solo modo di scegliere $\sigma(n)$. Facendo il prodotto di tutti questi numeri otteniamo il numero di permutazioni di n elementi:

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} (n + 1 - i) = \prod_{i=1}^{n} i$$

Definiamo ora il fattoriale[2]:

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i$$

Per cui si ha che le permutazioni di n elementi sono proprio $n!$ (che si legge “enne fattoriale”).

Trattiamo ora le permutazioni per ripetizione, che possiamo immaginare come anagrammi di una parola qualsiasi, in cui eventualmente qualche lettera è ripetuta. Calcoliamo a titolo di esempio il numero di anagrammi della parola “ANALISI” e ci sarà evidente come generalizzare il procedimento.

Per cominciare, riconduciamoci al caso in cui le lettere sono tutte distinte. Vogliamo perciò trovare quanti sono gli anagrammi della parola “$\mathrm{A_1N_1A_2L_1I_1S_1I_2}$”. Sappiamo che questi sono P_7. A questo punto vogliamo tener conto del fatto che alcune permutazioni le abbiamo contate più volte: ad esempio, moralmente “$\mathrm{A_1A_2L_1I_1S_1I_2N_1}$” e “$\mathrm{A_2A_1L_1I_1S_1I_2N_1}$” sono la stessa permutazione. Per tener conto di questo fatto, dobbiamo dividere per il numero di modi di permutare $\mathrm{A_1}$ e $\mathrm{A_2}$, ovvero per P_2. Analogamente, considerando la N dobbiamo dividere per P_1, considerando la I per P_2 e così via. Il numero che cerchiamo è perciò:

$$\frac{P_7}{P_2 P_1 P_1 P_2 P_1} = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$$

Più in generale, il numero di anagrammi di una parola di n lettere, detto A l'insieme delle sue lettere ed $f(\mathrm{X})$ il numero di volte in cui la lettera X compare in quella parola, è:

$$\frac{n!}{\prod_{\mathrm{X} \in A} (f(\mathrm{X}))!}$$

1.2.2 Disposizioni

Per disposizione semplice di n elementi in k posizioni si intende una funzione iniettiva da $\{1, 2, \ldots, k\}$ in $\{1, 2, \ldots, n\}$. Può essere visualizzata come un modo di scegliere k carte da un mazzo di n e di mischiarle. Analogamente a come abbiamo trovato il valore di P_n, possiamo dimostrare che:

$$D_{n,k} = \prod_{i=1}^{k} (n + 1 - i) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

[2]Per calcolare 0!, osserviamo che $\prod_{i=1}^{0} i = \prod_{i \in \{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq 0\}} i = \prod_{i \in \emptyset} i = 1$.

Per disposizione con ripetizione di n elementi in k posizioni si intende una qualsiasi funzione δ da $\{1, 2, \ldots, k\}$ in $\{1, 2, \ldots, n\}$. Può essere visualizzata come un modo di riempire k spazi con una lettera ciascuno prendendola da un alfabeto di n lettere, con eventualmente lettere che compaiono in più di uno spazio (o anche in nessuno). Ragionando analogamente ai casi precedenti, osserviamo che abbiamo n modi di scegliere $\delta(1)$, n modi di scegliere $\delta(2)$, $\ldots$, n modi di scegliere $\delta(k)$. Perciò si ha:

$$D^*_{n,k} = \prod_{i=1}^{k} n = n^k$$

1.2.3 Combinazioni

Per combinazione di n elementi in k posizioni si intende un k-sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, n\}$ (ovvero un sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, n\}$ con k elementi). Possiamo visualizzarla come un modo di estrarre k palline da un sacchetto che ne contiene n numerate da 1 a n, senza che importi l'ordine in cui vengono estratte. Possiamo perciò osservare che dividendo $D_{n,k}$ per il numero di ordinamenti possibili per k elementi, ovvero P_k, otteniamo il numero di combinazioni di n elementi in k posizioni:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

1.2.4 Coefficienti binomiali e binomio di Newton

Il $C_{n,k}$ appena definito ha molte applicazioni in matematica oltre a quella dei banali conteggi di combinatoria. Per questo, è definito il coefficiente binomiale di n su k che è sostanzialmente $C_{n,k}$ e viene indicato con la seguente notazione:

$$\binom{n}{k}$$

Il coefficiente binomiale gode di alcune proprietà utili che si possono dimostrare utilizzando la formula di $C_{n,k}$ e facendo un paio di conti:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Come forse avrete notato, quest'ultima proprietà ricorda molto la regola con cui si costruisce il triangolo di Tartaglia. Ovviamente non è una coincidenza, e di seguito mostriamo perché.

Cominciamo col considerare il seguente polinomio nelle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$q\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \coloneqq \prod_{i=1}^{n} \left(x_i + a_i\right)$$

Dove gli a_i sono delle costanti. Espandendo il prodotto otteniamo una scrittura di questo polinomio in cui compaiono tutti i possibili monomi ottenibili scegliendo un monomio per ciascun addendo e moltiplicando tra loro i monomi scelti. Vogliamo ora calcolare quanti tra i monomi ottenuti sono di grado k per un certo k tra 0 ed n. La risposta è proprio $\binom{n}{k}$: infatti, l'insieme dei monomi ottenuti può essere messo in bigezione con l'insieme delle parti di $\{1, 2, \ldots, n\}$, dove il monomio corrispondente all'insieme A è il seguente:

$$\left(\prod_{i \in A} x_i\right) \cdot \left(\prod_{i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus A} a_i\right)$$

Osserviamo che il grado di questo monomio è uguale al numero di elementi di A e che quindi il numero di monomi di grado k è il numero di k-sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, n\}$, ovvero $\binom{n}{k}$. Alla luce di ciò, consideriamo ora il seguente polinomio nella variabile x nel caso particolare in cui tutti gli a_i sono uguali tra loro a un certo valore a:

$$p(x) \coloneqq q\left(x, x, \ldots, x\right)$$

Questo polinomio si può scrivere come:

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x + a) = (x + a)^n$$

Alla luce di quanto detto sopra, sappiamo che nello sviluppo di questo prodotto compaiono $\binom{n}{k}$ termini di grado k, che però sono tutti uguali a $x^k a^{n-k}$. Si ha perciò:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k} \tag{1}$$

Questa formula è nota come binomio di Newton. Sostituendo $(x, a) = (1, 1)$ prima e $(x, a) = (-1, 1)$ poi otteniamo altre proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

1.3 Logaritmi

Sia $a > 0; a \neq 1$ e sia $f(x) = a^x$. Il logaritmo in base a, che si indica con $\log_a$, è la funzione inversa di f. Questa funzione ha per dominio l'insieme dei reali positivi ed è strettamente[3] crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente altrimenti. Inoltre, gode delle seguenti proprietà:

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a (x^c) = c \log_a x$$
$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \left(xy^{-1}\right) = \log_a x + \log_a \left(y^{-1}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

1.4 Trigonometria di base

Capita spesso che risulti più comodo fare i conti con gli angoli espressi in radianti anziché in gradi. Se α è la lunghezza di un arco di circonferenza di raggio 1, allora α è la misura in radianti dell'angolo al centro corrispondente. Va ricordato che in realtà i radianti non sono una vera e propria unità di misura: infatti, ad esempio, $0.35\,\mathrm{rad} = 0.35$. Di solito si scrive rad giusto per ricordarsi che si sta lavorando con degli angoli.

Definiamo ora le funzioni seno e coseno. Sul piano cartesiano, sia γ la circonferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio 1 e θ un angolo. Ruotando il semiasse positivo delle x dell'angolo θ intorno all'origine in senso antiorario otteniamo la semiretta s_θ. Intersecando s_θ con γ otteniamo il punto P, le

[3] Una funzione g si dice *strettamente crescente* se per $x_1 < x_2$ vale $g(x_1) < g(x_2)$. Specifichiamo *strettamente* per escludere le funzioni *debolmente* crescenti, per cui per $x_1 < x_2$ vale $g(x_1) \leq g(x_2)$. Discorso analogo per le funzioni decrescenti.

cui coordinate sono per definizione $(\cos\theta, \sin\theta)$. Come si può notare dalla definizione, queste funzioni sono periodiche di periodo 2π. Inoltre, valgono le seguenti relazioni, che è bene ricordare:

$$\sin 0 = 0;\ \cos 0 = 1;\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = -\sin(-\theta);\ \cos(-\theta) = \cos\theta = -\cos(\pi - \theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta;\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \ \text{ (per il teorema di Pitagora)}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta + \theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

Invertendo le formule con cui possiamo esprimere il coseno di 2θ possiamo trovare delle formule che esprimono il seno e il coseno di θ, a meno del segno:

$$|\sin\theta| = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}};\ |\cos\theta| = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}$$

Dato un triangolo rettangolo di ipotenusa h e con un angolo acuto uguale a θ, i cateti opposto ed adiacente a θ hanno rispettivamente le seguenti lunghezze:

$$c_{\text{opposto}} = h\sin\theta;\ c_{\text{adiacente}} = h\cos\theta$$

Dato un triangolo di lati a, b, c in cui gli angoli opposti ai lati sono rispettivamente α, β, γ, valgono i seguenti teoremi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \ \text{ (teorema dei seni)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \ \text{ (teorema di Carnot)}$$

Oltre alle funzioni seno e coseno, esistono altre funzioni trigonometriche. Le più utili sono la tangente e l'arcotangente, che sono così definite:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta};\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Queste funzioni sono entrambe periodiche di periodo π. Le formule di addizione, sottrazione e duplicazione per queste funzioni si ricavano facilmente da quelle di seno e coseno scritte sopra.

Tutte le funzioni trattate in questo paragrafo sono periodiche, quindi non iniettive, quindi non invertibili. Esistono però intervalli in cui sono invertibili. In particolare, il seno e la tangente sono invertibili in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, il coseno e la cotangente in $[0, \pi]$. L'inversa del seno in questo intervallo è detta arcoseno e si indica con arcsin. Analogamente sono definite l'arcocoseno, l'arcotangente e l'arcocotangente.

2 Successioni e serie

Per successione si intende una funzione che ha dominio $\mathbb{N}$. Generalmente tratteremo successioni di reali, che, come il nome suggerisce, sono funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Per le successioni si tende a non utilizzare la notazione che viene in generale utilizzata per le funzioni: in una successione a, il valore associato ad n viene indicato non come $a(n)$, bensì come a_n.

Una successione può essere definita in due modi: con una formula esplicita o per ricorrenza. Un esempio di definizione mediante formula esplicita è il seguente:

$$a_n = n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Un esempio di successione definita per ricorrenza è invece il seguente:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

In generale, una buona definizione per ricorrenza può anche essere data esplicitando i primi k termini ed esprimendo ciascuno degli altri in termini dei k precedenti, come ad esempio nella definizione della successione di Fibonacci:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Poste queste basi, cominciamo a studiare alcune successioni notevoli.

2.1 Progressioni aritmetiche

Dato un reale k, per progressione aritmetica di ragione k si intende una successione a che soddisfa la seguente relazione:

$$a_{n+1} = a_n + k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una progressione aritmetica di ragione k può essere esplicitata nel seguente modo:

$$a_n = a_0 + nk \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Questa successione soddisfa la seguente proprietà:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.2 Progressioni geometriche

Dato un reale q, per progressione geometrica di ragione q si intende una successione a che soddisfa la seguente relazione:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una progressione geometrica di ragione q può essere esplicitata nel seguente modo:

$$a_n = a_0 \cdot q^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Questa successione soddisfa le seguenti proprietà:

$$\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} (n+1)a_0 & \text{se } q = 1 \\ a_0 \cdot \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2}$$

Quest'ultima proprietà è banale nel caso $q = 1$, mentre nell'altro caso può essere facilmente verificata moltiplicando i due membri per $q - 1$ ed espandendo il prodotto $(q-1) \cdot \sum_{i=0}^{n} q^i$. Ci sarà utile in seguito quando parleremo di serie.

2.3 Serie

Per serie si intende una sommatoria indicizzata su $\mathbb{N}$. Possiamo vedere una serie anche come la somma di tutti i valori di una successione. Una serie si può indicare con le seguenti tre notazioni[4]:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

In generale, si tende ad usare la terza di queste tre notazioni.

Spesso una serie diverge, ovvero la somma di tutti gli elementi della successione tende a $+\infty$ (o a $-\infty$). Ci sono invece casi più interessanti dove la serie converge, ovvero in cui questa somma tende ad un valore finito. Altre volte, infine, la serie oscilla, ovvero non tende a nessun valore finito né a ∞. Per chiarire queste definizioni, facciamo un importante esempio: la serie geometrica:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

Evidentemente, per $|x| > 1$, il valore di x^i tende a ∞, per cui la somma tende a ∞, cioè la serie diverge. Ci si può facilmente convincere che la serie diverge anche per $x = 1$. Per quanto riguarda il caso $x = -1$, possiamo scrivere, senza troppo formalismo:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i = +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Si può notare come il valore di questa somma oscilli tra 0 ed 1, senza tendere a nessun valore. Considerando infine il caso $|x| < 1$, si ha che x^i tende a 0, il che ci fa sospettare che la serie converga. In effetti, non solo essa converge, ma sappiamo anche calcolare il valore a cui converge sfruttando l'Equazione 2:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{1-x} \quad \left(\text{se } |x| < 1\right) \tag{3}$$

[4]Formalmente, in realtà, la prima notazione non è equivalente alle altre due. Queste ultime infatti indicano il limite della somma da 0 a n, come risulta evidente dalla seconda notazione. Tuttavia, in questa somma gli addendi vengono sommati in ordine, ovvero non vale la proprietà commutativa. Invece, nella prima notazione gli addendi non vengono sommati in un particolare ordine. Di conseguenza, alcune serie convergono con la seconda e con la terza notazione, ma non con la prima $\left(\text{come ad esempio } \sum (-1)^i \frac{1}{i+1}\right)$

Purtroppo, in generale sapere che i termini della serie tendono a 0 non è sufficiente a dimostrare che la serie converga. Ad esempio, la serie armonica non converge:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$$

3 Limiti e continuità

Nella sezione precedente abbiamo usato due volte la notazione di limite, ma non le abbiamo dato una definizione. Data una successione a, il suo limite, se esiste, è un valore l tale che $|a_n - l|$ assume valori sempre più vicini a 0 all'aumentare di n. Scritto con un formalismo migliore:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon \qquad \forall n > n_0$$

In particolare, se $l = 0$, a è un infinitesimo. Invece, una successione tende a $+\infty$ se a_n assume valori arbitrariamente grandi all'aumentare di n. Formalmente:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > M \qquad \forall n > n_0$$

Analogamente si definisce il limite uguale a $-\infty$. In questi due casi, a è un infinito.

Oltre ai limiti di successioni possiamo definire anche i limiti di funzioni. Se $f(x)$ si avvicina sempre di più ad λ all'avvicinarsi di x a χ, allora scriviamo:

$$\lim_{x \to \chi} f(x) = \lambda$$

Dove λ e χ possono anche essere infiniti. La formalizzazione di questa definizione è analoga a quella del limite di successioni.

Se $\lambda = 0$, f è un infinitesimo per x che tende a χ, mentre se $\lambda = \infty$, f è un infinito per x che tende a χ.

Se χ è un numero, può capitare di vedere scritto:

$$\lim_{x \to \chi^+} f(x) = \lambda$$

Questo significa che, se x si avvicina a χ "da sopra", cioè restando sempre maggiore di χ, allora $f(x)$ si avvicina a λ. Analogamente, per $x \to \chi^-$, si ha che x si avvicina a χ "da sotto".

Si noti che, sia nel caso di limite di successioni, sia nel caso di limite di funzioni, non è detto che il limite esista. Ad esempio, non esiste $\lim_{x \to +\infty} \sin x$.

Tuttavia, questa è una questione che in generale non riguarda i problemi di fisica.

Definiamo ora che cosa sono le funzioni continue. Informalmente, una funzione è continua se il suo grafico può essere disegnato senza staccare la matita dal foglio, ovvero senza che ci siano salti. Formalmente, una funzione f si dice continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; si dice continua in un insieme A se è continua in ogni elemento di A; si dice continua se è continua nel suo dominio.

Siccome solitamente si ha sempre a che fare con funzioni continue, per trovare il limite di una funzione spesso basta sostituire alla x il valore a cui essa tende e fare il conto. Tuttavia, ci sono dei casi in cui questo non è possibile, perché facendo questa sostituzione si ottengono forme indeterminate. Queste forme sono le seguenti:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0 \cdot \infty;\ +\infty - \infty;\ 1^{\infty};\ \infty^0;\ 0^0$$

Se capita una forma indeterminata, bisogna cercare di rimaneggiare l'espressione della funzione affinché si semplifichino i termini che vanno a 0 o a ∞ (insomma, quelli che causano il problema), ottenendo una forma diversa da quelle indeterminate.

3.1 Due limiti notevoli

Spesso è comodo tenere a mente questo limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{4}$$

Anche il seguente limite ci tornerà utile:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \tag{5}$$

Definiamo il numero di Nepero come:

$$e := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718\ldots$$

Questo numero soddisfa la seguente relazione:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Il logaritmo in base e è anche detto logaritmo naturale, e si indica con log (viene omessa la base)[5].

[5] Alcuni testi indicano con ln il logaritmo naturale e con log il logaritmo in base 10

4 Differenziali e derivate

4.1 Differenziali e ordini di infinitesimi

Nel corso di fisica del liceo avrete certamente conosciuto la notazione Δx, che indica l'incremento di una variabile x. Nei problemi che ci interesseranno maggiormente nel corso di questo stage, tuttavia, questo incremento sarà spesso un incremento infinitesimo, ovvero molto vicino a zero, che indicheremo con un'altra notazione: $\mathrm{d}x$. Questa notazione si chiama *differenziale*. Il differenziale è definito anche per le funzioni: se $y = f(x)$, scriviamo $\mathrm{d}y = f(x + \mathrm{d}x) - f(x)$.

Siano a, b due infinitesimi definiti come nella sezione precedente (ovvero due successioni o due funzioni per x che tende a χ). Studiamo il limite di $\frac{a}{b}$, (per $n \to +\infty$ o per $x \to \chi$). Se questo limite è 0, a ha un ordine di infinitesimo maggiore di b. Se è ∞, $+\infty$ o $-\infty$, a ha un ordine di infinitesimo minore di b. Se è un valore finito diverso da 0, a e b hanno lo stesso ordine di infinitesimo. Esistono anche casi in cui tale limite non esiste, ma nei problemi di fisica questo accade raramente. Moralmente, se a ha un ordine di infinitesimo maggiore di b, allora possiamo trascurare a nei conti in cui compare b.

Possiamo utilizzare gli ordini di infinitesimi anche quando lavoriamo coi differenziali. Infatti, possiamo considerare un prodotto di n differenziali e considerarlo come un infinitesimo di ordine n, e trascurare gli infinitesimi di ordine maggiore.

4.2 Definizione di derivata

Avete probabilmente visto al liceo che il coefficiente angolare di una retta si può scrivere come $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Considerando una funzione $y = f(x)$, facendo diventare gli incrementi infinitesimi, troviamo che il coefficiente angolare della tangente ad una funzione in un punto, che è $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Questo rapporto tra differenziali, al variare di x, dà la derivata della funzione f, che è a sua volta una funzione. Quest'ultima funzione, calcolata in $x = x_0$, dà la derivata di f in x_0.

Ricordiamo che non tutte le funzioni sono derivabili, anche se in fisica capita raramente di trovarne di non derivabili. Ad esempio, la funzione $y = |x|$ non è derivabile in $x = 0$. Si ha però che tutte le funzioni derivabili sono continue.

Osserviamo che possiamo derivare la funzione derivata di f, che possiamo chiamare *derivata prima*, per ottenere la *derivata seconda*, la quale può essere a sua volta derivata ottenendo la *derivata terza*, e così via.

Supponiamo che f abbia più di una variabile. Ad esempio, supponiamo che ne abbia tre, che chiamiamo x, y, z. Questa funzione ha una derivata per ogni variabile e ognuna di queste derivate è detta *derivata parziale*. La derivata parziale di f rispetto ad x può essere calcolata come la derivata ordinaria, considerando y e z come fossero costanti anziché variabili.

4.2.1 Notazioni

Data una funzione f, la sua derivata prima si indica spesso con f', la derivata seconda con f'' e così via. Alternativamente, la derivata n-esima si può indicare con $f^{(n)}$. C'è anche chi la indica con f^{N}, dove con N intendiamo la scrittura di n in romano. Queste tre notazioni sono dovute a Lagrange.

La notazione di Leibniz è in linea con la definizione che abbiamo dato: la derivata di f si indica con $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. La derivata seconda di f si può indicare con $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$. Intuitivamente, è un po' come fare il differenziale di $\mathrm{d}f$ e dividerlo due volte per $\mathrm{d}x$. Scrivendo il differenziale di $\mathrm{d}f$ come $\mathrm{d}\,\mathrm{d}f$, possiamo scrivere che la derivata seconda di f è $\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}f}{(\mathrm{d}t)^2}$. Nella notazione di Leibniz, questa si indica con $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, e più in generale la derivata n-esima come $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$. Questa notazione consente di scrivere anche le derivate parziali: $\frac{\partial f}{\partial x}$ è la derivata parziale di f rispetto alla variabile x e $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ è la derivata parziale n-esima rispetto alla stessa variabile.

Nella notazione di Arbogast, si indica con $\mathrm{D}f$ la derivata prima di f e con $\mathrm{D}^n f$ la derivata n-esima di f.

Introduciamo infine la notazione di Newton, molto compatta e molto usata in fisica per derivare funzioni rispetto al tempo. Se x è una funzione del tempo, $\dot{f} := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ e $\ddot{f} := \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$.

Supponiamo di voler derivare un vettore. Ad esempio, una funzione $\vec{f}(t) = \big(f_x(t), f_y(t), f_z(t)\big)$. La sua derivata va calcolata componente per componente, per cui si ha $\dot{\vec{f}}(t) = \Big(\dot{f}_x(t), \dot{f}_y(t), \dot{f}_z(t)\Big)$.

4.2.2 Utilità

Le derivate sono comode per trovare i punti in cui una funzione è massima o minima. Infatti, in quei punti la derivata è 0. Si deve però tenere a mente che non vale il viceversa: esistono infatti funzioni che hanno derivata 0 in un punto che non è di massimo né di minimo: ad esempio, la derivata di x^3 in $x = 0$ è nulla, come vedremo dopo, ma in $x = 0$ la funzione non è massima né minima.

Ci sono poi alcune grandezze fisiche che sono definite proprio come derivate di altre grandezze rispetto ad alcune variabili. Ad esempio, la velocità e l'accelerazione istantanee sono rispettivamente la derivata prima e seconda della posizione rispetto al tempo.

4.3 Calcolo delle derivate

4.3.1 Derivate di potenze

Si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ed, in particolare, la derivata di $x^0 = 1$ è 0, come ci potevamo aspettare dal fatto che x^0 è costante, e perciò una retta orizzontale. La tangente a questa funzione sarà perciò sempre orizzontale, ovvero con coefficiente angolare 0.

Dimostriamo questa affermazione nel caso più semplice in cui α è un intero positivo. Ricordando com'è definito il differenziale di una funzione sappiamo che:

$$\mathrm{d}\left(x^\alpha\right) = \left(x + \mathrm{d}x\right)^\alpha - x^\alpha$$

Da cui, ricordando l'Equazione 1:

$$\mathrm{d}\left(x^\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}\mathrm{d}x^n x^{\alpha-n} - x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=2}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}\mathrm{d}x^n x^{\alpha-n} \approx \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato tutti gli infinitesimi di ordine superiore al primo. Da questo otteniamo proprio quello che cercavamo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\alpha = \frac{\alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^+$$

Il risultato per $\alpha \in \mathbb{R}$ è del tutto analogo e si può ottenere scrivendo $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ e applicando le regole che vedremo in seguito.

4.3.2 Linearità della derivata

Osserviamo che l'operatore derivata è lineare, ovvero che prese due qualunque funzioni derivabili f, g e un numero λ si ha che:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x) + g(x)\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Entrambe queste proprietà sono ovvie se si pensa ai differenziali. Infatti, si ha:

$$\mathrm{d}(f(x) + g(x)) = (f(x + \mathrm{d}x) + g(x + \mathrm{d}x)) - (f(x) + g(x)) =$$

$$= (f(x + \mathrm{d}x) - f(x)) + (g(x + \mathrm{d}x) - g(x)) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}(\lambda f(x)) = (\lambda f(x + \mathrm{d}x)) - (\lambda f(x)) = \lambda(f(x + \mathrm{d}x) - f(x)) = \lambda\,\mathrm{d}f$$

4.3.3 Derivata della composizione di due funzioni

Scrivendolo nella Notazione di Leibniz, abbiamo una funzione f che soddisfa $f(x) = g(h(x))$ per certe funzioni g, h che sappiamo derivare. Vogliamo calcolare la derivata di f:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(h(x))}{\mathrm{d}h(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

In realtà questa dimostrazione non è completamente precisa: potrebbero infatti sorgere problemi moltiplicando e dividendo per una quantità che si annulla in punti arbitrariamente vicini a quello in cui stiamo derivando. Tuttavia, è più snella da scrivere in questa notazione, ed è sufficiente per gli scopi di questa dispensa.

4.3.4 Derivata del prodotto e del rapporto

Date due funzioni f, g di cui conosciamo le derivate, vogliamo calcolare la derivata del loro prodotto:

$$\mathrm{d}(f(x) \cdot g(x)) = f(x + \mathrm{d}x) \cdot g(x + \mathrm{d}x) - f(x)g(x) =$$

$$f(x+\mathrm{d}x) \cdot (g(x+\mathrm{d}x) - g(x)) + g(x)(f(x+\mathrm{d}x) - f(x)) = f(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}g + g(x)\,\mathrm{d}f =$$

$$= (f(x) + \mathrm{d}f)\,\mathrm{d}g + g(x)\,\mathrm{d}f = f(x)\,\mathrm{d}g + g(x)\,\mathrm{d}f + \mathrm{d}f\,\mathrm{d}g$$

Trascurando gli infinitesimi di second'ordine[6] otteniamo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{f(x)\,\mathrm{d}g + g(x)\,\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Vogliamo ora calcolare la derivata di $\frac{1}{f}$:

$$\mathrm{d}\frac{1}{f} = \frac{1}{f(x + \mathrm{d}x)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x + \mathrm{d}x)}{f(x)f(x + \mathrm{d}x)} = \frac{-\mathrm{d}f}{\big(f(x)\big)^2 - f(x)\,\mathrm{d}f}$$

Da cui, trascurando gli infinitesimi a denominatore:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\mathrm{d}f}{\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x} = -\frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^2}$$

[6] per essere rigorosi, si mostra che

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))(g(x+h) - g(x))}{h} = \lim_{h \to 0}(f(x+h) - f(x))\frac{(g(x+h) - g(x))}{h} = 0 \cdot g'(x) = 0$$

A questo punto, se vogliamo calcolare la derivata di $\frac{f}{g}$, ci basta esprimere questa funzione come prodotto di f e $\frac{1}{g}$ e svolgere un paio di conti, ottenendo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

4.3.5 Derivata della funzione inversa

Sia f una funzione invertibile di cui conosciamo la derivata e sia f^{-1} la sua inversa. Vogliamo calcolare la derivata di f^{-1}. Osserviamo che si ha:

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f^{-1}(x)}\right)^{-1}$$

Da cui, detto $y = f^{-1}(x)$, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

4.3.6 Derivate di esponenziali e logaritmi

Dato $a > 0; a \neq 1$, sia $f(x) = a^x$. Osserviamo che si ha:

$$f(x) = \left(e^{\log a}\right)^x = (e^x)^{\log a}$$

Perciò, se sappiamo calcolare la derivata di e^x, allora sapendo come derivare le funzioni composte potremo calcolare la derivata di f. Ricordando l'Equazione 6, possiamo applicare la linearità della derivata per trovare la derivata di e^x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{i!}x^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = e^x$$

A questo punto, possiamo scrivere:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x \cdot (e^x)^{\log a - 1}\log a = e^x \cdot (e^x)^{\log a - 1}\log a = e^{x\log a}\log a = a^x \log a$$

Ora, noi vogliamo calcolare la derivata di $\log_a$, che è l'inversa di f. Perciò si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a x) = \frac{1}{f'(\log_a x)} = \frac{1}{a^{\log_a x}\log a} = \frac{1}{x\log a}$$

In particolare, la derivata di $\log x$ è $\frac{1}{x}$.

4.3.7 Derivate di funzioni goniometriche

Calcoliamo la derivata del seno:

$$\mathrm{d}\sin x = \sin(x + \mathrm{d}x) - \sin(x) = \sin x \cos(\mathrm{d}x) + \cos x \sin(\mathrm{d}x) - \sin x =$$

$$= (\cos(\mathrm{d}x) - 1)\sin x + \cos x \sin(\mathrm{d}x)$$

Ricordando l'Equazione 4, possiamo sostituire $\sin(\mathrm{d}x)$ con $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}\sin x = (\cos(\mathrm{d}x) - 1)\sin x + \cos x\,\mathrm{d}x$$

Ricordando l'Equazione 5, sappiamo che $\cos(\mathrm{d}x) - 1$ ha un ordine di infinitesimo superiore a $\mathrm{d}x$, e può perciò essere trascurato. Abbiamo perciò:

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \cos x$$

Ricordando $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, otteniamo, con la regola per derivare le funzioni composte:

$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

Ricordando $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, otteniamo che:

$$\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x} = \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Analogamente troviamo la derivata della cotangente. Verificate per esercizio le seguenti derivate:

$$\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\arccos x}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\arctan x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arccot}\, x}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

4.4 Serie di Taylor

Supponiamo di conoscere il valore di f e di tutte le sue derivate calcolate in x_0. Vogliamo studiare come si comporta f nei punti vicini ad x_0. Con una rozza approssimazione, per x molto vicino ad x_0 possiamo dire:

$$f(x) \approx f(x_0)$$

Cerchiamo di fare un'approssimazione un pelo più fine. Approssimiamo f alla retta passante per il punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ con coefficiente angolare $f'(x_0)$. Otteniamo l'approssimazione al primo ordine:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Vogliamo migliorare ulteriormente la nostra approssimazione. Cerchiamo un polinomio p al più di secondo grado tale che valga $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$ e $p''(x_0) = f''(x_0)$. Otteniamo perciò l'approssimazione al secondo ordine:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2}{2}$$

Procedendo analogamente possiamo trovare, più in generale, l'approssimazione all'n-esimo ordine:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!}$$

A seconda della precisione di cui ho bisogno, posso scegliere il valore di n. Si tenga però sempre a mente che l'approssimazione migliore si ha sempre quando x è vicino ad x_0.

Spesso conviene scegliere $x_0 = 0$, ma in alcuni casi non è possibile. Ad esempio, non posso scegliere $x_0 = 0$ per le funzioni $\log x$ e $\frac{1}{x}$. In questi casi, conviene scegliere $x_0 = 1$ o, per far venire meglio i conti, applicare Taylor con $x_0 = 0$ alle funzioni $\log(x + 1)$ e $\frac{1}{x+1}$.

Per alcune funzioni ed in alcuni intorni di x_0, possiamo ottenere il valore esatto di $f(x)$, facendo tendere $n \to +\infty$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!}$$

5 Complessi

L'insieme dei numeri complessi, indicato con $\mathbb{C}$, è un insieme con le operazioni di somma e prodotto definite come vedremo nei prossimi paragrafi.

In questo insieme valgono tutte le proprietà delle operazioni come su $\mathbb{R}$, ovvero la somma e il prodotto sono commutative e associative, con elementi neutri rispettivamente 0 e 1, vale la proprietà distributiva ed esistono l'opposto di ogni elemento e il reciproco di ogni elemento diverso da 0.

Questo insieme nasce per risolvere il problema della fattorizzazione dei polinomi nei reali, dove, ad esempio, non si trovano soluzioni per $x^2 + 1 = 0$. Il problema di fondo è che una potenza pari di un reale è sempre non negativa. Per ovviare a ciò è stata inventata l'unità immaginaria[7], i, tale che $i^2 = -1$. I numeri complessi sono della forma

$$a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

5.1 Somma di complessi

Diamo ora due definizioni: la parte reale di un complesso $z = a + ib$ è così definita:

$$\mathrm{Re}(z) = a$$

la parte immaginaria di un complesso $z = a + ib$ è così definita:

$$\mathrm{Im}(z) = b$$

quindi $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$.
Poiché, dato un complesso z, $\mathrm{Re}(z)$ e $i\mathrm{Im}(z)$ sono a loro volta numeri complessi, possiamo scrivere:

$$(a + ib) + (c + id) = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d)$$

$$\mathrm{Re}(w + z) = \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Re}(z)$$
$$\mathrm{Im}(w + z) = \mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)$$

Da ciò emerge che i complessi si sommano "componente per componente", come se fossero vettori nel piano o polinomi nella variabile i. Questo ci consente di rappresentarli come vettori nel piano di Gauss, cioè il piano cartesiano con la parte reale sull'asse x e la parte immaginaria sull'asse y.

5.2 Prodotto di complessi

Il prodotto invece non assomiglia al prodotto scalare dei vettori, né a quello vettoriale. Poiché, se scriviamo $z = a + ib$, anche a e ib sono dei complessi, abbiamo che il prodotto di due complessi è

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc)$$

[7]Poiché quando si trattano i circuiti si usa la i per indicare l'intensità di corrente, capita che l'unità immaginaria si indichi con la j.

5.2.1 Notazione polare

Determinare un complesso z specificandone parte reale e parte immaginaria non è l'unica possibilità. Una notazione comoda per esprimere il prodotto è la notazione polare, che determina un complesso z specificando la lunghezza ρ (detta modulo) del segmento che unisce l'origine al punto di coordinate $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ e l'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ (detto argomento) che tale segmento forma col semiasse reale positivo. Le proiezioni di tale segmento sugli assi reale e immaginario avranno quindi lunghezza $\rho \sin \theta$ e $\rho \cos \theta$.

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = \rho \cos \theta + \rho i \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

A questo punto, vediamo come si comporta il prodotto usando le coordinate polari.

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)\rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \rho_1\rho_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)) = \rho_1\rho_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Quindi il prodotto di due complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come angolo la somma degli angoli.

5.2.2 Notazione esponenziale

La funzione esponenziale nei complessi è così definita: si prendano $a, b \in \mathbb{R}$, allora

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i \sin(b))$$

Verifichiamo che questa definizione ci consente di espandere con Taylor e, seno e coseno nei complessi come se fossimo nei reali.

$$\frac{\mathrm{d} \sin(x)}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$$

$$\frac{\mathrm{d} \cos(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$$

Taylor

$$\sin(z) = \frac{z^0 \sin(0)}{0!} + \frac{z \cos(0)}{1!} + \frac{z^2(-\sin(0))}{2!} + \frac{z^3(-\cos(0))}{3!} + \frac{z^4(-(-\sin(0)))}{4!} + \ldots$$

$$\cos(z) = \frac{z^0 \cos(0)}{0!} + \frac{z(-\sin(0))}{1!} + \frac{z^2(-\cos(0))}{2!} + \frac{z^3(-(-\sin(0)))}{3!} + \frac{z^4 \cos(0)}{4!} + \ldots$$

Formalmente,

$$\sin(z) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \frac{z^{2h+1}}{(2h+1)!}$$

$$\cos(z) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \frac{z^{2h}}{(2h)!}$$

Vogliamo verificare che la definizione di definizione di e^z è equivalente a

$$e^z = \lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} \frac{z^h}{h!}$$

Concentriamoci sul caso particolare $z = i\theta, \theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} \frac{(i\theta)^h}{h!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} i^h \frac{\theta^h}{h!}$$

Sia $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Cambiamo variabile e, notando che $n \to +\infty \Rightarrow k \to \lfloor \frac{+\infty}{2} \rfloor = +\infty$ scriviamo

$$e^{i\theta} = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{h=0}^{k} \frac{(i\theta)^{2h}}{(2h)!} + \sum_{h=0}^{k} \frac{(i\theta)^{2h+1}}{(2h+1)!} \right) = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{h=0}^{k} \frac{(i\theta)^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{h=0}^{k} \frac{i^{2h}\theta^{2h+1}}{(2h+1)!} \right)$$

Notiamo che i^n è reale per n pari. Inoltre, $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$

$$e^{i\theta} = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{h=0}^{k} \frac{(-1)^h\theta^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{h=0}^{k} \frac{(-1)^h\theta^{2h+1}}{(2h+1)!} \right)$$

Dagli sviluppi in Taylor di seno e coseno otteniamo

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Che è quello che volevamo. Quindi, prendiamo u e z appartenenti a $\mathbb{C}$, li riscriviamo come

$$u = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z = \rho_2 e^{i\theta_2}$$
$$uz = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

che è il complesso che ha come modulo il prodotto dei moduli e come angolo la somma degli angoli, come già abbiamo visto usando la notazione polare.

5.2.3 Formula di De Moivre

Un'utile applicazione dell'esponenziale complesso alla trigonometria è la formula di De Moivre. Sia $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, allora

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

perché

$$(\cos x + i\sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

5.3 Il coniugio

Sia $z = a + ib$ un complesso. Allora si definisce coniugato di z il complesso $\overline{z} = a - ib$. In particolare, notiamo che

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad \overline{z} = \rho e^{-i\theta}$$

perché un complesso e il suo coniugato sono simmetrici rispetto all'asse reale: pensate alla simmetria rispetto all'asse x nel piano cartesiano, definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

ed è la stessa trasformazione che stiamo applicando al complesso z.
Notiamo così un forte legame tra coniugio e simmetria, che approfondiremo nei prossimi paragrafi.

5.4 Trasformazioni nel piano di Gauss

I complessi si rivelano un potente strumento per descrivere le isometrie nel piano in modo elegante e compatto (più comodo della calcolosa e prolissa geometria analitica).

5.4.1 Traslazioni

Ricordando che i complessi si sommano allo stesso modo dei vettori di $\mathbb{R}^2$, per descrivere una traslazione è sufficiente scrivere il vettore che rappresenta lo spostamento dei punti come numero complesso. Nel piano cartesiano, la traslazione di un vettore $\vec{v} = (x_v, y_v)$ è rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = x + x_v \\ y' = y + y_v \end{cases}$$

che, scritto nel linguaggio dei complessi, diventa

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(v) \\ \mathrm{Im}(z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(v) \end{cases}$$

cioè

$$z' = z + v$$

Notiamo che il coniugato è un comodo strumento per ottenere parte reale, parte immaginaria e modulo di un complesso $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$

$$z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$$

$$z - \overline{z} = a + ib - a + ib = 2ib = 2i\mathrm{Im}(z)$$
$$z\overline{z} = \rho e^{i\theta}\rho e^{-i\theta} = \rho^2 e^0 = \rho^2$$

5.4.2 Rotazioni

Per scrivere le rotazioni, facciamo alcune osservazioni usando la notazione esponenziale:

$$\rho e^{i\theta} e^{i\phi} = \rho e^{i(\theta+\phi)}$$

Questo descrive una rotazione di un angolo orientato ϕ con centro nell'origine perché conserva il modulo e aumenta l'argomento di un angolo orientato ϕ. Per scrivere una rotazione di un complesso z di un angolo ϕ con centro in c, consideriamo che

$$z = c + (z - c)$$

Ruotare intorno al centro c equivale a ruotare la componente $z - c$ di un angolo ϕ, quindi

$$z' = c + (z - c)e^{i\phi}$$

5.4.3 Simmetrie

Abbiamo visto che il coniugio rappresenta la simmetria rispetto all'asse reale. La simmetria rispetto a un generico asse si ottiene facendo coincidere tale asse con l'asse reale, applicando il coniugio e poi facendo coincidere l'asse reale con l'asse di simmetria. Il calcolo è volutamente omesso, in quanto oggetto di un esercizio.

La simmetria centrale è la rotazione di π intorno al centro c, già vista nel paragrafo precedente. Considerando che $e^{i\pi} = -1$, questa particolare rotazione si scrive come

$$z = c - (z - c)$$

6 Integrali

6.1 Integrale indefinito

Una funzione F si dice primitiva di f se vale $F' = f$. Si può dimostrare che ogni funzione continua ammette sempre una primitiva. Sebbene ogni funzione derivabile abbia una sola derivata, ogni funzione continua ha infinite primitive. Infatti, se F è una primitiva di f, allora $F + C$ è una primitiva di f per ogni costante C. Questo si può facilmente verificare sfruttando la linearità della derivata.

Se f è una funzione continua ed F una sua primitiva, definiamo l'integrale indefinito di f come la famiglia delle sue primitive:

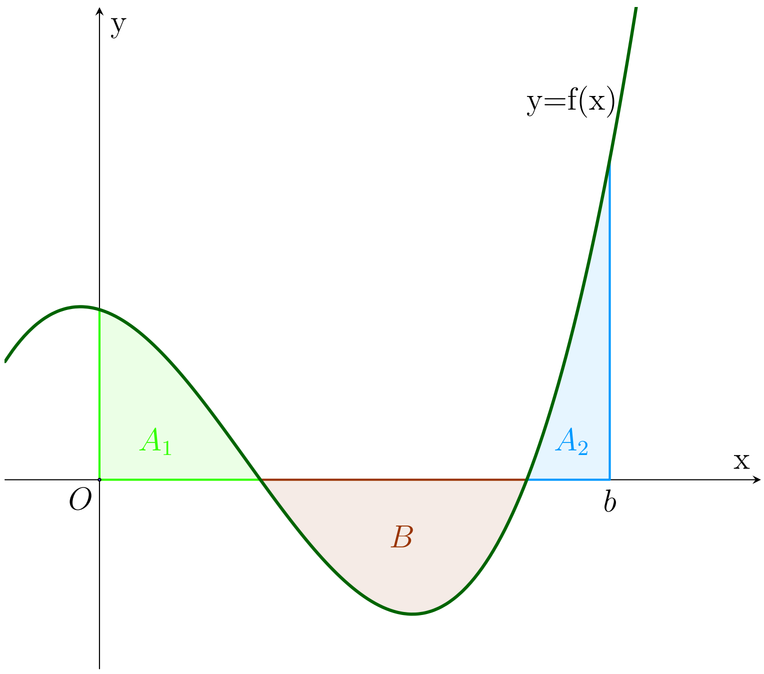
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

6.2 Integrale definito

Sia f una funzione continua[8] in $[a,b]$ con $a \leq b$. Consideriamo i tratti di $[a,b]$ in cui f è maggiore o uguale a 0. Sia A l'area sottesa da f, ovvero compresa tra f e l'asse x, in questi tratti. Analogamente, sia B l'area sottesa da f nei tratti di $[a,b]$ dove f è minore di 0. L'integrale definito di f da a a b è:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A - B$$

I numeri a e b vengono detti *estremi di integrazione*. Ad esempio, per la funzione in figura, si ha $\int_0^b f(x)dx = A_1 + A_2 - B$.



Vediamo ora intuitivamente che senso ha questa bizzarra notazione. $f(x)\,\mathrm{d}x$ può essere visto come l'area di un rettangolo di altezza $|f(x)|$ e base $\mathrm{d}x$, con

[8] Ci sono anche casi in cui la funzione è integrabile anche se non è continua: è sufficiente che abbia un numero finito di salti. La trattazione della teoria delle funzioni integrabili esula dagli scopi di questa lezione e di queste dispense.

segno + se $f(x)$ è positiva e con segno - se è negativa. La S del simbolo di integrale sembra suggerirci che noi stiamo in un certo senso facendo la somma di tutte queste aree con segno al variare di x in $[a, b]$.

Valgono queste importanti proprietà:

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- Sia $a < b$, allora si pone $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
  Questa proprietà ci dice che quando invertiamo gli estremi di integrazione va cambiato il segno dell'integrale. Tornando alla nostra visione intuitiva scritta sopra, questa proprietà si può capire pensando al fatto che partendo da $x = b$ e arrivando ad $x = a$ sommando le aree di tutti i rettangolini, le basi dx dei rettangolini sono tutte negative. Al contrario, partendo da $x = a$ e arrivando ad $x = b$, le basi dx sono tutte positive.
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

6.3 Calcolo degli integrali

6.3.1 Calcolo degli integrali definiti

Vi sarete certamente accorti che le notazioni dell'integrale indefinito e di quello definito sono quasi identiche. Questo è perché questi due oggetti sono molto legati tra loro.

Sia a un qualsiasi elemento del dominio di f. Definiamo la funzione integrale F in questo modo:

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Calcoliamo la derivata di F:

$$\mathrm{d}F = \int_a^{x+\mathrm{d}x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\mathrm{d}x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Osserviamo che, moralmente, l'ultimo integrale scritto è la somma di un solo elemento, ovvero $f(x)\,\mathrm{d}x$, da cui:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

Abbiamo perciò scoperto che F è primitiva di f, quindi fare l'integrale di una funzione f significa farne l'"antiderivata". Inoltre, osserviamo che si ha:

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(y) - F(x) = (F(y)+C) - (F(x)+C)$$

Da cui segue che, presa una qualsiasi funzione Φ primitiva di f, si ha:

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(y) - \Phi(x)$$

Questo, in pratica, ci dà il modo di calcolare gli integrali definiti se sappiamo calcolare quelli indefiniti. Purtroppo, non tutte le funzioni hanno un integrale indefinito che si può esprimere in termini di funzioni elementari, come ad esempio e^{-x^2}. Nelle prossime sezioni vedremo come integrare alcune funzioni per cui questo è possibile.

6.3.2 Linearità dell'integrale indefinito

Anche l'integrale indefinito è un operatore lineare. Infatti, comunque si prendano due funzioni f, g ed un reale λ si ha:

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Per verificare questo fatto, basta ricordarsi che anche la derivata è un operatore lineare. Quindi se F è primitiva di f e G è primitiva di g si ha:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g$$

$$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$$

6.3.3 Integrali di potenze ed esponenziali

Vogliamo integrare x^α, dove α è un numero reale diverso da -1. Osserviamo che si ha:

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\int (\alpha+1)x^\alpha\,\mathrm{d}x$$

Ci accorgiamo però che la derivata di $x^{\alpha+1}$ è proprio $(\alpha+1)x^\alpha$, da cui:

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$

Analogamente, dato $a > 0; a \neq 1$, si ottiene:[9]

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\log a}a^x + C$$

[9]Anche se al liceo il logaritmo naturale viene spesso indicato con *ln* mentre il logaritmo in base 10 con *log*, in questa dispensa adotteremo il simbolo *log* per il logaritmo naturale.

6.3.4 Integrale di $1/x$

Ricordandosi che la derivata di $\log x$ è $\frac{1}{x}$, verrebbe da scrivere:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log x + C$$

Tuttavia, c'è un problema: $\frac{1}{x}$ è definita anche sui negativi, mentre $\log x$ no, per cui questa formula funziona solo per $x > 0$. Proviamo a derivare $\log(-x)$:

$$\frac{\mathrm{d}\log(-x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(-x)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Sappiamo perciò che, per $x < 0$, vale:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(-x) + C$$

Perciò, più in generale, si ha:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + C$$

6.3.5 Integrali di funzioni trigonometriche

Ricordando come si derivano seno e coseno, è facile dedurre che:

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C; \quad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

Proviamo ad integrare $\sin^2 x$. Dalla formula di duplicazione per il coseno otteniamo:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Da cui, sfruttando la linearità dell'integrale:

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}x^0\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

Ci accorgiamo però che la derivata di $\sin(2x)$ è proprio $2\cos(2x)$, da cui:

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

Analogamente, si può calcolare l'integrale di $\cos^2 x$ (esercizietto).

Calcoliamo ora l'integrale della tangente:

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$$

Ci accorgiamo però che $-\sin x$ è la derivata di $\cos x$, da cui segue che $\frac{-\sin x}{\cos x}$ è la derivata di $\log |\cos x|$. Si ha perciò:

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\log |\cos x| + C$$

Analogamente, si può calcolare l'integrale di $\cot x$ (altro eserciziettto).

6.3.6 Integrazione per parti

Supponiamo di dover calcolare l'integrale indefinito di un prodotto di due funzioni f, h e di accorgerci che h è la derivata di una certa funzione g. Possiamo perciò scrivere che:

$$\int f(x) \cdot h(x) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

La tecnica di calcolare gli integrali usando questa relazione è detta integrazione per parti. Questa uguaglianza può essere facilmente dimostrata isolando $f(x) \cdot g(x)$ e sfruttando la linearità dell'integrale, ottenendo un'uguaglianza equivalente:

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x) \, \mathrm{d}x + \int f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x = \int (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) \, \mathrm{d}x$$

Ricordando la regola per derivare il prodotto di due funzioni, questa uguaglianza risulta ovvia. Vediamo un esempio.

$$\int xe^{2x} dx = \int x \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Provate per esercizio ad integrare $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ per parti.

6.3.7 Integrali di logaritmi

Cominciamo col calcolare l'integrale di $\log x$. Dobbiamo utilizzare l'integrazione per parti:

$$\int \log x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \log x \, \mathrm{d}x = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \log x - \int 1 \, \mathrm{d}x$$

Da cui:

$$\int \log x \, \mathrm{d}x = x \log x - x + C = x\,(\log x - 1) + C$$

A questo punto, ricordandoci la formula del cambio di base dei logaritmi, possiamo tranquillamente integrare $\log_a x$ per ogni a positivo diverso da 1:

$$\int \log_a x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\log x}{\log a} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{\log a}\,(\log x - 1) + C$$

Provate per esercizio, con lo stesso procedimento, ad integrare l'arcoseno e l'arcocoseno.

6.3.8 Integrazione per sostituzione (a.k.a. cambio di variabile)

Talvolta conviene cambiare la variabile di integrazione per riuscire a fare i conti meglio. L'idea è la seguente:

$$\int f \, \mathrm{d}x = \int f \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t$$

Per poter applicare questa idea c'è bisogno di poter scrivere x come $g(t)$, dove g è una funzione bigettiva. Scrivendo la formula sopra più esplicitamente, si ha:

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f(g(t)) g'(t) \, \mathrm{d}t$$

Ossia, più formalmente e in termini di integrali definiti, date $g : [a, b] \to [c, d]$ C^1 (cioè derivabile con g' continua) e $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f\left(g(t)\right) g'(t) dt$$

Cominciamo a vedere un esempio. Vogliamo calcolare il seguente integrale:

$$\int \sqrt{1 - Rx^2} \, \mathrm{d}x$$

Dove R è un reale positivo. In questo caso, definiamo t nel seguente modo:

$$t = \arccos\left(\sqrt{R}x\right)$$

Invertendo questa formula otteniamo x in funzione di t:

$$x = \frac{\cos t}{\sqrt{R}}$$

Da cui otteniamo:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sin t}{\sqrt{R}}$$

Il nostro integrale diventa perciò:

$$\int \sqrt{1-\cos^2 t} \cdot \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{R}}\right) \mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{R}} \int \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4\sqrt{R}} \sin(2t) - \frac{1}{2\sqrt{R}} t + C$$

In cui possiamo sostituire la definizione di t ottenendo:

$$\int \sqrt{1-Rx^2} \, \mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{1-Rx^2}}{2} - \frac{\arccos\left(\sqrt{R}x\right)}{2\sqrt{R}} + C$$

Se il nostro obiettivo era di calcolare un integrale definito, tuttavia, questo ultimo passaggio si poteva saltare. Infatti, volendo cambiare variabile passando dalla variabile x alla variabile t legate dalla relazione $x = g(t)$ con $g(t)$ bigettiva (e dunque $t = g^{-1}(x)$, dove g^{-1} è la funzione inversa di g), si ha

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) \, \mathrm{d}t$$

L'idea è che se x varia tra a e b, allora t varia tra $g^{-1}(a)$ e $g^{-1}(b)$.
Nell'esercizio precedente si ha $g(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{R}}$, mentre $g^{-1}(x) = \arccos\left(\sqrt{R}x\right)$.
Alla luce di quanto detto, potevamo infatti scrivere:

$$\int_a^b \sqrt{1-Rx^2} \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \sqrt{1-\cos^2 t} \cdot \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{R}}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \left(\frac{1}{4\sqrt{R}} \sin(2\beta) - \frac{1}{2\sqrt{R}}\beta\right) - \left(\frac{1}{4\sqrt{R}} \sin(2\alpha) - \frac{1}{2\sqrt{R}}\alpha\right)$$

dove $\alpha = \arccos\left(\sqrt{R}a\right)$ e $\beta = \arccos\left(\sqrt{R}b\right)$.
Abbiamo dunque capito che quando si cambia variabile, è necessario cambiare anche gli estremi di integrazione.

Vediamo ora alcuni casi semplici ma importanti della formula di sostituzione:

- Traslazione: $\int_a^b f(x-c)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x)dx \qquad f : [a-c, b-c] \to \mathbb{R}$
- $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x)dx = \lambda \int_a^b f(\lambda x)\, dx \quad \forall\ \lambda > 0$

- se f è pari, $\int_a^b f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$
- f dispari $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
- se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è T-periodica e integrabile su tutti gli intervalli, l'integrale di f su qualunque intervallo di lunghezza T è lo stesso.

  Dimostrazione.
  $$\int_a^{a+T} f dx = \int_0^{a+T} f dx - \int_0^a f dx = \int_0^T f dx + \int_T^{a+T} f dx - \int_0^a f dx$$
  Operiamo una traslazione sul secondo integrale:
  $$\begin{aligned}\int_0^T f dx + \int_T^{a+T} f dx - \int_0^a f dx &= \int_0^T f dx + \int_0^a f(x+T) dx - \int_0^a f dx \\ &= \int_0^T f dx + \left(\int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(x)dx\right) \\ &= \int_0^T f dx\end{aligned}$$
  $\square$

6.3.9 Integrali impropri

Capita a volte che in un integrale definito la funzione non sia definita in uno degli estremi di integrazione. Ad esempio, può capitare di dover calcolare:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

Come abbiamo già visto, l'integrale indefinito di questa funzione è:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$$

Da cui vorremmo poter scrivere:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2$$

Effettivamente, questa cosa la possiamo scrivere. Formalmente, quello che stiamo facendo è un passaggio al limite, ovvero stiamo calcolando:

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

Analogamente, possiamo procedere a calcoli di questo tipo quando uno degli estremi di integrazione (o entrambi) è infinito, come ad esempio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Sapendo che l'integrale indefinito di questa funzione è:

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$$

Otteniamo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 0 + 1 = 1$$

6.3.10 Altri integrali notevoli

Come già detto, non siamo in grado di esprimere bene alcuni integrali indefiniti. Esistono però delle formule che consentono di aggirare questo problema quando bisogna calcolare integrali definiti con certi estremi di integrazione. Di seguito, ad esempio, riportiamo l'integrale della gaussiana:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Dove $a > 0$ (di solito $a = 1/2$).

Esistono delle generalizzazioni di questa formula che talvolta servono, ma non dovete davvero ricordarvele. Per completezza, le riportiamo:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

Dove n è un numero naturale ed $a > 0$.

7 ODE

Le equazioni alle derivate ordinarie (ODE) sono delle equazioni in cui compaiono una variabile, una funzione e le sue derivate e in cui l'incognita è una funzione. L'ordine di un'ODE è il massimo tra gli ordini delle derivate che vi compaiono. Indicheremo con y la funzione e con x la variabile. Un esempio semplicissimo di ODE di primo ordine è il seguente:

$$y' = x$$

E ha per soluzione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Dove C è un parametro determinato dalle condizioni iniziali del problema. È importante ricordare che nessuna ODE ha un'unica soluzione, bensì esiste una famiglia di soluzioni. La soluzione generale di un'equazione di n-esimo ordine dipende da n parametri. Nel caso dell'esempio, l'equazione era di primo ordine e la soluzione dipendeva da un solo parametro, C.

Vediamo nelle sezioni seguenti come trovare le soluzioni delle ODE.

7.1 Classificazione

Un'ODE si dice *lineare* se y e le sue derivate compaiono sempre con esponente 1 e mai moltiplicate o divise tra loro. Ad esempio, queste ODE sono lineari:

$$y'' = -y; \quad x^3 y''' + x^2 y + 27 = 0$$

E queste non lo sono:

$$y' = y^2; \quad yy' = x$$

Un'ODE lineare si dice *omogenea* se ogni suo termine è moltiplicato per y o per una sua derivata. Le seguenti ODE sono lineari omogenee:

$$y'' + y' + y = 0; \quad (x^2 + 1)y'' + y \cdot \sin x = 0$$

E le seguenti non lo sono:

$$y' + y = \sqrt{x}; \quad y'' - 2y' + y = \cos x$$

7.2 Variabili separabili

Un'ODE a variabili separabili è un'ODE che può essere espressa nella seguente forma:

$$f(y) \cdot y' = g(x)$$

Dove f e g sono funzioni da un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. L'idea informale per risolvere questo tipo di ODE è pensare $y' = dy/dx$, e dunque moltiplicare i due membri per dx e poi integrare. In pratica, otteniamo:

$$f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Risolvendo l'integrale e provando a esplicitare y in funzione di x si risolve l'ODE. Vediamo ad esempio come risolvere l'equazione mostrata nel paragrafo precedente:

$$\begin{gathered}
y' = x \\
\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x \\
\int \mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \\
y = \frac{1}{2}x^2 + C
\end{gathered}$$

Si noti come facendo l'integrale indefinito è saltato fuori il parametro. Proviamo ora a risolvere qualcosa di più complicato: dato un certo $k \in \mathbb{R}$, proviamo a risolvere:

$$\begin{gathered}
y' - ky = 0 \\
y' = ky
\end{gathered}$$

Per poter separare le variabili, vorremmo poter dividere i due membri per y. Possiamo farlo, ma dobbiamo stare attenti a verificare se $y = 0$ risolve l'ODE. È facile verificare che la risolve, perciò sappiamo che le funzioni che risolvono l'ODE sono $y = 0$ e quelle che risolvono:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{y}y' = k \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = k\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int k\,\mathrm{d}x \\
\log|y| = kx + C \\
|y| = e^{kx+C} \\
y = \pm e^C e^{kx}
\end{gathered}$$

Osserviamo che e^C può assumere qualunque valore strettamente positivo, per cui $\pm e^C$ può assumere qualunque valore diverso da 0. Detto $A = \pm e^C$, le soluzioni dell'ODE sono quindi:

$$y = 0 \vee y = Ae^{kx} \text{ con } A \neq 0$$

Ovvero:

$$y = Ae^{kx} \text{ con } A \in \mathbb{R}$$

Anche qui, la soluzione dipende da un solo parametro, come ci aspettavamo.

7.3 Variabili inseparabili del primo ordine

Vediamo ora come risolvere le ODE a variabili inseparabili del primo ordine, ovvero le equazioni differenziali della forma

$$y' = ya(x) + b(x)$$

Quando abbiamo derivato e^x abbiamo visto che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x$. Aver trovato una funzione che è anche la sua derivata è qualcosa che a noi fa estremamente comodo. In particolare, se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$, otteniamo che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{-A(x)}\right) = y'e^{-A(x)} - ya(x)e^{-A(x)}$$

Proviamo a rimaneggiare il testo per ottenere qualcosa del genere

$$\begin{gathered} y' = ya(x) + b(x) \\ y' - ya(x) = b(x) \\ e^{-A(x)}y' - e^{-A(x)}ya(x) = e^{-A(x)}b(x) \end{gathered}$$

Allora possiamo riscrivere il primo membro

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{-A(x)}\right) = e^{-A(x)}b(x)$$

Integrando rispetto a x da ambo le parti,

$$\begin{gathered} ye^{-A(x)} + c_1 = \int \left(e^{-A(x)}b(x)\right) \mathrm{d}x \\ ye^{-A(x)} = \int \left(e^{-A(x)}b(x)\right) \mathrm{d}x - c_1 \end{gathered}$$

Dove c_1 è una costante. Notiamo che l'integrale al secondo membro è un integrale indefinito, quindi è una qualunque primitiva dell'integrando. La famiglia delle primitive di una funzione rimane sé stessa se si aggiunge o toglie una costante. Quindi possiamo riscrivere la soluzione della nostra ODE come

$$\begin{gathered} ye^{-A(x)} = \int \left(e^{-A(x)}b(x)\right) \mathrm{d}x \\ y = e^{A(x)} \int \left(e^{-A(x)}b(x)\right) \mathrm{d}x \end{gathered}$$

Osserviamo che questa relazione vale per *qualunque* primitiva $A(x)$ di $a(x)$, quindi nello svolgimento dei calcoli non occorre preoccuparsi della costante da aggiungere ad $A(x)$, ma si può aggiungere quella che più fa comodo (che molto spesso è 0). Anche qui, come ci aspettavamo, abbiamo un solo parametro libero.

7.4 Oscillatore armonico

Concentriamoci ora su alcune equazioni differenziali omogenee di second'ordine ricorrenti in fisica. La più semplice e diffusa è l'equazione dell'oscillatore armonico (che, come suggerito dal nome, caratterizza il moto armonico semplice)

$$y'' = -ky$$

con k positivo. Definiamo $\omega = \sqrt{k}$ e dunque:

$$y'' = -\omega^2 y$$

La soluzione generale è:[10]

$$y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

perché soddisfa l'equazione di partenza e ha due parametri reali liberi. Verifichiamo che soddisfa.

$$y' = -A\omega\sin(\omega x) + B\omega\cos(\omega x)$$

$$y'' = -A\omega^2\cos(\omega x) - B\omega^2\sin(\omega x) = -\omega^2 y$$

Infine, osserviamo che la soluzione $y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ si può riscrivere nella forma:

$$y = D\cos(\omega x + \varphi)$$

infatti:

$$D\cos(\omega x + \varphi) = D[(\cos\varphi)(\cos(\omega x)) + (-\sin\varphi)(\sin(\omega x))]$$

e notando che esistono φ e D tali che $A = D\cos\varphi$ e $B = -D\sin\varphi$, la soluzione dell'ODE diventa $y = D\cos(\omega x + \varphi)$.

7.4.1 Oscillatore armonico smorzato

Vediamo ora un'ODE più complicata, l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato:

$$y'' = -k_1 y - k_2 y'$$

che, per come comparirà nei problemi di fisica, riscriviamo nella forma

$$y'' + \omega^2 y + 2\gamma y' = 0$$

[10]In generale, combinazioni lineari di $e^{i\omega x}$ ed $e^{-i\omega x}$ soddisfano, ma imponendo che la soluzione sia reale si ottiene questa formula. A tal proposito, proponiamo lo svolgimento dell'esercizio 9, sezione 9.2.

Provando una soluzione del tipo $y = (a + bx)e^{-\alpha x}$ ci accorgiamo che possiamo determinare i parametri a, b, α in modo che soddisfi l'ODE di partenza.

$$y' = be^{-\alpha x} - (a + bx)\alpha e^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}(b - \alpha(a + bx))$$

$$y'' = -\alpha be^{-\alpha x} + \alpha^2(a + bx)e^{-\alpha x} - b\alpha e^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}(-2\alpha b + \alpha^2(a + bx))$$

Sostituendo nell'ODE iniziale,

$$e^{-\alpha x}[-2\alpha b + \alpha^2(a + bx) + 2\gamma b - 2\gamma\alpha(a + bx) + \omega^2(a + bx)] = 0$$

Poiché $e^{-\alpha x} \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(a + bx)(\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega^2) + 2b(\gamma - \alpha) = 0$$

- Se $\alpha \neq \gamma$, deve essere $b = 0$, altrimenti nel caso $x = -\frac{a}{b}$ non ottengo 0. Quindi

  $$a(\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega^2) = 0$$
  $$\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0$$
  $$\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

  Poiché sono nel caso $\alpha \neq \gamma$, so che le due soluzioni α_1 e α_2 sono distinte. Ma allora soluzioni del tipo

  $$y = ae^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)x}, \qquad y = ae^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)x}$$

  soddisfano. Quindi, dato che stiamo trattando un'ODE omogenea e la derivata è un operatore lineare, anche una combinazione lineare di queste soluzioni è soluzione. Ottengo così soluzioni del tipo

  $$y = e^{-\gamma x}\left(a_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}x} + a_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}x}\right)$$

  che, come ci aspettavamo, hanno due parametri liberi. Notare che se $\gamma^2 - \omega^2 > 0$ nella soluzione abbiamo degli esponenziali reali, mentre se $\gamma^2 - \omega^2 < 0$ abbiamo degli esponenziali complessi e in tal caso la soluzione si può riscrivere come:

  $$y = e^{-\gamma x}\left(A\cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}x) + B\sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}x)\right)$$

- Se $\alpha = \gamma$, allora $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = \gamma$, e dunque quelle che prima erano soluzioni distinte ora coincidono. Sembrerebbe che si sia perso un parametro libero, ma all'inizio non sarebbe stato necessario porre b=0, quindi otteniamo soluzioni della forma

  $$y = (a + bx)e^{-\gamma x}$$

  che, come ci aspettavamo, hanno due parametri liberi.

Spendiamo infine qualche riga sulle ODE lineari non omogenee. Esse sono della forma

$$y^{(n)} + y^{(n-1)} f_{n-1}(x) + \cdots + y f_0(x) = h(x)$$

In questi casi, per la linearità della derivata, per trovare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea è sufficiente trovare una soluzione particolare $y = p(x)$ dell'equazione non omogenea e sommarvi la soluzione generale $y = g(x)$ dell'equazione omogenea associata perché

$$y^{(n)} + \cdots + y f_0(x) - [p^{(n)}(x) + \cdots + p(x) f_0(x)] = h(x) - h(x) = 0$$

$$(y - p(x))^{(n)} + (y - p(x))^{(n-1)} f_{n-1}(x) + \cdots + (y - p(x)) f_0(x) = 0$$

e questa è l'omogenea associata, risolta da $y - p(x) = g(x)$, quindi otteniamo la soluzione

$$y = p(x) + g(x)$$

7.5 Problemi di Cauchy

Per problema di Cauchy si intende un'ODE messa a sistema con delle condizioni iniziali riguardanti la funzione e le sue derivate[11]. Se per esempio l'ODE è del second'ordine, le condizioni iniziali riguarderanno la funzione e la derivata prima. Un esempio di problema di Cauchy è il seguente:

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Come abbiamo già visto, la soluzione generale dell'ODE riportata è:

$$y = A \cos x + B \sin x$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo i valori di A e B che ci danno la soluzione particolare che cerchiamo:

$$y(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = A = 1$$

$$y'(x) = -\sin x + B \cos x \Rightarrow y'(0) = B = 0$$

La soluzione particolare è perciò:

$$y(x) = \cos x$$

[11] In fisica, spesso ci troviamo a risolvere ODE in cui x gioca il ruolo del tempo, la funzione y è la posizione di una particella, y' è la sua velocità e y'' è la sua accelerazione.

7.6 Conservazione dell'energia

Sia data una particella di massa m che si muove, per semplicità, in una dimensione. Supponiamo che se la particella si trova nella posizione x, allora su di essa agisce una forza $f(x)$. Sia $x(t)$ la posizione della particella in funzione del tempo. Ricordando che l'accelerazione è la derivata temporale seconda e applicando il secondo principio della dinamica si ha:

$$m\ddot{x}(t) = f(x(t))$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per la velocità:

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = f(x(t))\dot{x}(t)$$

Notando ora che $m\dot{x}\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right]$ e che $f(x(t))\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_0}^{x(t)} f(y)\,\mathrm{d}y$, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_0}^{x(t)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Cioè:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x(t)} f(y)\,\mathrm{d}y\right] = 0$$

Dato che la derivata si annulla per ogni t, allora la funzione tra parentesi quadre deve essere uguale ad una costante. Chiamiamo *energia* tale costante, che indichiamo con E. Dunque per ogni t si ha:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - \int_{x_0}^{x(t)} f(y)\,\mathrm{d}y = E$$

Il termine $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$ è detto *energia cinetica*, mentre il termine $-\int_{x_0}^{x(t)} f(y)\,\mathrm{d}y$ è detto *energia potenziale* e si indica usualmente con $U(x)$. L'equazione diventa dunque:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + U(x(t)) = E$$

Il punto x_0 nella definizione di energia potenziale può essere scelto in modo arbitrario. L'energia potenziale è dunque definita a meno di una costante additiva.

Osserviamo che se sappiamo calcolare $U(x)$ (cioè la primitiva della forza $f(x)$), allora dall'equazione precedente possiamo calcolare la velocità della particella in funzione della sua posizione, senza necessariamente conoscere l'espressione esplicita della posizione in funzione del tempo.

Osserviamo che questo è anche un metodo per risolvere equazioni differenziali, infatti l'equazione precedente è a variabili separabili. Dunque se si sanno calcolare le primitive, si può trovare esplicitamente $x(t)$.

7.6.1 Esempio: forza elastica

Supponiamo che la nostra particella è soggetta ad una forza elastica del tipo $f(x) = -k(x - x_c)$, cioè si ha una molla ideale con lunghezza a riposo nulla, incernierata in $x = x_c$ e con costante elastica k.

L'*energia potenziale* elastica è dunque: (scelgo $x_0 = x_c$)

$$U(x) = -\int_{x_c}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{x_c}^{x} k(y - x_c)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{x - x_c} kz\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}k(x - x_c)^2$$

Dunque la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_c)^2 = E$$

7.6.2 Esempio: forza gravitazionale

Supponiamo di avere una massa M incollata nell'origine $x = 0$ e una massa m vincolata a muoversi nella semiretta $x > 0$. La forza agente sulla massa m è allora $f(x) = -\frac{GmM}{x^2}$.

L'*energia potenziale* gravitazionale è dunque (scegliendo $x_0 = +\infty$):

$$U(x) = -\int_{+\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{+\infty}^{x} \frac{GmM}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{GmM}{x}$$

Dunque la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{GmM}{x} = E$$

Un analogo calcolo si può fare nel caso in cui le particelle sono elettricamente cariche.

7.6.3 Esempio: gravità costante

Supponiamo di avere una massa m vincolata a muoversi sull'asse z. Sulla massa m agisce una forza costante $f(z) = -mg$ opposta all'asse z.[12] L'*energia potenziale* gravitazionale è dunque (scegliendo $x_0 = 0$):

$$U(x) = -\int_{0}^{z} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{z} mg\,\mathrm{d}y = mgz$$

Dunque la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = E$$

[12] Si può immaginare, ad esempio, una situazione fisica in cui c'è una pallina soggetta alla gravità terrestre vincolata a muoversi su un'asta verticale incernierata al pavimento.

7.7 Non conservazione dell'energia

Abbiamo fatto un'ipotesi fondamentale sulla forza: cioè che abbia una forma del tipo $f(x)$, ovvero che non sia funzione esplicita del tempo. Ad esempio, la forza $f(x) = -kx$ non ha dipendenza esplicita dal tempo, ma dipende implicitamente dal tempo perchè la posizione x della particella dipende dal tempo.

Poniamoci ora in un caso particolare. Supponiamo di avere due forze che agiscono sulla particella: una forza che è funzione solo della posizione e un'altra che è funzione solo del tempo. Dunque la forza totale agente sulla massa m, che si trova al tempo t nella posizione x, è del tipo $f(x,t) = F(x) + G(t)$: questa è una forza che dipende esplicitamente dal tempo (a causa della funzione $G(t)$). L'energia si conserva o no?
La seconda legge di Newton dice:

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)) + G(t)$$

Moltiplicando per la velocità e osservando che $m\dot{x}\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right]$ e che $F(x(t))\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_0}^{x(t)} F(y)\,\mathrm{d}y$, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x(t)} F(y)\,\mathrm{d}y\right] = G(t)\dot{x}(t)$$

Nelle parentesi quadre appare la funzione che prima abbiamo chiamato *energia*. Ora però non è costante: la indichiamo dunque con $E(t)$. Siamo arrivati all'equazione:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = G(t)\dot{x}(t)$$

Se la forza $G(t)$ è tale che $G(t) = 0$ sempre, allora ci riconduciamo al caso precedente in cui $E(t) = E = costante$. Dunque diciamo che $G(t)$ è una *forza non conservativa* (perché è sua la colpa della non conservazione dell'energia!). Il termine $G(t)\dot{x}(t)$ si dice *potenza della forza* G e si indica usualmente con $P(t)$. Abbiamo dunque dimostrato che:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = P(t)$$

cioè che la derivata temporale dell'energia è uguale alla potenza fatta dalle forze non conservative.[13]

[13] Ricordiamo che ci siamo posti nel caso particolare $f(x,t) = F(x) + G(t)$. In generale possiamo avere anche forze che mischiano la posizione e il tempo, ad esempio forze del tipo $f(x,t) = k \cdot tx$ con k costante.

8 Esercizi proposti all'esercitazione

1. Calcola la derivata di x^x. (*Hint*: $x^x = e^{x \ln(x)}$)

2. *Oscillatore armonico con forzante sinusoidale*
   Considerare la seguente ODE:
   $$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) + f \sin(\omega t).$$
   dove ω, ω_0 e f sono delle costanti.
   a) Supponendo $|\omega| \neq |\omega_0|$, trovare tutte le soluzioni.
   b) Supponendo $\omega = \omega_0$, trovare tutte le soluzioni.
   Hint per la domanda b): Provare come soluzione particolare un qualche polinomio di grado basso moltiplicato per coseno e seno della frequenza che vi aspettate e vedere se funziona.

3. Verificare che per $x \ll 1$ valgono le seguenti approssimazioni:
   (i) $\tan x \simeq \sin x \simeq x$
   (ii) $(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$
   (iii) $\log(1+x) \simeq x$
   (iv) $e^x \simeq 1 + x$

4. Calcolare al sesto ordine in x la funzione $e^{x^2+\alpha x}$ attorno ad $x_0 = 0$.
   Hint: Se x è piccolo, allora anche $(x^2 + \alpha x)$ è piccolo.

5. Calcolare al sesto ordine in α la funzione $e^{x^2+\alpha x}$ attorno ad $\alpha_0 = 0$.

6. Trovare l'espansione in serie di Taylor dell'arcoseno in un intorno di 0.
   (*Hint: Partire dall'espansione in serie della derivata dell'arcoseno*)

7. La funzione $y(x)$ soddisfa il seguente problema di Cauchy:
   $$\begin{cases} y^2 y'' = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
   Ricavare $\lim_{x\to\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to\infty} y'(x)$.

8. Dire esplicitamente quali integrali bisogna fare per risolvere l'equazione $F = ma$ nei tre casi in cui F dipende solo da: (i) x, (ii) v, (iii) t.

9. a) Calcolare $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.
(*Suggerimento*: dove avete già visto questa espressione?)
b) Calcolare $\int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Il risultato varia al variare di α?

10. Considerare una fune lunga L e densità di massa lineare $\rho(x) = \rho_0 + \rho_1(\frac{x}{L})^2$.
a) Calcolare la massa della fune.
b) Supporre che la fune è sospesa al soffitto dall'estremità più leggera in presenza di gravità. Fissando la costante arbitraria dell'energia potenziale tale che essa valga 0 al soffitto, calcolare l'energia potenziale totale della fune.

11. Usare l'integrazione per parti per dimostrare la formula

$$x! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \,\mathrm{d}t$$

Tale espressione è la *funzione Gamma di Eulero*.

12. In presenza di gravità e di una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, una particella di massa m viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale di modulo v_0. Determinare la massima altezza raggiunta rispetto al punto di partenza.

13. Una corda lunga l di massa m è distesa orizzontalmente su un tavolo eccetto per l'estremità che pende verticalmente per una lunghezza x_0. In presenza di gravità, come evolve il sistema?

9 Esercizi extra

Il simbolo ★ indica il livello di difficoltà.
Il simbolo ☆ indica quanto ci sembra utile il problema.

9.1 Basic

1. ☆ Considerare la sequenza dei poligoni a 4, 8, 16, 32, ... lati, e usando la trigonometria, dimostrare che $\pi = 2\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$

2. ☆☆☆ La derivata logaritmica di $f(x)$ è definita come $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(f(x))$. Trovare la derivata logaritmica di x^n e di e^x (spesso è più facile calcolare la derivata logaritmica invece che la derivata classica). Calcolare la

derivata logaritmica di $\frac{e^x \arctan(x)\sin(x)}{x^4 \ln(x)}$. Da essa ricavare la derivata classica.

3. ☆ Calcola la derivata di x^x nel seguente modo: $x^x = e^{x\ln(x)}$.

4. ☆☆☆ Sia dato un tronco di cono di un materiale di resistività ρ. I raggi sono rispettivamente a e b con $a \geq b$ e l'altezza è h. Qual è la resistenza ai capi dell'oggetto? (Nota importante: la soluzione richiesta deve essere valida per $b \approx a$. Discutere sul perché quando a è sensibilmente più grande di b, la soluzione data in precedenza non funziona.)

5. ☆☆☆ Calcolate la derivata di $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e di $\vec{a} \times \vec{b}$.

6. ☆☆☆★ Usare la formula di De Moivre, e in generale i numeri complessi, per dimostrare le seguenti formule trigonometriche. *Consigliamo di svolgere quest'esercizio dopo aver visto l'esercizio 10.*

   (i) $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$

   (ii) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

   (iii) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

   (iv) $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)-1}{\cot(\beta)+\cot(\alpha)}$

   (v) $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

   (vi) $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

   (vii) $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

   (viii) $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

   (ix) $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

   (x) $1 + 2\cos(x) + 2\cos(2x) + 2\cos(3x) + \cdots + 2\cos(nx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$

   (xi) $\sin^3(\alpha)$ in funzione di $\sin(\alpha)$, $\sin(2\alpha)$, $\sin(3\alpha)$, ...

7. Siano $f_1, \ldots, f_n$ funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili. Qual è la derivata di $\prod_{i=1}^n f_i = f_1 \cdot \cdots \cdot f_n$?

8. ☆☆★ **Le funzioni iperboliche**: definiamo le funzioni seno iperbolico, coseno iperbolico e tangente iperbolica rispettivamente come:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(i) Calcolare le derivate di ogni ordine delle funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico.

(ii) Studiare le simmetrie e gli insiemi immagine delle funzioni sinh e cosh.

(iii) Dimostrare le seguenti formule, analoghe a quelle per le funzioni trigonometriche:

- $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)$
- $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$

(iv) Trovare la funzione inversa di $\sinh x$.

(v) Espandere in serie di Taylor attorno ad $x = 0$ le funzioni sinh e cosh.

9.2 ODE

9. ☆ Verificare che, detta x un'incognita reale, $\forall\, \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall\, w, z \in \mathbb{C}$, $we^{i\omega x} + ze^{-i\omega x}$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' = -\omega^2 y$$

10. ☆ Dimostrate, usando quanto ricavato nel paragrafo 5.2.2 della lezione, che

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Queste definizioni di seno e coseno potranno poi esservi utili per dimostrare in maniera più semplice alcune identità goniometriche... e non solo! Qual è la relazione tra $\sin x$ e $\sinh x$?

11. *Oscillatore armonico con forzante sinusoidale*
Considerare la seguente ODE:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) + f\sin(\omega t).$$

a) Supponendo $|\omega| \neq |\omega_0|$, trovare tutte le soluzioni.
b) Supponendo $\omega = \omega_0$, trovare tutte le soluzioni.
Hint per la domanda b): Provare come soluzione particolare un qualche

polinomio di grado basso moltiplicato per coseno e seno della frequenza che vi aspettate e vedere se funziona. Una soluzione alternativa è prendere il limite per $\omega \to \omega_0$ della soluzione ottenuta al punto a).

12. Risolvi con una serie di potenze attorno a $x = 0$ l'ODE

$$y'' + xy = 0.$$

(*Soluzione*: una delle soluzioni è $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4x^6}{6!} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7x^9}{9!} + \dots$)

13. ☆☆☆ Risolvere l'ODE

$$yy' = x(4 - y^2)$$

(*Suggerimento*: usare la separazione delle variabili)

14. ☆☆☆★ Che equazione ha una *Cicloide*? (traiettoria di un punto sul cerchione di una ruota di raggio R) Quale ODE risolve la Cicloide (Soluzione: $y' = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}$)?

9.3 Volumetti Infinitesimi

15. ☆☆☆ *Formule di Pappo* Vediamo i Teoremi di Pappo. Il primo afferma che la superficie di una superficie di rotazione (ottenuta ruotando la figura bidimensionale di contorno lungo L *intorno ad un asse che non interseca la figura*) è uguale alla lunghezza L per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè $2\pi R$, con R distanza del baricentro del contorno dall'asse di rotazione. Il secondo afferma che il volume di un volume di rotazione (ottenuto ruotando la figura bidimensionale di area S *intorno ad un asse che non interseca la figura*) è uguale all'area S per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè $2\pi R$, con R raggio del baricentro della superficie dall'asse di rotazione.

    (i) Dire perchéé i due teoremi sono veri, pensando a quale superficie è generata dalla rotazione di un segmento $d\ell$ e a quale volume è generato dalla rotazione di una superficie ds

    (ii) Trovare superficie e volume di un toro

    (iii) Trovare il volume di un toro a sezione rettangolare.

16. ☆☆★★ Trova la formula del raggio di curvatura nel punto (x_0,y_0) della funzione $y = f(x)$ in funzione di y, y', y''.

17. ☆☆☆★ Il *momento d'inerzia* è definito come $I_0 = \int \rho(\vec{r}) r^2 \, \mathrm{d}V$ dove $\vec{r}$ è il vettore che punta il volumetto $\mathrm{d}V$, ρ è la densità e r^2 è la distanza dall'asse attorno a cui avviene la rotazione. Calcolare il momento d'inerzia di qualunque cosa. Esempi: sfera, guscio sferico, lastra rettangolare di spessore trascurabile, parallelepipedo a basi rettangolari, asta sottile rispetto al centro, asta sottile rispetto a un estremo, cono rispetto all'asse.

9.4 Ordini e Limiti

18. ☆☆☆ Data $y^5 - y = x$ calcolare fino al quart'ordine non banale $y(x)$. (*Soluzione*: $y \approx -x - x^5 - 5x^9 - 35x^{13}$)

19. ☆☆☆ Calcolare al sesto ordine in x la funzione $e^{x^2+\alpha x}$ attorno ad $x_0 = 0$.
Hint: Se x è piccolo, allora anche $(x^2 + \alpha x)$ è piccolo.

20. ☆☆☆ Calcolare al sesto ordine $e^{x^2+\alpha x}$ in α.

21. ☆☆☆ Calcolare al second'ordine $\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\theta+x^2}}$ in x.

22. ☆☆☆ Calcolare se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \log(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}}.$$

23. ☆☆☆ Calcolare $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x})$

24. ☆☆☆ Calcolare $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-\sqrt{1+x}})$

25. ☆☆☆ Trovare l'espansione in Taylor dell'arcoseno, sapendo la sua derivata.

26. ☆☆☆ Se $1 \gg \alpha \gg \beta$, ha più senso approssimare $1 + \alpha + \beta$ al primo ordine in α o al primo ordine in β?

9.5 Fisica

27. ☆☆☆ Nello spazio sono poste una carica $-q$ nell'origine e una carica $+q$ nel punto di coordinate $(0, 0, d) = \vec{d}$. Trovare il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ in un punto $\vec{r}$ con $d \ll r$, al prim'ordine in $\vec{d}$.

28. ☆☆☆ Ad una certa ora del mattino inizia a nevicare, e a mezzogiorno uno spalaneve parte per pulire le strade. La neve continua a cadere con intensità costante. Si sa che la velocità con cui procede lo spazzaneve è inversamente proporzionale all'altezza della neve. Nelle prime due ore di lavoro lo spazzaneve riesce a pulire 4 km di strada. Nelle due ore successive invece se ne liberano solo 2 km. A che ora ha iniziato a nevicare?

29. In presenza di gravità e di una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, una particella di massa m viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale di modulo v_0. Determinare la massima altezza raggiunta rispetto al punto di partenza.

30. ★★★ Ho un campo elettrico $\vec{E}$ e un campo magnetico $\vec{B}$ ortogonali. Una particella di carica q parte da ferma e su di essa agisce la forza elettrica $\vec{F}_E = q\vec{E}$ e la forza di Lorentz $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$. Che forma assume la traiettoria? (*Soluzione*: è una Cicloide, basta saper risolvere la ODE $y'' = -y + c$)

31. ☆☆☆ Una corda lunga l di massa m è distesa orizzontalmente su un tavolo eccetto per l'estremità che pende verticalmente per una lunghezza x_0. In presenza di gravità, come evolve il sistema?

32. Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica k) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0\,\mathrm{s}$ in modo tale che la massa si muova di moto uniforme? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto.

33. Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica k) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t^2$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0\,\mathrm{s}$ in modo tale che la massa si muova di moto uniformemente accelerato? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto.

34. ★ Un punto materiale si muove su una guida parabolica di equazione $y = -ax^2$. È possibile che il punto si stacchi dalla guida? (*Suggerimento*: usare la formula per il raggio di curvatura e la conservazione dell'energia).

35. ☆☆★ Una scodella a forma di parallelepipedo di massa M e sezione S può muoversi liberamente su un piano orizzontale senza attrito. Su di essa cade della pioggia: ciascuna goccia all'arrivo sulla scodella ha una velocità orizzontale $V_x > 0$ e una verticale $V_z < 0$. Inoltre la massa di

acqua per unità di tempo che arriva su una superficie S fissa sul terreno è costante e vale Γ. Supponendo che la pioggia raccolta dalla scodella rimanga in quiete rispetto ad essa, studiarne il moto. Trascurare l'effetto dell'urto della pioggia sulle superfici laterali della scodella. Trovare la traiettoria descritta dalla scodella in funzione di costanti che dipendono dalle condizioni iniziali.

36. Un proiettile di massa m viene lanciato da terra con una velocità iniziale di modulo v_0 che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. Oltre a un campo di gravità costante è presente una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$. Trovare l'equazione esplicita della traiettoria, e discutere il limite nel quale si può considerare "piccolo" l'attrito, dicendo in modo preciso che cosa si intende con questo.

37. ☆★ L'equipaggio di un razzo inizialmente fermo vuole aumentare la propria velocità espellendo una massa ηm di gas. La velocità del gas al momento dell'emissione relativa al razzo è sempre $-v_0$. La massa iniziale di quest'ultimo è m e chiaramente $0 \leq \eta < 1$. Indicheremo con $\mu(t)$ la massa espulsa al tempo t. Calcolare la velocità finale del razzo nei due casi seguenti:

    (i) tutta la massa viene espulsa istantaneamente a $t = 0\,\mathrm{s}$;

    (ii) la massa espulsa per unità di tempo è costante, e viene espulsa tutta in un tempo τ.

    Dette $v_f^{(1)}$ e $v_f^{(2)}$ le velocità finali del razzo nel primo e nel secondo caso, stabilire se è vero che $\lim_{\tau\to 0} v_f^{(2)} = v_f^{(1)}$.

38. ☆☆☆★ Consideriamo un oscillatore armonico forzato, senza attrito, con una forzante $F = F_0 \cos\omega t$, e sia ω_0 la frequenza naturale dell'oscillatore. Come ci si aspetta che sia la soluzione, qualitativamente? Claimare la soluzione e verificare che soddisfa l'equazione differenziale.

39. ☆☆☆★★ Dire esplicitamente quali integrali bisogna fare per risolvere l'equazione $F = ma$ nei tre casi in cui F dipende solo da: (i) x, (ii) v, (iii) t.

40. ☆☆☆★ Una palla viene lanciata in aria in verticale. L'attrito è $F = -\gamma v$. Trovare velocità e altezza in funzione del tempo.

41. ☆ Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(v) = -bv^2$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è $v_0 > 0$. Trovare $x(t)$.

42. ☆ Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(x) = -kx$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è v_0. Trovare $x(t)$.

43. ☆ Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(x) = +kx$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è v_0. Trovare $x(t)$.

44. ☆ Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(t) = F_0 e^{-bt}$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è 0 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Trovare $x(t)$.

45. ☆☆☆ Un razzo di massa m e a velocità v ha ugelli con velocità di scarico pari a u. Trovare l'equazione del razzo che mette in relazione la massa di carburante consumata e il Δv. Trovare la massa corrispondente a $\Delta v = 3u$.

46. ☆☆☆★ *Strato di ghiaccio su un lago* Supponendo che la temperatura dell'aria sulla superficie di un lago ghiacciato rimanga costantemente pari a $-5,2$ gradi centigradi per 60 giorni, si formuli un modello per descrivere la rapidità con cui cresce lo spessore del ghiaccio a partire dal suo valore iniziale $h_0 = 25cm$. Sapendo, in particolare, che dopo 12 giorni si misura uno spessore di $37cm$ e dopo 21 giorni uno spessore di $44cm$, si stimi lo spessore h_f raggiunto dal ghiaccio dopo 60 giorni. (SNS 2015 1).

47. Considerare una fune lunga L e densità di massa lineare $\rho(x) = \rho_0 + \rho_1(\frac{x}{L})^2$.
a) Calcolare la massa della fune.
b) Supporre che la fune è sospesa al soffitto dall'estremità più leggera in presenza di gravità. Fissando la costante arbitraria dell'energia potenziale tale che essa valga 0 al soffitto, calcolare l'energia potenziale totale della fune.

9.6 Derivate e Integrali

48. ☆☆★ Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che è continua su tutto $\mathbb{R}$ e trovare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui è derivabile. Ripetere con

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

49. a) Calcolare $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.
(*Suggerimento*: dove avete già visto questa espressione?)
b) Calcolare $\int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Il risultato varia al variare di α?

50. ☆☆ Usare l'integrazione per parti per dimostrare l'utile formula ricorsiva

$$f(n) := \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \ \mathrm{d}\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} \theta \ \mathrm{d}\theta.$$

Dimostrare che funziona anche con i seni al posto dei coseni e anche integrando da 0 a π anziché da 0 a $\pi/2$. Calcolare $f(8)$. Calcolare poi $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta \ \mathrm{d}\theta$. (*Suggerimento*: usare de Moivre)

51. ☆☆ Usare l'integrazione per parti per dimostrare la formula

$$x! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, \mathrm{d}t$$

Tale espressione è la *funzione Gamma di Eulero*. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.
(*Suggerimento*: ricondursi a $(-1/2)!$ con un cambio di variabili)

52. ☆☆☆ Scrivere $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ in funzione di $t = \tan(\frac{\alpha}{2})$. Questa è la sostituzione che permette di risolvere molti integrali trigonometrici.

53. ☆☆☆★★ A volte, invece, serve trasformare integrali polinomiali o con radici quadrate in integrali trigonometrici in seni e coseni (o seni e coseni iperbolici). Ad esempio, cosa vi ricordano i seguenti integrali?, quanto valgono?

   (i) $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$
   (ii) $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2-a^2)}}$
   (iii) $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+a^2)}}$
   (iv) $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(-u^2-a^2)}}$
   (v) $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2}$
   (vi) $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2-u^2}$

54. La funzione $y(x)$ soddisfa il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^2 y'' = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Ricavare $\lim_{x\to\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to\infty} y'(x)$.

10 Ringraziamenti

Ringraziamo innanzitutto tutti quelli che hanno aiutato la stesura delle dispense degli anni scorsi, su cui questa si basa. In particolare, ringraziamo Davide Colpo e Francesco Anna Mele, che ne hanno scritto alcune parti.

11 Soluzioni

11.1 Proposti all'esercitazione

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x\ln(x)} = e^{x\ln(x)}(\ln(x)+1) = x^x(\ln(x)+1)$

2. L'equazione del moto è $m\ddot{x} = -kx + F_0\cos(\omega t)$, ed è simile ad un'altalena alla quale venga applicata una spinta a una certa frequenza, che non è necessariamente la frequenza tipica dell'altalena $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ci si aspetta, come su un'altalena, che il moto sia periodico con lo stesso periodo della forzante; dunque ω e non ω_0. Si prova dunque la soluzione $A\cos(\omega t)$ (ma anche $A\sin(\omega t)$ andrà bene).
   Si ottiene $-mA\omega^2\cos(\omega t) = -kA\cos(\omega t) + F_0\cos(\omega t)$, da cui $A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}$.
   Si vede che se la forzante ha frequenza vicina alla frequenza di risonanza ω_0, l'ampiezza delle oscillazioni diventa molto alta.

   L'equazione è $\omega^2 x + \ddot{x} = \sin(\omega t)$. Si provi $x = (At + C)\sin(\omega t) + (Bt + D)\cos(\omega t)$ (l'unica frequenza che compare nell'equazione è ω, quindi mi aspetto che sia anche la frequenza della soluzione!). Poiché posso sommare o sottrarre le soluzioni dell'omogenea associata $\omega^2 y + \ddot{y} = 0$, ovvero $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$, è chiaro che posso porre $C = D = 0$. La domanda è quanto valgono A e B.
   Provo a inserire la soluzione nell'ODE. Facendo qualche conto si trova $y = -\frac{1}{\omega^2} t\cos(\omega t)$. A questa soluzione particolare è possibile sommare una soluzione dell'omogenea, e si trovano altre soluzioni. La soluzione più generale è dunque $y = -\frac{1}{\omega^2} t\cos(\omega t) + A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$. Come

atteso le costanti arbitrarie sono due.
(Si consiglia di fare il problema "Oscillatore forzato e transiente" sulla raccolta di esercizi "Un esercizio al giorno" del Prof. Giancarlo Cella.)

3. Tutte le approssimazioni si ricavano sviluppando le funzioni date in serie di Taylor attorno ad $x = 0$ al prim'ordine.

4. $e^{x^2+\alpha x} = e^{x^2} e^{\alpha x} \approx \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}\right) \cdot \left(1 + \alpha x + \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x)^4}{4!} + \frac{(\alpha x)^5}{5!} + \frac{(\alpha x)^6}{6!}\right) \approx 1 + \alpha x + (1 + \frac{\alpha^2}{2!})x^2 + (\alpha + \frac{\alpha^3}{3!})x^3 + (\frac{1}{2!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!})x^4 + (\frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!})x^5 + (\frac{1}{3!} + \frac{\alpha^2}{2!2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{\alpha^6}{6!})x^6$

5. $e^{x^2+\alpha x} = e^{x^2} \left(1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 x^3 + \frac{1}{4}\alpha^4 x^4 + \frac{1}{5}\alpha^5 x^5 + \frac{1}{6}\alpha^6 x^6\right)$

6. $\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$

7. Osserviamo che è l'equazione del moto di una particella di massa $m = 1$ e di carica $q = 1$ in posizione y al tempo x, soggetta alla forza repulsiva dovuta ad un'altra carica $Q = 1$ fissata nell'origine. Le condizioni iniziali ci dicono che la particella parte ferma in posizione $y = 1$.
Una tale particella raggiunge l'infinito, dunque $\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$.
Vediamolo matematicamente: la particella raggiunge l'infinito perché: $y'' = 1/y^2 > 0$ sempre e quindi y' è crescente (e dunque anche $y' > 0$ per $x > 0$ perché $y'(0) = 0$); e una funzione y che ha derivata crescente positiva, diverge positivamente.
La conservazione dell'energia implica:
$$\frac{1}{2}y'(x)^2 + \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}y'(0)^2 + \frac{1}{y(0)} = 1$$
E prendendo il limite per x che tende a infinito, dato che $\frac{1}{y(x)}$ tende a 0, abbiamo che :
$$\lim_{x\to\infty} y'(x) = +\sqrt{2}$$

8. (i) In generale un'ottima opzione è applicare la conservazione dell'energia, ottenendo così una equazione differenziale a variabili separabili. Poi la speranza è riuscire a risolvere l'equazione a variabili separabili che ne esce fuori.

   (ii) Se F è funzione di v allora $F = ma$ è un'ODE a variabili separabili. Infatti, si può scrivere:
$$m\dot{v} = F(v)$$

$$\frac{m}{F(v)}\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$$

$$\int \frac{m}{F(v)}\,\mathrm{d}v = t$$

A questo punto, trovata v, abbiamo $x = \int v\,\mathrm{d}t$.

(iii) Se F è funzione di t abbiamo:

$$m\dot{v} = F(t)$$

$$v = \int \frac{F(t)}{m}\,\mathrm{d}t$$

E, come prima, $x = \int v\,\mathrm{d}t$.

9. a) L'espressione $1 + x^2$ è già stata vista quando si calcola la derivata della tangente $t = \tan(x)$, ovvero $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 1 + t^2$, da cui $\frac{\mathrm{d}(\arctan(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+t^2}$. Si ha quindi $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}$.

   b) Come prima, il risultato fa $\arctan(\alpha) - \arctan(-1/\alpha)$. Derivando questa espressione rispetto ad α si ottiene 0, perciò si ha che l'integrale non varia al variare di α. Al punto a abbiamo calcolato che per $\alpha = 1$ vale $\frac{\pi}{2}$.

10. a) La massa della fune è $m = \int_0^L \rho(x)dx = (\rho_0 + \rho_1/3)L$.
b) L'energia potenziale della corda è la somma di tutte le energie potenziali dei singoli elementini della corda. L'elementino che sta a distanza x dal soffitto ha una massa $dm = \rho(x)dx$.
Dunque: $U = -\int_0^L gx\rho(x)dx$, perciò basta sostituire $\rho(x)$ e svolgere l'integrale del polinomio che spunta.

11. Innanzitutto verificare $0! = 1$. Dopo di che si ha $x! = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = (x-1)!$ come voluto.

12. Scriviamo $F = ma$:

$$-\lambda v - mg = m\dot{v}$$

$$\dot{v} = -\frac{\lambda}{m}v - g$$

$$v = -\frac{mg}{\lambda} + Ae^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

Essendo $v(0) = v_0$, si ha $A = v_0 + \frac{mg}{\lambda}$:

$$v = -\frac{mg}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

L'altezza massima si ha quando $v = 0$:

$$\left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t_1} = \frac{mg}{\lambda}$$

$$e^{\frac{\lambda}{m}t_1} = \frac{\lambda v_0}{mg} + 1$$

$$t_1 = \frac{m}{\lambda} \log\left(\frac{\lambda v_0}{mg} + 1\right)$$

Integriamo rispetto al tempo la formula di v:

$$x = -\frac{mg}{\lambda}t - \frac{m}{\lambda}\left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t} + B$$

Essendo $x(0) = 0$, si ha $B = \frac{m}{\lambda}\left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right)$:

$$x = -\frac{mg}{\lambda}t + \frac{m}{\lambda}\left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right)\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)$$

Sostituendo $t = t_1$ otteniamo:

$$x_{\max} = -\frac{m^2 g}{\lambda^2} \log\left(\frac{\lambda v_0}{mg} + 1\right) + \frac{m}{\lambda}\left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right)\left(2 + \frac{\lambda v_0}{mg}\right)$$

Cerchiamo ora il tempo t_2 in cui $x(t_2) = 0$:

$$\left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right)\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t_2}\right) = g t_2$$

Essendo v_0 molto grande *rispetto a* $\frac{mg}{\lambda}$, possiamo approssimare:

$$1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t_2} = \frac{g}{v_0}t_2$$

Proviamo a sostituire $t_2 = \frac{v_0}{g}$:

$$e^{-\frac{\lambda v_0}{mg}} = 0$$

Essendo $v_0 \gg \frac{mg}{\lambda}$, il primo membro è 0 al primo ordine in Taylor, e quindi $t_2 = \frac{v_0}{g}$ è il tempo che cercavamo. La velocità richiesta è quindi:

$$v(t_2) = -\frac{mg}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t_2} \approx -\frac{mg}{\lambda} + v_0 e^{-\frac{\lambda v_0}{mg}} = -\frac{mg}{\lambda} + v_0 \left(e^{\frac{\lambda v_0}{mg}}\right)^{-1}$$

Si verifica facilmente che l'esponenziale è un ordine di infinito superiore di v_0, perciò ci rimane:

$$v(t_2) \approx -\frac{mg}{\lambda}$$

13. $x(t)$ è la lunghezza della parte di corda che pende. Per $x < l$ la forza applicata alla corda è $m \cdot \frac{x}{l} \cdot g$, per cui vale:

$$\ddot{x} = \frac{g}{l} x \text{ per } x < l$$

La cui soluzione generale è:

$$x = Ae^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} \text{ per } x < l$$

E, considerando $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$, si ha:

$$x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \text{ per } x < l$$

Si ha $x = l$ per $t = t_1 \coloneqq \sqrt{\frac{l}{g}} \operatorname{arccosh}\left(\frac{l}{x_0}\right)$. Perciò vale:

$$x = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \text{ per } t < t_1$$

Per $t > t_1$ il moto è uniformemente accelerato, con accelerazione g, velocità iniziale v_1 e posizione iniziale x_1, che soddisfano:

$$x_1 = x(t_1) = l$$

$$v_1 = \dot{x}(t_1) = \sqrt{\frac{g}{l}} x_0 \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t_1\right)$$

Per cui si ha:

$$x = \begin{cases} x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \text{ per } t < t_1 \\ \frac{g}{2}\left(t - t_1\right)^2 + v_1(t - t_1) + l \text{ per } t > t_1 \end{cases}$$

11.2 Basic

1. Si può partire da un quadrato inscritto in un cerchio: il rapporto perimetro/raggio è 4. Ora disegnare l'ottagono inscritto nel cerchio ma "circoscritto" al quadrato (i vertici del quadrato sono vertici anche dell'ottagono). Ogni lato si è "spezzato" in due, leggermente più lunghi. Il fattore di cui ogni lato si è allargato è $1/\cos(\theta)$ con θ l'angolo di cui è ruotato il lato del quadrato per formare uno dei lati dell'ottagono. Calcolare questi coseni invertendo la formula $\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1$. Il rapporto perimetro/raggio è 2π.

2. n/x; 1; $1+\frac{1}{(1+x^2)arctan x}+cot(x)-\frac{4}{x}-\frac{1}{x\ln x}$. La derivata classica si ottiene moltiplicando per la funzione originaria.

3. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.

4. La resistenza di un cilindro infinitesimo lungo dx e di raggio r è $\rho\,\mathrm{d}x/(\pi r^2)$. Integrando per l'altezza h del cilindro si ottiene:

$$R=\int_0^h \frac{\rho}{\pi\left(r(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\rho}{\pi}\int_0^h\left(b+\frac{x}{h}(a-b)\right)^{-2}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{\rho}{\pi}\frac{h}{b-a}\left(\left(b+\frac{h}{h}(a-b)\right)^{-1}-\left(b+\frac{0}{h}(a-b)\right)^{-1}\right)=$$

$$=\frac{\rho}{\pi}\frac{h}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{\rho h}{\pi ab}$$

Si noti come l'integrale corrisponde alla somma di infinite resistenze infinitesime in serie. Questo è vero perché le superfici equipotenziali sono all'incirca ortogonali all'asse del tronco di cono. Se a è sensibilmente più grande di b, questo non è vero: ci si attende che le superfici equipotenziali siano curve (si consideri il caso limite della base maggiore che va all'infinito e della base minore puntiforme. Si ha la corrente che esce dalla base minore e si diffonde in modo radiale: le superfici equipotenziali sono calotte sferiche).

5. Diciamo $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z);\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$. Si ha $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_xb_x,a_yb_y,a_zb_z)$, da cui:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\cdot\vec{b}))=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_xb_x),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_yb_y),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_zb_z)\right)=$$

$$=(\dot{a}_xb_x+a_x\dot{b}_x,\dot{a}_yb_y+a_y\dot{b}_y,\dot{a}_zb_z+a_z\dot{b}_z)=$$

$$=(\dot{a}_xb_x,\dot{a}_yb_y,\dot{a}_zb_z)+(a_x\dot{b}_x,a_y\dot{b}_y,a_z\dot{b}_z)=\dot{\vec{a}}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\dot{\vec{b}}$$

Analogamente si ha $\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x)$, da cui $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\times\vec{b})=\dot{\vec{a}}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dot{\vec{b}}$

6. Sulle prime due equazioni bisogna sostituire le definizioni di seno e di coseno coi numeri complessi, ovvero:

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i};\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

Sulla terza e sulla quarta si possono riciclare le prime due: ad esempio per la terza si ha $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)} = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$, dove nell'ultimo passaggio si è diviso sopra e sotto per $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.
La quinta e la sesta sono uguali alla settima e all'ottava, se solo si cambiano i nomi degli angoli e si scambiano i due lati dell'equazione.
La settima si trova dalla prima: se si sommano $\sin(\alpha+\beta)$ e $\sin(\alpha-\beta)$ calcolati con la prima equazione (ricordando che $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ e che $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$), si ottiene $2\sin(\alpha)\sin(\beta)$. Si divida per 2.
L'ottava si trova dalla seconda allo stesso modo.
La nona si ottiene dalla seconda allo stesso modo, concentrandosi sul termine $\sin(\alpha)\sin(\beta)$. Nella decima bisogna usare la definizione del coseno coi numeri complessi, notando che si ottiene la serie geometrica $e^{inx}+e^{i(n-1)x}+...+e^{-inx} = e^{inx}(1+e^{-inx}+...+e^{-i2nx}) = e^{inx}\frac{1-e^{-i(2n+1)x}}{1-e^{-inx}} = \frac{e^{i(n+1/2)x}-e^{-i(n+1/2)x}}{e^{inx/2}-e^{-inx/2}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$, ricordando la definizione del seno coi numeri complessi.
L'undicesima si trova usando De Moivre: $\cos(3x)+i\sin(3x) = (\cos(x)+i\sin(x))^3$. Prendendo solo le parti immaginarie di ambo i membri, e semplificando le i, ottengo: $\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$. Esplicitando il termine di interesse si ottiene $\sin^3(x) = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$

7. Osserviamo innanzitutto che per la regola di derivazione del prodotto vale $D[f_1 \cdot f_2] = f_1' f_2 + f_1 f_2'$. Ora consideriamo il caso $n = 3$: vale

$$D[f_1 f_2 f_3] = D[f_1 f_2] f_3 + f_1 f_2 f_3' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$$

Procedendo in questo modo, si può usare la regola di derivazione del prodotto di due funzioni per ricavare la derivata del prodotto di n funzioni semplicemente derivando prima il prodotto delle prime $n-1$ funzioni e poi l'ultima, ottenendo la seguente generalizzazione:

$$D\left[\prod_{i=1}^{n} f_i\right] = \sum_{i=1}^{n} f_i' \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_j = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' f_3 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_{n-1} f_n'$$

Una soluzione più formale di quest'esercizio si ha attraverso il principio di induzione[14]: supponendo infatti che $D\left[\prod_{i=1}^{n} f_i\right] = \sum_{i=1}^{n} f_i' \cdot \prod_{j=1,j\neq i}^{n} f_j$

[14]Data $\mathcal{P}_n$ una qualunque proposizione relativa ad un numero naturale n, se $\mathcal{P}_k$ è vera per un certo $k \in \mathbb{N}$ ("passo base") e se per ogni naturale $n \geq k$ vale l'implicazione "$\mathcal{P}_n$ vera $\Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ vera" ("passo induttivo"), allora $\mathcal{P}_n$ è vera $\forall\ n \geq k$.

, si nota che il passo base è immediato ponendo $n = 2$, e che per il passo induttivo abbiamo:

$$D\left[\prod_{i=1}^{n} f_i\right] = D\left[\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right] f_n + f_n' \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f_i = \sum_{i=1}^{n-1} f_i' \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_j + f_n' \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i' \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_j$$

Dove l'ipotesi induttiva è stata utilizzata nella seconda uguaglianza.

8. (i)

$$\sinh' x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$
$$\cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Osserviamo dunque che la derivata manda il seno iperbolico nel coseno iperbolico e viceversa, perciò se n è un numero naturale, valgono:

$$\sinh^{(2n)} x = \cosh^{(2n+1)} x = \sinh x$$
$$\cosh^{(2n)} x = \sinh^{(2n+1)} x = \cosh x$$

(ii) Il seno iperbolico è una funzione dispari, infatti $\sinh(-x) = -\sinh x$. É una funzione continua in quanto somma di funzioni continue; dato che $\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$, l'insieme immagine di $\sinh x$ è tutto $\mathbb{R}$.
Il coseno iperbolico è una funzione pari, infatti $\cosh(-x) = \cosh x$. É una funzione continua in quanto somma di funzioni continue; $\cosh 0 = 1$, dato che $\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$ e che cosh è crescente in $(0, +\infty)$ in quanto la sua derivata, sinh, è sempre positiva in tale intervallo, l'insieme immagine di $\cosh x$ è $[1, +\infty)$. La funzione coseno iperbolico assume minimo globale in $x = 0$.

(iii) Per la prima identità abbiamo che

$$\begin{aligned}\sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} = \sinh(x+y)\end{aligned}$$

La seconda si mostra in modo sostanzialmente analogo.
Per la terza abbiamo che

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$$

La quinta si ricava come segue:

$$\begin{aligned} 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2} &= 2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}}+e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{\frac{y-x}{2}}}{2} \\ &= \frac{e^x+e^{-x}+e^y+e^{-y}}{2} = \cosh x + \cosh y \end{aligned}$$

(iv) Scrivendo $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, vogliamo ricavare x in funzione di y, perciò procediamo con i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= y \\ e^{2x} - 1 &= 2ye^x \\ e^{2x} - 2ye^x - 1 &= 0 \\ e^x &= y \pm \sqrt{y^2+1} \\ x &= \log\left(y \pm \sqrt{y^2+1}\right) \end{aligned}$$

Dato che $|y| < \sqrt{y^2+1}\ \forall\, y \in \mathbb{R}$ e che il logaritmo può assumere come argomento solo numeri positivi, la funzione inversa di $\sinh x$ è dunque $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(v) Sfruttando quanto dimostrato nel punto (i) e ricordando che $\sinh 0 = 0$ e $\cosh 0 = 1$, possiamo esprimere sinh e cosh in un intorno di 0 in serie di Taylor nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

11.3 ODE

9. Derivando due volte la funzione proposta otteniamo:

$$y' = i\omega w e^{i\omega x} - i\omega z e^{-i\omega x}$$

$$y' = i^2\omega^2 w e^{i\omega x} + i^2\omega^2 z e^{-i\omega x} = -\omega^2 y$$

10. Ricordando che $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, con la sostituzione $x \mapsto -x$ abbiamo che $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$. Sommando o sottraendo queste due quantità, e dividendo rispettivamente per 2 o per $2i$, è immediato verificare le identità richieste.

11. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.

12. Scriviamo $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dove gli a_n sono costanti che dobbiamo trovare. Derivando due volte otteniamo $y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$, da cui l'ODE si può riscrivere come:

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n x)x^n = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+3)a_{n+3} + a_n)x^{n+1} = 0$$

Noi vogliamo che tutti i coefficienti del primo membro si annullino. In particolare vogliamo $2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$. Dopo di che, vogliamo:

$$(n+2)(n+3)a_{n+3} + a_n = 0$$

$$a_{n+3} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+3)} = -\frac{a_n(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Da cui troviamo:

$$a_{3n} = (-1)^n \frac{a_0 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(3n)!}$$

$$a_{3n+1} = (-1)^n \frac{a_1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{(3n+1)!}$$

$$a_{3n+2} = (-1)^n \frac{a_2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 3n}{(3n+2)!} = 0$$

Perciò, definendo $A = a_0$ e $B = a_1$, abbiamo che le soluzioni dell'ODE sono:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(A \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k-2)}{(3n)!} x^{3n} + B \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1} \right)$$

Come ci si aspettava, abbiamo due parametri liberi. La soluzione proposta sulle dispense è il caso $A = 1, B = 0$.

13. Cominciamo con l'osservare che $y = 2$ e $y = -2$ risolvono. Esclusi questi due casi, possiamo moltiplicare i due membri per $\frac{\mathrm{d}x}{4-y^2}$ e poi integrare, ottenendo:

$$\int \frac{y}{4-y^2}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x$$

L'integrale a secondo membro è $1/2x^2$ più una costante, che chiameremo $-1/2k$. Per quello a primo membro può essere utile scrivere:

$$\int \frac{y}{4-y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int \frac{-2y}{4-y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\left|4-y^2\right|\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\log\left|4-y^2\right|$$

Arriviamo quindi a:

$$-\frac{1}{2}\log\left|4-y^2\right| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}k$$

$$\left|4-y^2\right| = \exp\left(-x^2+k\right)$$

$$y^2 = 4 \pm e^k e^{-x^2}$$

Chiamiamo $c = \pm e^k$. c può assumere qualunque valore reale diverso da zero.

$$y^2 = 4 + ce^{-x^2}$$

$$y = \pm\sqrt{4 + ce^{-x^2}}$$

Osserviamo che per $c = 0$ otteniamo $y = \pm 2$, che sono soluzioni che abbiamo già verificato.

14. Anzitutto osserviamo che la traiettoria non dipende dalla velocità, quindi assumiamo che la velocità angolare della ruota sia 1. Cerchiamo la traiettoria del punto che inizialmente sta più in alto. Il moto di questo punto è la composizione di una traslazione ($x = Rt; y = R$) e di una rotazione ($x = -R\sin t; y = -R\cos t$). Otteniamo perciò, sommando,

$x(t) = Rt - R\sin t$ e $y(t) = R - R\cos t$. Ricavando $\cos t$ dalla seconda equazione, otteniamo, per opportuni valori di t:

$$\cos t = 1 - \frac{y}{R}$$

$$t = \arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right)$$

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\sqrt{2yR - y^2}}{R}$$

Che, sostituite nell'equazione di x, danno:

$$x = R\arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sqrt{2yR - y^2}$$

Ora, se noi vogliamo trovare un'ODE risolta da questa equazione, dobbiamo provare a derivare qualcosa. Abbiamo esplicitato x in funzione di y, perciò proviamo a scrivere:

$$\frac{1}{y'} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{R}{\sqrt{2yR - y^2}} - \frac{2R - 2y}{2\sqrt{2yR - y^2}} = \frac{y}{\sqrt{2yR - y^2}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{2yR - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}$$

11.4 Volumetti Infinitesimi

15. Un segmento $\mathrm{d}\ell$ a distanza $r(\ell)$ dall'asse di rotazione genera un'area $2\pi r(\ell)\,\mathrm{d}\ell$ (il fatto che non tutto il segmento è alla stessa distanza dall'asse di rotazione genera correzioni di second'ordine, che quindi si trascurano). Per trovare la superficie richiesta dobbiamo "sommare" tutte queste piccole aree, cioè fare l'integrale di $2\pi r(\ell)\,\mathrm{d}\ell$. :

$$S = \int_\gamma 2\pi r(\ell)\,\mathrm{d}\ell = 2\pi \int_\gamma r(\ell)\,\mathrm{d}\ell$$

Dove γ è il nome che abbiamo dato alla curva che stiamo facendo ruotare. A questo punto riflettiamo su una cosa: chi è il raggio medio R di cui parla il testo? Se ci si pensa un attimo, la media di n oggetti la ottengo sommando tutti questi oggetti e dividendo per n. Estendendo questo concetto agli integrali, possiamo scrivere:

$$R = \frac{\int_\gamma r(\ell)\,\mathrm{d}\ell}{L}$$

Da cui la tesi $S = 2\pi RL$ è banale. Notiamo che l'ipotesi che l'asse di rotazione non intersechi γ ci è servita a non fare confusione coi segni: per calcolare R perbene avremmo dovuto mettere un modulo su $r(\ell)$ dentro l'integrale, il che non ci avrebbe fatto tornare troppi conti...

Allo stesso modo per il volume: una superficie $\mathrm{d}s$ che giace su un piano che viene fatto ruotare genera una superficie $2\pi r(s)\,\mathrm{d}s$, dove $r(s)$ è la distanza di $\mathrm{d}s$ dall'asse di rotazione. L'integrale è $2\pi RS$, dove $R = \frac{1}{S}\int_\gamma r(s)\,\mathrm{d}s$.

Il toro che si ottiene facendo ruotare una circonferenza di raggio r attorno a un asse che dista R dall'origine della circonferenza, ha superficie $4\pi^2 Rr$ e volume $2\pi^2 Rr^2$.
Il toro che si ottiene facendo ruotare un rettangolo di lati a e b attorno a un asse che dista R dal baricentro del toro, ha volume $2\pi abR$.

16. Anzitutto, riconduciamoci al caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$ traslando opportunamente la funzione (cioè considerando $f(x) = y(x-x_0)-y_0$ anziché $y(x)$). A questo punto, l'idea è di considerare l'espansione al second'ordine $y(x) \approx xy'(0) + \frac{1}{2}x^2y''(0)$. Ora cerchiamo di trovare una circonferenza che approssimi bene $y(x)$, cioè che sia uguale al secondo ordine.

    Inizio a sviluppare al secondo ordine dunque una generica circonferenza di centro (a, b) e raggio R. L'equazione è $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Derivo entrambi i membri rispetto a x e ottengo:

$$2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$$

    E derivando nuovamente:

$$1 + (y')^2 + (y-b)y'' = 0$$

    In particolare vorrei trovare la derivata seconda nell'origine in funzione dei soli parametri della circonferenza. Usando le ultime due equazioni ottengo:

$$y'' = -\frac{\left(-\frac{x-a}{y-b}\right)^2 + 1}{y-b} = \frac{R^2}{b^3}$$

    Affinché la circonferenza sia tangente al grafico di f, il raggio nell'origine deve essere perpendicolare alla tangente. Cioè:

$$y_0 = -\frac{1}{f'}a$$

Inoltre devo avere che $b^2 + a^2 = R^2$. Da questi ultimi due fatti ricavo che:

$$b = \frac{R}{\sqrt{(f')^2 + 1}}$$

Infine ponendo che la derivata seconda della funzione e quella della circonferenza siano uguali, e sostituendo il valore appena trovato per b:

$$R = \frac{\left((f')^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''|}$$

Il valore assoluto è apparso per rendere positivo il raggio. In realtà il segno di R ci diceva da che parte del grafico stava la circonferenza, cosa che non ci interessava.

Per tornare alla nostra $y(x)$ originale ci basta scrivere:

$$R(x_0) = \frac{\left(\left(y'(x_0)\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''(x_0)|}$$

17. La pagina di Wikipedia sul Momento d'Inerzia è esauriente.

11.5 Ordini e Limiti

18. Diciamo $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dove gli a_n sono numeri reali. Cerchiamo di scrivere y^5. Il primo termine di x^5 ha grado 0 ed è a_0^5. Eguagliando perciò i termini di grado 0 dei due membri otteniamo $a_0^5 - a_0 = 0$. Esistono tre soluzioni reali: 0, 1, -1. A noi basta trovare una soluzione particolare, quindi prenderemo 0 perché è più semplice. Quindi, abbiamo $a_0 = 0$.

    Vediamo ora il termine di grado 1 di y^5. Sarebbe $5a_0^4 a_1$, ma siccome $a_0 = 0$ sappiamo che è 0. Perciò, uguagliando i termini di primo grado dei due membri abbiamo $0 - a_1 = 1$, quindi $a_1 = -1$. Analogamente, i termini di grado 2, 3, 4 di y^5 sono nulli, da cui $a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

    Essendo $a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, il termine di grado 5 di y^5 è $a_1^5 = -1$, da cui segue $a_5 = -1$. Essendo a_1, a_5 i primi termini non nulli, il prossimo termine non nullo di y^5 è quello di grado 9, che è $5a_1^4 a_5 = -5$, da cui $a_9 = -5$. Quello dopo è $a_{13} = 5a_1^4 a_9 + 10a_1^3 a_5^2 = -25 - 10 = -35$.

19. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.

20. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.

21. Sia $\varepsilon = x^2 - 2x\cos\theta$. Si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\theta+x^2}} = (1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2 \approx 1 + \cos\theta x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)x^2$$

Dove all'ultimo passaggio abbiamo sostituito la definizione di ε e trascurato gli ordini superiori a x^2.

22. Cominciamo a vedere come si comporta il denominatore di questo mostro espandendolo intorno a $x = 0$:

$$\sqrt{1-x^3} \approx 1 - \frac{1}{2}x^3$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^3$$

$$\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \approx -x^3$$

Okay, questo ci dice che se il primo ordine non banale del numeratore è inferiore al terzo allora il limite è ∞; se è superiore al terzo allora è 0; se è il terzo allora è un numero diverso da 0. Cominciamo a espandere il numeratore fino al terzo ordine e vediamo che cosa succede...

$$\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3$$

$$e^x \arctan x \approx \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) \approx x + x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$\log(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$\frac{\sin x}{x}\log(1+x) \approx \left(1 - \frac{1}{6}x^2\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$e^x \arctan x - \frac{\sin x}{x}\log(1+x) \approx \frac{3}{2}x^2$$

$$e^x \arctan x - \frac{\sin x}{x}\log(1+x) + 3(\cos x - 1) \approx 0$$

$$e^x \arctan x - \frac{\sin x}{x}\log(1+x) + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3) \approx \tan(x^3) \approx x^3$$

Fatti tutti questi conti, possiamo concludere che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \log(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{-x^3} = -1$$

23. $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}) = \frac{1}{3}$

24. $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-\sqrt{1+x}}) = \frac{1}{2}$

25. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.

26. In entrambi i casi il valore approssimato è $1+\alpha+\beta$. È vero che in un caso è $(1+\alpha)+\beta$ e nell'altro è $(1+\beta)+\alpha$ dando l'idea erronea che α sia piccolo rispetto a β, ma non ha senso lamentarsi per delle parentesi.

11.6 Fisica

27. Ricordando che il campo elettrico in un punto dello spazio $\vec{r}$ dovuto alla presenza di una carica q posta in $\vec{d}$ è $\vec{E} = q\dfrac{\vec{r}-\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{d}|^3}$ e usando il principio di sovrapposizione, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\vec{E}\left(\vec{r}\right) &= \frac{-q\vec{r}}{r^3} + q\frac{\vec{r}-\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{d}|^3} \\
&= \frac{q}{r^3}\left(-\vec{r} + \frac{\vec{r}-\vec{d}}{\frac{\left(r^2+d^2-2\vec{r}\cdot\vec{d}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^3}}\right) \\
&= \frac{q}{r^3}\left(-\vec{r} + \frac{\vec{r}-\vec{d}}{\left(1-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^2}+\frac{d^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

Il termine $\frac{d^2}{r^2}$ è un termine al secondo ordine in d, quindi si può trascurare. Ponendo $\varepsilon = -\frac{2\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^2}$, si osserva che il denominatore del secondo addendo è della forma $(1+\varepsilon)^a$ con $\varepsilon \ll 1$, e quindi usando l'approssimazione $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1+\alpha\varepsilon$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\vec{E}\left(\vec{r}\right) &\simeq \frac{q}{r^3}\left[-\vec{r} + \left(\vec{r}-\vec{d}\right)\left(1+3\frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^2}\right)\right] \\
&\simeq \frac{q}{r^3}\left(-\vec{d} + \frac{3\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^2}\vec{r}\right) = q\cdot\frac{3\left(\vec{d}\cdot\vec{r}\right)\vec{r} - \vec{d}r^2}{r^5} \qquad d \ll r
\end{aligned}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo trascurato i termini di ordine maggiore di 1.

28. Se $h(t)$ è l'altezza della neve, con $t = 0$ quando inizia a nevicare, si ha $h(t) = ut$ per una costante u. Si ha inoltre $v(t) = \frac{k}{h(t)}$ per una costante k. Se $t = m$ è mezzogiorno, scriviamo le ipotesi del problema:

$$\int_m^{m+2\mathrm{h}} v(t)\,\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{km}$$

$$\int_{m+2\mathrm{h}}^{m+4\mathrm{h}} v(t)\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{km}$$

Rimaneggiando la prima otteniamo:

$$4\,\mathrm{km} = \int_m^{m+2\mathrm{h}} \frac{k}{ut}\,\mathrm{d}t = \frac{k}{u}\left(\log(m+2\mathrm{h}) - \log m\right) = \frac{k}{u}\log\left(\frac{m+2\mathrm{h}}{m}\right)$$

Rimaneggiando la somma delle due:

$$6\,\mathrm{km} = \frac{k}{u}\log\left(\frac{m+4\mathrm{h}}{m}\right)$$

Da cui, facendo il rapporto:

$$\frac{2}{3} = \frac{\log\left(\frac{m+2\mathrm{h}}{m}\right)}{\log\left(\frac{m+4\mathrm{h}}{m}\right)}$$

$$2\log\left(\frac{m+4\mathrm{h}}{m}\right) = 3\log\left(\frac{m+2\mathrm{h}}{m}\right)$$

$$\left(\frac{m+4\mathrm{h}}{m}\right)^2 = \left(\frac{m+2\mathrm{h}}{m}\right)^3$$

Da cui, omettendo le unità di misura per praticità:

$$8m^2 + 16m = 6m^2 + 12m + 8$$

$$m^2 + 2m - 4 = 0$$

Poiché ha cominciato a nevicare prima di mezzogiorno, si deve avere $m > 0$, da cui $m = \left(\sqrt{5} - 1\right)\mathrm{h} = 1\mathrm{h}\ 14\,\mathrm{min}$, per cui ha iniziato a nevicare circa alle 11 meno un quarto.

29. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.

30. Prendiamo $\vec{E} = E\hat{x}$ e $\vec{B} = B\hat{z}$. L'equazione del moto $m\ddot{\vec{x}} = q\vec{E} + q\dot{\vec{x}} \times \vec{B}$ diventa il sistema di due equazioni:
(1) $\ddot{x} = \frac{qE}{m} + \frac{qB}{m}\dot{y}$
(2) $\ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}$
Ora è possibile derivare la prima equazione e sostituire a destra $\ddot{y}$ con la seconda equazione: $\dddot{x} = -(\frac{qB}{m})^2\dot{x}$, da cui $\dot{x} = A\sin(\omega t)$, dove si definisce $\omega = \frac{qB}{m}$ (è un seno e non un coseno perché la velocità all'inizio è nulla per ipotesi).
Ora nella prima equazione possiamo calcolare $\ddot{x}$ e trovare agevolmente $\dot{y} = A\cos(\omega t) - \frac{E}{B}$. Imponendo che la velocità iniziale sia nulla si ottiene $A = \frac{E}{B}$.
Integrando $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e imponendo che la posizione iniziale sia l'origine, si ottiene:
(1) $x = R(1 - \cos(\omega t)$
(2) $y = R(\sin(\omega t) - \omega t)$
Effettuando la sostituzione $R = \frac{Em}{qB^2}$. Questa si vede essere l'equazione di una cicloide.

31. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.

32. Moto rettilineo uniforme $\Rightarrow x(t) = x_0 + vt$ con x_0, v costanti.

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_0 + vt) = -k(x_0 + vt) + \alpha t$$

$$kvt = \alpha t - kx_0$$
$$v = -\frac{x_0}{t} + \frac{\alpha}{k}$$

Imponendo v costante otteniamo $x_0 = 0$ e $v_0 = \frac{\alpha}{k}$. $x(t) = \frac{\alpha}{k}t$ è quindi una soluzione particolare. Per ottenere la soluzione generale della non omogenea ci serve anche la soluzione generale dell'omogenea $\ddot{x} = -kx$, che, come visto a lezione, è $x(t) = A\cos(t\sqrt{k} + \phi)$, quindi la soluzione generale della non omogenea è

$$x(t) = A\cos(t\sqrt{k} + \phi) + \frac{\alpha}{k}t$$

33. Moto rettilineo uniformemente accelerato $\Rightarrow x(t) = x_0 + vt + at^2$ con x_0, v, a costanti.

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_0 + vt + at^2) = -k(x_0 + vt + at^2) + \alpha t^2$$

$$2ma = \alpha t^2 - kx_0 - kvt - kat^2$$

Imponendo a costante otteniamo $v = 0$, $a = -\frac{\alpha}{k}$ e $x_0 = -\frac{2ma}{k} = \frac{2m\alpha}{k^2}$. $x(t) = -\frac{\alpha}{k}t^2 + \frac{2m\alpha}{k^2}$ è quindi una soluzione particolare. Per ottenere la soluzione generale della non omogenea ci serve anche la soluzione generale dell'omogenea $\ddot{x} = -kx$, che, come visto a lezione, è $x(t) = A\cos(t\sqrt{k} + \phi)$, quindi la soluzione generale della non omogenea è

$$x(t) = A\cos(t\sqrt{k} + \phi) - \frac{\alpha}{k}t^2 + \frac{2m\alpha}{k^2}$$

34. Ovviamente c'è la gravità. Il punto si stacca non appena l'accelerazione gravitazionale ortogonale alla guida $g\cos(\theta)$ diventa minore dell'accelerazione centripeta di un'orbita circolare (che approssima localmente la traiettoria parabolica).
    Sapendo che $\tan(\theta) = |\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}| = 2ax$, si trova $g\cos(\theta) = \frac{g}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} = \frac{g}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$, mentre l'accelerazione centripeta è $\frac{v^2}{R} = \frac{-2gy}{R} = \frac{-2gy|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{4ga^2x^2}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$. Imponendo l'uguaglianza tra le due accelerazioni si trova che nel punto in cui inizia a staccarsi vale $1 = \frac{4a^2x^2}{1+4a^2x^2}$ il che non si può verificare.

35. Scriviamo Γ.

$$\Gamma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_{\text{acqua}}}{S}\right)$$

Quindi, se la superficie è orizzontale, la massa d'acqua che l'attraversa per unità di superficie per unità di tempo è sempre Γ. Sia m la massa d'acqua dentro la scodella, allora, ricordando che nel nostro caso S è costante, in quanto sezione di una scodella,

$$S\Gamma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$m = \Gamma S t$$

La costante non è stata dimenticata: l'eventuale massa d'acqua presente nella scodella è considerata incorporata in M.
Indicata con v la velocità della scodella, scriviamone la quantità di moto: calcoliamo la componente parallela alla velocità orizzontale delle gocce, che il testo ci dice essere diretta lungo l'asse x.

$$P_x = (M + m)v$$

$$\dot{P}_x = \dot{m}v + \dot{v}(M + m)$$

Poiché una massa d'acqua δm porta alla scodella una quantità di moto $\overline{P_x} = \delta m V_x$, derivando rispetto al tempo otteniamo che

$$\dot{m}v_x + \dot{v}_x(M+m) = \dot{m}V_x$$

$$S\Gamma v_x + \dot{v}_x(M+m) = S\Gamma V_x$$

$$\dot{v}_x = -\frac{\Gamma S}{M+\Gamma St}v_x + \frac{\Gamma S}{M+\Gamma St}V_x$$

Questa è un'ODE lineare del prim'ordine: per risolverla dobbiamo risolvere $\int \frac{\Gamma S}{M+\Gamma St}\,\mathrm{d}t$. Notando che ΓS è la derivata di $M+\Gamma St$ e che $M+\Gamma St > 0\ \forall t \geq 0$, otteniamo

$$\int \frac{\Gamma S}{M+\Gamma St}\,\mathrm{d}t = \log(M+\Gamma St) + C$$

allora

$$v_x(t) = e^{-\log(M+\Gamma St)} \int e^{\log(M+\Gamma St)} \frac{V_x \Gamma S}{M+\Gamma St} dt$$

$$v_x(t) = \frac{V_x}{M+\Gamma St}(\Gamma St + C_1)$$

$$v_x(t) = V_x\left(1 - \frac{M - C_1}{M+\Gamma St}\right)$$

dove C_1 dipende dalla situazione iniziale, in particolare da $v_x(0)$.

$$x(t) = \int v_x(t)dt = tV_x + V_x\frac{M-C_1}{\Gamma S}\left(log(M+\Gamma st) + C_2\right)$$

Non bisogna farsi spaventare dal logaritmo di una quantità dimensionata, questo è un integrale indefinito: per trovare l'effettiva posizione bisogna fare un integrale definito tra l'istante in cui volete la posizione e l'istante iniziale e così le differenze di logaritmi diventano logaritmi di rapporti e le quantità dimensionate spariscono.

Passiamo ora alla componente y del moto. La quantità di moto lungo y si conserva, quindi la sua derivata è 0.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((M+m)v_y) = 0$$

$$(M+\Gamma St)\dot{v_y} + \Gamma S v_y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_y = -\frac{\Gamma S}{M\gamma St}v_y$$

$$\log(v_y) = -\log(M + \Gamma St) + C$$
$$v_y = \frac{C}{M + \Gamma St} = \frac{Mv_0}{M + \Gamma St}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo notato che la costante C è M per la velocità lungo y nell'istante iniziale.

$$y(t) = \int v_y(t)dt = \frac{Mv_0}{\Gamma S}\log(M + \Gamma St) + C_2$$

Per trovare la traiettoria descritta dalla scodella ricaviamo t da questa formula e sostituiamo in $x(t)$.

$$\frac{\Gamma Sy}{Mv_0} + C_2 = log(M + \Gamma St)$$

Per comodità, poniamo $e^{C_2} = C_3$

$$C_3 e^{\frac{\Gamma Sy}{Mv_0}} = M + \Gamma St$$

$$t = \frac{C_3 e^{\frac{\Gamma Sy}{Mv_0}} - M}{\Gamma S}$$

Sostituendo in $x(t)$,

$$x = V_x\left(\frac{C_3 e^{\frac{\Gamma S}{Mv_0}}}{\Gamma S}e^y - \frac{M}{\gamma S} + \frac{M - C_1}{\Gamma S}\left(\frac{\Gamma Sy}{Mv_0 + \log(C_3)}\right) + C_2\right)$$

Per capire come si composta quest'oggetto, scriviamolo come

$$x = V_x(Ae^y + By + C)$$

36. La velocità iniziale è $\vec{v}(0) = (v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$. La forza è $\vec{F}(t) = (-\gamma v_x(t), -\gamma v_y(t) - mg)$. Per semplicità chiamiamo $\beta := \frac{\gamma}{m}$. Scriviamo $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -\beta v_x \\ \dot{v}_y = -\beta v_y - g \end{cases}$$

La prima è a variabili separabili e ha per soluzione generale $v_x = Ae^{-\beta t}$. La soluzione particolare dell'omogenea associata alla seconda è $Be^{-\beta t}$ e una soluzione particolare è $-\frac{g}{\beta}$. Perciò si ha:

$$\begin{cases} v_x = Ae^{-\beta t} \\ v_y = Be^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \end{cases}$$

Sapendo qual è la velocità iniziale otteniamo A e B:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta e^{-\beta t} \\ v_y = \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \end{cases}$$

Da cui otteniamo un'interessante informazione:

$$v_y = \left(\tan\theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos\theta}\right) v_x - \frac{g}{\beta}$$

Integrando rispetto al tempo otteniamo:

$$y = \left(\tan\theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos\theta}\right) x - \frac{g}{\beta} t + C$$

Imponendo $y(0) = x(0) = 0$ troviamo che $C = 0$. Ci serve ora un modo di esprimere t in funzione di x. Integriamo rispetto al tempo la formula di v_x:

$$x = \frac{v_0}{\beta} \cos\theta \left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

$$t = -\frac{1}{\beta} \log\left(1 - \frac{\beta}{v_0 \cos\theta} x\right)$$

Da cui otteniamo l'equazione della traiettoria:

$$y = \left(\tan\theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos\theta}\right) x + \frac{g}{\beta^2} \log\left(1 - \frac{\beta}{v_0 \cos\theta} x\right)$$

Se l'attrito è molto piccolo allora $\frac{\beta}{v_0 \cos\theta} x \ll 1$, da cui segue, per Taylor al secondo ordine applicato alla funzione $f(z) = \log(1 - z)$ con $z_0 = 0$ e $z = \frac{\beta}{v_0 \cos\theta} x$:

$$\log\left(1 - \frac{\beta}{v_0 \cos\theta} x\right) \approx -\frac{\beta}{v_0 \cos\theta} x - \left(\frac{\beta}{v_0 \cos\theta} x\right)^2$$

Da cui:

$$y \approx x \tan\theta - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

Ci siamo fermati al secondo ordine perché il logaritmo era moltiplicato per $1/\beta^2$, che è un infinito di secondo ordine. E ci è uscita una parabola, la stessa che ci sarebbe uscita in assenza di attrito.

37. Sia P la quantità di moto del razzo. Scrivendo la conservazione della quantità di moto si vede che all'espulsione di una massa $\mathrm{d}\mu$ a velocità relativa $-v_0$ rispetto al razzo si ha:

$$\mathrm{d}\mu v_0 = \mathrm{d}P$$

Da cui la forza applicata sul razzo:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} v_0 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = F$$

Questa forza induce sulla massa del razzo $m(t)$ un'accelerazione $\dot{v}$

$$\dot{v}m(t) = v_0\dot{\mu}(t)$$

$$\dot{v}m(t) = -v_0\dot{m}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} m_0 \left(1 - \frac{\eta t}{\tau}\right) = m_0 \frac{\eta}{\tau} v_0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v_0 \frac{\eta}{\tau - \eta t}$$

$$\mathrm{d}v = -\frac{-\eta}{\tau - \eta t} v_0 \,\mathrm{d}t$$

$$v(t) = v_0 \log\left(\frac{1}{\tau - \eta t}\right) + C$$

$$v(\tau) = v(\tau) - v(0) + v(0) = v_0 \log\left(\frac{\tau}{\tau - \eta\tau}\right) + 0 = v_0 \log\left(\frac{1}{1-\eta}\right)$$

Nel caso di espulsione istantanea di massa otteniamo dalla conservazione della quantità di moto

$$v_0\eta = v(1-\eta)$$

$$v = v_0 \frac{\eta}{1-\eta}$$

Quindi le velocità che il testo chiede di confrontare al limite $\tau \to 0$ sono diverse.

38. Proposto all'esercitazione (è il 2), vedi sopra.

39. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.

40. Essendoci gravità, si ha:

$$m\dot{v} = -mg - \gamma v$$

$$\dot{v} = -g - \frac{\gamma}{m} v$$

Che è un'ODE del tipo $y' = ya(x) + b(x)$. In particolare, la soluzione generale di questa è:

$$v = e^{-\frac{\gamma}{m}t} \int e^{\frac{\gamma}{m}t} \cdot (-g)\, \mathrm{d}t = -\frac{mg}{\gamma}\left(1 + Ae^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

Dove A è una costante che dipende dalla velocità iniziale. Integrando rispetto al tempo otteniamo:

$$x = -\frac{mg}{\gamma}\left(t - \frac{m}{\gamma} Ae^{-\frac{\gamma}{m}t} + B\right)$$

Dove B è un'altra costante che dipende da A e dall'altezza iniziale.

41. Scriviamo $F = ma$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m} v^2$$

$$\frac{1}{v^2}\, \mathrm{d}v = -\frac{b}{m}\, \mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{v} = -\frac{bt}{m} - C$$

$$\frac{1}{v} = \frac{bt}{m} + C$$

$$v = \frac{m}{bt + mC}$$

Per trovare C consideriamo che $v(0) = v_0$

$$v_0 = \frac{1}{C}$$

Quindi

$$v = \frac{m}{bt + \frac{m}{v_0}}$$

$$x = \int v\, \mathrm{d}t = \frac{m}{b} \log\left(bt + \frac{m}{v_0}\right) + C$$

Per trovare C consideriamo che $x(0) = 0$, quindi $C = -\frac{m}{b} \log\left(\frac{m}{v_0}\right)$

42. Si tratta solo di rifare conti già visti a lezione. La soluzione generale è:

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

Da cui, imponendo le condizioni iniziali:

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

43. A lezione abbiamo visto che $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ è soluzione di $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Notiamo che $\cos(\omega x + \varphi) = \frac{1}{2}\big(e^{i(\omega t+\varphi)} + e^{-i(\omega t+\varphi)}\big)$. La soluzione di questa ODE è simile: verifichiamo che

$$x = A\frac{e^{\omega t+\varphi} - e^{-(\omega x+\varphi)}}{2}$$

è soluzione (come al solito $\omega^2 = \frac{k}{m}$).

$$\dot{x} = A\frac{\omega e^{\omega t+\varphi} + \omega e^{-(\omega x+\varphi)}}{2}$$

$$\ddot{x} = \omega^2 A\frac{e^{\omega t+\varphi} - e^{-(\omega x+\varphi)}}{2}$$

Ha due parametri liberi quindi è la soluzione generale. Da $x(0) = 0$ ricaviamo $\varphi = 0$, da $\dot{x}(0) = v_0$ ricaviamo $A\omega = v_0$ quindi $A = \frac{v_0}{\omega}$.

44. Scriviamo $F = ma$:

$$F_0 e^{-bt} = -m\ddot{x}$$

Integrando i due membri rispetto al tempo otteniamo:

$$\dot{x} = F_0\frac{1}{mb}e^{-bt} + A$$

Imponendo $\dot{x}(0) = 0$ troviamo A:

$$\dot{x} = F_0\frac{e^{-bt} - 1}{mb}$$

$$x = F_0\frac{-\frac{1}{b}e^{-bt} - t}{mb} + B = F_0\frac{Bmb^2 - e^{-bt} - bt}{mb^2}$$

Imponendo $x(0) = 0$ troviamo B:

$$x = F_0\frac{1 - e^{-bt} - bt}{mb^2}$$

45. In un istante il razzo ha massa m ed è fermo nel suo sistema. Poi la massa del razzo cambia di $\mathrm{d}m$ (negativo) e viene eiettato dall'ugello $-\mathrm{d}m$ di carburante a velocità u rispetto al razzo. La conservazione della quantità di moto impone $0 = -\mathrm{d}m(-u) + (m + \mathrm{d}m)\,\mathrm{d}v$. Ignorando il differenziale di second'ordine si trova $\mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}m}{m}$, ed integrando $\Delta v = -u\ln(\frac{m_{fin}}{m_{in}}) = u\ln(1 + \frac{m_c}{m_0})$, dove m_c è la massa del carburante e m_0 è la massa finale, cioè del razzo che ha esaurito il carburante.
$\Delta v = 3u$ corrisponde a $m_c = m_0(e^3 - 1) \approx 19m_0$.

46. *Strato di ghiaccio su un lago* (SNS 2015 1) (si trova online).

47. $U = -\rho g l^2/2$

11.7 Derivate e Integrali

48. Per verificare la continuità in 0 consideriamo che

$$-|x|^3 \leq x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|^3$$

$$-|x|^3 \leq f(x) \leq |x|^3$$

Facendo tendere x a 0 otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Quindi la funzione è continua in 0 (la continuità sul resto di $\mathbb{R}$ è ovvia).
Per la derivabilità consideriamo che

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \neq 0$$

Per calcolare la derivata in $x = 0$ consideriamo che

$$-|x|^3 \leq x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|^3$$

$$\frac{-|x|^3 - 0}{x} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \frac{|x|^3 - 0}{x}$$

Se facciamo tendere x a 0 otteniamo la derivata della funzione in 0.

$$0 \leq f'(0) \leq 0$$

Verifichiamo infine che $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left[3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

Con il teorema del confronto si ottiene che questo limite fa $0 = f'(0)$, quindi la funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Per la continuità della seconda funzione il procedimento è analogo. Derivandola quando $x \neq 0$ troviamo che

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \neq 0$$

E quindi $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste, di conseguenza la funzione non può essere derivabile in 0. La derivabilità su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è ovvia.

49. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.

50. Sia che gli estremi siano 0 e $\pi/2$ oppure 0 e π, è facile verificare che nell'integrale per parti il termine non sotto il segno d'integrale è nullo. Poi basta usare $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Sia nel caso dei coseni che dei seni. $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{5}$, che tra l'altro viene molto più velocemente con il cambio di variabili $\alpha = 5\theta$.

51. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.

52. Se $t = \tan(\alpha/2)$ si ricavano facilmente $1+t^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha/2}$ e quindi si trovano $\cos(\alpha/2)$ e, moltiplicando per t, $\sin(\alpha/2)$. Con le formule di duplicazione del seno e del coseno è facile trovare $\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

53. Conviene sempre effettuare la sostituzione $x = u/a$, in modo che al denominatore ci sia $\pm 1 \pm x^2$ o una sua radice. Ci si aspetta che si troveranno arcoseni, arcotangenti, magari anche iperboliche. Quindi bisogna fare le derivate delle funzioni trigonometriche ed iperboliche per vedere quale corrisponde a quale integrale.
Quanto basta sapere di seno iperbolico e coseno iperbolico è che sono l'uno la derivata dell'altro, e che $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$: questo permetterà di esprimere uno in funzione dell'altro. Ad esempio $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x) = \sqrt{1+\sinh^2(x)}$, quindi ho scoperto che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\operatorname{arcsinh}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, che ricorda il terzo integrale dopo un cambio di variabili.

$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(a^2-u^2)}} = \arcsin(u/a)$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2-a^2)}} = \mathrm{arccosh}(u/a)$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+a^2)}} = \mathrm{arcsinh}(u/a)$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(-u^2-a^2)}} = \pm i\,\mathrm{arcsinh}(u/a)$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan(u/a)$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctanh}(u/a)$

54. Proposto all'esercitazione, vedi sopra.