

Fluidodinamica

Marco Ambrosini* Andrea Bruno[†]

16 marzo 2021

Indice

1	Fluidodinamica	2
1.1	Derivata materiale	3
1.2	Conservazione della materia	5
1.3	Equazioni di continuità e di trasporto	6
2	Equazione del moto	9
2.1	Regimi fluidodinamici	10
2.2	Idrostatica	12
2.3	Equazione di Bernoulli	15
2.4	Analogia con l'Elettrostatica	17
2.5	Cenni al caso viscoso	21
3	Onde	27
3.1	Linearizzazione della fluidodinamica	27
3.2	Acque poco profonde	29
3.3	Oltre	31
4	Problemi	32
5	Soluzioni	35

Sommario

Nella lezione si trattano alcuni argomenti base della fluidodinamica come le equazioni di continuità e trasporto, l'idrostatica, i flussi ideali e incompressibili, il teorema di Bernoulli e il regime laminare per fluidi viscosi.

*marco.ambrosini@sns.it

[†]andrea.bruno@sns.it

1 Fluidodinamica

Si definisce fluido un materiale che non sostiene sforzo di taglio, cioè stress (forza per unità di area) che ha direzione nel piano tangente alla superficie del fluido. Va detto che questa definizione è molto astratta e troppo generale. Inoltre anche se il fluido non sostiene indefinitamente lo sforzo di taglio, comunque se dotato di viscosità risponde ad esso in maniera più o meno apprezzabile. La teorizzazione della fluidodinamica, che ne definisce anche il campo di lavoro, è un processo estremamente complesso e tecnico, per questo motivo (almeno a livello elementare) si applicano le sue equazioni in maniera spesso garibaldina, senza controllare che l'oggetto che si sta descrivendo sia effettivamente descrivibile con quel dato apparato teorico. (Figura 1).

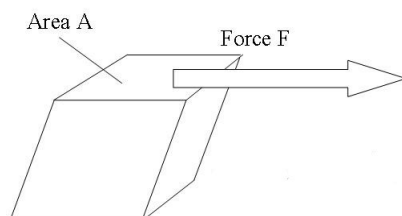


Figura 1: sforzo di taglio

Per studiarne il comportamento approssimiamo il fluido come un continuo, cioè ogni punto del fluido sarà caratterizzato da un determinato valore di una grandezza fisica (velocità, pressione, densità, ecc...). Questi punti, che sono un'idealizzazione, corrispondono nella realtà a porzioni di fluido che, detto senza troppo rigore, devono essere sufficientemente grandi da poter trascurare la granularità della materia, ovvero contenere abbastanza oggetti su cui mediare le proprietà d'interesse in modo che le fluttuazioni di esse siano piccole. Al contempo queste porzioni devono essere abbastanza piccole da poter essere considerate come punti geometrici dello spazio.¹ Chiameremo questi *elementi fluidi* nel seguito della lezione.

La dinamica di un fluido si può studiare da due differenti punti di vista:

- il primo consiste nel fissare l'elemento di fluido e guardare la sua evoluzione temporale. Intuitivamente è possibile immaginare di colorare per distinzione l'elemento fluido e seguirlo nella sua evoluzione (punto di vista lagrangiano).
- il secondo consiste nello scegliere un punto dello spazio occupato dal fluido e vedere come cambiano le grandezze fisiche nel tempo in questo

¹scala mesoscopica

particolare punto. Intuitivamente corrisponde a fissarsi in una piccola regione di spazio e vedere ciò che passa da essa (punto di vista euleriano).

Nella prossima sezione, partendo dalla descrizione euleriana di un flusso “passiamo” al punto di vista lagrangiano adatto a scrivere l’equazione del moto per l’elemento fluido.

1.1 Derivata materiale

Supponiamo di descrivere il moto del fluido dal punto di vista euleriano. In questo modo abbiamo una funzione $\vec{v}(\vec{r}, t)$ che ci dice la velocità del fluido nella posizione $\vec{r}$ al tempo t . Con questa informazione ci poniamo l’obiettivo di trovare l’accelerazione del fluido in un punto generico a un istante t .

È da notare che $\vec{a}$ non è semplicemente $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$; per convincersene si pensi all’esempio di un flusso unidimensionale indipendente dal tempo in cui la velocità varia da punto a punto (ad esempio $\vec{v}(x) = \alpha x \hat{x}$), chiaramente l’accelerazione del fluido non può essere nulla ovunque, tuttavia in tutti i punti $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$.

Ciò che rappresenta $\frac{\partial \vec{v}(x, y, z, t)}{\partial t}$ è la differenza tra le velocità di due elementi fluidi diversi: cioè quelli che passano per $\vec{r}$ al tempo t e al tempo $t + dt$. Quello che invece interessa a noi è la variazione della velocità *dello stesso elemento fluido* nel tempo dt .

Per trovarla immaginiamo di lasciare evolvere il sistema per un tempo dt , l’elemento fluido che si trovava in $\vec{r} = (x, y, z)$ al tempo t , si trova in $\vec{r} + \vec{v} dt = (x + dx, y + dy, z + dz)$ al tempo $t + dt$; segue che l’accelerazione cercata è

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \vec{v}(x, y, z, t)}{dt} =$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$$

(nel primo passaggio si è applicata la chain rule) Questa viene chiamata derivata materiale (o convettiva) e si indica con $\frac{D\vec{v}}{Dt}$. L’idea è semplice, devo seguire l’elemento fluido, perciò anche $\vec{r}$ cambia con t .

Esempio 1.1. Si consideri un rubinetto aperto che si trova ad altezza h da cui esce un getto costante a velocità v_0 . Sapendo che la velocità dell’acqua ad un’altezza z vale

$$v_z = \sqrt{2g(h - z) + v_0^2}$$

(si ottiene imponendo la conservazione dell’energia per la singola porzione di fluido) trovare l’accelerazione in ogni punto.

Soluzione 1.1. Il flusso è indipendente dal tempo, di conseguenza l'accelerazione lungo z vale

$$a_z = v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = v_z \frac{-2g}{2v_z} = -g$$

Come ci si poteva aspettare è costante e uguale all'accelerazione gravitazionale.

Visto che tornerà utile più avanti, diamo la definizione di linea di flusso: la linea di flusso è, fissato l'istante t , quella linea tangente in ogni punto alla velocità $\vec{v}$; se il flusso è stazionario (indipendente dal tempo), questa coincide con le traiettorie degli elementi fluidi.

Un controesempio nel caso il campo dipenda dal tempo, può essere

$$v = v_0(\cos(\omega t), \sin(\omega t)) \quad (1)$$

per il quale le linee di flusso sono rette, ma gli elementi fluidi percorrono circonferenze. Una conseguenza della definizione è che due linee di flusso non possono mai incrociarsi se non in punti in cui la velocità è nulla, altrimenti nel punto di intersezione la velocità non sarebbe definita.

È da notare che lo stesso discorso si applica a una generica grandezza $f(\vec{r}, t)$ funzione della posizione e del tempo, come la densità, l'energia cinetica, la temperatura, etc. Se siamo interessati a conoscere come varia f nel tempo per un certo elemento fluido abbiamo

$$\frac{Df}{Dt}(\vec{r}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{r}, t) + \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

dove v_i è la componente i -esima della velocità dell'elemento fluido. Come visto prima nel caso dell'accelerazione, il secondo termine a destra (moltiplicato per dt) rappresenta la variazione di f quando ci si sposta di $\vec{v}dt$ lungo la linea di flusso a tempi fissati.

Quello che abbiamo trovato con la (2), visto in altri termini, è come si passa dalle derivate nella rappresentazione euleriana alla derivata lagrangiana (derivata materiale).

Esempio 1.2. Consideriamo in due dimensioni un fluido con velocità $\vec{v} = \alpha(x, -y)$, in cui è presente un inquinante con concentrazione (per unità di area) $c = \beta x^2 y e^{-\alpha t}$.

- Trovare le traiettorie degli elementi fluidi

- Preso un certo elemento fluido, dire come varia nel tempo la concentrazione dell'inquinante all'interno di tale elemento.

Soluzione 1.2. Sappiamo che

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha y$$

per trovare le traiettorie eliminiamo il tempo prendendo il rapporto delle due equazioni. Si ottiene

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \implies x dy + y dx = 0 \implies d(xy) = 0 \implies xy = k$$

quindi gli elementi fluidi si muovono su iperboli.

La variazione nel tempo della concentrazione è la derivata materiale di quest'ultima

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} = -\alpha c + 2\alpha c - \alpha c = 0$$

che quindi è nulla.

1.2 Conservazione della materia

Si immagini un tubo con asse lungo x e sezione $A(x)$ variabile (Figura 2). Vogliamo scrivere la conservazione della materia per un fluido che ci scorre all'interno con velocità orizzontale $v_x(x)$ e densità $\rho(x)$ indipendenti dal tempo.

Quello che va imposto, detto a parole, è che presa la zona di tubo compresa tra x_1 e x_2 generici, tanta materia entra quanta ne esce (infatti la quantità di materia nella zona compresa è costante). Ciò si traduce in: il flusso di materia attraverso la sezione $A(x)$ deve essere costante e quindi indipendente da x . Questo si scrive come:

$$\Phi(m) = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho A dx}{dt} = \rho A v_x = \text{const.}$$

In generale il ragionamento resta valido se la velocità dipende dal tempo.

Esempio 1.3. Riprendendo l'esempio 1.1 (del rubinetto) trovare la sezione del flusso in funzione dell'altezza se il foro da cui esce l'acqua ha sezione A_0 .

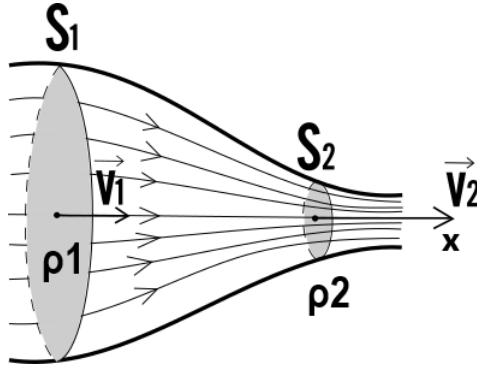


Figura 2: tubo con sezione variabile.

Soluzione 1.3. Dato che la densità è costante, vale

$$v_z A(z) = v_0 A_0 \quad \Rightarrow \quad A(z) = \frac{v_0 A_0}{v_z} = \frac{A_0}{\sqrt{2 \frac{g(h-z)}{v_0^2} + 1}}$$

abbassandosi la sezione minore è dovuta all'aumento della velocità.²

Il risultato trovato invece non vale se ρ a dipendere dal tempo, infatti a differenza di prima in questo caso si può avere un accumulo temporaneo di materia nella regione tra x_1 e x_2 . Quello che siamo in grado di dire ora è, detta M la quantità di materia compresa in questa regione, la sua variazione nel tempo è uguale al flusso netto entrante:

$$\frac{dM}{dt} = \Phi_1(m) - \Phi_2(m)$$

Cioè

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho A dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} A dx = \rho(x_1, t) A(x_1) v(x_1) - \rho(x_2, t) A(x_2) v(x_2)$$

1.3 Equazioni di continuità e di trasporto

Sulla base delle osservazioni precedenti, cogliamo l'occasione per introdurre un concetto generale e dalla vasta applicabilità, quale è il trasporto. L'idea fondamentale è che in molte situazioni sappiamo che delle quantità si trasportano

²Dato che la sezione diminuisce la componente radiale della velocità v_ρ è non nulla, a rigore uno dovrebbe tenere conto anche di questa quando impone la conservazione dell'energia per trovare v_z ; tuttavia $v_\rho \ll v_z$ se v_0 è abbastanza grande e quindi si trascura (siete invitati a quantificare questo "abbastanza grande").

costanti sotto evoluzione temporale, oppure cambiano a causa di un termine di sorgente noto. Perciò è necessario trascrivere queste informazioni in termini matematici locali, ovvero ottenere delle equazioni differenziali che rendano conto della fisica in questione. Per farlo passiamo dalle espressioni globali, che sono intuitivamente vere, applicandole a piccoli cubetti o equivalentemente utilizzando il teorema della divergenza. Per semplicità lavoriamo con volumi fissi (V sarà il volume e Σ la superficie di bordo ad esso associata). Iniziamo da un caso in cui sappiamo non essere presenti sorgenti di massa. L'informazione è traducibile considerando che la massa che esce da un volume (usando il teorema della divergenza)

$$\Phi_V = \int_{\Sigma} (\rho \vec{v}) \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad (3)$$

è responsabile del calo della massa nel volume stesso

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (4)$$

Uguagliando i due membri perciò otteniamo

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0 \quad (5)$$

Questa in versione locale ci dice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (6)$$

Ora sulla falsa riga del procedimento precedente è facile generalizzare il procedimento nel caso di conservazione di una certa quantità A . Presa la densità associata $a = \frac{dA}{dV}$ varrà

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot (a \vec{v}) = 0 \quad (7)$$

Nel caso si conservasse la quantità di moto avremmo perciò

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \vec{v}) = 0 \quad (8)$$

che, valendo componente per componente, troverete in generale con piccolo abuso di notazione come

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = 0 \quad (9)$$

Discutiamo anche il caso in cui siano presenti sorgenti. In tal caso l'informazione fisica da tradurre è: la variazione della quantità d'interesse nel volume

$$-\frac{d}{dt} \int_V a dV = - \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV \quad (10)$$

è dovuta all'uscita della quantità d'interesse o alla generazione di essa da parte delle sorgenti interna al volume

$$\int_{\Sigma} (a\vec{v}) \cdot d\vec{\Sigma} - \int_V \dot{s} dV = \int_V \nabla \cdot (a\vec{v}) dV - \int_V \dot{s} dV \quad (11)$$

dove si è chiamato s il termine di sorgente.

La formula locale quindi sarà

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot (a\vec{v}) = \dot{s} \quad (12)$$

Nel caso della massa la forma di s potrebbe essere modellizzata, per una sorgente di particelle di massa m , con $mn(t)$ e perciò l'equazione di continuità sarà

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = m\dot{n} \quad (13)$$

Fino ad ora abbiamo discusso solo equazioni di continuità, ma come mostreremo sono strettamente correlate alle equazioni di trasporto con un piccolo artificio matematico. Nel corso della lezione si è visto come una certa quantità è trasportata costante lungo una traiettoria se la sua derivata materiale soddisfa:

$$\frac{Da}{Dt} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} a + \frac{\partial a}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

In questo caso si dice che a è una costante materiale. Non è difficile mostrare che inoltre è valida la seguente fondamentale formula:

$$\nabla \cdot (a\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} a + a \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (15)$$

Questa applicata al termine $\nabla \cdot (a\vec{v})$ delle equazioni di continuità ci permette di interpretarle come equazioni di trasporto con termine di sorgente. Nel caso in cui la quantità a sia conservata la forma di trasporto (o materiale) è

$$\frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} a = -a \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (16)$$

Possiamo quindi anche dedurre che per fluidi incompressibili ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$) la densità è una costante materiale, trasportata costante dal moto. Questo tipo di equazioni forniscono un ottimo supporto nelle analisi dei vari fenomeni fisici che consideriamo. Spesso, a titolo di esempio, in fluidodinamica si utilizzano i trasporti per quantità di moto, massa, energia e entropia.

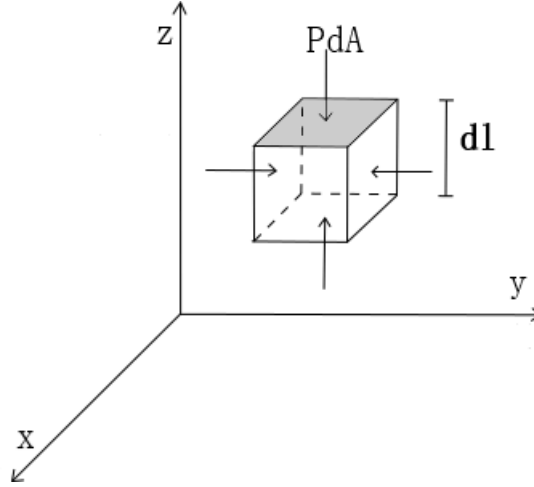


Figura 3: cubetto di fluido.

2 Equazione del moto

Vogliamo scrivere l'equazione del moto per l'elemento fluido, cioè l'equivalente di $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Sappiamo dalla sezione precedente come si scrive l'accelerazione. Per quanto riguarda le forze distinguiamo innanzitutto tra i due tipi possibili:

- *le forze di volume*, l'intero volume dell'elemento ne risente. Un esempio è la forza gravitazionale.
- *le forze di contatto*, interessano sola la superficie dell'elemento fluido. Degli esempi sono le forze dovute alla pressione e all'attrito tra elementi contigui.

Indichiamo con $\vec{f}$ la forza per unità di volume dovuta alle forze di volume (nel caso gravitazionale $\vec{f} = \rho\vec{g}$).

A questo punto vogliamo scrivere il termine dovuto alle forze di contatto. Per il momento assumiamo che il fluido sia ideale, cioè che la sua viscosità sia nulla; di conseguenza dobbiamo calcolare solo la forza esercitata dalla pressione. Lo facciamo per un cubetto³ di lato dl che sarebbe il nostro elemento fluido (Figura 3), con spigoli orientati lungo gli assi cartesiani. Il contributo alla forza di due facce opposte, visto che dl è molto piccolo, è:

$$- [p(x_i + dl) - p(x_i)] (dl^2) \hat{x}_i = - \frac{p(x_i + dl) - p(x_i)}{dl} (dl)^3 \hat{x}_i = - \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \hat{x}_i$$

³il risultato che si ottiene è generale e vale anche se la forma dell'elemento fluido è diversa da un cubetto (infatti questa si può approssimare con tanti cubettini)

quindi per il cubetto la forza dovuta alla pressione si può riscrivere come ⁴

$$\vec{F}_p = - \sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \hat{x}_i = - \vec{\nabla} p dV$$

Ora, inserendo i vari termini siamo pronti a scrivere l'equazione del moto

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F} \\ \rho dV \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \vec{f} \cdot dV + \vec{F}_p \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \right) = \vec{f} - \sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \hat{x}_i \end{aligned} \quad (17)$$

O analogamente imponendo $\vec{f} = \rho \vec{g}$ (dove $\vec{g}$ non è necessariamente quello gravitazionale):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\sum_i v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (18)$$

Nell'ultima equazione, che si chiama **equazione di Eulero**, si è usata la notazione particolare $\sum_i v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$. Si intende che, essendo un'equazione vettoriale, prima va eseguito il prodotto scalare formale tra $\vec{v}$ e ∇ (ovvero $\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$) e poi va applicato a ciascuna componente di $\vec{v}$.

2.1 Regimi fluidodinamici

Prima di iniziare a vedere qualche aspetto particolare dell'equazione di Eulero, facciamo una deviazione un po' esotica, ovvero uno studio qualitativo dell'equazione in una situazione bidimensionale, in cui ci sia inoltre una relazione tra p e ρ . Definiamo $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$ il quadrato della velocità del suono nel mezzo. L'equazione di Eulero, per semplicità, nel caso di assenza di forze che non siano di pressione, assumerà allora la forma:

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -c^2 \frac{\nabla \rho}{\rho} \quad (19)$$

⁴Per un corpo macroscopico dove non possiamo fare le stesse approssimazioni questa forza si scrive come

$$\vec{F}_p = - \int_S p \cdot \hat{n} dA$$

dove S è la superficie del corpo, $\hat{n}$ è il versore uscente e ortogonale alla superficie in ogni punto e il segno negativo sta a indicare che il verso della forza è quello entrante.

In generale per semplificare i problemi dovremo capire quali pezzi di questa equazione sono piccoli, per poterli trascurare o trattare con metodi appropriati. Perciò dato un generico problema definiamo L e T le estensioni spaziali e temporali caratteristiche del problema in esame, con cui possiamo stimare le scale di variazione delle grandezze che ci interessano. Per esempio se fossimo in presenza di un problema la cui distribuzione spaziale fosse una gaussiana ($e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma^2}}$), dovremmo utilizzare come scala di estensione spaziale la sua deviazione standard σ (la radice quadrata della varianza). A questo punto possiamo discretizzare le derivate nell'equazione sopra:

$$\frac{\delta v}{T} + \frac{\delta v}{L}v = -c^2 \frac{\delta \rho}{\rho} \frac{1}{L} \quad (20)$$

che scritta meglio, ovvero definendo $v_\phi = \frac{L}{T}$ è

$$\frac{v_\phi}{c} \frac{\delta v}{c} + \frac{\delta v}{c} \frac{v}{c} = -\frac{\delta \rho}{\rho} \quad (21)$$

Consideriamo il problema di un aereo in volo nel suo sistema di riferimento. Qui il moto fluido è stazionario e ha perciò come scala di tempo $T = \infty$. Inoltre $\delta v \approx v \ll c$ poichè la velocità di crociera è abbastanza più piccola della velocità del suono. Perciò l'equazione discretizzata, avendo definito $\epsilon = \frac{\delta v}{c} = \frac{v}{c}$ ci dice:

$$\epsilon^2 = -\frac{\delta \rho}{\rho} \quad (22)$$

che ci dice che la comprimibilità è del secondo ordine. Oppure possiamo analizzare una situazione come la propagazione del suono, in cui ci aspettiamo che la comprimibilità giochi un ruolo fondamentale. Per una tale situazione, si ha $v_\phi \approx c$ e $\delta v \approx v \ll c$ perciò l'equazione discretizzata ci dice

$$\epsilon = -\frac{\delta \rho}{\rho} \quad (23)$$

che conferma le attese.

Su conti di questo tipo si impostano i vari regimi fluidodinamici quali sonico, supersonico, subsonico, ecc.. e per ognuno di essi esistono approssimazioni dell'equazione originale o è perlomeno possibile estrarre informazioni sugli ordini di grandezza delle perturbazioni.

2.2 Idrostatica

Partiamo dal caso più semplice, ossia il fluido è fermo in ogni punto. L'equazione (18) si riduce a

$$\vec{f} = \sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \hat{x}_i \quad (24)$$

che equivale a dire che la forza su ogni volumetto deve essere nulla e questo implica automaticamente che il momento torcente su un volume di forma arbitraria V del fluido è nullo.

Se la forza di volume è proporzionale alla massa si può scrivere $f_i = \rho g_i$ e se la forza per unità di massa $\vec{g}$ è conservativa, si può vedere come derivata di un potenziale $g_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ e la (24) si riscrive per la singola componente:

$$-\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (25)$$

Ora applichiamo l'equazione a un fluido immerso in campo gravitazionale, si ha

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \implies \quad p(z) = p(z_0) - g \int_{z_0}^z \rho(z) dz$$

Il potenziale associato alla forza gravitazionale è $\phi = gz$. Nel caso particolare in cui ρ non dipenda da z otteniamo la nota legge di Stevino

$$p(z) - p(z_0) = -\rho g(z - z_0)$$

Esempio 2.1. Mostrare che nell'ipotesi precedente sulle superfici equipotenziali la pressione è costante. *Hint:* se ci fosse una variazione di pressione il liquido potrebbe essere in equilibrio? Si consideri un tubo a U con due liquidi di densità diversa in equilibrio sotto la presenza di gravità. In generale P non è costante ad altezza fissata, dove fallisce la dimostrazione precedente?

Soluzione 2.1. Se P non fosse costante ci sarebbe una forza non nulla parallela alla superficie dovuta alla differenza di pressione che non potrebbe essere bilanciata in alcun modo dalla forza di volume (che ha componente nulla sulla superficie equipotenziale) e quindi non saremmo in una situazione di equilibrio. Nel ragionamento precedente abbiamo implicitamente usato il fatto che la superficie di interesse immersa nel liquido fosse connessa, cosa che invece non succede quando confrontiamo le due estremità del tubo.

Nel generico problema di idrostatica, supponendo di conoscere il potenziale ϕ , abbiamo l'equazione (25) con le due incognite P e ρ , per arrivare in fondo è necessaria una seconda equazione, ad esempio una che legghi pressione e densità, come un'equazione di stato.

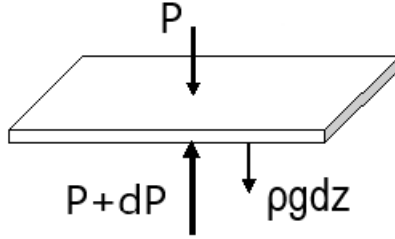


Figura 4: la forza dovuta alla differenza di pressione controbilancia la forza peso dello straterello (Esempio 2.2)

Esempio 2.2. Se consideriamo una colonna d'aria non troppo estesa, possiamo supporre che la temperatura in essa sia omogenea. Supponendo inoltre che l'aria sia formata da molecole di massa μ e che obbedisca all'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p = \frac{N}{V}kT$$

Trovare la pressione in funzione dell'altezza.

Soluzione 2.2.

$$\rho = \frac{p\mu}{kT}$$

Per Stevino $\partial_z p = -\rho g$, allora segue che

$$\partial_z p = -p \frac{\mu g}{kT} \Rightarrow p(z) = p(0) \exp\left(-\frac{\mu g}{kT} z\right)$$

per come abbiamo ricavato Stevino questo procedimento è equivalente a bilanciare le forze che agiscono sullo straterello ad altezza z (Figura 4).

Esempio 2.3. Consideriamo un cilindro rotante con velocità angolare Ω , contenente all'interno un liquido di densità ρ . Trovare lo stato stazionario e in particolare la forma della superficie del liquido

Soluzione 2.3. Nello stato stazionario, raggiunto grazie all'attrito, tutto il liquido ruota alla velocità angolare del cilindro. In questo caso si ha, mettendosi nel sistema rotante, che il liquido è fermo e di conseguenza diventa un problema idrostatico. Il potenziale in questo sistema è

$$\phi = -\frac{\Omega^2 r^2}{2} + gz$$

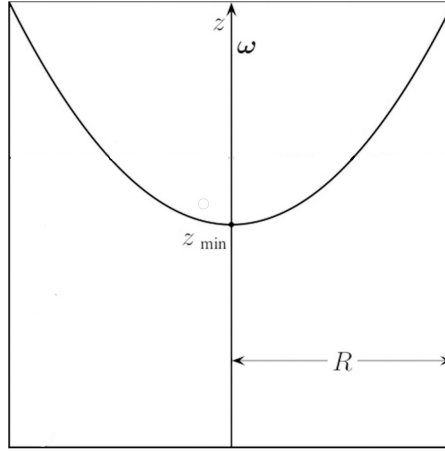


Figura 5: cilindro rotante dell'esempio

dove il primo termine rappresenta il potenziale centrifugo.⁵

Le superfici equipotenziali sono isobare, in particolare la superficie del liquido sarà quella per cui $P = P_{\text{atm}}$ e sarà della forma

$$z = z_{\min} + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$$

Si può dimostrare imponendo ϕ costante lungo la curva (sezione della superficie) $z(r)$, ovvero

$$\frac{d\phi}{dr} = 0 = -\Omega^2 r + g \frac{dz}{dr}$$

e risolvendo l'equazione differenziale ottenuta.

Supponiamo di avere un oggetto *completamente circondato* da liquido (che è fermo), in una certa posizione e il tutto in presenza di gravità. Ci chiediamo quale sia la forza che il liquido esercita sul corpo (la forza è dovuta all'effetto della pressione sulla superficie del corpo S). Un modo di procedere è quello di considerare la situazione parallela in cui al posto dell'oggetto c'è dentro la superficie S un volume equivalente di liquido in equilibrio con quello circostante. Dato che la pressione in un generico punto della superficie S è la stessa nelle due situazioni anche la forza esercitata attraverso la superficie è la stessa (non ha importanza cosa ci sia all'interno) e quindi la forza che agisce sul corpo è la stessa che agirebbe sulla massa di liquido spostata (notare che non si richiede che la densità del liquido sia costante). Detta M_l la massa del liquido spostato, la forza vale

⁵Notare che la forza di Coriolis non entra mai in gioco perchè è tutto fermo e questo ci permette di scrivere il potenziale nel sistema rotante.

$$\vec{F} = M_l g \hat{z}$$

Nel caso l'oggetto non sia completamente circondato da liquido bisogna prestare attenzione: se il corpo è galleggiante basta considerare la parte immersa, tuttavia esistono situazioni meno banali che saranno illustrate nei problemi (caso di una sfera che tappa un foro circolare del contenitore).

Esempio 2.4. Si consideri la situazione precedente. Si vuole trovare il momento torcente che il liquido esercita sul corpo

Soluzione 2.4. Facendo un ragionamento identico a quello sopra, si trova che il momento torcente è uguale al momento torcente $\vec{\tau}$ esercitato sulla massa di liquido spostato ma questo momento torcente, essendo tutto in equilibrio, deve annullare quello gravitazionale:

$$\vec{\tau} + \vec{r}_{\text{cm}} \times M\vec{g} = 0 \implies \vec{\tau} = -\vec{r}_{\text{cm}} \times M\vec{g}$$

dove $\vec{r}_{\text{cm}}$ è la posizione del centro di massa del volume di liquido spostato.

2.3 Equazione di Bernoulli

In questo paragrafo ricaviamo l'equazione di Bernoulli lungo la linea di flusso a partire dalla (18). Le ipotesi sotto cui lo ricaviamo sono:

- fluido ideale, incompressibile a densità uniforme.
- flusso *stazionario*, cioè $\vec{v}(x, y, z)$ è indipendente dal tempo, questo implica ad esempio che se cambiamo sistema e ne scegliamo uno inerziale rispetto al primo, Bernoulli non vale più.

La seconda ipotesi ci dice che il termine $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ è nullo; quello che facciamo ora è moltiplicare entrambi i membri di Eulero per $\vec{v}$

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left(\vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \right) \cdot \vec{v}$$

Ora dall'identità $\nabla \cdot (a\vec{v}) = \nabla a \cdot \vec{v} + a \nabla \cdot \vec{v}$ notiamo che

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{v} v^2) - \frac{v^2}{2} \nabla \cdot \vec{v}$$

con $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ per incomprimibilità.
Moltiplicando per ρ (costante per la prima ipotesi):

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho \vec{v} v^2) = -\vec{v} \cdot \nabla p + \rho \vec{g} \cdot \vec{v}$$

Applicando nuovamente $\nabla \cdot (a\vec{v}) = \nabla a \cdot \vec{v} + a \nabla \cdot \vec{v}$ ricaviamo $\frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho \vec{v} v^2) = \rho \frac{v^2}{2} \nabla \cdot \vec{v} + \rho \frac{\vec{v}}{2} \cdot \nabla v^2$ con $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ per incomprimibilità. Ora supponendo che $\vec{f}$ forza per unità di volume sia conservativa, esisterà un potenziale ϕ tale che $\vec{f} = -\rho \nabla \phi$. Portando infine tutto a sinistra e raccogliendo in ∇ per linearità:

$$\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \phi + p \right) = 0$$

In base a quanto detto nella sezione 1.1, questa espressione rappresenta la derivata della grandezza $B = \rho v^2/2 + \rho \phi + p$ lungo la linea di flusso. Dato che questa derivata direzionale è nulla abbiamo ricavato che B risulta costante lungo una linea di flusso.

Notiamo inoltre che Bernoulli non è un teorema di conservazione dell'energia per il singolo elemento fluido, al quale si riduce però nel caso di p costante (come nell'esempio 1.1 del rubinetto). Per p non costante infatti compare il termine $\nabla \cdot (p\vec{v})$ associato allo scambio di lavoro (conservativo) tra elementi fluidi vicini. Possiamo dunque concludere solamente che il teorema afferma la costanza di B lungo le linee di flusso, ovvero una non contraddizione con il teorema di trasporto dell'energia.

Per completezza riportiamo che esiste una versione più forte del teorema di Bernoulli, nella quale, sotto l'ipotesi aggiuntiva di irrotazionalità del fluido, si ha che B è costante e uniforme in tutto il fluido. Un fluido si dice irrotazionale se la vorticità $\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v} = 0$. Potete intuitivamente pensare alla vorticità, ad esempio di un sistema di due elementi fluidi, come la media delle velocità angolari dei singoli elementi. Per i nostri scopi tuttavia conviene sottolineare che la vorticità viene trasportata in maniera comoda, in particolare per ρ costante e uniforme si conserva lungo le linee di flusso. Tipicamente nei problemi che tratteremo le condizioni asintotiche permetteranno di garantire l'ipotesi di irrotazionalità, quindi non ce ne preoccuperemo.

Esempio 2.5. Torniamo all'esempio del cilindro rotante con liquido all'interno, vogliamo ottenere la forma della superficie utilizzando Bernoulli.

- Si supponga ingenuamente che nello stato stazionario B sia costante in tutto il fluido, con questa informazione si trovi come dovrebbe essere la superficie del fluido. Il risultato è realistico?

- C'è un sistema di riferimento in cui si può dire che B è costante in tutto il fluido? In tal caso applicare Bernoulli e verificare che il risultato coincide con quanto precedentemente trovato.

Soluzione 2.5. Partendo da Bernoulli si ricava la superficie del liquido su cui $p = p_{\text{atm}}$:

$$z = \frac{B - p_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{v^2}{2g}$$

nel nostro caso $v = \Omega r$ e quindi

$$z = \text{const.} - \frac{\Omega^2}{2g} r^2$$

ma questa rappresenta una parabola con la concavità sbagliata che non può essere evidentemente la soluzione corretta.

Nel sistema rotante il fluido è fermo, ed essendo fermo la linea di flusso lungo cui applico Bernoulli può essere scelta a piacere.⁶ Di conseguenza B deve avere lo stesso valore ovunque.

Nel sistema rotante il potenziale diventa la somma di quello gravitazionale più quello centrifugo

$$\phi_{\text{rot}} = gz - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2$$

Applicando a questo punto Bernoulli si ricava:

$$z = \frac{B - p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$$

che possiede la corretta concavità.

Abbiamo dunque visto che il teorema di Bernoulli non implica in alcun modo che il valore di B sia costante in tutto il fluido, ma a priori solamente lungo una linea di flusso.

2.4 Analogia con l'Elettrostatica

L'incomprimibilità⁷ di un flusso pone dei vincoli sulla forma che deve avere $\vec{v}(x, y, z, t)$. Per fare un esempio $\vec{v}(\vec{r}, t) = -v\hat{r}$ non rappresenta un flusso

⁶Per dimostrare Bernoulli abbiamo moltiplicato entrambi i lati per $\vec{v}$ ma nel nostro caso $\vec{v} = 0$; per aggiustare il ragionamento basta moltiplicare invece che per $\vec{v}$ per $d\vec{l}$ che rappresenta uno spostamento infinitesimo lungo la linea di flusso, si provi a farlo come esercizio.

⁷Un flusso è incomprimibile se la densità del *singolo* elemento fluido è costante durante il suo moto, questo non implica che la densità rimanga costante in un punto fissato dello spazio. Se però all'istante iniziale la densità è uguale in tutto il liquido, lo sarà anche negli istanti successivi.

incomprimibile perchè in questo caso la massa di fluido, col passare del tempo, si concentra nell'origine e la densità aumenta.

Restringiamo la nostra discussione al caso di un flusso incomprimibile con densità costante. La condizione che deve essere rispettata in assenza di sorgenti, è che preso un qualsiasi volume dello *spazio* il flusso di materia attraverso questo volume sia nullo. Detta S la sua superficie, deve allora valere:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \implies \quad \rho \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \implies \quad \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

se ora immaginassimo di mandare $\vec{v}$ nel campo elettrico $\vec{E}$ ⁸, la condizione

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

è equivalente a richiedere che in tale volume non ci sia carica netta.

Per fare un passo ulteriore possiamo considerare l'analogia formale e inserire sorgenti o pozzi (perciò il fluido non sarà più incomprimibile), che corrisponderanno in gergo elettrostatico a cariche puntiformi positive o negative. Questo perchè ci sarà analogia tra l'equazione di conservazione della materia intorno ad un pozzo/sorgente e la prima equazione di Maxwell in forma globale intorno ad una carica.

Esempio 2.6. Si vuole trovare il flusso di un fluido incomprimibile che all'infinito ha velocità $\vec{u}$, sapendo che nell'origine si trova un ostacolo a forma di sfera con raggio R .

Per questo scopo partiamo dal seguente problema in elettrostatica: si ha un dipolo $\vec{p}$ nell'origine immerso in un campo esterno $\vec{E}_{\text{ext}} = E_0 \hat{x}$.

- Ricordando che il campo elettrico di un dipolo è:

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = \frac{3\hat{r}(\vec{p} \cdot \hat{r}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

si mostri che per una certa orientazione di $\vec{p}$ esiste una sfera di raggio a non intersecata dalla linee di forza del campo elettrico

- Si usi il fatto precedente per trovare una soluzione stazionaria per il fluido

⁸Per questa analogia, cioè se vogliamo mandare v in E per usare i metodi risolutivi di una teoria per l'altra, è necessario che v rispetti la seconda equazione di Maxwell in forma statica, ovvero sia irrotazionale

- Calcolare la pressione del fluido sulla superficie della sfera a meno di una costante. Quali sono la direzione e il valore della forza esercitata dal fluido su di essa?

Soluzione 2.6. La condizione per cui le linee di forza del campo elettrico non intersecano la sfera è:

$$\begin{aligned}\vec{E}(a\hat{r}) \cdot \hat{r} &= 0 \\ \implies E_0\hat{r} \cdot \hat{x} + \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) - (\vec{p} \cdot \hat{r})}{4\pi\epsilon_0 a^3} &= 0 \\ \left(E_0\hat{x} + \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 a^3}\right) \cdot \hat{r} &= 0\end{aligned}$$

Visto che vale per ogni $\hat{r}$ il termine dentro la parentesi deve essere nullo, segue che $\vec{p} = -p\hat{x}$ e

$$a = \left(\frac{p}{2\pi\epsilon_0 E_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

La velocità del liquido deve rispettare la condizione di impenetrabilità dell'ostacolo $\vec{v}_\perp = 0$, visto che il campo elettrico trovato la rispetta proviamo a mandare $\vec{E}$ in $\vec{v}$. Innanzitutto riscrivo $\vec{E}$ in termini di $(E_0, a, \vec{r})$:

$$\vec{E} = E_0\left(\hat{x} - \frac{a^3}{2} \frac{3\hat{r}(\hat{x} \cdot \hat{r}) - \hat{x}}{r^3}\right)$$

ora facciamo la sostituzione $\vec{E} = k\vec{v}$ e $E_0 = ku$, si ottiene

$$\vec{v} = u\left(\hat{x} - \frac{a^3}{2} \frac{3\hat{r}(\hat{x} \cdot \hat{r}) - \hat{x}}{r^3}\right)$$

detto θ l'angolo tra la direzione $\hat{x}$ e il vettore $\vec{r}$, si può riscrivere come

$$\vec{v} = u\left(\hat{x} - \frac{a^3}{2} \frac{3\cos\theta\hat{r} - \hat{x}}{r^3}\right)$$

Si veda la figura 6 per un grafico della soluzione. Osservazione: Notare che la condizione di impenetrabilità su $\vec{v}$ per il generico ostacolo implica

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = k \int \vec{v} \cdot d\vec{A} = k \int \vec{v}_\perp \cdot d\vec{A} = 0$$

Ossia che l'analogo problema elettrostatico va cercato imponendo che la carica dentro l'ostacolo sia nulla, come effettivamente succede nel nostro caso.

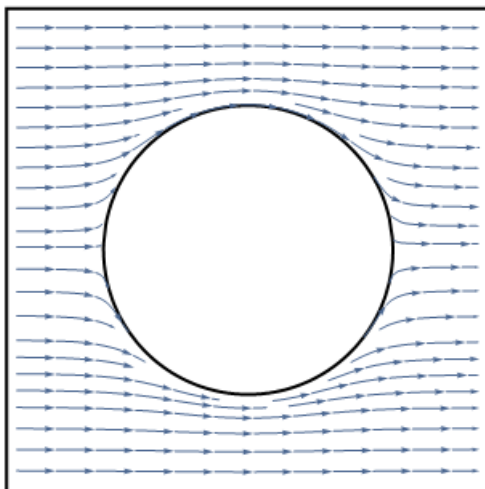


Figura 6: sezione delle linee di flusso dell'esempio 2.6

Possiamo usare Bernoulli, per simmetria B è lo stesso sulle linee di flusso in contatto con la sfera.

$$p = B - \rho \frac{v^2}{2}$$

essendo

$$\vec{v}(a\hat{r}) = \frac{3}{2}(\hat{x} - \cos\theta\hat{r})$$

si ha

$$p = B - \frac{9}{8}\rho u^2(1 - \cos^2\theta)$$

Il massimo della pressione si ha nei punti in cui il fluido è fermo.

La forza $\vec{F}$ cercata è nulla, essendo $p(\theta) = p(-\theta)$. Questo fatto va sicuramente contro l'esperienza comune ed è noto come paradosso di D'Alembert, è dovuto al fatto di considerare il fluido non viscoso.

2.5 Cenni al caso viscoso

In fluidodinamica si parla di flusso laminare quando il moto del fluido avviene con scorrimento di strati infinitesimi gli uni sugli altri senza mescolamento laterale al livello degli elementi fluidi (Figura 7).

Questa è la situazione che andiamo a trattare nel caso viscoso. In particolare nel nostro problema avremo un flusso $\vec{v} = v_z(x, y, t)\hat{z}$ che data la forma è incomprimibile e con $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$. Questo implica che

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = 0$$

Se guardiamo la componente z dell'equazione (18) abbiamo per questa classe di problemi:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{f_{\text{visc}}}{\rho dV}$$

Vogliamo ora trovare un'espressione per f_{visc} su un piccolo volumetto dV *circondato* da liquido, che sarebbe la forza di attrito derivante dalla viscosità del liquido. Per farlo consideriamo il solito cubetto di lato l piccolo con spigoli paralleli agli assi cartesiani, e un fluido di strati che si muovono parallelamente ad x , ovvero per cui $v_x = v(z)$. Siano l e 0 le coordinate z delle facce del cubo superiore ed inferiore. Si ha che f_{visc} è associata ad un flusso di quantità di moto lungo x dato da un flusso verticale di particelle. Il moto di agitazione termica trasporta trasversalmente al moto nv_{th} particelle al secondo per superficie, ognuna delle quali è a velocità $v(l)$, dunque ci sarà un flusso uscente di quantità di moto pari a $mnv_{th}v_x(l - \epsilon)$. D'altro canto il flusso entrante $mnv_{th}v_x(l + \epsilon)$, dunque considerato il fatto che le particelle coinvolte nel flusso saranno a distanza minore del libero cammino medio l_c dalla faccia del cubo ($\epsilon = \frac{l_c}{2}$), possiamo scrivere che il flusso totale (entrante positivo) sulla faccia superiore:

$$\Phi_{x+} = mnv_{th}(v_x(l + \epsilon) - v_x(l - \epsilon))\frac{l_c}{l_c} = mnv_{th}l_c \frac{\partial v_x}{\partial z}(l)$$

Ora ripeto per la faccia inferiore:

$$\Phi_{x-} = -mnv_{th}(v_x(\epsilon) - v_x(-\epsilon))\frac{l_c}{l_c} = -mnv_{th}l_c \frac{\partial v_x}{\partial z}(0)$$

Dunque il flusso totale Φ_x , dato l piccolo:

$$\Phi_x = mnv_{th}l_c \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}(l) - \frac{\partial v_x}{\partial z}(0) \right) \frac{l}{l} = mnv_{th}l_c l \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

A questo flusso di quantità di moto per unità di tempo è naturalmente associata una forza per unità di volume, allora $f_{visc_x} = \rho\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$, ricordando $\nu = l_c v_{th}$ e $\rho = mn$. Nel caso generico sarà

$$\vec{f}_{visc} = \rho\nu \nabla^2 \vec{v} = \rho\nu \left(\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \right)$$

dunque l'equazione di Eulero viene modificata:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} - \nabla \phi \quad (26)$$

nota come equazione di Navier-Stokes.

Il termine aggiuntivo è interpretabile come una correzione alla dinamica della velocità media dell'elemento fluido, richiesta dalla non esatta conservazione delle particelle che lo costituiscono. A parità di numero di particelle, lo scambio di particelle distanti l_c caratterizzate da velocità diverse, modifica la velocità media dell'elemento fluido.

Nel caso il flusso laminare sia stazionario l'accelerazione del fluido è nulla in ogni punto e l'equazione, definita $\mu = \nu\rho$, si riduce a:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (27)$$

Con questa si sta dicendo che le forze dovute a pressione, gravità, etc. devono controbilanciare le forze di attrito viscoso se si vuole che il flusso resti immutato nel tempo.

Infine dato che la forza dovuta alla viscosità è parallela alla velocità (lungo z) le componenti x e y dell'equazione (18), come anticipato, sono le stesse del caso idrostatico:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

In presenza di un ostacolo nel caso viscoso, si impone che la velocità del fluido sia nulla sulla superficie se l'ostacolo è fermo o uguale a quella della superficie se è in movimento (condizione di non scorrimento).

Esempio 2.7. Un fluido viscoso di densità costante ρ scorre tra due piani paralleli, rispettivamente $z = 0$ e $z = h$. Il piano $z = 0$ è fermo mentre il secondo ha velocità $\vec{v} = v_y \hat{y}$ diversa da zero.

- Trascurando la gravità e assumendo che la pressione del fluido non vari lungo y , si trovi una soluzione stazionaria della forma $\vec{v} = v(z) \hat{y}$.

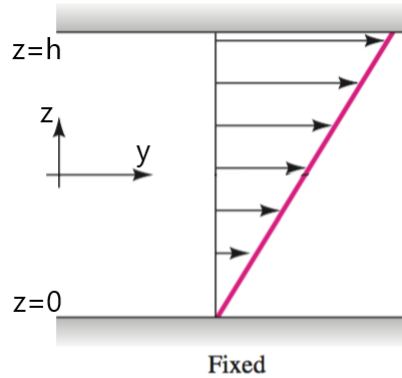


Figura 7: fluido che scorre tra due piani paralleli, di cui uno in movimento.

- Se la viscosità del liquido è μ , qual è invece la forza per unità di volume che agisce sul generico strato ad altezza $0 < z < h$? Qual è la forza per unità di area esercitata dai due piani sul liquido?

Soluzione 2.7. In questo caso è facile indovinare la soluzione, infatti sarà (Figura 7)

$$\vec{v} = \frac{z}{h} v_y \hat{y}$$

Vediamo di ottenerla anche a partire dalla (27) che applicata lungo y è

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

i primi tre termini sono nulli nel nostro problema, di conseguenza lo è anche l'ultimo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \implies \quad v = \alpha z + \beta$$

α e β li ricaviamo imponendo che la velocità per $z = 0$ e $z = h$ sia uguale a quella dei rispettivi piani. (l'equazione del moto lungo x e z ci dice solo che la pressione non varia muovendosi in queste direzioni).

Dato che ogni strato di fluido si muove a velocità costante, la forza complessiva agente su di esso è nulla: infatti uno strato ad altezza z viene trascinato con una certa forza in avanti dallo strato soprastante (che si muove più velocemente) e tirato indietro con una forza uguale e opposta dallo strato sottostante (che si muove più lentamente). Nel caso dello strato $z = 0$ è il piano a controbilanciare la forza esercitata dallo strato soprastante. Lo strato soprastante esercita una forza per unità di area

$$\frac{\vec{F}}{A} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\mu}{h} v_y \hat{y}$$

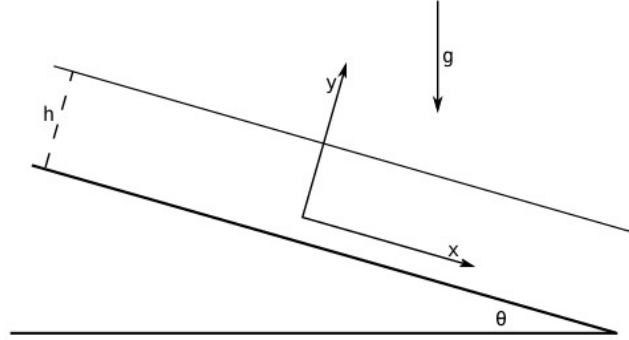


Figura 8: canale dell'esempio 2.8

quindi il piano esercita sul liquido la forza opposta

$$\frac{\vec{F}}{A} = -\frac{\mu}{h}v_y\hat{y}$$

Per il piano $z = h$ la forza è la stessa ma cambiata di segno, che segue dal fatto che la forza esterna totale applicata al liquido è nulla.

Esempio 2.8. Un fluido viscoso scorre su un piano inclinato di un angolo θ sotto l'effetto della gravità (Figura 8). Si trovi la soluzione laminare stazionaria, supponendo che l'altezza del fluido sopra il piano sia h .

Soluzione 2.8. Orientando l'asse y nella direzione perpendicolare al piano e l'asse x lungo il piano cerchiamo $\vec{v} = v(y)\hat{x}$. L'equazione del moto diventa lungo y :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \theta$$

che sarebbe la condizione idrostatica lungo questa direzione, mentre lungo x è

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + g \sin \theta$$

Integrando la prima si ottiene:

$$p = -\rho g y \cos \theta + f(x)$$

Imponendo $p(y = h) = p_{\text{atm}}$ si ottiene

$$p = -\rho g (y - h) \cos \theta + p_{\text{atm}}$$

risulta allora $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ e la seconda equazione diventa

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -g \sin \theta$$

integrando

$$v(y) = -\frac{g \sin \theta}{2\nu} y^2 + \alpha y + \beta$$

la condizione $v(0) = 0$ si traduce in $\beta = 0$. Per determinare α serve una seconda condizione. Notiamo che la forza per unità di superficie esercitata sull'ultimo straterello di fluido compreso tra $h - dh$ e h è proporzionale a $\frac{\partial v}{\partial y}(h - dh)$ (e non alla derivata seconda) perchè non c'è nulla sopra a controbilanciare. Se per $dh \rightarrow 0$ fosse $\frac{\partial v}{\partial y}(h) \neq 0$ avremmo una forza finita su una massa nulla e di conseguenza accelerazione infinita. La condizione $\frac{\partial v}{\partial y}(h) = 0$ ci dà $\alpha = \frac{g \sin \theta}{\nu} h$ e quindi

$$v(y) = \frac{g \sin \theta}{\nu} (yh - y^2/2)$$

Per vedere un esempio numerico consideriamo il caso di un fiume con dislivello di 1 m per Km e altezza $h \sim 1$ m. Sapendo che per l'acqua $\nu \sim 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ si ottiene che la velocità vicino alla superficie è $v \sim 10^3 \text{m/s}$ che è una stima palesemente irrealistica. Questo ci dice che in tale caso il regime laminare non è una approssimazione valida, in particolare perchè prima che si possa instaurare si formano dei vortici che rompono la laminarità.

Esempio 2.9. Un piano infinito delimita un semispazio composto da fluido viscoso. Il piano è in moto secondo la legge $\vec{U}(t) = U_0 \cos(\omega t) \hat{x}$. Cerchiamo soluzioni in regime laminare del tipo $v(y, t) \hat{x}$. Assumendo che la pressione non vari lungo y verificare che per opportuni A, k_1, k_2 una possibile soluzione è:

$$\vec{v}(y, t) = C e^{-k_1 y} \cos(k_2 y - \omega t) \hat{x}$$

In questo caso mostrare che la potenza media dissipata dal fluido è esattamente la potenza media fornita dal piano.

Soluzione 2.9. Se il piano coincide con xz e la velocità è della forma $\vec{v} = v(y) \hat{x}$ l'equazione da risolvere è:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Se inseriamo la soluzione suggerita, semplificando il fattore C ottengo:

$$\omega e^{-k_1 y} \sin(k_2 x - \omega t) = \nu[(k_1^2 - k_2^2)e^{-k_1 y} \cos(k_2 y - \omega t) + 2k_1 k_2 e^{-k_1 y} \sin(k_2 y - \omega t)]$$

Per essere verificata ad ogni t è necessario che sia $k_1 = k_2 = k$ e

$$2\mu k^2 = \omega \implies k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

Infine la condizione a $z = 0$ impone

$$v(z = 0) = U_0 \cos(\omega t) \implies C = U_0$$

La forza che esercita una porzione del piano di area A sul fluido è l'opposto di quella che esercita il fluido su di essa

$$\vec{F} = -\mu A \frac{\partial v}{\partial y}(y = 0) \hat{x}$$

e la potenza fornita dal piano

$$p = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\mu A v \frac{\partial v}{\partial y}(y = 0)$$

la derivata della velocità vale

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -k U_0 e^{-ky} (\cos(k_2 y - \omega t) + \sin(k_2 y - \omega t))$$

e quando facciamo la media temporale di P sopravvive solamente il termine $\propto \cos^2(k_2 y - \omega t)$ (la media del termine misto è nulla) e visto che la sua media vale $1/2$ si ha

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} \mu A k U_0^2$$

La potenza dissipata nella colonna di liquido sopra la nostra porzione di piano è

$$p_{diss} = \int_0^{+\infty} \mu A \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy$$

Come prima quando si guarda la potenza media dissipata nel tempo sopravvivono solo i termini $\propto \cos^2(k_2 y - \omega t)$ e $\propto \sin^2(k_2 y - \omega t)$. Quindi

$$\langle p_{diss} \rangle = \mu A k^2 U_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-2ky} dy = \frac{1}{2} \mu A k U_0^2$$

3 Onde

3.1 Linearizzazione della fluidodinamica

Ci restringiamo alla fluidodinamica ideale ($\nu = 0$) nell'ipotesi che ci sia una dipendenza universale $p = p(\rho)$ (ipotesi barotropica). Notiamo che questo vuol dire che in ogni istante e in ogni punto la termodinamica del fluido è univocamente determinata da ρ , come accade ad esempio nel caso di adiabatiche $p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma$ o isoterme $p = \frac{p_0}{\rho_0} \rho$. Consideriamo la situazione di equilibrio di un fluido fermo a densità ρ_0 uniforme, voglio espandere le equazioni del moto e trasporto di massa al primo ordine considerando piccole perturbazioni $\rho = \rho_0 + \rho_1$ e $\vec{v} = \vec{v}_1$ (dato che $v_0 = 0$), con $\rho_1/\rho_0 \ll 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 \\ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0}\end{aligned}$$

Ora per derivata di una funzione composta $\nabla p = (\frac{dp}{d\rho}) \nabla \rho = c^2 \nabla \rho$. Proseguiamo nel caso adiabatico, le equazioni diventano per quanto detto sopra:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 \\ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} &= -\frac{\nabla \rho_1}{\rho_0} c_s^2\end{aligned}$$

Applicando la derivata temporale sulla prima e la divergenza sulla seconda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} &= -\rho_0 \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{v}_1)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} &= -c_s^2 \nabla \cdot \frac{\nabla \rho_1}{\rho_0}\end{aligned}$$

Ricordando la definizione di laplaciano $\nabla \cdot \nabla \rho_1 = \nabla^2 \rho_1$, dunque sostituendo dalla prima il membro di sinistra della seconda:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho_1$$

Ovvero la nota equazione delle onde. Cercando una soluzione nella forma $\rho_1 = \bar{\rho} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ e $v_1 = \bar{v} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ si ottiene che v_1 ha una componente parallela

a $\vec{k}$ oscillante, mentre le altre componenti sono costanti, ad indicare un flusso trasversale uniforme. Si ha per la parte oscillante:

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 \quad \rho_1 = \rho_0 \frac{\vec{v} \cdot \hat{k}}{\omega} \quad \vec{v} = c_s \frac{\rho_1}{\rho_0} \hat{k}$$

La terza equazione ci dice che i due termini di sviluppo ρ_1 e v_1 sono collegati dalla relazione

$$\frac{v_1}{c} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (28)$$

ovvero il parametro di sviluppo è ancora una volta il rapporto tra la velocità della perturbazione e la velocità del suono. Notare come i due termini del primo ordine siano in fase. Facciamo una piccola parentesi e troviamo un'espressione esplicita per c_s , velocità di fase con direzione e verso di $\hat{k}$

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho|_s} = \frac{\partial \frac{p_0 \rho^\gamma}{\rho_0^\gamma}}{\partial \rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

Se lavoriamo con gas perfetti, detta μ la massa molare, l'equazione di stato ci conduce infine a $c_s^2 = \gamma \frac{k_B T}{\mu} = \gamma v_{th}^2$.

Notiamo che quanto fatto è analogo a quanto viene fatto per ricavare l'equazione delle onde elettromagnetiche ma con due importanti differenze:

- Le equazioni costitutive della fluidodinamica non sono propriamente lineari, al contrario di Maxwell, ma sono state linearizzate al primo ordine considerando piccole perturbazioni alla situazione di equilibrio.
- Le onde ottenute sono longitudinali, mentre quelle EM sono trasversali.

Tornando alla discussione principale, ricapitoliamo brevemente a che risultato siamo arrivati. Linearizzando le equazioni di base del processo (trasporto di massa e di quantità di moto) siamo arrivati a

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 \quad \rho_1 = \rho_0 \frac{\vec{v} \cdot \hat{k}}{\omega} \quad v_1 = c_s \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

Sappiamo dall'esperienza che ad esempio un microfono trasporta energia e quantità di moto, lontano dalla sorgente. Però se andiamo a vedere i termini di flusso (quelli dentro la divergenza nelle equazioni di continuità) al primo ordine e mediati nel tempo

$$\overline{\Phi_m} = \overline{\rho v} \simeq \overline{(\rho_0)(v_1)} = 0 \quad (29)$$

$$\overline{\Phi_v} = \overline{\rho v v} = 0 \quad (30)$$

L'energia ha un'espressione per il flusso un po' complicata ($\Phi_e = \rho v(\frac{v^2}{2} + w_m)$, dove w_m è l'entalpia per unità di massa), ma si può mostrare che anche questa è nulla al primo ordine. Perciò dalla discussione sopra si può intuire che per vedere i trasporti netti delle quantità di nostro interesse non basta uno sviluppo al primo ordine ma bisogna procedere oltre. Analogamente quindi svilupperemo $\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2$ e $v = v_1 + v_2$, le metteremo nelle equazioni originali, che al secondo ordine avranno relazioni analoghe a quelle già viste (senza entrare nel dettaglio saranno equazioni delle onde con termine di sorgente causato dalla presenza del primo ordine). A quel punto potremo studiare i trasporti al secondo ordine e notare che finalmente sono non nulli, poichè i termini del tipo $\rho_1 v_1$ sono prodotti di due coseni (perchè sono in fase!) e perciò hanno media non nulla.

3.2 Acque poco profonde

Come si è visto precedentemente l'approccio di linearizzazione presenta notevoli carenze nella descrizione anche di semplici modelli fisici, e la correzione anche solo ai primi effetti non lineari non è affatto banale. Abbiamo già discusso l'ipotesi di barotropicità che ci permette di ricondurre l'intera termodinamica del sistema alla ρ . Ora assumiamo che ρ sia a sua volta funzione di una variabile cinematica, la cui scelta dipende dal problema in esame (ipotesi di onde semplici). In questo modo l'intera termodinamica dipende da tale variabile cinematica.

Vogliamo studiare il moto ondoso delle acque in un canale poco profondo in presenza di gravità. Nell'ipotesi di incomprimibilità:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Chiamiamo $h(x, t)$ l'altezza del profilo dell'acqua al tempo t nella coordinata orizzontale x , e h_0 la profondità (costante) della situazione imperturbata. Consideriamo le seguenti approssimazioni:

- v_x dipende molto debolmente da y
- La componente dell'accelerazione lungo y è molto minore $\vec{g}$

Sia λ una lunghezza di scala lungo l'asse orizzontale $\hat{x}$ comune a tutte le variabili. Le condizioni al contorno impongono sul fondo del canale $v_y = 0$ e moto libero sul pelo dell'acqua ad altezza h , dunque è ragionevole assumere che

la scala di variazione di v_y lungo l'asse verticale $\hat{y}$ sia h . Detto $h/\lambda = \epsilon \ll 1$, per ipotesi di acque poco profonde, dall'equazione di incomprimibilità:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \implies v_y \sim v_x \frac{h}{\lambda} = \epsilon v_x$$

Dunque dato $\epsilon \ll 1$ si ha $v_y \ll v_x$. Per la prima approssimazione possiamo assumere $v_x(x, y) = v_x(x)$, inoltre si ha, per quanto detto sopra, che $v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \gg v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$, per cui $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \sim v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$.

Usiamo ora la seconda approssimazione: per analisi dimensionale assumiamo che l'accelerazione verticale sia $h\omega^2$. La condizione $h\omega^2 \ll g$, mi permette di usare l'equazione per la pressione idrostatica (approssimazione idrostatica) imponendo p_0 sulla superficie libera dell'acqua:

$$p = \rho g(h(x) - y) + p_0$$

Quando usiamo l'approssimazione idrostatica, il moto lungo l'asse verticale, non si ottiene dalla componente verticale di Eulero, ma indirettamente dall'equazione di continuità per la massa, che scritta per una sezione verticale d'acqua risulta $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = 0$. A questa aggiungiamo, detta $v \sim v_x$, la componente su x dell'equazione di Eulero, ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\nabla p}{\rho} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned}$$

Dove nella seconda abbiamo usato p idrostatica. Ora usiamo l'ipotesi di onde semplici imponendo il vincolo che h sia una funzione di v , $h = h(v)$ da determinare. Dalle equazioni precedenti, usando la derivata di funzioni composte, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + (v + h \frac{dv}{dh}) \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (v + g \frac{dh}{dv}) \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Si nota che queste equazioni sono simili alle conservazioni di h e v , rispettivamente lungo traiettorie percorse alle velocità $v_h = v + h \frac{dv}{dh}$ e $v_v = v + g \frac{dh}{dv}$. Queste velocità sono le velocità a cui si muovono i punti che hanno h (rispettivamente v) costanti, dunque assumono il significato di velocità di fase. Dato che abbiamo richiesto $h = h(v)$ i punti ad altezza costante saranno anche a

velocità costante, dunque per imporre la validità dell'ipotesi di onda semplice bisogna imporre:

$$\begin{aligned} v_v = v_h &\implies g \frac{dh}{dv} = h \frac{dv}{dh} \implies \frac{dv}{dh} = \pm \left(\frac{g}{h}\right)^{1/2} \implies \\ &\implies v(h) = 2g^{1/2}(h^{1/2} - h_0^{1/2}) \end{aligned}$$

Dove, scelta la soluzione positiva, $v(h)$ è la velocità euleriana dell'elemento fluido ad altezza h . La velocità di fase risulta:

$$v_h = v + h \frac{dv}{dh} = 3(gh)^{1/2} - 2(gh_0)^{1/2}$$

Per piccole perturbazioni $h \sim h_0$:

$$v_h = (gh_0)^{1/2}$$

Per un maremoto questa velocità può superare i 200m/s. Notiamo in particolare che $v_h \neq v$, in particolare la velocità della cresta dell'onda, ovvero la velocità a cui viaggia la perturbazione v_h , è molto maggiore rispetto all'effettiva velocità con cui viaggiano gli elementi fluidi. Questo è il motivo per cui quando piove a monte, l'onda della piena del fiume (trasportata da v_h) arriva a valle prima rispetto all'acqua sporca (trasportata da v).

Vedremo un'altra applicazione di questo formalismo in uno dei problemi proposti.

3.3 Oltre

La fluidodinamica è un settore di studi con ancora tanti interrogativi aperti, le sue equazioni sono a volte così difficili da risolvere che sono nati metodi risolutivi del tutto generali proprio dal cercare alternative ai modi di risolvere le equazioni classici. Purtroppo mancando tempo e basi matematiche non abbiamo potuto farvi vedere tutte le splendide situazioni che si possono incontrare nello studiare questa materia. Perciò alleghiamo pochissimi video per incuriosirvi:

- [Solitoni](#), moti particolari che si possono compenetrare senza influenzarsi a vicenda
- [Scie di Von Karman](#), moto che è studiabile anche a livello abbastanza elementare e rende conto di molti fenomeni, come ad esempio lo sventolare delle bandiere
- [Vortici di decollo e di volo](#), moto che si osserva nel volo degli aerei e rende conto della portanza a cui sono sottoposti

4 Problemi

Problema 4.1. Una bolla d'aria viene immessa alla base di un cilindro chiuso (alto 10 metri) e pieno d'acqua. Al momento dell'immissione della bolla, la pressione sul fondo del cilindro è 1.1 atmosfere. La bolla inizia a salire finchè non raggiunge la sommità del cilindro. Quanto vale adesso la pressione sul fondo? Assumere che la pressione idrostatica di 10 metri di acqua sia esattamente 1 atmosfera.

Problema 4.2. Una piccola sfera di ferro di volume V affonda a velocità costante v in un recipiente chiuso completamente riempito di acqua. Qual è la quantità di moto totale dell'acqua? Il contenitore si trova su un tavolo, durante la discesa della sferetta che forza esercita il tavolo su di esso?

Problema 4.3. Un carrello con dell'acqua all'interno si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $a\hat{x}$. Si trovi come si dispone l'acqua.

Problema 4.4. Si consideri il problema di galleggiamento di una nave in un bacino di carenaggio, semplificato nei seguenti termini: la vasca sia un parallelepipedo retto di larghezza a e lunghezza b e la nave sia un prisma retto della stessa lunghezza con base triangolare equilatera di lato $\frac{a}{2}$ e densità uniforme ρ di poco inferiore a quella dell'acqua. Si supponga inoltre che la faccia superiore del prisma sia orizzontale quando esso galleggia (in realtà tramite l'esempio 1.8 potete mostrare che questa è la configurazione stabile). Si calcoli il minimo volume di acqua (densità dell'acqua δ) che bisogna versare nella vasca per far galleggiare la nave.

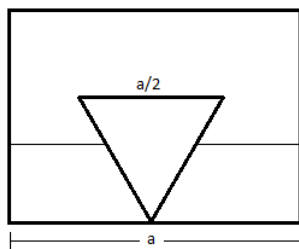


Figura 9: bacino di carenaggio.

Problema 4.5. Determinare che forma deve avere un recipiente a simmetria cilindrica in modo che in esso il livello dell'acqua si abbassi a velocità costante se sul fondo viene praticato un foro di dimensioni molto piccole.

Problema 4.6. Un secchio cilindrico di raggio R e altezza h è riempito di un liquido di densità ρ . Sia h_0 l'altezza del fluido nel secchio. Il secchio viene messo in rotazione attorno al suo asse a velocità costante ω e, dopo un breve periodo di transizione, raggiunge lo stato stazionario. Trovare h_M e h_m , rispettivamente altezza massima e minima della superficie del fluido rispetto alla base del cilindro. Determinare la pressione $p(l)$ sulla superficie del secchio cilindrico ad altezza l dalla sua base. Determinare poi la pressione $p_0(l)$ nei punti dell'asse di rotazione tali che $l < h_m$ e mostrare che il rapporto

$$\frac{p(l) - p_0(l)}{h_M - h_m}$$

è indipendente da ω , R , h_m e l .

Problema 4.7. Una palla di massa M e raggio R viene lanciata con una velocità $\vec{v}$ parallela al terreno e una velocità angolare $\vec{\omega}$ perpendicolare ad esso. Essa percorre una distanza L in aria (densità ρ). Stimare (grossolanamente) la deviazione orizzontale Δx della palla, trascurando gli effetti della gravità e assumendo $\Delta x \ll L$.

Problema 4.8. Un tubo verticale di diametro D (con l'estremità superiore aperta) viene riempito di acqua fino ad un'altezza h . L'estremità inferiore, di diametro d è chiusa da un tappo.

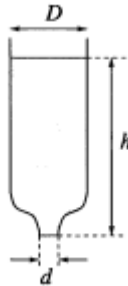


Figura 10: svuotamento di un tubo.

Idealmente, quando il tappo viene rimosso, l'acqua inizia a fuoriuscire con velocità $v = \sqrt{2gh}$. Ma in realtà ci vuole un tempo τ affinché venga raggiunta questa velocità. Stimare l'ordine di grandezza di τ . Trovare poi l'accelerazione dello strato d'acqua più basso nel momento in cui viene rimosso il tappo.

Problema 4.9. Sul fondo di un contenitore pieno d'acqua c'è un foro circolare di raggio r sigillato da una sfera di massa m e raggio $R > r$. L'altezza dell'acqua nel contenitore viene ridotta lentamente fino a quando la sfera si stacca dal fondo. Trovare il valore dell'altezza h_0 per cui ciò succede.

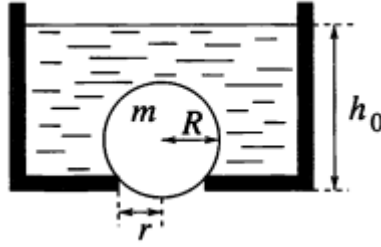


Figura 11: sollevamento di una sfera.

Problema 4.10. Si consideri un fluido (con coefficiente di viscosità μ) che scorre in un tubo cilindrico di lunghezza L e raggio R . Sia $\hat{z}$ la direzione dell'asse del tubo. Assumendo che la differenza di pressione tra le due estremità sia Δp , si trovi una soluzione in regime laminare lungo la direzione radiale, ossia del tipo $\vec{v} = v(r)\hat{z}$. Successivamente trovare la portata del fluido nel tubo (legge di *Poiseuille*). Si trascuri la gravità.

Problema 4.11. Un fluido viscoso (μ) di densità costante ρ scorre tra due piani paralleli, rispettivamente $z = 0$ e $z = h$. Entrambi i piani sono fermi. Trascurando la gravità e sapendo che c'è una variazione di pressione per unità di lunghezza costante spostandosi lungo y , si trovi una soluzione stazionaria della forma $\vec{v} = v(z)\hat{y}$. Trovare la portata per unità di area e confrontarla con la legge di *Poiseuille*.

Problema 4.12. Un palloncino si trova dentro un camion che a un certo punto accelera in avanti, il palloncino cosa fa nel sistema del camion?

Problema 4.13. Studiamo un moto isoentropico 1D: in tal caso la termodinamica ha solo due variabili indipendenti e la equazione di stato fornisce una relazione univoca tra di esse, per esempio $p = p(\rho)$. Facciamo l'ulteriore ipotesi che ci sia una relazione locale tra v e le variabili termodinamiche del tipo $v = v(\rho)$. Questa assunzione significa che tra le soluzioni possibili si cercano soluzioni speciali, dette onde semplici, in cui la variabile termodinamica è funzione della variabile cinematica v . Uguagliando v_ρ e v_v trovare $\frac{dv_v}{dv}$ e provare a dedurre in conseguenza la nascita di un fenomeno fisico inaspettato.

5 Soluzioni

Soluzione 5.1. Durante il processo di risalita della bolla, l'acqua può essere trattata come un fluido incompressibile e il suo volume rimane in buona approssimazione costante: una grande variazione della pressione comporta una variazione quasi nulla del volume. Di conseguenza anche il volume della bolla resta costante (anche la temperatura continua a essere la stessa dell'acqua) di conseguenza la pressione della bolla rimane uguale e cioè 1.1 atmosfere. Una volta arrivata alla sommità del cilindro, l'acqua in quel punto sarà alla pressione di 1.1 atmosfere e, conseguentemente, la pressione alla base sarà 2.1 atmosfere.

Grandi cambiamenti di pressione dovuti a piccole modifiche del sistema non devono sorprendere più di tanto, si pensi al classico esempio della botte di Pascal. Inoltre si provi a pensare a un'analogo meccanico in cui la bolla diventa una molla e la massa d'acqua diventa un'altra molla con sopra un blocco di massa M , il tutto contenuto all'interno di una scatola di una certa altezza, cosa succede se si scambia la loro posizione verticale? si può immaginare di misurare la pressione inserendo una mollettina di prova nel punto desiderato e vedere con quale forza viene compressa. (l'incompressibilità dell'acqua si può vedere come una molla molto rigida cioè con k grande)

Soluzione 5.2. Durante il moto della palla, cambia la distribuzione di massa del sistema acqua+sferetta. Al tempo t il centro di massa del sistema si è spostato della distanza

$$s = vt \frac{\rho_s V - \rho_a V}{M}$$

dove M è la massa totale del sistema, V il volume della sferetta e ρ_s e ρ_a sono rispettivamente le densità della sferetta e dell'acqua. Ciò deriva da questo semplice ragionamento: se la sferetta si è spostata della quantità vt , possiamo pensare che una sferetta di acqua delle stesse dimensioni abbia preso il posto che essa precedentemente occupava. Quindi la quantità di moto totale del sistema vale

$$p_{\text{tot}} = \frac{Ms}{t} = v\rho_s V - v\rho_a V$$

dove il primo termine a destra rappresenta la quantità di moto della sfera di ferro e, conseguentemente, il secondo è la quantità di moto dell'acqua. Il segno meno è coerente col fatto che l'acqua tendenzialmente si muove verso l'alto.

Il centro di massa del recipiente scende a velocità costante, questo implica che la forza totale agente su di esso è nulla; di conseguenza la forza che il tavolo esercita sul contenitore è uguale ma opposta alla forza peso.

Soluzione 5.3. In questo caso si ha mettendosi nel sistema accelerato

$$\phi = \frac{v^2}{2} + gz + ax$$

ma, all'equilibrio, la velocità è nulla in tutti i punti del fluido. Allora le superfici equipotenziali (isobare) obbediscono all'equazione

$$z(x) = -\frac{a}{g}x + \text{cost.}$$

che rappresenta un piano, inclinato rispetto alla base del carrello.

Soluzione 5.4. La condizione di gallaggiamento è che la forza di Archimede sia appena maggiore della forza peso agente sulla nave. Supponiamo che in un certo momento l'altezza dell'acqua nella vasca sia h e che la nave tocchi il fondo. Il volume di acqua spostato è

$$V(h) = \frac{h^2 b}{\sqrt{3}}$$

La spinta di archimede uguaglia la forza peso quando

$$\delta g V(h) = M_{nave} g$$

da cui possiamo ricavare il valore di h per cui la nave si stacca dal fondo

$$h_m = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{3\rho}{\delta}}$$

Allora il volume di acqua necessario sarà

$$V_A = abh_m - V(h) = \sqrt{\frac{3\rho}{\delta}} \left(\frac{a^2 b}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho}{\delta}} \right)$$

Soluzione 5.5. Sia A la superficie del foro. Per recipienti a simmetria cilindrica, la superficie del liquido ha area $S = \pi r^2(h)$ dove r è il raggio del cerchio alla quota h . Per la conservazione della portata:

$$S \left| \frac{dh}{dt} \right| = Av$$

dove v è la velocità di fuoriuscita dell'acqua dal foro, che per Bernoulli vale $v = \sqrt{2gh}$. Noi vogliamo che l'acqua si abbassi ad un rate costante, quindi prendiamo $\frac{dh}{dt} = c$. Sostituendo si ottiene

$$c\pi r^2 = A\sqrt{2gh} \longrightarrow h(r) = kr^4$$

con k una costante. Questa curva è il frutto della rotazione di una quartica canonica (tipo $y = x^4$) attorno al suo asse.

Soluzione 5.6. Bisogna fare attenzione a due casi particolari che si verificano quando ω è abbastanza grande: il minimo del paraboloide corrispondente alla superficie di separazione si trova sotto il secchiello (in questo caso non c'è liquido al centro) per il dato volume il paraboloide corrispondente, ai bordi supera h (in tal caso fuoriesce una certa quantità di liquido). Vi lasciamo discutere questi casi e trattiamo unicamente quello “senza problemi”; nella lezione abbiamo visto che in questo caso la superficie del liquido in rotazione è un paraboloide di equazione

$$h(r) = h(0) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

di conseguenza

$$h_M = h_m + \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

dove $h(0) = h_m$. Per trovare i valori è sufficiente uguagliare i volumi prima e dopo. Quello che si ottiene è

$$h_M = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

$$h_m = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Passiamo adesso a valutare la pressione: i paraboloidi interni al fluido, di distanza costante nella direzione verticale rispetto alla base del secchio, sono isobari. Poiché la pressione sulla superficie del fluido è p_a , segue che la pressione nel paraboloide distante d dalla superficie è $p_a + d\rho g$, quindi

$$p(l) = p_a + (h_M - l)\rho g = p_a + \left(h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} - l\right)\rho g$$

Mentre per quanto riguarda la pressione nei punti dell'asse di rotazione si ha

$$p_0(l) = p_a + (h_m - l)\rho g = p_a + \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} - l\right)\rho g$$

Segue che

$$\frac{p(l) - p_0(l)}{h_M - h_m} = \rho g$$

(questo risultato finale è una conseguenza diretta di stevino nella direzione verticale)

Soluzione 5.7. Possiamo ricavare la dipendenza della forza dalle grandezze in gioco tramite l'analisi dimensionale. Le grandezze che influiscono sono la velocità di volo v , la velocità angolare ω , la sezione della palla $S = \pi R^2$ e la densità dell'aria ρ . Facendo ciò si ricava

$$F \propto \pi \rho \omega v R^3 = \rho \omega R v S$$

In realtà l'analisi dimensionale non dà una risposta univoca perchè con S e ω posso costruire dimensionalmente una velocità. Il ragionamento che si fa è il seguente: come scala la forza se raddoppio sia ω che v ? si può pensare questa nuova situazione come quella di partenza vista a velocità doppia⁹, in particolare il tempo che ci impiega a raggiungere lo stesso punto dimezza cioè $t_1 = t_0/2$, segue che la forza essendo proporzionale all'accelerazione che a sua volta è $\propto t^2$ quadruplica; se assumo infine che debba dipendere sia da ω che da v come è ragionevole aspettarsi (in effetti se una delle due è nulla ci si aspetta che la forza trasversale sia nulla) si ottiene il risultato di cui sopra. (il coefficiente di proporzionalità sarà generalmente dell'ordine dell'unità). Avendo una forza costante che agisce sulla sfera, ci aspettiamo un moto uniformemente accelerato, in prima approssimazione rettilineo ($\Delta x \ll L$):

$$\Delta x = \frac{F t^2}{2m}$$

Ma il tempo di volo è $t = \frac{L}{v}$, allora

$$\Delta x = \frac{\pi \rho \omega R^3 L^2}{m v}$$

dove l'uguaglianza va intesa come ordine di grandezza.

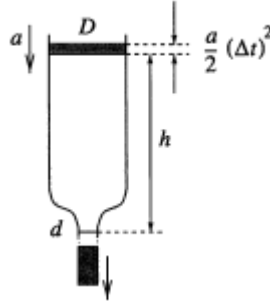
Soluzione 5.8. In un intervallo di tempo Δt il livello del liquido con accelerazione a diminuisce di $\Delta h = \frac{a}{2}(\Delta t)^2$, quindi dal contenitore fuoriesce la

massa $\Delta m = \frac{D^2 \pi}{4} \rho \Delta h$ e conseguentemente l'energia potenziale del sistema

diminuisce di $\Delta U = \Delta m g h = \frac{D^2 \pi}{4} \rho \Delta h g h$

D'altra parte, il liquido viene accelerato e raggiunge la velocità $\Delta v = a \Delta t$, quindi l'energia cinetica della colonna di liquido aumenta di $\Delta K = \frac{D^2 \pi}{2} h \rho (\Delta v)^2$ (quella dello straterello uscente è trascurabile anche se ha una velocità molto maggiore, perchè ha una massa infinitesima). Per la conservazione dell'energia si ha $\Delta U = \Delta K$, che restituisce $a = g$. Ciò significa che

⁹questo ragionamento è vero entro certi limiti.



inizialmente parte dell'acqua è in caduta libera. Inoltre, per la conservazione della portata, la velocità dello strato più basso è $(D/d)^2$ volte più grande di quella dello strato più alto. Allora la sua accelerazione deve essere più grande di g dello stesso fattore. Per quanto tempo il liquido è in caduta libera? Per la legge di Torricelli, la velocità di fuoriuscita è $v = \sqrt{2gh}$ e il tasso di diminuzione del livello dell'acqua è $\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh}$. Quindi l'intervallo di tempo tra l'inizio della fuoriuscita e il raggiungimento di una velocità di fuoriuscita circa costante può essere stimato tramite

$$g\tau = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh}$$

Soluzione 5.9. Le forze agenti sulla palla sono la forza peso e la forza di Archimede. Quando esse si equivalgono, la palla si stacca dal foro. Sia $V(r, R)$ il volume della palla immerso nell'acqua. La forza di Archimede è

$$F = \rho g V(r, R) - \rho g h (\pi r^2)$$

perchè la parte di sfera corrispondente all'apertura del foro non contribuisce alla spinta verso l'alto, non essendoci acqua al di sotto. Quindi, se la sfera è totalmente sommersa, diminuire h significa aumentare la spinta verso l'alto. La palla si alza quando

$$h_0 = \frac{V(r, R)}{\pi r^2} - \frac{m}{\rho \pi r^2}$$

Manca solo da valutare il volume della sfera immerso nell'acqua. Tramite integrazione o ragionamenti geometrici si giunge a

$$V(r, R) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 + (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 + r^2} \right)$$

Segue che

$$h_0 = \frac{2R^3 + (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 + r^2}}{3r^2} - \frac{m}{\rho \pi r^2}$$

Ricordiamo che questo vale solo se la palla è totalmente sommersa dall'acqua. Se così non fosse, bisognerebbe sottrarre al volume appena calcolato il volume della calotta sferica superiore, che rimane fuori dall'acqua.

Soluzione 5.10. L'equazione del moto per i flussi laminari viscosi ci dice innanzitutto che la pressione è costante sulla sezione del tubo (e quindi ha senso parlare di differenza di pressione tra le estremità). Vorremmo poi applicarla lungo z per trovare $v(r)$, tuttavia prima andrebbe trasformata in coordinate cilindriche che sono le coordinate adatte al problema in questione. La trasformazione del termine viscoso non è banale, matematicamente bisognerebbe usare la chain rule. Noi preferiamo seguire un approccio più fisico che è quello di ricavare la forza viscosa a partire da zero. In pratica al posto di considerare un cubetto (come a lezione) lavoriamo con uno strato cilindrico di raggio r spessore dr e lunghezza L ; assumiamo sempre che la forza di attrito tra strati cilindrici adiacenti sia proporzionale alla superficie di contatto e alla variazione della velocità per unità di lunghezza. Allora questa forza vale

$$\vec{F}_v = \mu \left[2\pi L(r + dr) \frac{\partial v(r + dr)}{\partial r} - 2\pi Lr \frac{\partial v(r)}{\partial r} \right] \hat{z} = \mu(2\pi Lr dr) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \hat{z}$$

Nello stato stazionario si deve avere equilibrio tra le forze in gioco, cioè la forza di pressione deve bilanciare $\vec{F}_v$ (in pratica si costruisce l'equazione (27) per lo strato cilindrico). Se $p + \Delta p$ e p sono i valori della pressione rispettivamente all'estremità sinistra e destra del tubo come mostrato in Figura 12, la forza di pressione netta che agisce sullo strato cilindrico considerato è

$$\vec{F}_p = 2\pi r dr \Delta p \hat{z}$$

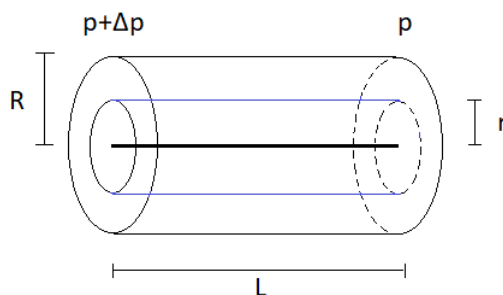


Figura 12

quindi deve essere

$$\vec{F}_v + \vec{F}_p = 0 \implies -\frac{r\Delta p}{\mu L} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

integrando una prima volta si ha

$$-\frac{r\Delta p}{2\mu L} + \frac{A}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}$$

Se A fosse diverso da zero si otterrebbe una velocità infinita per $r = 0$. Per motivi fisici imponiamo allora $A = 0$. A questo punto integriamo una seconda volta:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{r\Delta p}{2\mu L} \implies v = -\frac{\Delta p}{4\mu L}(r^2 - k^2)$$

la costante k si trova ricordando che per $r = R$ la velocità è nulla.

$$\vec{v}(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2)\hat{z}$$

La velocità è massima al centro del tubo e diminuisce quadraticamente avvicinandosi al bordo. Calcoliamo ora la portata

$$P = \int_0^R 2\pi r \rho v(r) dr = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\rho \Delta p R^4}{L}$$

Soluzione 5.11. Usiamo l'equazione del moto per i fluidi viscosi in regime laminare. Grazie a questa abbiamo che la pressione non varia nelle direzioni x e z . Lungo y :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\text{se } \frac{\partial P}{\partial y} = k$$

$$\frac{k}{\mu} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \implies v = \frac{k}{2\mu} z^2 + \alpha z + \beta$$

α e β si trovano imponendo che la velocità sia nulla per $z = 0$ e $z = h$. Si ottiene

$$\beta = 0 \quad \text{e} \quad \alpha = -\frac{kh}{2\mu}$$

La velocità è una parabola con valore massimo al centro e che si annulla ai bordi.

Soluzione 5.12. Il palloncino è complessivamente meno denso dell'aria circostante. Di conseguenza, nel sistema del camion, la forza fittizia su di esso è minore che quella sul volume di fluido (aria) spostato; quindi viene spinto in avanti dalla pressione nella direzione in cui il camion accelera fino a che non incontra la parete. Il risultato è forse meno sorprendente se si ragiona in questi

termini: nel sistema accelerato è come se si avesse una gravità fittizia lungo x , in analogia al caso verticale in cui il palloncino essendo più leggero si sposta verso l'alto (nella direzione opposta a $\vec{g}$) qui si sposta nel verso opposto alla forza fittizia. Per lo stessa ragione, se il camion svoltasse a destra, nel sistema di riferimento del camion il palloncino si sposterebbe verso destra.

Soluzione 5.13. Dalla conservazione della massa segue

$$\partial_t \rho = -\rho \nabla v - v \nabla \rho = -(v + \rho \frac{dv}{d\rho}) \nabla \rho = v_\rho \nabla \rho \quad (31)$$

Analogamente da Eulero si ricava

$$v_v = v + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dv} \quad (32)$$

Per la consistenza dell'ipotesi di onde semplici, uguagliamo v_v e v_ρ , come visto durante la lezione, e troviamo:

$$\frac{dv}{d\rho} = \pm \frac{c}{\rho} \quad (33)$$

Sostituendo questa nell'espressione per v_v si trova

$$v_v = v \pm c(\rho) \quad (34)$$

Non ci resta che calcolare $c(\rho)$, risolvere l'equazione differenziale per v sopra riportata, invertire la soluzione trovata e sostituire perciò $c(\rho)$ nell'equazione per v_v , con una funzione di v .

Per definizione di c , usando il fatto che per un'isoentropica $p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma$ si ha:

$$c = (\frac{dp}{d\rho})^{1/2} = c_0 (\frac{\rho}{\rho_0})^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (35)$$

Dove $c_0 = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$ è la velocità del suono in un punto in cui la velocità euleriana è nulla. Sostituendo nella 33:

$$v(\rho) = \pm c_0 \int (\frac{\rho}{\rho_0})^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\pm 2}{\gamma-1} (c - c_0) \implies c = c_0 \pm \frac{\gamma-1}{2} v \quad (36)$$

Da cui invertendo:

$$\rho = \rho_0 (1 \pm \frac{\gamma-1}{2c_0} v)^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (37)$$

Infine sostituendo in 34:

$$v_\rho = \pm c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v \quad (38)$$

Si ottiene perciò

$$\frac{dv_v}{dv} = \frac{\gamma + 1}{2} > 0 \quad (39)$$

Questo ci sta dicendo che punti che hanno velocità maggiore avranno velocità materiale maggiore rispetto a quelli più lenti. Potete immaginare una curva nel piano $x - v$ per la quale più è alto il punto in considerazione più si muove velocemente in orizzontale. Succederà infine che i punti più veloci si addenseranno in avanti, creando un fronte ripido, per il quale non varranno più le ipotesi di fluidodinamica ideale. In particolare la situazione limite è quella di un fronte discontinuo, per cui viene meno l'ipotesi di invertibilità delle funzioni usate per cercare le onde semplici. Il meccanismo descritto si chiama profile steepening, e porta alla descrizione delle onde d'urto.