

Ottica

Pietro Benotto*, Antonio Lombardi[†], Antonio Matteri[§]

11 Febbraio 2021

Sommario

In questa lezione in primo luogo ricaveremo le leggi dell'ottica geometrica a partire dal principio del tempo minimo per arrivare a spiegare con la legge di Snell la rifrazione ed il funzionamento di diottri e lenti. In seguito introdurremo le basi della teoria dell'ottica fisica, arrivando a trattare i fenomeni dell'interferenza e della diffrazione. Infine parleremo della polarizzazione delle onde elettromagnetiche e della loro interazione con i materiali, arrivando a ricavare le equazioni di Fresnel.

*pietro.benotto@sns.it

[†]antonio.lombardi@sns.it

[§]antonio.matteri@sns.it

Indice

1	Introduzione	4
2	Principio di Fermat	4
2.1	Traiettorie nei mezzi omogenei	5
2.2	Riflessione	5
2.3	Rifrazione	6
3	Leggi dell'ottica geometrica	7
4	La legge di Snell	9
5	Reversibilità dei cammini ottici	10
6	Diottro sferico	11
7	Sorgenti e immagini virtuali	13
8	Lenti	14
8.1	Ingrandimento	17
8.2	Immagine di una sorgente estesa	19
9	Specchi sferici	21
10	Introduzione all'ottica fisica	21
11	Onde elettromagnetiche	22
12	Fenomeni ondulatori: interferenza	23
12.1	Esperimento di Young	26
12.2	Young, ma con N fenditure	28
12.3	Diffrazione	32
12.4	Schermi opachi	32
13	Introduzione alle onde nella materia	35
14	Campo elettrico e polarizzazione	36
15	Di nuovo sulle onde elettromagnetiche	37
16	Riflessione e rifrazione	41
17	Condizioni al bordo e polarizzazione	43

18 Conclusioni	46
A Equazioni di Maxwell e onde	48
B Permeabilità e permittività materiali	49
Esercizi	51
I IPhO 1984/1 - ridotto	51
II IPhO 1995/2	51
III APhO 2007/2A	52
IV Senigallia 2017/3	55
V Quarto di cilindro	57
VI Doppietto di lenti	57
VII Reticolo di diffrazione	57
Soluzioni	58
I IPhO 1984/1 - ridotto	58
II IPhO 1995/2	59
III APhO 2007/2A	60
IV Senigallia 2017/3	62
V Quarto di cilindro	66
VI Doppietto di lenti	69
VII Reticolo di diffrazione	70

1 Introduzione

In questa lezione ci proponiamo di studiare alcuni tra i fenomeni ottici più rilevanti. Inizieremo dall'ottica geometrica: una teoria approssimata che è in grado di spiegare in modo semplice alcuni tra i fenomeni elementari conosciuti fin dall'antichità. Questa teoria, che considera la luce come propagazione di quelli che chiameremo *raggi*, può essere interamente ricavata dalle equazioni di Maxwell, quindi dalla teoria elettromagnetica. Per questo e per spiegare altri fenomeni, nella seconda parte della lezione ci occuperemo dell'ottica fisica, una teoria che considera la luce come onda. Si inizierà dai fenomeni comuni a tutte le onde, come l'interferenza e la diffrazione e finiremo per parlare brevemente delle onde elettromagnetiche nei materiali con l'idea di spiegare i fenomeni dell'ottica geometrica attraverso la teoria elettromagnetica.

2 Principio di Fermat

L'ottica geometrica si occupa di studiare la traiettoria dei raggi, una modellizzazione del percorso della luce. Poichè il concetto di percorso per un'onda è scarsamente significativo, la validità di questa teoria è limitata ai fenomeni in cui la natura ondulatoria della luce non ha un ruolo predominante, ovvero i casi in cui gli oggetti e le discontinuità incontrate dai raggi abbiano dimensione caratteristica molto maggiore della lunghezza d'onda della radiazione. L'ottica geometrica si basa su leggi che definiscono univocamente il comportamento dei raggi all'interno di mezzi omogenei e nei pressi dell'interfaccia tra due mezzi distinti.

Le leggi della riflessione e della rifrazione furono indipendentemente derivate da molti scienziati fin dal decimo secolo, ma il lavoro principale in questa branca fu svolto nel 1600. Noi seguiremo la dimostrazione di Fermat, che si basa sul principio variazionale che prende il suo nome.

Il principio di Fermat anche noto come *principio di tempo minimo* afferma, nella sua forma più generale¹, che un percorso tra due punti può essere la traiettoria di un raggio soltanto se lungo ad esso il tempo di percorrenza è un punto stazionario rispetto alla variazione del percorso stesso. Ovvero che piccole variazioni della traiettoria inducono correzioni al secondo ordine nel tempo di percorrenza. È importante notare come nel principio di tempo minimo sia implicitamente contenuta la finitezza della velocità dei raggi, nonostante Fermat sia morto pochi anni prima della dimostrazione che la

¹Nella prima forma data da Fermat, egli aveva asserito che il tempo doveva essere minimo, ma questo non è sempre vero. È sufficiente considerare uno specchio sferico concavo.

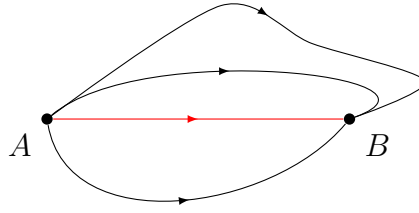


Figura 1: Alcune delle possibili traiettorie dei raggi tra A e B, se la velocità è uniforme per il principio di Fermat la traiettoria effettiva sarà quella rettilinea

velocità della luce è finita.

Assumeremo quindi che ogni mezzo ha associata una propria velocità caratteristica v alla quale i raggi viaggiano. Diremo che un mezzo è omogeneo se tale velocità è costante nello spazio e isotropo se non dipende dalla direzione e dal verso di v . Nel seguito l'isotropia sarà sempre assunta a priori.

2.1 Traiettorie nei mezzi omogenei

La prima cosa da fare è definire il comportamento dei raggi nei mezzi in cui la loro velocità è costante. Presi dunque due punti (A e B) per i quali sappiamo passare un raggio, allora il tempo impiegato per andare da A a B è proporzionale unicamente alla lunghezza del percorso. Se ne deduce facilmente che all'interno di mezzi omogenei i raggi si muovono lungo rette. È da questo fatto che nasce la concezione di raggio come qualcosa di rettilineo.

2.2 Riflessione

Nel caso della riflessione i raggi, per raggiungere un punto dello spazio, incidono su una superficie *riflettente* che per semplicità considereremo piana. Nel seguito chiameremo tale superficie *specchio*.

Supponiamo quindi tale specchio a $z = 0$, A e B a coordinate rispettivamente (x_a, y_a, z_a) e (x_b, y_b, z_b) . È facile vedere che il problema di trovare la traiettoria del raggio tra i due punti è del tutto analogo a quello, senza specchio, tra A e $B' = (x_b, y_b, -z_b)$ che sappiamo già essere rettilinea (Figura 2).

Tale risultato porta a tre immediate conseguenze:

1. Esiste un unico punto di contatto P del raggio sullo specchio
2. A , B e P giacciono sullo stesso piano

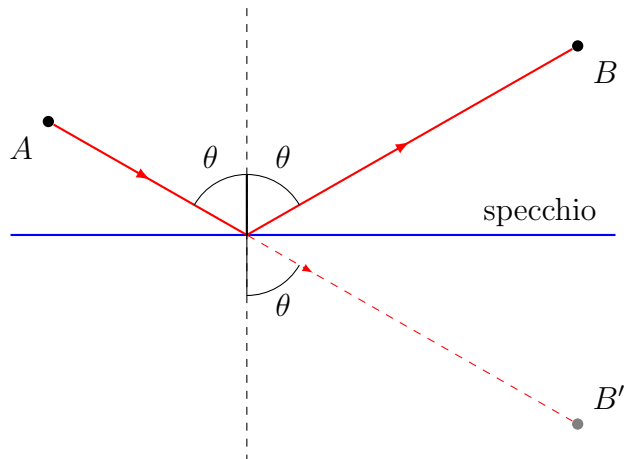


Figura 2: Costruzione equivalente per la risoluzione del problema della riflessione

3. L'angolo tra la normale al piano e il raggio che arriva da A (*raggio incidente*) è uguale all'angolo tra la normale al piano e il raggio che va verso B (*raggio riflesso*)

Queste sono generalmente note come leggi della riflessione.

2.3 Rifrazione

Consideriamo ora il problema della rifrazione. In questo caso A e B si trovano in due regioni distinte con due velocità caratteristiche diverse, rispettivamente v_1 e v_2 . Le due regioni sono separate da un piano che chiameremo α . Sappiamo già che il raggio incidente sarà rettilineo così come quello che dal punto di contatto P va a B (*raggio rifratto*). Chiamiamo π il piano passante per A e B e perpendicolare ad α . Supponiamo ora per assurdo che il punto di contatto non si trovi su π . Allora, muovendo P in direzione perpendicolare a π , il tempo totale di percorrenza dei due raggi ha un unico minimo che si ha quando P si trova su π . I raggi e la normale ad α giacciono quindi sullo stesso piano.

Possiamo quindi analizzare il problema in due sole dimensioni. Poniamo un sistema di coordinate cartesiano tale che la superficie di separazione sia lungo l'asse x . Troviamo ora il punto di contatto che minimizza il tempo di percorrenza.² A e B avranno coordinate rispettivamente (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , P

²in generale cerchiamo i punti stazionari. In questo caso si avrà un unico minimo

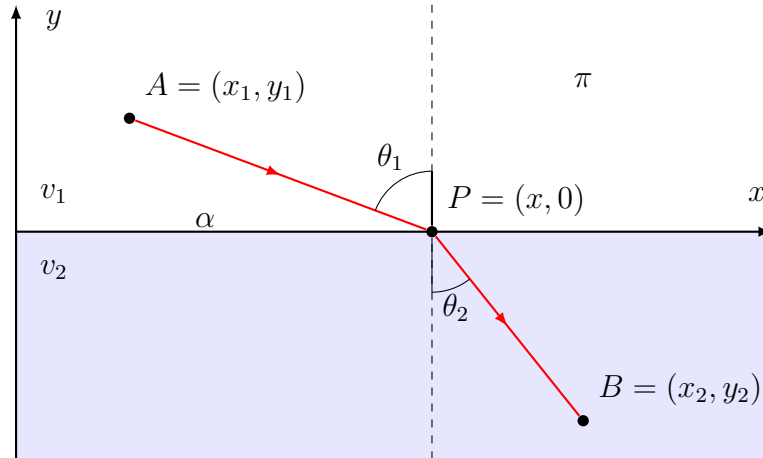


Figura 3: Partendo dal principio di Fermat vogliamo trovare la posizione del punto P che minimizza il tempo che impiega la luce per arrivare a B

avrà coordinate $(x, 0)$. Supponiamo $y_1 > 0, y_2 < 0$ (Figura 3).

Il tempo di percorrenza sarà perciò:

$$t(x) = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}}{v_2}$$

I punti stazionari di $t(x)$ si hanno per definizione quando $t'(x) = 0$.

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}} = 0$$

da cui

$$v_2 \sin \theta_1 - v_1 \sin \theta_2 = 0$$

Se si definisce ora *l'indice di rifrazione* come un numero adimensionale n pari a $n = \frac{c}{v}$ dove v è la velocità della luce nel mezzo e c quella nel vuoto, dall'equazione precedente possiamo ricondurci immediatamente alla più nota legge di Snell.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

3 Leggi dell'ottica geometrica

Nella sezione precedente abbiamo trattato separatamente i casi di rifrazione e riflessione. Nella realtà quasi sempre sono presenti entrambi i fenomeni

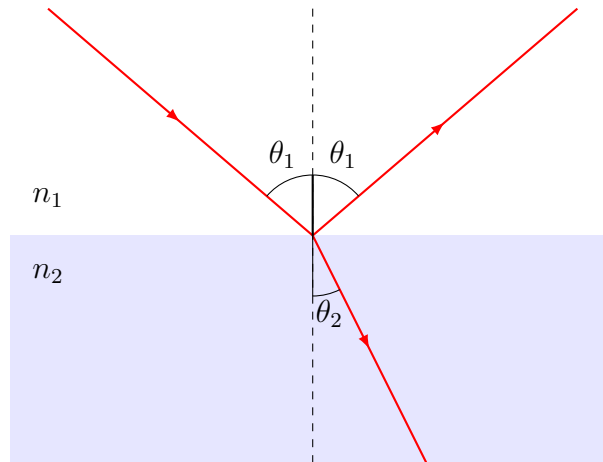


Figura 4: Comportamento di un raggio che incide con angolo θ_1 sulla superficie di separazione tra due materiali diversi

contemporaneamente, infatti ogni mezzo ha una certa riflettività e un proprio indice di rifrazione. Spesso non notiamo per esempio raggi rifratti (basti pensare a qualunque oggetto opaco che abbiamo intorno), ma ciò è dovuto all'assorbimento del materiale. Tale fenomeno non è però spiegabile con l'ottica geometrica e ci limiteremo a dire che quasi sempre esistono entrambi i raggi. Alla luce di questa nuova considerazione sintetizziamo brevemente i risultati ottenuti, che sono le basi dell'ottica geometrica.

- Le traiettorie dei raggi in mezzi omogenei sono rettilinee
- Quando un raggio, detto *incidente*, incontra la superficie di una interfaccia piana tra due mezzi omogenei, esso si divide in due raggi, detti *riflesso* e *rifratto*
- Tutti e tre i raggi e la normale alla superficie si trovano sullo stesso piano
- L'angolo di riflessione è lo stesso di quello di incidenza (θ_1 in Figura 4)
- Il raggio rifratto forma un angolo θ_2 in relazione con quello di incidenza tramite la legge di Snell $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

Generalmente l'ottica geometrica non è in grado di predire l'effettiva esistenza di entrambi i raggi, ci occuperemo infatti di questi aspetti alla fine della lezione con una teoria più accurata. Esiste però un caso in cui anche l'ottica geometrica riesce in qualche modo a evidenziare l'assenza di

uno dei raggi, in particolare quello rifratto. Infatti se $n_2 < n_1$ è possibile che $\sin \theta_1 > n_2/n_1$, ma per la legge di Snell si avrebbe $\sin \theta_2 > 1$ che è evidentemente privo di significato. In questo caso non esiste il raggio rifratto, siamo nel caso della *riflessione totale*.

4 La legge di Snell

Nelle sezioni precedenti abbiamo solamente trattato il caso in cui esiste una separazione netta tra due mezzi omogenei. Si vuole ora cercare di generalizzare quanto detto precedentemente per mezzi in cui l'indice di rifrazione varia con continuità. Consideriamo inizialmente tre materiali con indici di rifrazione rispettivamente n_1, n_2, n_3 disposti su tre strati paralleli in quest'ordine. Supponiamo che un raggio entri dal materiale con indice di rifrazione n_1 con un angolo θ_1 rispetto alla normale ai piani, possiamo semplicemente applicare la legge di Snell due volte sulle superfici di separazione e ottenere, con ovvio significato di θ_2 e θ_3

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3$$

È da notare che la validità di quanto detto è condizionata al fatto che i tre strati sono paralleli, ma se questa condizione è soddisfatta allora è sufficiente applicare la legge di Snell tra il primo e l'ultimo strato, non ha importanza quanti siano quelli in mezzo.

Supponiamo ora di avere un materiale in cui l'indice di rifrazione varia in modo continuo come una funzione $n(y)$, possiamo allora modellizzarlo come composto da strati orizzontali (quindi tutti paralleli) e omogenei di spessore infinitesimo. Detta $f(x)$ la funzione che descrive la traiettoria del raggio, e detto $\theta(x)$ l'angolo tra la verticale e la tangente alla traiettoria nel punto x , per la legge di Snell è chiaro che la quantità $n(f(x)) \sin \theta(x)$ è una costante fissata dai parametri iniziali del problema. Poichè si verifica che $\sin \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ si ottiene che la quantità rilevante conservata è:

$$\frac{n(f(x))}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \quad (1)$$

Traiettoria circolare

Con il fine di fissare le idee su questo argomento che è già stato più volte presente anche nelle prove delle Olimpiadi di Fisica proponiamo qui un veloce esercizio. Supponiamo di avere un materiale costruito come prima con

l'indice di rifrazione dipendente solamente dal valore delle ordinate. Trovare la funzione $n(y)$ affinché la traiettoria di un raggio di luce entrante parallelo all'asse delle ascisse nel materiale³ sia un arco di circonferenza. Supponiamo che $f(x) = \sqrt{(R^2 - x^2)}$ dove R è il raggio della circonferenza, allora sappiamo per la (1) che

$$n(y) \propto \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \sqrt{1 + \frac{R^2 - y^2}{y^2}}$$

Da cui, limitandoci al primo quadrante

$$n(y) \propto \frac{1}{y}$$

Con questo esercizio abbiamo concluso la parte introduttiva sull'ottica geometrica e passeremo ora ad analizzare alcuni tra gli oggetti più rilevanti per l'ottica geometrica: diottri e lenti.

5 Reversibilità dei cammini ottici

Un principio importante di cui non abbiamo ancora parlato, che è alla base dell'ottica geometrica, è la reversibilità dei cammini ottici. Esso afferma che dato un raggio incidente su un sistema ottico e dato lo stesso raggio (o anche un fascio di raggi separati) in uscita dal sistema, se si rimandasse indietro il raggio (o il fascio) di uscita si otterrebbe quello di ingresso. Con “rimandare indietro” si intende invertire il verso di scorrimento del tempo: immaginiamo di registrare il raggio che interagisce con il sistema, riguardando il video sarebbero fisicamente sensati sia il video come è stato registrato che lo stesso mandato al contrario.

Si noti la simmetria della legge di Snell: non si specifica quale sia il mezzo attraversato per primo dal raggio e non avrebbe senso che sia in qualche modo privilegiato uno dei due per via di questo principio. Poiché i sistemi ottici che vedremo saranno basati principalmente sulla legge di Snell e sulla legge della riflessione (angolo di incidenza e di riflessione sono uguali) che sono simmetriche di per sé, è chiaro che questo principio è valido anche per quei sistemi che sono basati su questi fenomeni. La validità del principio prescinde da questa limitazione, ma per quello che ci servirà si può vedere come conseguenza di questa caratteristica delle leggi fondamentali.

³Se il raggio fosse esattamente parallelo ovviamente non curverebbe mai, qua si sottointende che il raggio abbia una piccola deflessione iniziale

Inoltre potrebbe portare a conclusioni errate lavorare nel solo ambito dell'ottica geometrica, in quanto essa non si occupa minimamente dell'interazione tra due raggi. Ad esempio un raggio incidente su una superficie trasparente viene sia riflesso che rifratto; applicando il principio di reversibilità e partendo dalle leggi dell'ottica geometrica ci si potrebbe aspettare che guardando il fenomeno al contrario i due raggi prodotti non si uniscano in uno solo, ma formino anche un secondo raggio dovuto alla rifrazione del raggio riflesso. In sostanza nella Figura 4 ci si potrebbe aspettare la presenza di un raggio proveniente da in basso a sinistra. Il principio però deve essere valido, la spiegazione di questa inconsistenza è che limitandoci all'ottica geometrica trascuriamo l'interazione tra i raggi, che invece in questo caso è rilevante.

6 Diottro sferico

Il diottro è il sistema ottico più semplice ed è costituito da due mezzi con diverso indice di rifrazione a contatto. Il diottro sferico è quello che ha la superficie di separazione di forma sferica. Sebbene non sia molto comune avere a che fare con dei diottri nelle olimpiadi, essi sono alla base delle lenti che invece costituiscono dei sistemi ottici molto comuni.

Introduciamo brevemente i concetti di sorgente e immagine: si chiama sorgente un corpo che fornisce luce al sistema ottico, mentre l'immagine è il corpo che un osservatore vede attraverso il sistema ottico. È importante notare che secondo queste definizioni l'immagine di un sistema può essere la sorgente di un altro.

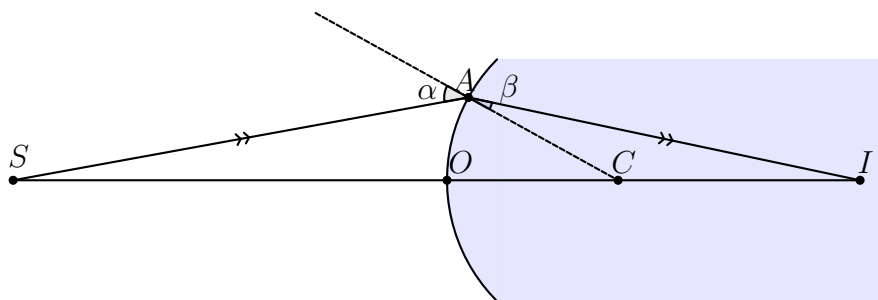


Figura 5: Schema ottico di un diottro sferico, S è una sorgente puntiforme e I il punto in cui il raggio incidente sul diottro con angolo α incontra l'asse ottico

Nella figura 5 il punto S rappresenta una sorgente puntiforme e I il punto in cui il raggio incidente sul diottro con angolo α incontra l'asse ottico. Indicando con n_1 l'indice di rifrazione del mezzo in cui si trova la sorgente e n_2 l'altro, si può applicare la legge di Snell per trovare la seguente relazione tra gli angoli in figura:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (2)$$

Questa equazione è esatta, ma a priori la posizione di I potrebbe dipendere da α e dunque i raggi emessi potrebbero non formare un'immagine. Vedremo che con qualche approssimazione si potrà ovviare a questo problema.

Definiamo p come la distanza tra S e O (il punto della superficie di separazione che appartiene al segmento SI) e q la distanza tra I e O . Inoltre il diottro è ricavato da una sfera di centro C e raggio R . Useremo d'ora in poi un'approssimazione parassiale, ovvero considereremo $\alpha \ll 1$ per poter giustificare delle approssimazioni altrimenti non valide, in particolare si noti che sono piccoli tutti gli angoli che tendono a 0 quando α tende a 0.

Per prima cosa si ricordi che se $x \ll 1$ allora $\sin x \approx x$, da cui l'equazione (2) diventa:

$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (3)$$

Ciò permette di considerare approssimativamente il punto in cui il raggio incontra la superficie come appartenente alla perpendicolare a SI passante per O . Si può notare che per il teorema dell'angolo esterno (applicato al triangolo ACI e all'angolo esterno $\widehat{ACS}$) si ricava che:

$$\widehat{ACS} = \beta + \widehat{CIA} \quad (4)$$

Inoltre, notando che tutti gli angoli sono piccoli, si ottiene che:

$$\widehat{ACS} \approx \tan(\widehat{ACS}) = \frac{AO}{R} \quad \widehat{AIO} \approx \tan(\widehat{AIO}) = \frac{AO}{q} \quad (5)$$

Combinando le equazioni (4) e (5) si ottiene:

$$\frac{AO}{R} = \beta + \frac{AO}{q} \quad (6)$$

Guardando ora al triangolo SAC e applicando di nuovo il teorema dell'angolo esterno si ottiene:

$$\alpha = \widehat{ASO} + \widehat{ACS} \quad (7)$$

Notando che anche $\widehat{ASO}$ è piccolo si ha:

$$\widehat{ASO} \approx \tan(\widehat{ASO}) = \frac{AO}{p} \quad (8)$$

Combinando le equazioni (5), (7) e (8) si ottiene:

$$\alpha = \frac{AO}{p} + \frac{AO}{R} \quad (9)$$

Per finire unendo le equazioni (3), (6) e (9) si ottiene:

$$n_1 \left(\frac{AO}{p} + \frac{AO}{R} \right) = n_2 \left(\frac{AO}{R} - \frac{AO}{q} \right) \quad (10)$$

$$n_1 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right) = n_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right) \quad (11)$$

Da cui:

$$\frac{n_2}{q} + \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (12)$$

Quest'equazione è molto interessante in quanto non appare α , dunque la posizione di I non dipende da esso, purché sia valida l'approssimazione parassiale, e dunque si forma un'immagine nel punto I .

Nel caso in cui i parametri geometrici del sistema e il valore di p rendano negativo q si ha che l'immagine è virtuale. Discuteremo in seguito cosa significhi, si sappia solo che i raggi non convergono verso un punto, ma a un osservatore dall'altra parte del diottro i raggi paiono provenire da un solo punto che si trova dalla stessa parte della sorgente che si trova però a una distanza $|q|$ da O .

Si può notare che l'equazione (12) è tale che se gli indici di rifrazione sono uguali l'immagine virtuale si forma nella sorgente, cioè non ha alcun effetto ottico dovuto al diottro. Inoltre se la curvatura del diottro è al contrario, cioè C appartiene a SO , la formula va corretta solo cambiando il segno di R ; ciò si ricava scambiando le posizioni di sorgente e immagine (non cambia nulla per reversibilità dei cammini ottici) e ricordando che n_1 è l'indice del mezzo in cui si trova la sorgente, quindi vanno scambiati anche n_1 e n_2 : ciò non varia il membro di sinistra, mentre cambia il segno del membro di destra.

7 Sorgenti e immagini virtuali

Prima di introdurre le lenti, è opportuno introdurre il concetto di sorgenti e immagini virtuali. Intuitivamente è chiaro che il comportamento della

luce è indipendente da come essa è prodotta e dipende quindi solo dalle sue caratteristiche intrinseche (lunghezza d'onda, polarizzazione); ci si aspetta quindi che per l'osservatore posto in A i due casi riportati nella figura 6 siano indistinguibili.

Nell'esempio in figura 6, in S' c'è un'immagine virtuale, cioè quanto osservato da A è equivalente a una sorgente puntiforme posta in S' , ma ponendo uno schermo in S' non vi si formerebbe un'immagine.

Per costruire un sistema più complesso è utile notare che per qualsiasi osservatore a destra della lente non è possibile distinguere se si è nel primo o nel secondo caso. Quindi i due casi sono intercambiabili a seconda delle comodità. In particolare l'immagine virtuale in S' fa da sorgente virtuale per il resto del sistema ottico.

Questo era un caso abbastanza semplice, ma diventa ben più strano e apparentemente complicato se si inverte il verso dei raggi luminosi: l'immagine virtuale diventa una sorgente virtuale per la lente e l'immagine finisce all'infinito. In generale invertire i versi di percorrenza non cambia la traiettoria dei raggi, quindi quest'operazione è utile per cambiare sorgenti e immagini a piacimento. Si vedrà che questo semplifica molto le formule da ricordare: un'immagine o una sorgente virtuale sono dalla parte opposta della lente rispetto a quanto ci si aspetterebbe, cioè la sorgente è dalla parte verso cui vanno i raggi e l'immagine da quella da cui provengono, per cui si distinguono da quelle reali per via di un segno. In particolare, per quanto riguarda le lenti, ciò è verificato dal fatto che nel diottro se l'immagine è dalla stessa parte della sorgente basta cambiare solo il segno di q per far tornare la formula finale (fatelo come esercizio notando che ora $\beta = \pi - \widehat{CAI}$). È importante notare che dato che la luce non arriva mai all'immagine virtuale non va considerata la seconda rifrazione se essa è fuori dal diottro.

8 Lenti

Le lenti sono il sistema ottico più comune. Esse sono costituite da due segmenti sferici dello stesso materiale uniti sulla parte piatta. In ambito olimpico si avrà quasi sempre a che fare con lenti sottili (vedremo cosa significa) in approssimazione parassiale.

Per studiare a livello ottico le lenti si noti che esse possono essere viste come due diottri a contatto. Per quanto detto prima sulle sorgenti immagine questo semplifica molto i ragionamenti necessari.

La luce supponiamo provenga da una sorgente puntiforme sull'asse ottico a distanza p dal centro della lente. La lente inoltre sia costituita da due calotte sferiche di raggi R_1 e R_2 di materiale con indice di rifrazione n . Le calotte

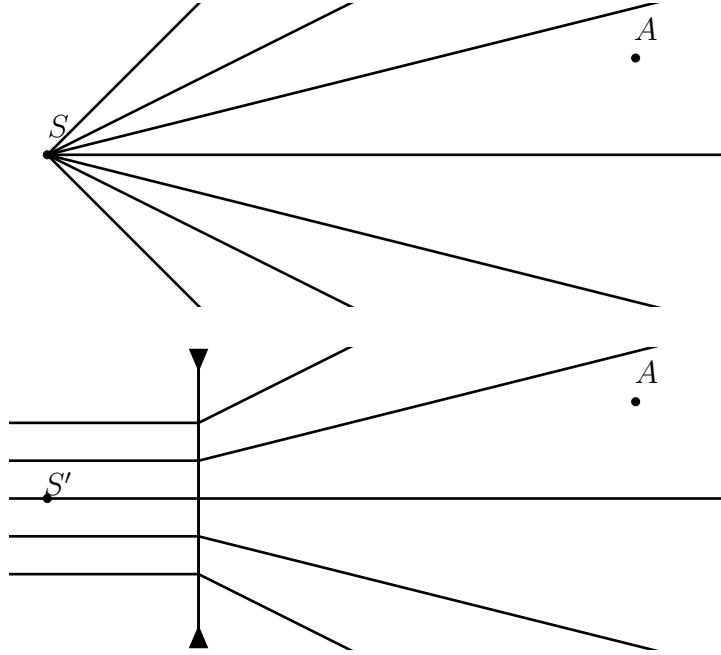


Figura 6: L'osservatore posto in A non è in grado di capire quale dei due casi è quello che osserva. L'oggetto presente nel secondo caso è una lente divergente

siano disposte come in figura 7 e circondate da aria (che ha indice di rifrazione 1). Il fatto che siano circondate dall'aria non è strettamente necessario, richiede solo una minima correzione della formula finale: nell'equazione (15) apparirebbe il rapporto tra gli indici di rifrazione dei due mezzi al posto della sola n del materiale della lente. Per comodità si noterà in seguito che un'opportuna convenzione sui segni dei raggi può essere utile per memorizzare la formula finale anche nei casi in cui una o entrambi le calotte siano concave. Lavoreremo nell'approssimazione di lente sottile, cioè lo spessore della lente è trascurabile rispetto a R_1 , R_2 e p , quindi sarà sensato considerare la lente come tutta giacente in un piano quando faremo i calcoli.

Per quanto ricavato sui diottri e per il principio delle sorgenti immagine, vediamo che in approssimazione parassiale si ha che la prima calotta forma un'immagine a distanza q' , la quale rispetta:

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q'} = \frac{n-1}{R_1} \quad (13)$$

Ora però l'immagine della prima calotta si forma oltre la seconda e inoltre l'immagine è reale. Possiamo davvero applicare il principio delle sorgenti

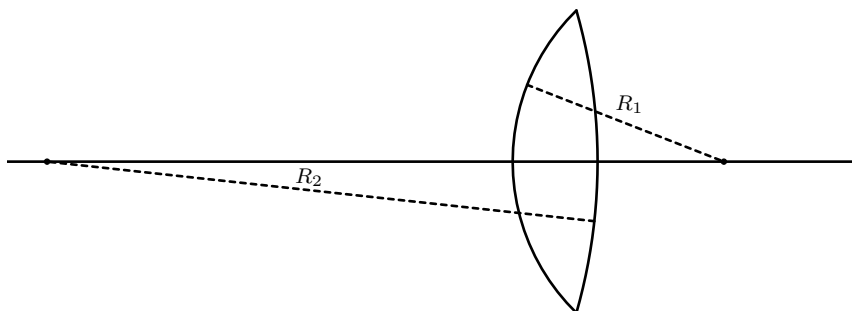


Figura 7: Rappresentazione indicativa di una lente convergente, i raggi sono stati accentuati per chiarezza

immagine? La risposta è sì: applichiamo la formula del diottro usando come distanza della sorgente $-q'$ (il segno è giustificato dal fatto che la sorgente è dalla parte delle lenti opposta a quella da cui provengono i raggi luminosi) e come raggio $-R_2$ (il diottro è “al contrario”):

$$\frac{1}{q} - \frac{n}{q'} = -\frac{n-1}{R_2} \quad (14)$$

Dove q è la distanza dell'immagine che si formerebbe. Per reversibilità dei cammini ottici si ha che scambiando sorgente e immagine (e anche opportunamente il segno del raggio del diottro e gli indici di rifrazione) la formula resta valida. Questo significa che la nostra ipotesi di applicabilità è valida, infatti se ponendo una sorgente in q l'immagine si forma in q' , allora è lecito assumere che una sorgente in q' formi un'immagine in q .

Sommando le equazioni (13) e (14) si ottiene:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (15)$$

Solitamente si definisce la lunghezza focale come $f = \frac{R_1 R_2}{(n-1)(R_2 - R_1)}$ (equazione del costruttore di lenti), in modo che l'equazione (15) diventi:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (16)$$

nota come legge dei punti coniugati.

Le formule usate sopra sono valide anche in casi particolari: eventuali valori di p e q negativi indicano che rispettivamente la sorgente e l'immagine

sono virtuali in quanto si trovano dalla parte sbagliata della lente, cioè la sorgente dalla parte verso cui va la luce e l'immagine da quella da cui essa proviene.

Se la lunghezza focale è positiva, la lente si dice convergente, se è negativa si dice divergente. Questi nomi sono dovuti ai comportamenti che esse assumono se colpite da raggi paralleli all'asse ottico: la lente convergente forma un'immagine reale nel fuoco facendoli convergere, mentre quella divergente li allontana creando un'immagine virtuale nel fuoco dalla parte di provenienza. La lente convergente è solitamente indicata in maniera schematica come un segmento con delle frecce agli estremi che puntano verso l'esterno e quella divergente con le frecce che puntano verso l'interno, come in figura 8.

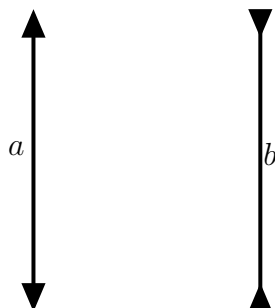


Figura 8: Rappresentazione schematica delle lenti: a è convergente e b è divergente

Le formule enunciate sopra sono sufficienti a risolvere quasi ogni esercizio olimpico di ottica che coinvolge le lenti.

8.1 Ingrandimento

Le lenti con cui abbiamo a che fare tutti i giorni non hanno solo una sorgente puntiforme sull'asse ottico, ma piuttosto oggetti estesi. Ci si aspetta che questo abbia degli effetti notevoli sull'immagine, che in particolare non sarà più sempre puntiforme, ma sarà anch'essa estesa e apparirà in generale ingrandita o rimpicciolita a seconda della lente e della distanza tra sorgente e lente.

Supponiamo d'ora in poi per semplicità che la sorgente sia un segmento con un estremo sull'asse ottico e ortogonale ad esso e che esso sia sufficientemente corto (vedremo nel prossimo capitolo cosa si intende). Questo copre gran parte dei casi interessanti per le olimpiadi, studiare l'immagine di una sorgente lontana dall'asse ottico è in generale complicato. Inoltre l'immagine di una sorgente di forma generica si può ottenere studiando le immagini di ogni suo

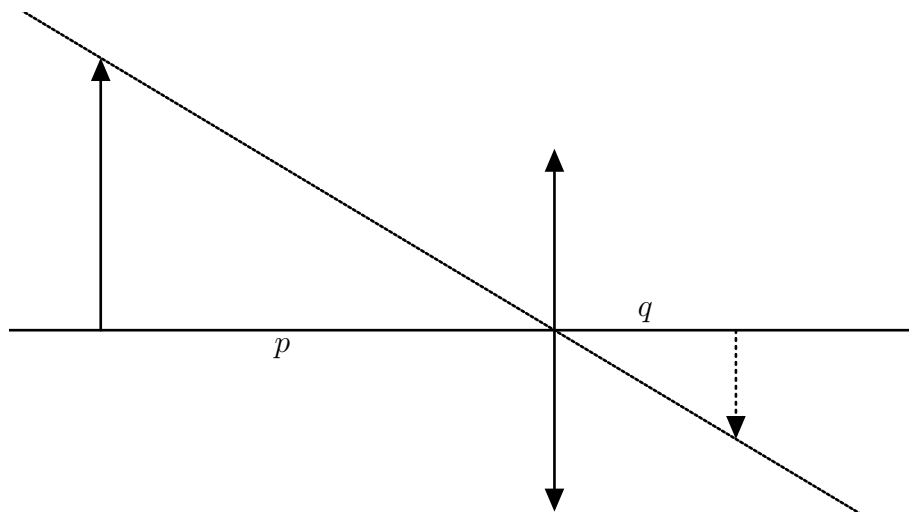


Figura 9: In questo caso con una lente convergente l'immagine ha altezza proporzionale all'altezza della sorgente e il rapporto è pari a $\left| \frac{q}{p} \right|$

singolo punto, cosa che sarà estremamente semplice alla luce delle conclusioni che si trarranno alla fine del capitolo.

Nell'ipotesi di lenti sottili si ha che un raggio passante per il centro della lente con un angolo di incidenza minore di $\frac{\pi}{2}$ non viene deviato dalla lente, in quanto incontra solo due superfici di separazione parallele e l'aria circostante ha sempre lo stesso indice di rifrazione. Supponiamo che le immagini siano sempre segmenti ortogonali all'asse ottico nello stesso piano della sorgente; questa assunzione non è scontata e verrà giustificata nel prossimo capitolo, per ora accettiamola. Si ha che, detta p la distanza tra sorgente e lente, q quella tra immagine e lente, l'altezza dell'immagine sarà $|G| = \left| \frac{q}{p} \right|$ volte quella della sorgente, come si nota dalla figura 9 e come si può dimostrare con il teorema di Talete.

L'ingrandimento può essere espresso in funzione solo della lunghezza focale e della distanza p , utilizzando la legge dei punti coniugati, ottenendo:

$$G = \frac{f}{p - f} \quad (17)$$

Il segno, apparentemente arbitrario, indica se l'immagine è capovolta o no: positivo se è capovolta, negativo altrimenti. Esso è anche legato al tipo di immagine: l'ingrandimento è negativo se è virtuale e positivo se è reale. Quest'ultima affermazione è vera non solo se la sorgente è reale, si verifica che essa è valida anche per sorgenti virtuali.

Per capire velocemente dove si trova l'immagine e quanto vale approssimativamente l'ingrandimento può essere utile utilizzare un disegno. La sorgente (il segmento) si schematizza solitamente come una freccia con la punta nell'estremo che non è sull'asse ottico. Sarà comodo trovare solo l'immagine della punta della freccia in quanto quella della base sarà sicuramente sull'asse ottico e per un'assunzione fatta prima sarà la proiezione della prima immagine sullo stesso.

Se la sorgente è reale, per trovare l'immagine della punta basta trovare dove si intersecano due raggi emessi da essa (l'immagine si forma nel punto in cui si concentrano tutti), solitamente per comodità si scelgono uno parallelo all'asse ottico (il suo comportamento è noto sapendo il tipo di lente) e l'altro passante per il centro della lente (non viene deviato).

Se la sorgente è virtuale, si scelgono come raggi quello passante per il centro della lente e quello parallelo all'asse ottico che colpisce la lente dalla parte da cui proviene la luce.

8.2 Immagine di una sorgente estesa

Abbiamo già detto che l'immagine di un segmento ortogonale all'asse ottico è a sua volta un segmento ortogonale all'asse ottico. Dimostriamo prima che sotto certe condizioni si forma comunque l'immagine del vertice spostato del segmento e poi che è posizionata in modo che la proiezione sull'asse coincida con l'immagine dell'altro vertice del segmento.

Se si prende il vertice del segmento fuori dall'asse ottico e si considera solo il primo diottrio che la luce incontra, esso genererà un'immagine purché esso sia sufficientemente vicino all'asse, infatti questo caso è equivalente a guardare l'intero sistema di un diottrio sferico come se l'asse ottico fosse la retta contenente sorgente e centro della sfera da cui è stato ricavato il diottrio. È quindi possibile riutilizzare quanto dimostrato per il diottrio, in particolare il fatto che si formi un'immagine. Per maggiore chiarezza si guardi la figura 10.

L'immagine che si forma è virtuale o reale a seconda dei parametri del sistema, ma sta di fatto che è possibile ripetere lo stesso ragionamento con l'altro diottrio utilizzando la prima immagine come sorgente virtuale e ottenere quindi un'immagine che sarà quella complessiva della lente. Questo ragionamento è valido nel limite in cui sono sensati i ragionamenti sui diottri, cioè finché gli angoli di incidenza dei raggi sui due diottri sono piccoli, ovvero se l'altezza della sorgente è piccola rispetto a p (se p è comparabile con f).

Abbiamo quindi mostrato che l'immagine si forma. Consideriamo ora i due tipi di lente e vediamo che l'immagine si forma dove ci si aspetta.

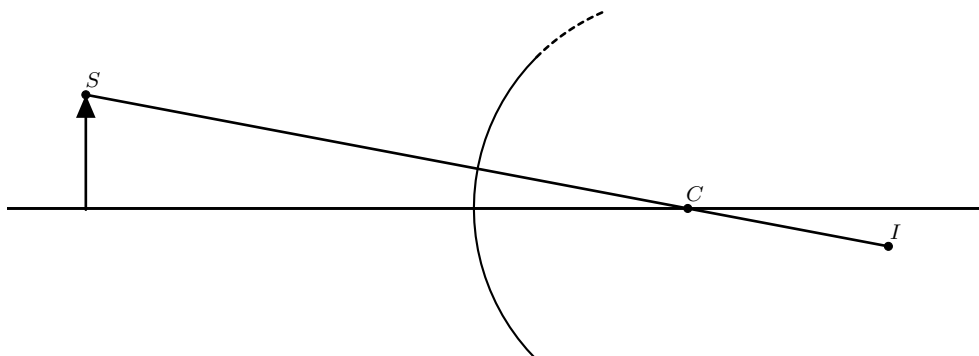


Figura 10: L'immagine del punto S è il punto I : completando il diottro in modo che sia simmetrico rispetto al segmento SO si può applicare il ragionamento usato per i diottri ed ottenere la posizione di I

Prendiamo una lente convergente. Se cerchiamo con la costruzione grafica dove si viene a formare l'immagine della punta, iniziamo supponendo che la sorgente sia alta h e a distanza p dalla lente e che l'immagine sia alta h' e si trovi a distanza q dalla lente. A questo punto applico la costruzione grafica mostrata prima per ottenere le seguenti due equazioni:

$$\frac{q}{p} = \frac{h'}{h} \quad (18)$$

$$\frac{h}{f} = \frac{h'}{q - f} \quad (19)$$

Sostituendo h' , sparisce anche h e resta:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (20)$$

Che è proprio la legge dei punti coniugati; ciò dice che effettivamente la punta della freccia è tale che la proiezione della sua immagine è l'immagine della sua proiezione sull'asse ottico.

Per una lente divergente, nella prima cambia il segno di uno dei membri, mentre la seconda equazione diventa:

$$\frac{h}{f} = \frac{h'}{f - q} \quad (21)$$

Sostituendo come prima si giunge alla stessa conclusione. L'assunzione fatta era dunque valida.

9 Specchi sferici

Uno specchio sferico è una calotta sferica costituita di materiale riflettente. A seconda del lato colpito dalla luce lo specchio si chiama concavo (la luce proviene dalla parte della calotta interna alla sfera) o convesso viceversa.

Con dei calcoli analoghi a quelli fatti per il diottro si può ottenere la posizione dell'immagine di una sorgente vicina all'asse ottico. Gli specchi sferici sono considerati come buone approssimazioni degli specchi parabolici (per i quali i raggi paralleli all'asse ottico convergono esattamente nel fuoco), purché il raggio della calotta sia piccolo rispetto a quello della sfera. In particolare se la sorgente è puntiforme e si trova a una distanza p dalla parte riflettente dello specchio, allora l'immagine si forma dalla stessa parte ma a distanza q dallo stesso, con q che soddisfa:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Essa è analoga alla legge dei punti coniugati. f è la distanza del fuoco dello specchio dallo stesso. Nel caso di specchi sferici vale $f = \frac{R}{2}$ con R raggio della sfera da cui è stato ricavato lo specchio. Per convenzione e per far tornare l'equazione si assume inoltre che la distanza focale dello specchio sia positiva per quelli concavi e negativa per quelli convessi. Valgono inoltre le solite convenzioni: p e q negativi indicano rispettivamente sorgenti e immagini virtuali. Anche la formula per l'ingrandimento è la stessa delle lenti sottili, ovvero $G = \frac{q}{p}$.

In questa dispensa si è preferito descrivere in dettaglio le lenti e lasciare gli specchi sferici come eventuale esercizio per il lettore, in quanto essi non richiedono di passare per un sistema ottico intermedio (come il diottro per le lenti).

10 Introduzione all'ottica fisica

L'ottica geometrica è una teoria dai molti risvolti applicativi, ma presenta due aspetti che fanno riflettere. In primo luogo è una teoria empirica in un certo senso chiusa in sè stessa, che si è sviluppata nel corso dei secoli a puri fini ingegneristici e che dunque non possiede una modellizzazione che le permetta di svilupparsi ulteriormente; i fenomeni descrivibili con l'ottica geometrica, esclusi i classici casi standard descritti precedentemente, vengono spiegati semplicemente creando combinazioni di sistemi ottici sempre più complicati che producano tali effetti, senza approfondire ulteriormente che cosa sia effettivamente la luce e perchè si comporti in quel modo sulla base di

una modellizzazione fisica più generale. In secondo luogo l'ottica geometrica ha un ambito di applicazione che si limita a quando gli oggetti che vanno ad interagire con la luce hanno dimensioni molto superiori alla lunghezza d'onda di quest'ultima. Ci interessa quindi sviluppare una teoria che allo stesso tempo spieghi il fenomeno della luce sulla base di principi più generali ed abbia come "legge limite", nell'approssimazione di lunghezza d'onda piccola nei confronti delle dimensioni tipiche del sistema ottico, l'ottica geometrica. Una teoria del genere è stata sviluppata a metà del diciannovesimo secolo da parte di J.C.Maxwell, il quale, dopo aver unificato con le sue equazioni le teorie dell'elettricità e del magnetismo, interpretò il fenomeno della luce come una perturbazione del campo elettromagnetico, in termini semplici come un'onda che si propaga attraverso il campo. La teoria che si sviluppa a partire dalla modellizzazione della luce come onda elettromagnetica è detta, per contrapporla all'ottica geometrica, ottica fisica e risulta essere una descrizione accurata dei fenomeni anche quando il sistema ottico ha dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda della luce interagente (purchè questa non abbia energie eccessivamente elevate, il che renderebbe necessario l'intervento della meccanica quantistica). Questa lezione non si pone come obiettivo descrivere la natura del campo elettromagnetico e le leggi che lo regolano, ma fornire gli strumenti per comprendere i fenomeni ottici che possono venire presentati in ambito olimpico.

11 Onde elettromagnetiche

Le onde elettromagnetiche, per brevità d'ora in poi indicate con E.M., sono variazioni nel tempo del campo elettromagnetico che si propagano attraverso lo spazio ad una velocità data, la velocità della luce, indicata con c . Queste onde vengono generate in una determinata regione dello spazio, detta sorgente, che consideriamo puntiforme. Le onde più semplici da studiare, nonchè le uniche che useremo in questa sede, sono le così dette onde piane, la cui espressione lungo la direttrice con la sorgente è la seguente

$$\psi(x, t) = A \cos \left(\left(\frac{\omega}{c} \right) x - \omega t + \phi \right)$$

dove $\psi(x, t)$ indica l'entità della perturbazione del campo elettromagnetico nei punti a distanza x dalla sorgente al tempo t . L'argomento del coseno è detto fase dell'onda. A viene detta ampiezza dell'onda ed indica l'entità della massima deformazione che questa può causare; con ω si indica la pulsazione della luce prodotta, ovvero in una posizione fissata è il numero di radianti di

cui varia la fase dell'onda in un secondo. Ogni onda piana è dunque definita in base alla sua pulsazione, alla sua ampiezza ed alla sua fase iniziale ϕ , che indica come è distribuita l'onda nello spazio all'istante di tempo zero. A partire da queste grandezze se ne possono definire altre di significato più intuitivo che descrivano allo stesso modo l'onda. La frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi}$ è il numero di picchi che passano per un punto in un secondo, mentre la lunghezza d'onda $\lambda = \frac{c}{f}$ è la distanza spaziale che intercorre tra due massimi dell'onda in un istante fissato. Sulla base di queste grandezze si può riscrivere l'onda come

$$\psi(x, t) = A \cos \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) x - (2\pi f t) + \phi \right)$$

In un'onda elettromagnetica a variare è il campo elettromagnetico ed ha una particolarità: i campi elettrico e magnetico possono variare solo nelle loro componenti sul piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda e tra di loro vale la relazione $\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \times \frac{\mathbf{E}}{c}$, dove $\mathbf{e}_r$ è il versore che indica la direzione di propagazione dell'onda. Senza perdita di generalità possiamo quindi studiare il comportamento del solo campo elettrico, sapendo che il campo magnetico avrà esattamente lo stesso comportamento, a meno di un fattore di scala, con la condizione che sia sempre ortogonale sia al campo elettrico che alla direzione di propagazione. Supponendo quindi che si propaghi in direzione $\mathbf{z}$, un'onda elettromagnetica piana può essere espressa come variazione delle componenti trasversali di $\mathbf{E}$

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) z - (2\pi f t) + \phi_x \right)$$

$$E_y(z, t) = E_{y0} \cos \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) z - (2\pi f t) + \phi_y \right)$$

Per i prossimi paragrafi considereremo solo onde che si muovono su un piano in cui l'unica componente che varia del campo elettrico è quella perpendicolare al piano in questione, ma questa forma generale verrà ripresa nell'introduzione al discorso sulla polarizzazione.

12 Fenomeni ondulatori: interferenza

L'interferenza è un fenomeno non previsto dall'ottica geometrica che viene descritto molto bene dalla natura ondulatoria della luce. Un'onda può essere vista come un trasferimento di energia da un punto ad un altro nello spazio, quindi ha senso associarle un'energia o, più coerentemente, essendo l'onda non

localizzata in un punto ma distribuita su tutto l'angolo solido, una densità di energia trasferita per unità di area detta intensità I dell'onda nel punto in questione. Ci interessa sapere che intensità si misura in un punto in presenza di più onde. Si potrebbe pensare che l'intensità sia la somma delle intensità delle varie onde prese singolarmente, come se, invece di esserci un certo numero di raggi a trasportare energia, ce ne fosse una certa quantità proveniente dalle varie sorgenti, ciascuna delle quali contribuisce in maniera indipendente dalla presenza delle altre; questo in realtà non succede, ed è la prima evidenza dell'incompletezza dell'ottica geometrica. Prendiamo come esempio due sorgenti sull'asse y , una nell'origine ed una in $(0; D)$. Un principio alla base dell'elettromagnetismo è il principio di sovrapposizione lineare, che nel nostro caso si traduce nel fatto che se ho più sorgenti di onde E-M allora il campo in un punto è la somma dei campi delle onde prese singolarmente; dunque nel caso in questione ottengo

$$\psi(x, y, t) = \psi_1(x, y, t) + \psi_2(x, y, t)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = & E_1 \cos \left(-\omega_1 t + \phi_1 + \frac{2\pi}{\lambda_1} \sqrt{x^2 + y^2} \right) + \\ & + E_2 \cos \left(-\omega_2 t + \phi_2 + \frac{2\pi}{\lambda_2} \sqrt{x^2 + (y - D)^2} \right) \end{aligned}$$

Per semplicità di notazione e di formule, si assumerà che $\lambda_1 = \lambda_2$, ma è bene sottolineare che il ragionamento è generale e vale per un numero qualsiasi di sorgenti di onde E-M arbitrarie. Nel caso in questione si ha

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = & E_1 \cos \left(-\omega t + \phi_1 + \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{x^2 + y^2} \right) + \\ & + E_2 \cos \left(-\omega t + \phi_2 + \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{x^2 + (y - D)^2} \right) \end{aligned}$$

Definisco la differenza di fase tra le onde

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{x^2 + (y - D)^2}$$

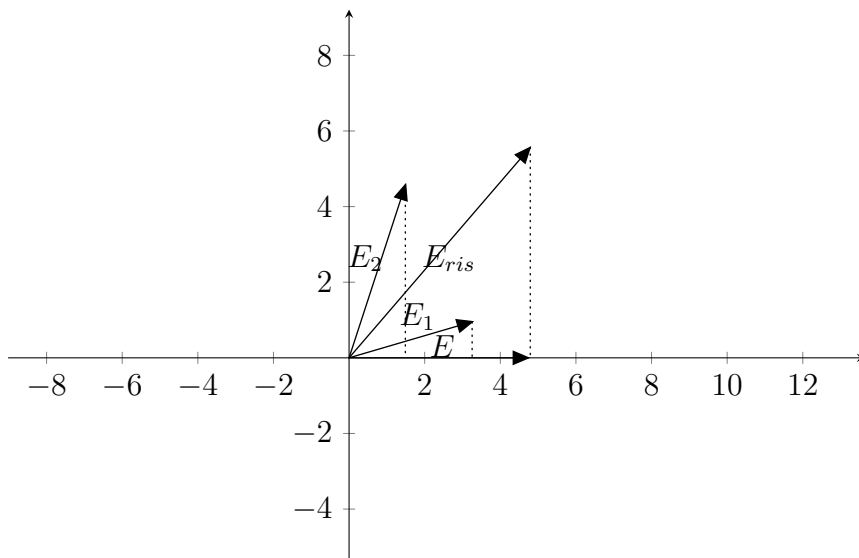
e prendo la fase della prima onda in modo che $\phi_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, dove (x_0, y_0) è il punto dove vogliamo misurare l'intensità dell'onda risultante.

Questo procedimento equivale a decidere quale istante usare come zero della scala dei tempi, cosa che è sempre lecito fare. In questo modo posso scrivere

$$\psi(x_0, y_0, t) = E_1 \cos(-\omega t) + E_2 \cos(-\omega t + \Delta\phi)$$

Questa somma di coseni può essere vista in maniera intuitiva come un'altra cosinusoide. Immaginiamo che i due addendi siano le proiezioni lungo l'asse delle ascisse di vettori che ruotano in moto uniforme sul piano con velocità angolare $-\omega$ separati da un angolo $\Delta\phi$. I moduli dei vettori saranno proprio E_1 e E_2 , mentre l'ampiezza dell'onda risultante nel punto è appunto il modulo della somma di questi due vettori, che pure ruoterà nel piano con velocità angolare uniforme ω . Applicando il teorema del coseno si ha che il modulo della risultante è

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 \cos(\Delta\phi) E_1 E_2 \quad (22)$$



A noi però più che l'ampiezza dell'onda interessa la sua intensità, che, come già avrete visto ad elettromagnetismo, è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda; non essendo utile in questa sede considerare la costante di proporzionalità, identificheremo l'intensità proprio come il quadrato dell'ampiezza $I = E^2$. Osservando l'equazione 22 si ha che, come indicato in precedenza, l'intensità dell'onda risultante non è ovunque la somma delle intensità delle singole onde, ma in alcuni punti è maggiore, in alcuni minore, a seconda della differenza di fase che intercorre tra varie onde. È proprio quel termine aggiuntivo che genera il fenomeno dell'interferenza.

Cosa si può osservare in pratica? Se abbiamo le due sorgenti in questione e vediamo come viene illuminato uno schermo, possiamo vedere che si vanno a formare regioni alternate più scure e più chiare a seconda che la differenza

di fase tra le onde porti ad un coseno positivo o negativo. Si può dunque pensare che la presenza di più sorgenti in un certo senso renda alcuni punti dello spazio più adatti di altri a farci passare energia. Una domanda potrebbe sorgere spontanea: perchè non vediamo allora tutto a bande chiare e scure? La ragione è che nella realtà la luce ha lunghezze d'onda molto piccole e ci sono tante sorgenti orientate in maniera differente che generano onde di frequenze diverse tra loro tanto che osservare l'effetto globale dell'interferenza tra queste onde richiederebbe una risoluzione⁴ sia spaziale che temporale da parte del nostro occhio di vari ordini di grandezza superiore a quella che possediamo; quindi possiamo semplicemente trascurare l'effetto dell'interferenza e definire una sorta di intensità media sullo spazio e sul tempo, che è quella che effettivamente percepiamo e che in genere è rilevante per i nostri semplici esperimenti quotidiani nel caso in cui la sorgente delle onde sia, per esempio, un corpo caldo, una lampada od il sole, che sono oggetti il cui comportamento è descritto dal mondo caotico della termodinamica. In questi casi ha senso trascurare completamente l'interferenza ed affidarsi ai principi su cui è basata l'ottica geometrica per studiare i fenomeni, almeno in prima approssimazione.

12.1 Esperimento di Young

Vediamo ora un esempio. Definisco schermo, come ci si può aspettare a partire dall'esperienza comune, un oggetto tale che se investito da un'onda elettromagnetica non si fa attraversare, come un muro, un'ombrellone da spiaggia o voi stessi quando siete sotto il sole. In questa sezione non indagheremo su che fenomeno si basi questa proprietà di impenetrabilità degli schermi, ma vi sarà più chiaro dopo la parte finale della lezione. Immaginiamo di avere due schermi piani paralleli di spessore trascurabile, l'uno dei quali ha due fenditure rettilinee parallele di larghezza paragonabile a quella della lunghezza d'onda utilizzata. Assumiamo che gli schermi siano molto distanti l'uno dall'altro in termini di lunghezza d'onda della luce e della distanza tra le due fenditure e che lo schermo con le fenditure venga investito da luce parallela alla normale agli schermi, di lunghezza d'onda λ . La domanda è: cosa vediamo sul secondo schermo? Ci saranno zone più chiare o più scure? Cerchiamo di risolvere il problema sulla base di quello che abbiamo visto nel paragrafo precedente. Prima di utilizzare i risultati che abbiamo trovato sull'interferenza, dobbiamo però far presente una cosa. In questo problema non è veramente ben definito quali sono le sorgenti della luce. Un principio matematico generale sulle onde, il principio di Huygeens, asserisce che per

⁴ovvero la capacità di distinguere come diverse due sorgenti luminose molto vicine o di rendersi conto della loro variazione temporale

studiare l'evoluzione di un'onda nel tempo si può istantaneamente considerare ogni punto del fronte d'onda come una sorgente e sovrapporne gli effetti. Sembra una cosa molto astratta e di difficile comprensione, ma nel nostro caso specifico si traduce in un fatto molto semplice: le uniche sorgenti di cui dobbiamo tenere conto sono i punti del fronte d'onda che non incontrano il primo schermo, quindi quelli all'interno delle fenditure. Viste le dimensioni delle fenditure in termini di λ , lavorando su un piano perpendicolare ai due schermi possiamo considerare queste sorgenti puntiformi. Ci siamo ridotti così ad un problema che con gli strumenti visti prima possiamo risolvere. Essendo gli schermi molto lontani in termini di distanza tra le due fenditure, si ha che possiamo considerare paralleli i percorsi che portano dalle due fenditure allo stesso punto dello schermo opposto. La differenza di cammino ottico tra le onde prodotte dalle due sorgenti è

$$\Delta l = d \sin(\theta)$$

con d distanza tra le fenditure e θ angolo che identifica il punto dello schermo opposto (come scritto prima, lavoriamo solo sul piano, quindi in particolare su quello definito dalla normale ai due schermi e la normale alle due fenditure giacente sul primo schermo). La differenza di fase tra le due onde è quindi

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda} \approx \frac{2\pi d\theta}{\lambda}$$

dove per l'ultima relazione si è usata l'approssimazione al primo ordine $\sin(\theta) \approx \theta$, lecita essendo gli schermi molto distanti a patto di non osservare troppo lontano dall'asse del sistema. Data la differenza di fase, possiamo trovare l'intensità in ogni punto dello schermo, dando per noto che l'ampiezza delle due onde sia la stessa perchè provengono da una stessa onda che investe il sistema

$$I = 2A^2 + 2A^2 \cos\left(\frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda}\right) = 4A^2 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}\right)$$

In base all'argomento del coseno abbiamo individuato quindi zone chiare e scure che si alternano in maniera simmetrica rispetto all'asse del sistema e possiamo anche trovare gli angoli dei massimi e dei minimi dell'intensità luminosa

$$\begin{aligned} \sin(\theta_{max,m}) &= \frac{m\lambda}{d} \quad m \in \mathbb{Z} \\ \sin(\theta_{min,k}) &= \frac{(k + \frac{1}{2})\lambda}{d} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Attenzione! Non tutte le relazioni trovate per i massimi ed i minimi hanno senso: bisogna controllare che siano compatibili con l'immagine della funzione seno, ovvero che $-1 \leq \frac{(k+1/2)\lambda}{d} \leq 1$ ed allo stesso modo $-1 \leq \frac{m\lambda}{d} \leq 1$.

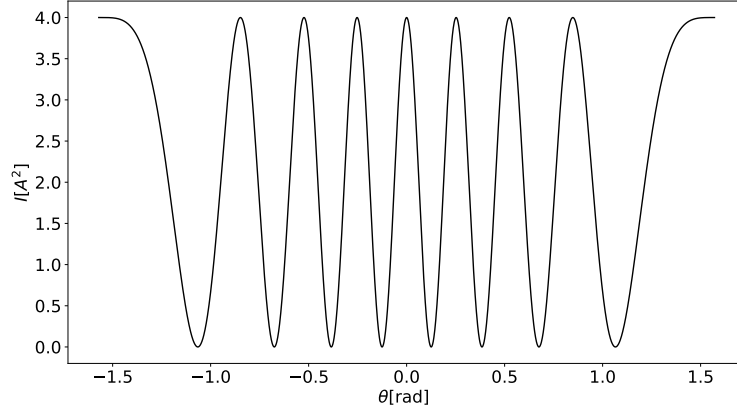


Figura 11: intensità luminosa misurata in unità di ampiezza quadra in funzione dell'angolo θ quando $d = 4\lambda$

12.2 Young, ma con N fenditure

Studiamo ora un caso più complicato: il sistema è lo stesso dell'esperimento di Young, ma stavolta abbiamo N fenditure equispaziate a distanza d l'una dall'altra. Vogliamo ancora una volta studiare l'intensità della luce nei vari punti dello schermo. Come prima, per il principio di Huygeens possiamo considerare come sorgenti le sole N fenditure. Su un punto dello schermo si ha che le onde provenienti dalle varie sorgenti, essendo queste equispaziate e rimanendo sempre nell'approssimazione di distanza tra gli schermi molto grande, hanno uno sfasamento reciproco costante:

$$\psi_1(y_0, t) = A \cos(-\omega t)$$

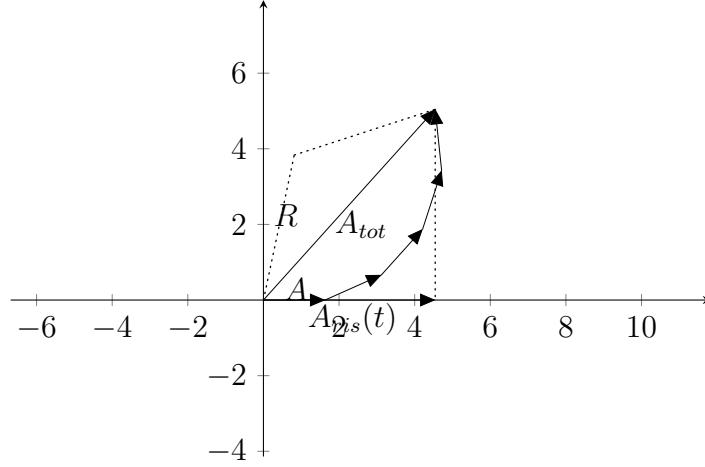
$$\psi_2(y_0, t) = A \cos(-\omega t + \phi_{y_0})$$

...

$$\psi_n(y_0, t) = A \cos(-\omega t + (N-1)\phi_{y_0})$$

$$\psi_{ris}(y_0, t) = A \sum_{i=0}^{N-1} \left(\cos(-\omega t + i\phi_{y_0}) \right)$$

dove con ψ_i si indica l'onda generata dalla sorgente i-esima.



Come fatto precedentemente, possiamo trovare l'ampiezza risultante considerando quella sommatoria come una somma di vettori che ruotano su un piano a velocità angolare $-\omega$. Se si va a fare un disegno, come in figura, si vede che i vettori vanno a formare i lati di parte di un poligono inscritto in una circonferenza di raggio R ; sapendo che i vettori hanno tutti la stessa lunghezza A e che l'angolo ϕ_{y0} tra uno ed il successivo è costante, abbiamo che

$$A = 2R \sin\left(\frac{\phi_{y0}}{2}\right)$$

e che la lunghezza del vettore che congiunge l'origine con la punta dell'ultimo vettore è

$$A_{ris} = 2R \sin\left(\frac{n\phi_{y0}}{2}\right) = A \frac{\sin\left(\frac{N\phi_{y0}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_{y0}}{2}\right)}$$

Di conseguenza l'intensità risultante è

$$I = A_{ris}^2 = A^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{N\phi_{y0}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_{y0}}{2}\right)} \right)^2$$

Una pratica utile per controllare se si ha fatto bene i conti è controllare i casi banali o già noti. Il caso $N = 0$ dà, come ci aspettiamo, intensità nulla ovunque, come il caso $N = 1$, che dà intensità costante su tutto lo schermo e pari ad A^2 . Anche il caso $N = 2$ è noto e, come calcolato precedentemente, risulta essere $I = 4A^2 \cos^2\left(\frac{\phi_{y0}}{2}\right)$, in accordo con quanto appena trovato. Studiamo ora il caso generico: lo sfasamento risulta essere, con lo stesso ragionamento di prima $\phi_{y0} = 2\pi \frac{d \sin(\theta_{y0})}{\lambda}$. Essendo i seni funzioni periodiche,

si ha che anche l'intensità è una funzione periodica in ϕ_{y_0} , di periodo 2π ; ci interessa quindi studiare il comportamento dell'intensità solo su un periodo, per convenzione $[0, 2\pi[$. Essendo l'intensità sempre positiva, i suoi minimi sul periodo, corrispondenti alle regioni scure dello schermo, coincidono con i suoi zeri; in base alle analisi fatte non è detto che non ci siano ulteriori minimi locali ed io non li cercherò in quanto lo studio degli zeri della derivata dell'intensità rispetto a ϕ non è banale, ma è una cosa che si può verificare numericamente. Nel disegno in figura questi zeri corrispondono a quando i vettori si richiudono su se stessi formando delle figure chiuse. Di primo acchito si potrebbe dire che questi minimi devono quindi corrispondere agli zeri di $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)$, il che è vero, ma con un'accortezza: in $\phi = 0$ ho che sia numeratore che denominatore vanno a zero, ma per un noto limite notevole si ha che quel rapporto tende a N , non a zero. Si ha quindi, come ci si aspetta, che al centro dello schermo ci sia un massimo, non un minimo, per di più di larghezza doppia rispetto a quella degli altri massimi. L'intensità della luce in quel punto è anche l'intensità massima ottenibile:

$$I_{maxcentr} = A^2 N^2$$

Le fasce scure corrispondono a tutti gli altri zeri di $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)$, in quanto in tutti questi punti il denominatore dell'intensità non è nullo. questi punti corrispondono a

$$\phi_{min_i} = \frac{2i\pi}{N} \quad i = 1, \dots, (N - 1)$$

che corrispondono a posizioni angolari sullo schermo

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\theta_{imin}) = \frac{2i\pi}{N}$$

$$\sin(\theta_{imin}) = \frac{i\lambda}{Nd} \quad i = 1, \dots, (N - 1)$$

Trovare i massimi dell'intensità diversi da quello centrale o da sue ripetizioni periodiche presenta le stesse difficoltà di trovare eventuali minimi locali diversi dagli zeri, ma sappiamo che esistono per un noto teorema di analisi. Il massimo che possiamo fare in questa sede è ipotizzare dove essi si trovano per N molto grande. In questo caso infatti si ha che il numeratore varia molto più velocemente del denominatore e quindi possiamo supporre che i massimi di I siano ben approssimati dai punti di massimo di $\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)$, ovvero da

$$\phi_{maxj} = (2i + 1) \frac{\pi}{N} \quad j = 1, \dots, (N - 2)$$

dove j può variare solo tra questi valori in quanto si verifica numericamente che non c'è un massimo tra il massimo centrale e il primo zero dell'intensità, come mostrato in figura. Finora abbiamo studiato l'intensità come funzione matematica, senza veramente pensare a se quello che abbiamo trovato abbia fisicamente senso. In particolare ha veramente senso studiare l'intensità facendo variare ϕ su tutto $\mathbb{R}$? La risposta è no, e deriva dalla seguente relazione che abbiamo evidenziato in precedenza tra lo sfasamento relativo delle sorgenti e l'angolo che definisce il punto sullo schermo $\phi = 2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda}$ che implica

$$\sin(\theta) = \frac{\phi \lambda}{2\pi d}$$

Affinchè questa equazione abbia senso, essendo un seno sempre compreso tra -1 e 1, il termine a destra deve essere anch'esso limitato nello stesso range, il che si traduce in una condizione sul dominio di ϕ :

$$-\frac{2\pi d}{\lambda} \leq \phi \leq \frac{2\pi d}{\lambda}$$

Quindi noi sullo schermo in realtà vediamo solamente punti corrispondenti a

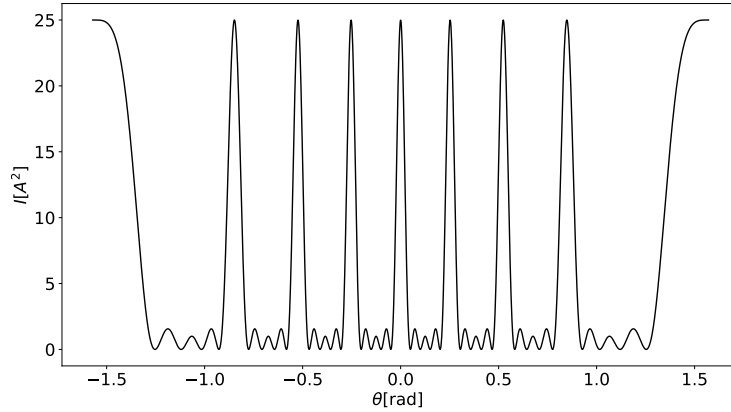


Figura 12: intensità luminosa misurata in unità di ampiezza quadra in funzione dell'angolo θ quando $d = 4\lambda$ e $N = 5$

sfasamenti inclusi in quell'intervallo, il che implica che, a seconda del rapporto tra la lunghezza d'onda della luce e la distanza relativa tra le fenditure posso vedere un numero maggiore o minore di fasce chiare e scure sullo schermo; in particolare se $\frac{\lambda}{d} > 1$ non vedo nessun'altra zona con intensità pari a quella del massimo centrale, perchè il dominio di ϕ è minore di due volte il periodo dell'intensità.

12.3 Diffrazione

In base a quello che abbiamo visto ci potremmo chiedere cosa succede invece di esserci fenditure puntiformi sullo schermo, ci fosse una fenditura estesa di larghezza D ; il fenomeno risultante prende il nome di diffrazione della luce. Modellizziamo la cosa passando al limite il caso discusso precedentemente per il numero di fenditure puntiformi che va ad infinito e la loro distanza reciproca va a zero, mantenendo il prodotto $Nd = D$. Passando al limite l'equazione che avevamo trovato per l'intensità si ha

$$I_{ris} = 4I_{cent} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)}{\Phi} \right)^2$$

dove si è indicato con $\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} N\phi$ e $I_{centr} = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 A^2$ limite dell'intensità al centro del fascio e si è usato il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = x$. La relazione tra Φ e θ è

$$\sin(\theta) = \lim \frac{\Phi \lambda}{dN2\pi} = \frac{\Phi \lambda}{2\pi D}$$

Come nel caso di prima, i minimi sono semplici da trovare e corrispondono agli zeri del seno, quindi si trovano a

$$\Phi_{min} = \pm 2n\pi \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$\sin(\theta_{min}) = \pm n \frac{\lambda}{D} \quad n \in \mathbb{N}^+$$

Cosa succede se le dimensioni della fenditura sono molto maggiori della lunghezza d'onda della luce? Per angoli θ piccoli si ha che la distanza angolare tra due bande scure diventa sempre minore, finchè le stesse bande scure non si distinguono più tra loro e con i massimi tra loro presenti, mentre per angoli θ maggiori lo smorzamento dell'intensità dovuto al denominatore predomina. Al nostro occhio, che non ha un'alta risoluzione spaziale, il tutto appare come se la luce non presentasse diffrazione, sempre rimanendo nel limite che la distanza tra gli schermi sia molto maggiore dell'ampiezza della fenditura. Qui per angoli θ piccoli intendo per i punti che appartengono alla proiezione della fenditura sul secondo schermo. In prima approssimazione quindi possiamo ritrovare quello che ci aspettiamo dall'esperienza comune: sullo schermo appare l'immagine luminosa della fenditura.

12.4 Schermi opachi

Vediamo ora a titolo di esempio che cosa succede se veniamo meno ad un'altra ipotesi: gli schermi ora si trovano a distanza L finita, non per

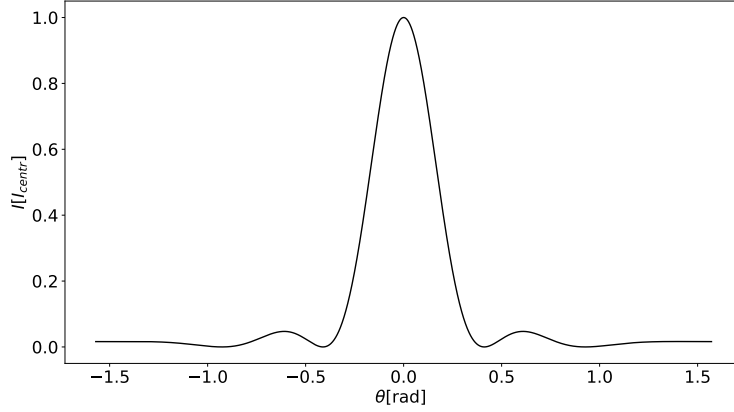


Figura 13: intensità luminosa misurata in unità di I_{centr} in funzione dell'angolo θ quando $D = 5\lambda$

forza incompatibile con le dimensioni della fenditura, ma molto grande in termini di lunghezza d'onda della luce usata. Ci interessa, come prima, calcolare l'intensità luminosa su un punto P dello schermo. Come prima modellizziamo la fenditura come un segmento continuo di sorgenti luminose infinitesime puntiformi. Dato che l'intensità di un'onda che si propaga in maniera uniforme in tutte le direzioni dello spazio generata da una sorgente puntiforme varia come l'inverso del quadrato della distanza dalla sorgente, le sorgenti infinitesime molto lontane dalla proiezione di P contribuiscono in maniera trascurabile, quindi ha senso usare l'approssimazione parassiale che avete già visto in ottica geometrica. Sia y la distanza della sorgente infinitesima dalla proiezione di P sul primo schermo. In base all'approssimazione parassiale possiamo dire quindi che la differenza di cammino ottico tra la sorgente in y e la sorgente sulla proiezione di P , rispetto alla quale misuriamo tutte le fasi, è

$$\Delta l(y) = \frac{y^2}{2L}$$

$$\phi(y) = \frac{\pi y^2}{L\lambda}$$

A differenza di prima vediamo che la fase non varia linearmente con la distanza tra le sorgenti, ma come il quadrato della distanza tra la sorgente e l'asse congiungente il punto dove stiamo misurando l'intensità e la sua proiezione sul primo piano. Questa cosa va a coincidere con il nostro senso fisico perchè se la fenditura è abbastanza estesa, di fatto si può considerare il sistema come perfettamente simmetrico attorno a quell'asse, quindi ha senso che le fasi siano

regolate da una funzione pari e la funzione pari più semplice è la parabola. Si può costruire una soluzione geometrica approssimata con lo stesso trucco che abbiamo usato per le N fenditure con la poligonale: considerando la fenditura come un numero finito di sorgenti equispaziate con fase relativa che varia quadraticamente si può costruire una poligonale che approssima la soluzione reale. Il passaggio al limite continuo di questa costruzione è difficile da ottenere, ma è noto alla matematica ed è detto Spirale di Cornu o Clotoide. In maniera analoga al discorso con la poligonale, presi i punti sulla

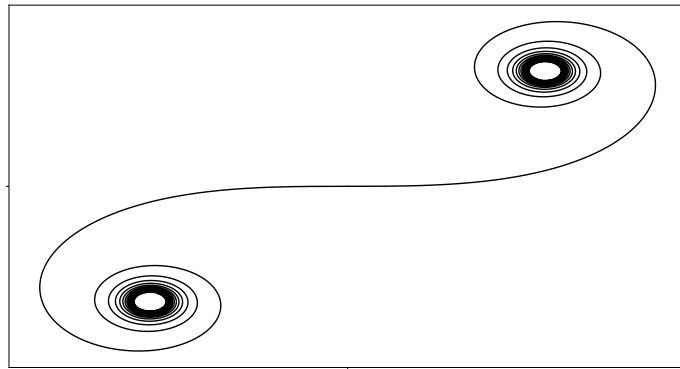


Figura 14: Spirale di Cornu o Clotoide

clotoide corrispondenti alle posizioni delle estremità della fenditura, il modulo quadro del segmento che li ha come estremi è l'intensità della luce nel punto P . Verifichiamo il caso banale: se la fenditura è infinitamente estesa, l'intensità luminosa su tutti i punti dello schermo è costante, come ci aspettiamo, perchè costante è la distanza tra i due "estremi" della clotoide. Possiamo anche verificare la coerenza con l'approssimazione parassiale effettuata: muoversi varie lunghezze d'onda fuori asse corrisponde a considerare sorgenti che lungo la clotoide corrispondono a punti che si addensano attorno ai "nodi" ed i cui contributi in media si annullano a vicenda, dunque trascurarne il contributo è una scelta coerente. Questa modellizzazione ci permette anche di studiare come si comporta l'intensità luminosa in punti sullo schermo la cui proiezione si trova sul bordo della fenditura, ovvero come sono fatti quelli che comunemente considereremmo i bordi dell'ombra dello schermo. Come ci si può aspettare, l'intensità luminosa allontanandosi dalla fenditura diminuisce bruscamente al bordo per poi tendere asintoticamente a zero, cosa di cui ci si può rendere conto ancora una volta osservando la clotoide e rendendosi conto che l'andamento dell'intensità va a corrispondere con quello della distanza

tra un punto della clotoide ed il nodo destro man mano che si percorre la curva verso quell'estremo; muovendosi invece dall'estremità della fenditura verso il suo interno, come ci aspettiamo, vediamo dei residui di diffrazione, individuabili dato che percorrendo il ramo sinistro della clotoide verso il nodo sinistro la distanza dal nodo destro ha un andamento oscillatorio.

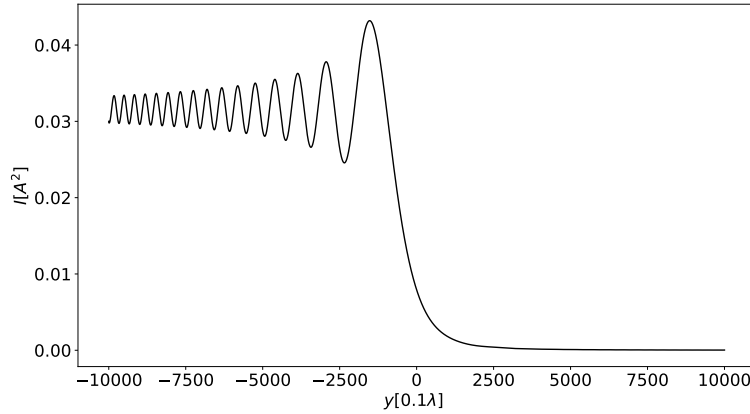


Figura 15: Andamento dell'intensità luminosa attorno al bordo dell'ombra della fenditura; per chi fosse interessato a riprodurre la simulazione, è stata modellizzata come 100000 sorgenti puntiformi equispaziate a 0.1λ di ampiezza $0.0001A$ con $\frac{\pi}{D} = 10^{-4}\lambda^{-1}$.

13 Introduzione alle onde nella materia

Nelle prossime sezioni si analizzerà dal punto di vista della teoria di Maxwell il comportamento delle onde elettromagnetiche nella materia con il fine di ricavare le equazioni dell'ottica geometrica e qualche interessante risultato in più.

Tutta la teoria necessaria per spiegare in modo completo i concetti che utilizzeremo richiederebbero ben più di una lezione e servirebbe quasi tutta la teoria di un corso di elettrodinamica.

La dovuta premessa ai prossimi argomenti è quindi che si cercherà di introdurre alcuni concetti di questa teoria, ma, per non far diventare troppo ostica la lezione, lasceremo da parte la maggior parte dei concetti formali e daremo una visione il più possibile intuitiva.

Con l'idea che la luce è un'onda elettromagnetica e quindi oscillazione di campi elettrici e magnetici nel tempo e nello spazio, nei prossimi capitoli

parleremo del campo elettrico, della polarizzazione dei materiali, estenderemo il concetto di onda piana in 3 dimensioni e parleremo brevemente delle onde elettromagnetiche. A questo punto saremo pronti ad affrontare l'ottica dal punto di vista della teoria elettromagnetica. E ci ricaveremo alcuni risultati interessanti, alcuni già visti altri nuovi, sulla rifrazione e sulla riflessione.

14 Campo elettrico e polarizzazione

Nonostante questi argomenti siano stati trattati in modo molto approfondito nella lezione di elettrostatica faremo un brevissimo riepilogo dei concetti che ci servono. Sappiamo la circuitazione del campo elettrico essere nulla, ovvero

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

inoltre il teorema di Gauss impone che

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Come già avete visto nella lezione di elettrostatica, possiamo applicare i due teoremi precedenti in prossimità di una superficie con densità di carica σ , ottenendo i seguenti importantissimi risultati:

$$\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \Delta E_{\parallel} = 0 \quad (23)$$

Nella stessa lezione è stato inoltre introdotto il concetto di polarizzazione dei dielettrici e si è visto che nel caso di $\mathbf{P}$ uniforme la polarizzazione equivale macroscopicamente ad avere una densità di carica $\sigma_P = P_{\perp}$ sull'interfaccia del materiale.

Nella nostra trattazione ci occuperemo unicamente di dielettrici lineari in cui $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$, dove $\mathbf{E}$ è il campo elettrico totale all'interno del dielettrico e $\chi_e + 1 = \varepsilon_r$ è la permittività elettrica, che è una caratteristica del materiale⁵. In queste condizioni possiamo ricavarci un risultato che ci sarà utile più avanti. Poichè $P_{\perp} = \varepsilon_0 \chi_e E_{\text{in}\perp}$ e utilizzando il fatto che $\Delta E_{\perp} = \frac{P_{\perp}}{\varepsilon_0}$ otteniamo che

$$\varepsilon_r E_{\text{in}\perp} = E_{\text{out}\perp}$$

L'unica condizione affinché ciò sia vero è che $\mathbf{P}$ sia uniforme, ma ciò è sempre vero se consideriamo una porzione di spazio sufficientemente piccola e vicina

⁵Nel caso di un'onda elettromagnetica ε dipende anche dalla frequenza dell'onda ed è il motivo per cui vi è dispersione.

all'interfaccia e l'espressione trovata è quindi valida in generale⁶. Possiamo ora facilmente generalizzare il risultato al campo elettrico nei pressi dell'interfaccia tra due materiali. Si ha dunque che:

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \quad (24)$$

15 Di nuovo sulle onde elettromagnetiche

Le onde elettromagnetiche sono uno dei risultati più interessanti e con maggiori implicazioni delle equazioni di Maxwell. Come tutte le onde sono perturbazioni che si propagano nello spazio e nel tempo e nel caso delle onde elettromagnetiche sono formate da un campo elettrico e uno magnetico variabili nel tempo, soluzioni dell'equazione di d'Alembert tridimensionale per i due campi⁷.

Nella nostra trattazione ci occuperemo unicamente di una classe particolare di soluzioni: le onde piane (Figure 16, 17 e 18). Fissato un sistema di coordinate in cui $\mathbf{r}$ identifica il vettore posizione di un punto dello spazio, le onde piane in tre dimensioni hanno questa forma (prendiamo come esempio il campo elettrico, quello magnetico è del tutto analogo):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

Dove $\mathbf{E}_0$ è il vettore ampiezza dell'onda, $\mathbf{k}$ è il vettore d'onda, ω è la pulsazione e ϕ la fase. Il loro nome, onde *piane*, indica il fatto che il valore dell'onda nello spazio a tempo fissato è costante su piani perpendicolari a $\mathbf{k}$, infatti su tali piani il prodotto scalare $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ è costante.

La loro importanza risiede nel fatto che, come è possibile dimostrare, ogni funzione soluzione dell'equazione dell'onda è scrivibile come somma di sinusoidi. Elenchiamo ora alcune proprietà delle onde elettromagnetiche che non dimostreremo, rimandando a [Jac98] per un maggior approfondimento sull'argomento:

⁶Nella realtà l'interfaccia ha una dimensione finita δ , che possiamo supporre dell'ordine della distanza atomica, allora la distanza caratteristica con cui varia $E_{\perp}$ deve essere molto maggiore della dimensione atomica. Per una onda elettromagnetica possiamo considerare questa espressione valida per $\lambda \gg \delta$.

⁷Anche nota come equazione delle onde. Può essere ricavata per le onde elettromagnetiche direttamente dalle equazioni di Maxwell nei dielettrici. In appendice A è presente la sua forma unidimensionale nel vuoto.

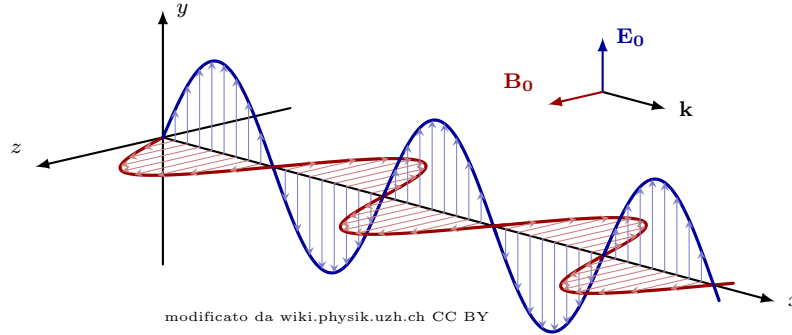


Figura 16: Onda elettromagnetica. Il valore di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ in un punto qualsiasi dello spazio $\mathbf{r}$ è uguale al vettore di modulo pari al valore dell'onda nel punto x' dell'asse x proiezione di $\mathbf{r}$ ($x' = \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \mathbf{r}$).

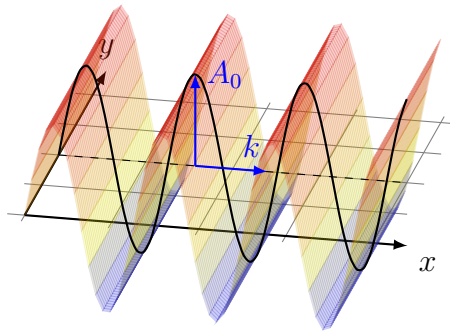


Figura 17: Onda piana bidimensionale con vettore d'onda k e ampiezza A_0 a tempo fissato. Ad ogni punto del piano xy è associato il vettore parallelo a A_0 di modulo pari all'altezza della funzione in quel punto.

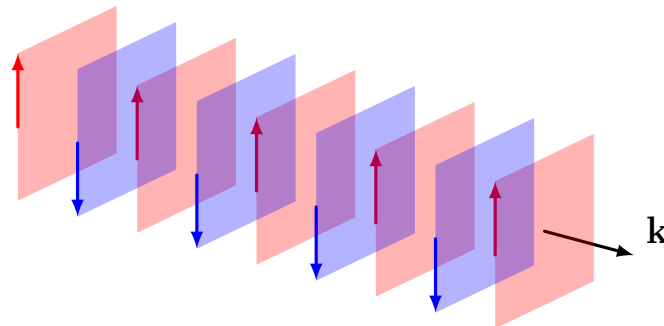


Figura 18: Fronti d'onda di un'onda piana tridimensionale nello spazio. La freccia indica il vettore d'onda e quindi la direzione di propagazione. Le frecce rosse e blu indicano il campo elettrico $\mathbf{E}$ di ogni punto di quel piano.

- La loro velocità di propagazione, ovvero il rapporto tra la lunghezza d'onda (la distanza tra due fronti d'onda) e il periodo dell'onda (il tempo necessario ad un fronte d'onda per raggiungere la posizione in cui si trovava il fronte d'onda successivo nell'istante in cui si è iniziato a misurare il tempo), è $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ dove $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ è la permittività elettrica assoluta⁸ e analogamente $\mu = \mu_0\mu_r$ è la permeabilità magnetica assoluta. Inoltre $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$
- Il vettore d'onda $\mathbf{k}$ indica la direzione e il verso di propagazione dell'onda e il suo modulo k è legato alla pulsazione dell'onda dall'equazione

$$\omega = vk = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (25)$$

- $\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{k}$ sono perpendicolari tra loro e in particolare vale la relazione $v\mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}_0$
- $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ sono sempre in fase per cui $\mathbf{k}, \omega$ e ϕ sono gli stessi sia per il campo elettrico che quello magnetico

Nella prima di queste proprietà abbiamo utilizzato μ . Essa è la permeabilità magnetica, che indica il grado di magnetizzazione che un materiale ottiene quando gli viene applicato un campo magnetico. Può essere in qualche modo visto come la controparte per il campo magnetico di ε . Nei mezzi trasparenti normalmente questo valore è molto vicino a quello del vuoto⁹ μ_0 e nel seguito quindi porremo sempre $\mu = \mu_0$. Questa semplice assunzione, che però è perfettamente lecita per tutti i mezzi trasparenti a frequenze visibili, ci permette alcune semplificazioni:

- Rispetto a quanto visto per il campo elettrico nella sezione 14, in prossimità dell'interfaccia tra due materiali possiamo completamente ignorare la variazione di μ e imporre la continuità del campo magnetico. Attraverso la superficie:

$$\Delta \mathbf{B} = 0 \quad (26)$$

- La velocità delle onde in un mezzo sarà pari a $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon}}$ e quindi dipende unicamente dalla permittività elettrica caratteristica.

Prima di finire la parte di premesse è necessario ancora analizzare una caratteristica delle onde elettromagnetiche. Focalizziamoci unicamente sul campo

⁸In altri testi è anche chiamata costante dielettrica.

⁹Si veda l'appendice B per i valori di ε e μ in alcuni mezzi trasparenti

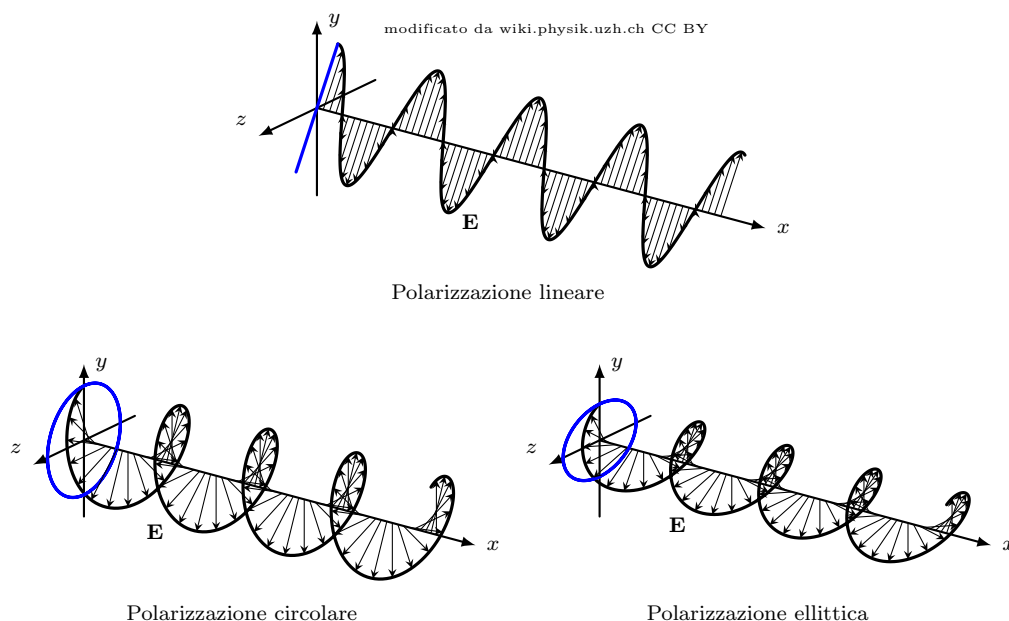


Figura 19: Tipologie di polarizzazioni. Le frecce indicano il vettore $\mathbf{E}$ in ogni punto a istante fissato. $\mathbf{B}$ non è riportato nei disegni, ma punto per punto è perpendicolare a $\mathbf{E}$

elettrico. Come abbiamo visto un'onda piana associa ad ogni punto dello spazio e ad ogni istante un *vettore* parallelo a $\mathbf{E}_0$. Non abbiamo però detto nulla riguardo a $\mathbf{E}_0$: l'idea sicuramente più intuitiva è che sia un vettore costante, ma nulla vieta che sia anche lui una funzione, in particolare può avere direzione variabile. Per avere un'idea intuitiva del fenomeno si può fare l'analogia con una corda alla quale invece di dare impulsi lungo una direzione, la facciamo ruotare velocemente.

Abbiamo così brevemente analizzato il fenomeno della polarizzazione delle onde: se $\mathbf{E}_0$ è costante in direzione e verso, l'onda si dice polarizzata *linearmente*, mentre se è costante in modulo ma la sua direzione varia uniformemente nel tempo, la polarizzazione è *circolare*, come nel caso della corda che viene fatta ruotare. Più generalmente essa può essere *ellittica* come quando la corda viene fatta ruotare dando impulsi diversi in due direzioni perpendicolari (Figura 19).

Quello che ci interessa è che un'onda con polarizzazione qualunque può essere riscritta come somma di due onde polarizzate linearmente in direzioni perpendicolari con fase e ampiezza diversa. Nel seguito quindi per esprimere un'onda generica la scomporremo in due onde con polarizzazione lineare e questo sarà sufficiente per analizzare qualunque caso.

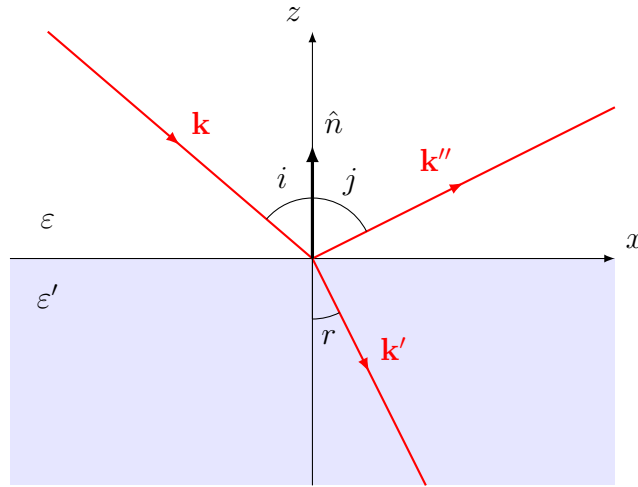


Figura 20: proiezione sul piano xz di direzione e verso dei vettori d'onda delle 3 onde piane considerate

16 Riflessione e rifrazione

Finita la parte introduttiva, ci proponiamo ora di studiare dal punto di vista della teoria elettromagnetica i fenomeni della riflessione e della rifrazione. I nostri scopi sono essenzialmente tre:

- Ridimostrare le leggi dell'ottica geometrica partendo dalle equazioni delle onde
- Trovare relazioni sulle intensità dei raggi riflessi e rifratti
- Parlare brevemente della polarizzazione dei raggi riflessi e dell'eventuale cambiamento di fase dell'onda

Supponiamo di avere un'onda piana in un mezzo con permittività ε diretta verso l'interfaccia piana con un materiale diverso (ε'). Dall'esperienza comune sappiamo in generale che esistono altre due onde piane: una rifratta e una riflessa. Introduciamo un sistema di coordinate con origine sull'interfaccia tra i due mezzi e scriviamo le equazioni per queste tre onde nella loro forma più generale (Figura 20):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) & \mathbf{B} &= \sqrt{\varepsilon} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{k} \\
\mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 \cos(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t + \phi') & \mathbf{B}' &= \sqrt{\varepsilon'} \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'}{k'} \\
\mathbf{E}'' &= \mathbf{E}''_0 \cos(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t + \phi'') & \mathbf{B}'' &= \sqrt{\varepsilon''} \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''}{k''}
\end{aligned}$$

È importante sottolineare che, a causa della linearità delle equazioni di Maxwell e della conseguente continuità (almeno in alcune direzioni, come abbiamo visto) dei campi elettromagnetici, abbiamo potuto affermare che anche l'onda rifratta e quella riflessa sono onde piane. Questa semplice considerazione permette di semplificare molto le nostre equazioni: sappiamo che nei pressi dell'interfaccia la componente parallela del campo elettrico è continua a qualunque t e qualunque $\mathbf{r}$ appartenente al piano (equazione 23), ovvero $E_{\parallel} + E''_{\parallel} = E'_{\parallel}$, ne segue facilmente che affinché la somma delle prime due onde sia una sinusoide in t , deve necessariamente essere che $\omega = \omega' = \omega''$, ovvero la frequenza è la stessa per tutte e tre le onde. Per l'equazione 25, inoltre, si ha $k'' = k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}$ e $k' = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu_0}$.

Poniamoci ora per semplicità a $t = 0$ e spostiamoci in una direzione qualunque del piano xy sull'interfaccia tra i due materiali, per l'equazione 23 sappiamo che

$$E_{0\parallel} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi) + E''_{0\parallel} \cos(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} + \phi'') = E'_{0\parallel} \cos(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} + \phi')$$

da cui nuovamente, usando un ragionamento analogo a quello precedentemente usato per ω , affinché la somma delle due onde sia una sinusoide in r si deve avere

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}$$

Ovvero le componenti x e y dei tre vettori d'onda sono le stesse.

Questa espressione porta con sé importantissimi risultati, in particolare la legge della riflessione e la legge di Snell:

- $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ e $\mathbf{k}''$ devono giacere sullo stesso piano, perpendicolare all'interfaccia tra i due materiali. Supponiamo infatti per assurdo che $\mathbf{k}$ non sia parallelo a $\mathbf{k}''$. Poiché possiamo sempre perdere un $\mathbf{r}$ sul piano perpendicolare a $\mathbf{k}$, ma $\mathbf{k}''$ non è parallelo a $\mathbf{k}$ necessariamente $\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} \neq 0$ da cui l'assurdo.

D'ora in poi l'asse x del nostro sistema di coordinate sarà posto lungo l'intersezione tra l'interfaccia dei due materiali e il piano formato dai vettori d'onda, chiamato *piano di incidenza*.

- In relazione alla figura 20 l'espressione precedente può essere riscritta esplicitando il prodotto scalare ottenendo

$$k \sin i = k'' \sin j = k' \sin r$$

$$\omega \sqrt{\varepsilon \mu_0} \sin i = \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0} \sin j = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu_0} \sin r$$

da cui

$$i = j$$

$$n \sin i = n' \sin r$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo pari a $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu_0}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$

17 Condizioni al bordo e polarizzazione

Fino ad ora abbiamo ottenuto nuovamente le leggi dell'ottica geometrica, quello che vogliamo fare ora è ricavare alcune informazioni che l'ottica geometrica non è in grado di analizzare come l'eventuale sfasamento delle onde rifratte e riflesse e l'intensità delle onde piane.

Riscriviamo le considerazioni e i risultati a cui siamo giunti precedentemente:

1. Attraverso l'interfaccia tra i due materiali la variazione della componente parallela alla superficie del campo elettrico è nulla (equazione 23)
2. La componente perpendicolare del campo elettrico riscalata con la permittività elettrica è costante attraverso l'interfaccia (equazione 24)
3. Il campo magnetico è continuo attraverso l'interfaccia (equazione 26)

In formule abbiamo rispettivamente:

$$E_{\parallel} + E''_{\parallel} = E'_{\parallel} \quad (27)$$

$$\varepsilon(E_{\perp} + E''_{\perp}) = \varepsilon' E'_{\perp} \quad (28)$$

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{k} + \sqrt{\varepsilon} \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''}{k''} = \sqrt{\varepsilon'} \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'}{k'} \quad (29)$$

Abbiamo precedentemente detto che ogni onda piana con polarizzazione qualunque può essere scomposta in somma di due onde piane polarizzate linearmente. Nel seguito faremo i conti analizzando separatamente due casi: una in cui la polarizzazione dell'onda incidente giace sul piano formato dai vettori d'onda (figura 21, polarizzazione P), l'altro in cui è polarizzata parallelamente alla superficie tra i due mezzi (figura 22, polarizzazione S).

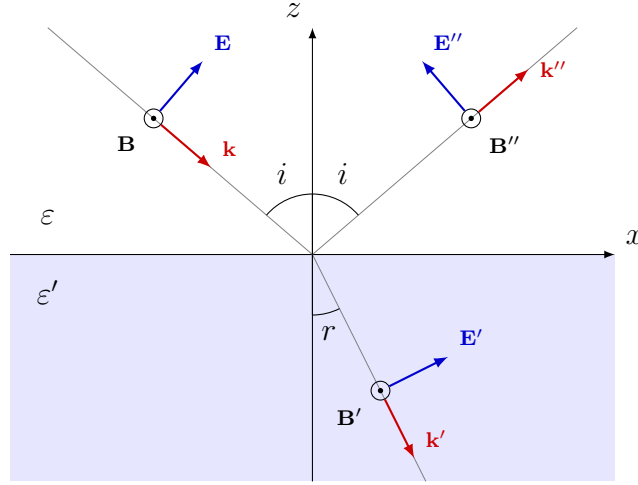


Figura 21: Polarizzazione nel piano di incidenza (P), i versi dei vettori sono quelli considerati nei calcoli.

Polarizzazione P

In questo caso, per trovare E' e E'' e quindi risolvere il problema, ci basta considerare le relazioni relative al campo elettrico. Utilizziamo infatti le relazioni vettoriali 27 e 28 trasformandole in equazioni scalari. Nel nostro caso diventano:

$$\begin{aligned} (E - E'') \cos i &= E' \cos r \\ \varepsilon(E + E'') \sin i &= \varepsilon' E' \sin r \end{aligned}$$

Possiamo ora mettere a sistema le due condizioni e ottenere facilmente che

$$\begin{cases} E' &= (E - E'') \frac{\cos i}{\cos r} \\ E'' &= \frac{\varepsilon' \cos i \sin r - \varepsilon \sin i \cos r}{\varepsilon' \cos i \sin r + \varepsilon \sin i \cos r} E \end{cases}$$

Ricordandosi che $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ e utilizzando la legge di Snell per eliminare la dipendenza dagli indici di rifrazione si ottiene infine:

$$E'' = \frac{\sin(i - r) \cos(i + r)}{\sin(i + r) \cos(i - r)} E = \frac{\tan(i - r)}{\tan(i + r)} E \quad E' = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i + r) \cos(i - r)} E \quad (30)$$

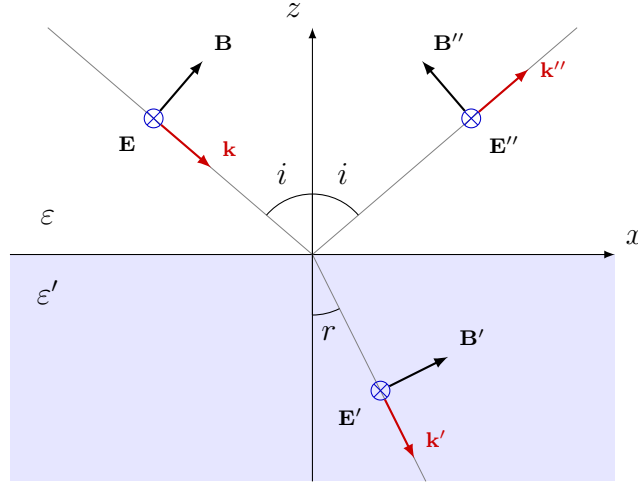


Figura 22: Polarizzazione perpendicolare al piano di incidenza (S), i versi dei vettori sono quelli considerati nei calcoli.

Polarizzazione S

In questo caso $E_{\perp} = E'_{\perp} = E''_{\perp} = 0$ e il campo elettrico è pari alla componente parallela del campo stesso. Utilizziamo le equazioni 27 e 29, che nel nostro caso diventano:

$$\begin{aligned} E + E'' &= E' \\ \varepsilon(\mathbf{k} \times \mathbf{E} + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}'') &= \varepsilon'(\mathbf{k}' \times \mathbf{E}') \end{aligned}$$

Proiettando i vettori dell'espressione precedente lungo x , e ricordandosi che $k\omega = v$, otteniamo:

$$\sqrt{\varepsilon}(E - E'') \cos i = \sqrt{\varepsilon'} E' \cos r$$

Possiamo ora mettere a sistema le due condizioni e ottenere facilmente che

$$\begin{cases} E'' &= E' - E \\ E' &= \frac{2 \cos i \sqrt{\varepsilon}}{\cos r \sqrt{\varepsilon'} + \cos i \sqrt{\varepsilon}} E \end{cases}$$

Ricordandosi che $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ si ottiene infine:

$$E'' = \frac{-\sin(i - r)}{\sin(i + r)} E \quad E' = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i + r)} E \quad (31)$$

18 Conclusioni

Alla luce dei risultati ottenuti analizziamo i fenomeni più interessanti:

Per entrambe le polarizzazioni abbiamo ottenuto che il rapporto tra il campo elettrico dell'onda rifratta e di quella riflessa rispetto al campo elettrico dell'onda incidente sono *costanti* che dipendono unicamente dalla geometria del sistema e dai materiali. Ma ricordiamo che E, E', E'' sono funzioni del tempo e dello spazio. Ricordiamo per esempio che $E = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$. Abbiamo già osservato che istante per istante e in ogni punto del piano xy l'argomento del coseno per le tre onde dipendente dal tempo e quello dipendente dallo spazio hanno lo stesso valore. Allora affinché due sinusoidi siano costanti in rapporto è necessario che ϕ, ϕ', ϕ'' siano uguali tra di loro *oppure* sfasati di π .

Si vede che $\frac{E'}{E} > 0$ sempre, per entrambe le polarizzazioni: il raggio rifratto non cambia mai fase. Al contrario, nel caso della polarizzazione S si ha che $\frac{E''}{E} < 0$ quando $i > r$ ovvero quando $n' > n$: quando un'onda viene riflessa da una superficie con indice di rifrazione maggiore di quello in cui sta viaggiando la sua fase varia di π . Più complessa è la polarizzazione P , ma almeno nel caso di incidenza normale (in generale finché $i + r < \frac{\pi}{2}$) la situazione è del tutto analoga alla polarizzazione S , facendo attenzione che per come abbiamo definito i vettori nel disegno¹⁰, l'onda cambia fase quando $\frac{E''}{E} > 0$.

Il caso della riflessione totale analizzato nel capitolo dell'ottica geometrica non è l'unico caso in cui una delle due onde, quella riflessa o quella rifratta, manca: nella polarizzazione P si osserva che il rapporto $\frac{E''}{E}$ va a zero quando $i + r = \pi/2$ ovvero quando $\tan i = \frac{n'}{n}$. In questo caso solo la luce polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza (S) viene in parte riflessa, e l'angolo i è detto *angolo di Brewster*

L'angolo di Brewster è solamente il caso limite di un fenomeno ben più generale: se l'onda incidente non è polarizzata ovvero è somma di molte onde con diversa polarizzazione, allora l'onda riflessa sarà sempre parzialmente polarizzata in modo S . Per notare questo fatto è sufficiente fare un grafico dell'intensità dell'onda riflessa nel caso delle due polarizzazioni al variare dell'angolo di incidenza. Un esempio di tale grafico viene mostrato in Fig. 23 con $n = 1$ e $n' = 1.5$.

¹⁰In generale l'onda riflessa si dice non cambiare fase quando la componente di $\mathbf{E}$ parallela alla superficie tra i due mezzi non cambia verso, cambia fase quando ha verso opposto.

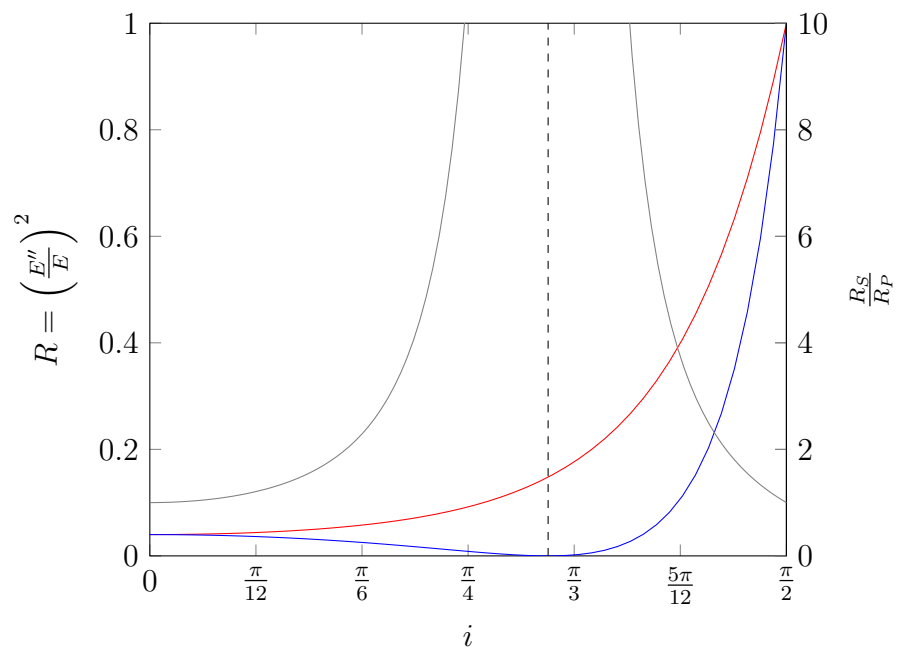


Figura 23: Rapporto R tra l'intensità dell'onda riflessa e di quella incidente per polarizzazione P , in blu, e S , in rosso. In grigio è riportato il rapporto tra le due funzioni. Come si vede è sempre maggiore di uno e diverge per l'angolo di Brewster, corrispondente alla linea tratteggiata

Riportiamo ora alcuni concetti teorici utilizzati nella lezione e alcune curiosità.

A Equazioni di Maxwell e onde

Ricordiamo brevemente la forma integrale delle equazioni di Maxwell nel vuoto.

$$\begin{aligned}
 \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} && \text{Gauss } \mathbf{E} \\
 \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t} && \text{Circuitazione } \mathbf{E} \\
 \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA &= 0 && \text{Gauss } \mathbf{B} \\
 \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I_S + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{E})}{\partial t} && \text{Circuitazione } \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

Nel caso di assenza di sorgenti le equazioni possono essere riarrangiate a formare la cosiddetta equazione delle onde che nel caso unidimensionale a la forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} \quad (32)$$

e le cui onde piane unidimensionali ne sono soluzione (basta verificare per facile sostituzione). Analogamente si può costruire una versione tridimensionale delle equazioni delle onde in cui nuovamente le onde piane, questa volta tridimensionali, ne sono soluzione.

Nella trattazione delle onde piane abbiamo subito imposto che la variazione della componente parallela alla superficie di E fosse nulla e questo deriva dalle equazioni di Maxwell nel caso statico. Come abbiamo quindi potuto affermare che questa supposizione fosse valida anche per onde elettromagnetiche in cui per natura i campi sono variabili nel tempo?

Consideriamo un'onda elettromagnetica piana con lunghezza d'onda λ incidente sulla superficie tra due dielettrici. Prendiamo una curva γ rettangolare come in figura 24. Vogliamo prendere questa curva con due caratteristiche: innanzitutto la lunghezza dei tratti paralleli alla superficie deve essere sufficientemente piccola affinché il campo elettrico (e di conseguenza quello magnetico) siano considerabili come uniformi. Prendiamo perciò questa lunghezza pari

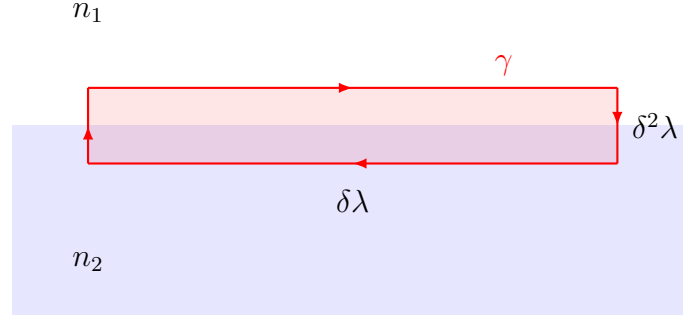


Figura 24: Curva γ . La superficie colorata di rosso è la superficie attraverso la quale si calcola il flusso di $\mathbf{B}$.

a $\delta\lambda$ dove $\delta \ll 1$. Inoltre la lunghezza dei tratti perpendicolari alla superficie li prendiamo molto più piccoli di quelli orizzontali. Diciamo $\delta^2\lambda$. B lo possiamo considerare uniforme nei pressi della curva e il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso il rettangolino delimitato da γ è perciò semplicemente dell'ordine di $\Phi_S(\mathbf{B}) \leq \delta\lambda\delta^2\lambda B(t) = \delta^3\lambda^2 B(t)$, dove $B(t)$ è il modulo di $\mathbf{B}$ che dipende dal tempo. Se consideriamo le onde piane sinusoidali abbiamo che

$$\left| \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t} \right| \leq |\delta^3\lambda^2 B'(t)| \leq \delta^3\lambda^2 \omega B_0$$

dove B_0 è il modulo dell'ampiezza di $\mathbf{B}$. Ricordandosi che $E_0 = B_0 v$ e $\omega = vk = \frac{2\pi v}{\lambda}$, si ottiene infine che

$$\left| \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right| = \left| \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t} \right| \leq 2\pi\delta^3\lambda E_0$$

Poichè la circuitazione di $\mathbf{E}$ al primo ordine in λ sarà proporzionale a $\Delta E_{\parallel} \delta\lambda$, si ottiene che la discontinuità del campo attraverso la superficie sarà al secondo ordine rispetto all'intensità del campo. Possiamo dunque concludere che la componente parallela di $\mathbf{E}$ è continua.

B Permeabilità e permittività materiali

Per spiegare il perchè abbiamo imposto la permeabilità magnetica pari a μ_0 , riportiamo una breve tabella con permeabilità magnetica relativa μ_r e permittività elettrica relativa ε_r per alcuni materiali trasparenti di uso quotidiano.

Ricordiamo che per il vuoto $\mu_r = \varepsilon_r = 1$.

Materiale	ε_r	μ_r
Aria	1.00059	1.00000037
Acqua pura	81	0.999992
Vetro	6 – 8	0.999987
Plexiglass	3.4	0.999991

Esercizi

I IPhO 1984/1 - ridotto

Assumi di essere in un deserto ampio e piatto. Ad una distanza di 250 m osservi quella che sembra una superficie d'acqua. Trova la temperatura dell'aria vicino alla superficie del deserto assumendo che i tuoi occhi si trovino ad una altezza di 1.60 m. L'indice di rifrazione dell'aria a 15 °C e a pressione standard 101.3 kPa è 1.000 276. La temperatura dell'aria ad altezza superiore al metro è assunta costante e uguale a 30 °C, la pressione è supposta standard e l'indice di rifrazione è tale che $n - 1$ è direttamente proporzionale alla densità dell'aria.

II IPhO 1995/2

La velocità di propagazione del suono nell'oceano varia con profondità, temperatura e salinità. Se z è l'asse verticale, in un modello in cui la velocità ha un minimo ad una certa profondità, la velocità del suono è $c = c_0 + b|z|$ (c_0 e b sono costanti), in cui si è fissato $z = 0$ in corrispondenza del minimo di c . La superficie dell'oceano è a $z = z_s$ e il fondale (assunto orizzontale) è a $z = -z_b$. Una sorgente è posta a $(x, z) = (0, 0)$ ed emette un "raggio sonoro" nel piano $x - z$ che forma un angolo θ_0 con l'asse z . A causa della variazione di c , il raggio verrà rifratto.

1. Mostrare che la traiettoria del raggio forma un arco di circonferenza di raggio $R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}$, con $0 < \theta_0 < \pi/2$
2. Trovare il più piccolo valore di θ_0 , per raggi diretti verso l'alto, per cui il raggio si trasmetta senza riflettersi sulla superficie dell'oceano, in funzione di z_s , c_0 e b
3. Un ricevitore sonoro è posizionato a $(x, z) = (X, 0)$. Trovare i valori di θ_0 per cui il raggio emesso dalla sorgente arrivi al ricevitore. Si assuma che z_s e z_b siano sufficientemente grandi da rimuovere la possibilità che il raggio si rifletta sulla superficie o sul fondale dell'oceano
4. Calcolare i quattro più piccoli valori di θ_0 che permettono al raggio di raggiungere il ricevitore nel caso in cui
 - $X = 10\,000$ m
 - $c_0 = 1500$ ms⁻¹
 - $b = 0.020\,00$ s⁻¹

5. Per il più *piccolo* valore di θ_0 trovato al punto 3, trovare il tempo impiegato dal raggio per andare dalla sorgente al ricevitore. Calcolarne il valore numerico usando i valori dati al punto 4. Può essere utile il seguente risultato:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \tan \frac{x}{2} + \text{cost}$$

Calcolare il tempo impiegato da un raggio che raggiunga il ricevitore muovendosi lungo $z = 0$. Se vengono emessi insieme, quale dei due raggi arriverà prima?

III APhO 2007/2A

Per materiali standard μ_r e ε_r sono entrambi positivi e i fenomeni della rifrazione soddisfano la legge di Snell. Nel 1964 Vaselago provò rigorosamente che un materiale con entrambi μ_r e ε_r negativi avrebbe mostrato molti fenomeni ottici incredibili. Nel XXI secolo alcuni materiali di questo tipo furono studiati con successo in laboratorio. Per ottenere qualche conoscenza base su questi materiali deve essere noto che quando un'onda elettromagnetica si propaga al loro interno per una distanza Δ la fase dell'onda decresce di $\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} k \Delta$, nei materiali usuali la fase dell'onda sarebbe aumentata invece che diminuita della stessa quantità. k è il vettore d'onda e qua la radice positiva è l'unica considerata quando si effettuano calcoli con radici quadrate. In tutte le domande assumi che permittività e permeabilità relative dell'aria siano uguali a 1.

1. (a) Assumendo che un raggio di luce incida dall'aria sulla superficie di un insolito materiale dalle proprietà sopra descritte, prova che la direzione del raggio rifratto della figura 25 è sensato.

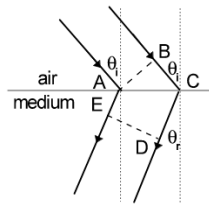


Figura 25

- (b) Trova la relazione tra l'angolo rifratto θ_r e quello di incidenza θ_i nel caso precedente

- (c) Assumendo ora che il raggio arrivi dal materiale insolito e incida sulla superficie che lo separa dall'aria determinare che la direzione dei raggi della figura 25 è sensata.

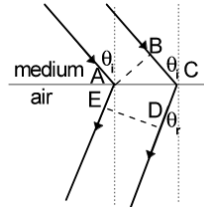


Figura 26

- (d) Mostra la relazione tra angolo di incidenza e di rifrazione nel caso precedente
2. Una lastra di spessore d di materiale insolito con $\epsilon_r = \mu_r = -1$ è piazzato in aria con una sorgente di luce separata da una distanza $\frac{3}{4}d$ dalla superficie della lastra. Disegna accuratamente la traiettoria dei tre raggi segnati nel disegno 27

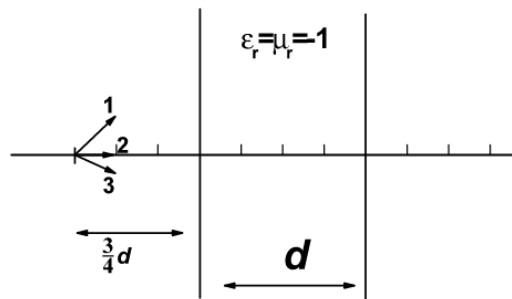


Figura 27

3. Come in figura 28 una cavità di risonanza a piani paralleli separati da una distanza d è formata da un piano completamente riflettente (1) e da uno parzialmente riflettente (2). Supponi che una sorgente di onde piane sia posizionata vicino al piano 1, allora queste onde sono riflesse in modo multiplo dai due piani. Se le onde che vengono *trasmesse* dal piano 2 sono in fase allora daranno vita a interferenza costruttiva. Supponiamo che le onde guadagnino una fase di π ad ogni riflessione contro ognuno dei due piani. Ora inseriamo uno stato di spessore $0.4d$

di materiale insolito con $\varepsilon_r = \mu_r = -0.5$ parallelamente ai due piani. Il resto dello spazio è riempito di aria. consideriamo unicammete la situazione in cui le onde siano perpendicolari ai due piani. Calcola tutte le lunghezze d'onde che danno vita a interferenza costruttiva all'uscita dal piano 2.

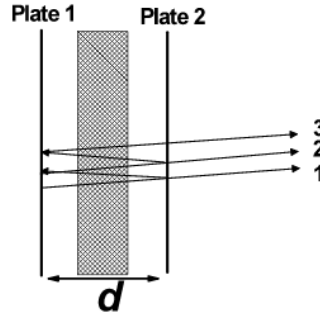


Figura 28

4. Un cilindro infinito di raggio R di materiale insolito con $\varepsilon_r = \mu_r = -1$ è posto in aria. La sua sezione nel piano XOY è mostrato in figura 29. Supponi una sorgente laser posta sull'asse delle ascisse con coordinata x emetta un raggio laser lungo la direzione Y . Trova il range del valore di x tale per cui il laser *non* può raggiungere il piano ricevente infinito posto dall'altro lato del cilindro.

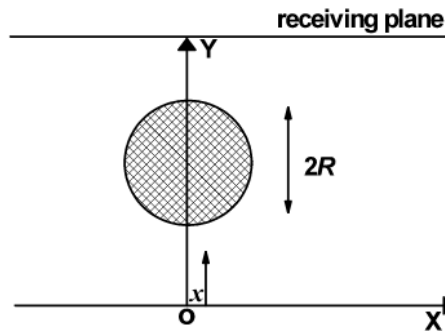


Figura 29

IV Senigallia 2017/3¹¹

La cosiddetta lente gravitazionale è un fenomeno astronomico previsto dalla teoria della relatività generale, dovuto alla deflessione della luce proveniente da una sorgente lontana nell'attraversamento di un campo gravitazionale molto intenso. Tale fenomeno si può descrivere in forma semplificata col seguente diagramma nel quale, per chiarezza, gli angoli sono enormemente amplificati e il percorso curvilineo della luce è approssimato con due tratti rettilinei, come se la deviazione avvenisse in un solo punto. In figura H è la posizione dell'osservatore, θ l'angolo sotto cui si osserva l'anello di luce e δ l'angolo di deflessione dovuta al campo gravitazionale di A ; questo, espresso in termini della massa M della galassia A e della distanza $R = AD$, si scrive:

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 R} \quad (33)$$

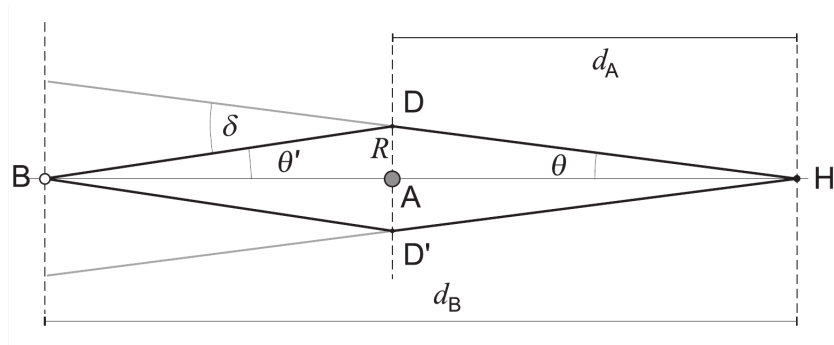


Figura 30: Diagramma della lente gravitazionale

1. Esprimere la distanza R in funzione della massa M e delle distanze d_A e d_B delle due galassie, indicate in figura (Ricordare la relazione tra gli angoli δ , θ e θ' e tenere presente che le misure di questi angoli sono sempre dell'ordine dei secondi d'arco).
2. Esprimere l'angolo di deflessione δ in funzione delle stesse grandezze.
3. Mostrare che la massa M della galassia-lente A può essere ricavata se sono note le distanze d_A e d_B e la misura angolare (θ) del raggio dell'anello di Einstein.

¹¹Il testo è stato parzialmente modificato e l'immagine è stata presa dal testo originale

4. Fissata la distanza d_A e posto $d_B = kd_A$, determinare per quale valore di k la misura angolare dell'anello visto da H è massima e trovare la corrispondente espressione di $\theta_{\max}$.

Si supponga che la galassia A sia a forma di disco schiacciato e che sia su un piano perpendicolare alla linea di vista. Perché l'anello possa essere osservato occorre che la misura angolare del suo raggio sia abbastanza maggiore dell'apertura angolare sotto cui si osserva il raggio R_A della galassia A , ovvero che sia almeno $\theta > 2\frac{R_A}{d_A}$. Questo determina una relazione tra la distanza della galassia e la sua "compattezza", espressa in termini di densità superficiale $\sigma = \frac{M}{\pi R_A^2}$.

5. Tenuto conto che la massima densità osservata per una galassia compatta è dell'ordine di $\sigma_0 = 200 \text{ kg m}^{-2}$, trovare la minima distanza d_A a cui una galassia compatta può generare un anello di Einstein che sia almeno il doppio delle dimensioni apparenti della galassia. Esprimere il risultato in megaparsec ($1 \text{ Mpc} = 3.08568 \times 10^{22} \text{ m}$).

Volendo esaminare in che senso si può parlare di lente gravitazionale si può confrontare l'andamento della deflessione δ in funzione di R , con l'analoga relazione per la deviazione prodotta da una sottile lente ottica convergente di focale f , in funzione della distanza R tra l'asse ottico e il punto di intersezione del raggio con la lente.

6. Determinare la funzione $\delta(R)$ per una lente ottica quando sorgente e immagine sono a distanze p e q dalla lente e gli angoli sono piccoli (ovvero per $p, q \gg R$).

Posto adesso $q = d_A$ e $p = d_B - d_A$, si consideri il cono formato dai raggi di luce che incidono sulla lente gravitazionale ad una distanza R dall'asse ottico.

7. Si dimostri che, limitatamente all'insieme dei raggi di questo cono, la lente gravitazionale equivale ad una lente ottica con una distanza focale F dipendente dal parametro R (oltre che dalle altre costanti) e si trovi l'espressione di $F(R)$. Si mostri con uno schizzo il differente comportamento di una lente gravitazionale rispetto ad una lente ottica, tracciando – in entrambi i casi – tre raggi relativi a tre coni con $R = r, 2r, 3r$.
8. Nel caso particolare in cui la galassia B possa essere considerata a distanza infinita, mostrare che per l'osservatore H , la luce di quella galassia appare provenire da una sorgente a forma di anello, posto a distanza D da H : determinare tale distanza in termini di d_A .

V Quarto di cilindro

Un cilindro di altezza h , raggio R e indice di rifrazione n viene tagliato in quattro parti uguali, con due tagli perpendicolari alle basi. Una di queste quattro parti viene poggiata, su un piano, in modo che la superficie di contatto col piano sia un rettangolo di lati h e R . Un fascio luminoso, uniforme e parallelo al piano, incide sulla superficie piatta ortogonale al piano e alle due basi. Quali zone del piano risultano illuminate?

VI Doppietto di lenti

Si prendano due lenti sottili convergenti e si facciano coincidere i loro assi ottici. Si supponga che le lenti siano a distanza d e abbiano lunghezze focali pari a f_1 e f_2 . Si assuma inoltre che il sistema ottico sia equivalente a una lente (ovviamente con delle limitazioni, la sorgente non potrà trovarsi tra le due lenti). Trovare la lunghezza focale e la posizione della lente equivalente. Le formule trovate sono valide anche se le lenti iniziali non sono convergenti?

VII Reticolo di diffrazione

Un reticolo di diffrazione non è altro che uno schermo con n fenditure per unità di lunghezza. Consideriamo un sistema come l'esperimento di Young, dove un reticolo di diffrazione viene investito perpendicolarmente da una luce polarizzata linearmente parallelamente alle fenditure. Oltre il reticolo, a distanza molto grande rispetto alla lunghezza d'onda λ della luce utilizzata ed alle dimensioni del reticolo, c'è uno schermo. La larghezza del reticolo di diffrazione è d

1. trovare le posizioni angolari dei massimi principali (quelli d'intensità massima assoluta) e dei minimi sullo schermo.

Un reticolo di diffrazione può essere usato per separare la luce non monocromatica nelle varie onde di cui è composta in base alla loro frequenza. Infatti onde a frequenze diverse formano massimi sullo schermo in posizioni diverse. Definisco risoluzione del reticolo di diffrazione la sua capacità di distinguere due onde di lunghezza d'onda simile. Tale capacità è quantificata tramite il criterio di Rayleigh come $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ dove con $\Delta\lambda$ si intende la differenza di lunghezza d'onda che deve intercorrere tra λ e λ' in modo tale che l'onda con λ' assuma il primo massimo principale nel punto coincidente al minimo successivo al primo massimo principale dell'onda con λ

2. trovare la risoluzione di un reticolo di diffrazione, notando in particolare come non dipenda dalla lunghezza d'onda. Trovare la risoluzione anche

nel caso in cui venisse definita con $\Delta\lambda$ riferita all'n-esimo massimo principale.

Immaginiamo ora che la luce investa il reticolo con un angolo di incidenza δ , ma sempre rimanendo nel piano perpendicolare alle fenditure.

3. trovare le posizioni angolari dei minimi e dei massimi principali sullo schermo

Immaginiamo ora di porre uno schermo anche dal lato del reticolo da cui questo viene investito dalla luce, sempre a grande distanza rispetto a λ ed alle dimensioni del reticolo.

4. descrivete qualitativamente e quantitativamente cosa vi aspettate di vedere su questo schermo, sempre nel caso in cui l'incidenza della luce sul reticolo sia δ .

Soluzioni

I IPhO 1984/1 - ridotto

Il fenomeno osservato è dovuto alla riflessione totale in uno strato d'aria calda quando il raggio di luce proveniente dal cielo diventa parallelo alla superficie del deserto.

Poichè la densità dell'aria è inversamente proporzionale alla temperatura T a pressione fissata, si ha:

$$n(T) = 1 + \alpha * \rho = 1 + \beta/T$$

Dal valore dato dell'indice di rifrazione si ottiene

$$\beta = 0.0795 \text{ K}$$

Per avere riflessione totale è necessario che $n_{30} \sin \alpha = n_T$ dove n_{30} è l'indice di rifrazione a $T_0 = 303 \text{ K}$, n_T quella all'altezza di inversione e α l'angolo con cui il raggio arriva all'occhio dell'osservatore. Riscrivendo l'espressione precedente si ottiene

$$\left(1 + \frac{\beta}{T_0}\right) \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}} = 1 + \frac{\beta}{T}$$

dove $L = 250 \text{ m}$ $h = 1.6 \text{ m}$. Da cui si ottiene, sfruttando che $h \ll L$ che

$$T = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{T_0}{\beta}\right) \frac{L}{\sqrt{1+h^2/L^2}} - 1 + \frac{T_0}{\beta}} \approx T_0 \left(1 + \frac{h^2 T_0}{2\beta L}\right) = 328 \text{ K}$$

II IPhO 1995/2

1. Si consideri un pezzetto ds di traiettoria come localmente circolare di raggio R che sottende un angolo $d\theta$, allora $R = \frac{ds}{d\theta}$.
Dalla legge di Snell $c_0 \sin \theta = c \sin \theta_0$ per una piccola variazione di velocità dc si ottiene

$$\cos \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{c_0} dc$$

Supponendo senza perdita di generalità che il raggio sia diretto verso l'alto $dc = b dz$ da cui

$$dz = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} \cos \theta d\theta$$

Usando il fatto che $dz = ds \cos \theta_0$ si ottiene infine che

$$\frac{ds}{d\theta} = R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}$$

che è una costante perciò valida per tutta la traiettoria (fino a che z rimane positivo)

2. Poichè la coordinata z del centro della circonferenza della traiettoria vale $-R \cos \theta_0$ si ha che affinché il raggio sfiori la superficie dell'oceano senza uscire o riflettersi si deve avere che

$$z_s = R - R \sin \theta_0 = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} (1 - \sin \theta_0)$$

da cui

$$\theta_0 = \arcsin \left(\frac{c_0}{bz_s + c_0} \right)$$

3. Supponiamo per semplicità $X < 2R$, nel caso generale semplicemente alcune delle traiettorie non sono percorribili. La traiettoria più semplice è un arco di circonferenza che congiunge la sorgente e il ricevitore. In questo caso $X = 2R \cos \theta_0$ da cui

$$\cot \theta_0 = \frac{bX}{2c_0}$$

La possibilità successiva è che la traiettoria sia la giunzione di due archi di circonferenza con concavità opposta uno a $z > 0$ l'altro a $z < 0$. In questo caso si ottiene

$$\cot \theta_0 = \frac{bX}{4c_0}$$

In generale si ha per ogni $m = 1, 2, 3, \dots$ si ha una traiettoria che arriva al ricevitore quando

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{2nc_0}{bX}\right)$$

4. Con i valori dati, i quattro più piccoli valori di θ_0 sono

n	$\theta_0[^\circ]$
1	86.19
2	88.09
3	88.73
4	89.04

5. La traiettoria associata al più piccolo angolo di lancio consiste in un singolo arco che congiunge sorgente e ricevitore. Da $c = \frac{ds}{dt}$ otteniamo

$$T = 2 \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{R d\theta}{c} = \frac{2}{b} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta} = -\frac{2}{b} \ln \tan \frac{\theta_0}{2}$$

Con il primo dei risultati del punto precedente si ottiene

$$T = 6.6546 \text{ s}$$

mentre per la traiettoria lineare

$$T' = \frac{X}{c_0} = 6.6666 \text{ s}$$

Il raggio che compie la traiettoria lungo l'arco di circonferenza arriva prima di quello rettilineo

III APhO 2007/2A

1. (a) Dall'immagine del testo si vede che A e B fanno parte dello stesso fronte d'onda così come E e D , allora detta ϕ_{XY} la differenza di fase dell'onda tra X e Y si ha

$$\phi_{AE} = \phi_{BC} + \phi_{CD}$$

dalle informazioni date nel testo questa uguaglianza può essere riscritta come

$$-\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} k d_{AE} = k d_{BC} - \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} k d_{CD}$$

Poiché $d_{BC} > 0$ e $\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} > 0$ si ottiene

$$d_{AE} < d_{CD}$$

perciò il disegno dei raggi dato nel testo è possibile.

- (b) Dalla figura l'angolo di incidenza θ_i e di rifrazione θ_r soddisfano $d_{CD} = d_{AC} \sin \theta_i$ e $d_{CB} - d_{AE} = d_{AC} \sin \theta_r$ da cui

$$\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \sin \theta_r = \sin \theta_i$$

- (c) Analogamente alla prima domanda,

$$\phi_{AE} = \phi_{BC} + \phi_{CD}$$

da cui

$$kd_{AE} = -\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} kd_{BC} + kd_{CD}$$

Poiché $d_{BC} > 0$ e $\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} > 0$ si ottiene

$$d_{AE} < d_{CD}$$

perciò il disegno dei raggi dato nel testo è possibile.

- (d) Dalla figura del testo $d_{BC} = d_{AC} \sin \theta_i$ e $d_{CD} - d_{AE} = d_{AC} \sin \theta_r$ da cui

$$\sin \theta_r = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \sin \theta_i$$

2. I raggi sono rifratti negativamente su entrambe le interfacce e gli angoli di rifrazione sono uguali a quelli di incidenza. Inoltre non ci sono raggi riflessi. All'interno del mezzo i raggi convergono nel punto (prima immagine) esattamente simmetrico alla sorgente rispetto al prima interfaccia. Nuovamente i raggi convergono fuori dal mezzo dalla parte opposta della sorgente nel punto simmetrico della prima immagine rispetto alla seconda interfaccia.
3. La differenza di fase tra due onde che si trasmettono attraverso l'interfaccia destra è

$$\Delta\phi = 2k(d - 0.4d) - 2 \cdot 0.5k \cdot 0.4d + 2\pi$$

dove il primo addendo è la differenza di fase accumulata in aria, il secondo quella nel mezzo e il terzo è dovuto alla doppia riflessione. Prendendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ la condizione di risonanza si ha quando

$$0.8 \frac{2\pi}{\lambda} d + 2\pi = m \cdot 2\pi$$

da cui

$$\lambda = \frac{0.8d}{m'}$$

con $m' = 1, 2, 3, \dots$

4. Chiamando θ_i l'angolo di ingresso nel cilindro, θ_r quello rifratto θ'_i l'angolo in uscita dal cilindro, θ'_r il corrispondente angolo rifratto, si osserva che

$$\theta_i = \theta_r = \theta'_i = \theta'_r$$

La deviazione totale del raggio è perciò $4\theta_i$ da cui il raggio non può raggiungere il piano di raccolta solo se

$$\frac{\pi}{8} < \theta_i < 3\frac{\pi}{8}$$

Dalla monotonia del seno nell'intervallo di interesse e notando che $\sin \theta_i = \frac{x}{R}$ si ottiene

$$\sin \frac{\pi}{8} < \frac{x}{R} < \sin \frac{3\pi}{8}$$

da cui sfruttando la simmetria del cilindro

$$R \sin \frac{\pi}{8} < |x| < R \sin \frac{3\pi}{8}$$

IV Senigallia 2017/3

1. Si noti per prima cosa che gli angoli sono piccoli, quindi è possibile approssimarli con la propria tangente. Ne consegue che:

$$\theta = \frac{R}{d_A}$$

$$\theta' = \frac{R}{d_B - d_A}$$

Inoltre dal disegno si nota facilmente che:

$$\delta = \theta + \theta'$$

Ne consegue che possiamo unire queste tre equazioni alla formula per δ ottenendo:

$$\frac{4GM}{c^2 R} = R \left(\frac{1}{d_A} + \frac{1}{d_B - d_A} \right)$$

$$R = \sqrt{\frac{4GMd_A(d_B - d_A)}{c^2 d_B}}$$

2. Questo punto chiede sostanzialmente di riprendere l'equazione data nel testo e sostituire R con il valore trovato sopra:

$$\delta = \sqrt{\frac{4GMd_B}{c^2d_A(d_B - d_A)}}$$

3. Dalla formula riportata sopra per θ posso trovare R in funzione dei dati:

$$R = \theta d_A$$

A questo punto basta sostituirla nella formula trovata al primo punto in cui l'unica incognita è M :

$$\theta^2 d_A^2 = \frac{4GMd_A(d_B - d_A)}{c^2 d_B}$$

$$M = \frac{\theta^2 d_A c^2 d_B}{4G(d_B - d_A)}$$

4. Poiché si vuole massimizzare θ , è comodo riscrivere l'equazione del testo come:

$$\theta + \theta' = \frac{4GM}{c^2 \theta d_A}$$

Da cui si deduce che a parità di M e d_A , θ' è decrescente in θ . Il θ massimo si avrà dunque quando θ' è minimo, ovvero quando è nullo. Questo caso corrisponde chiaramente a $k = \infty$. Per trovare θ_{MAX} sono sufficienti le equazioni già scritte:

$$\theta = \frac{R}{d_A} = \sqrt{\frac{4GM(d_B - d_A)}{c^2 d_B d_A}} = \sqrt{\frac{4GM(k - 1)}{c^2 k d_A}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2 d_A} \frac{k - 1}{k}}$$

Da cui si ricava chiaramente che:

$$\theta_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2 d_A}}$$

5. Prendiamo $R = \alpha R_A$ con $\alpha \geq 2$. La massa della galassia è:

$$M = \pi R_A^2 \sigma_0$$

Inoltre si ha che:

$$\theta = \frac{R}{d_A} = \alpha \frac{R_A}{d_A}$$

Del resto si ha che:

$$\alpha \frac{R_A}{d_A} = \theta \leq \theta_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2 d_A}} = \sqrt{\frac{4G\pi R_A^2 \sigma_0}{c^2 d_A}}$$

Da cui quindi:

$$2 \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{4G\pi \sigma_0 d_A}{c^2}}$$

E quindi la condizione cercata è:

$$d_A \geq \frac{c^2}{G\pi \sigma_0}$$

Da cui il minimo valore di d_A è proprio $\frac{c^2}{G\pi \sigma_0} = 69.5 \text{ Mpc}$.

6. Come avviene per la lente gravitazionale, δ può essere espresso come somma di due angoli (in maniera totalmente analoga si approssimano anche essi con le loro tangenti):

$$\delta = \frac{R}{p} + \frac{R}{q}$$

Del resto essendo una lente sottile si ha:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Che unita alla precedente dà:

$$\delta = \frac{R}{f}$$

7. Imponendo l'uguaglianza tra i δ si ottiene che:

$$\frac{R}{F} = \frac{4GM}{c^2 R}$$

Da cui:

$$F(R) = \frac{c^2 R^2}{4GM}$$

L'immagine richiesta è riportata di seguito (Figura 31). Per disegnarla è sufficiente fissare dei valori numerici per le variabili (ed eventualmente anche per le costanti universali), infatti ciò che conta è il rapporto tra le distanze nel disegno, non tanto il loro valore.

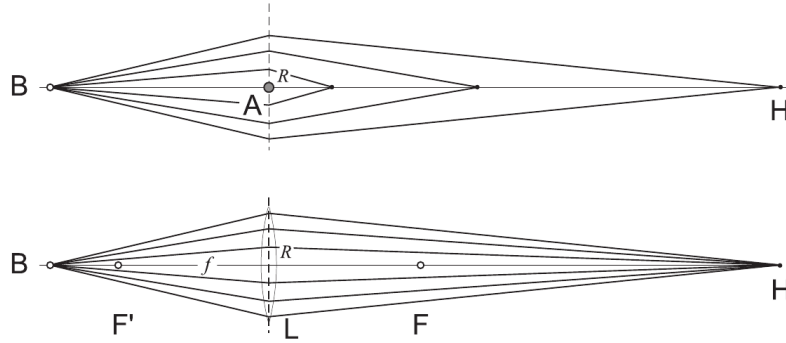


Figura 31: Lenti a confronto: sopra quella gravitazionale, sotto quella sottile (Immagine presa dalla soluzione ufficiale scritta dal gruppo olimpiadi della fisica: AIF, Progetto Olimpiadi)

8. Per prima cosa, se B va a distanza infinita, si ottiene che $\theta' = 0$, da cui:

$$\frac{4GM}{c^2 R} = \delta = \theta + \theta' = \theta = \frac{R}{d_A}$$

Che riscritta diventa:

$$R^2 = \frac{4GM}{c^2} d_A$$

I raggi che arrivano all'osservatore sembrano provenire da un anello, dunque questa è un'immagine virtuale e i raggi che provengono da essa sono disposti in maniera tale che spostandosi di poco sia possibile capire la sua effettiva.

Ora, se si aumenta di $dR \ll R$ la quantità R , ci si aspetta un aumento di $dq \ll d_A$ della quantità d_A . La relazione sopra ci dice che:

$$(R + dR)^2 \approx R^2 + 2RdR = \frac{4GM}{c^2} (d_A + dq)$$

Cioè:

$$dR = \frac{2GM}{Rc^2} dq$$

Come si nota dalla figura 32, il teorema di Talete afferma che:

$$\frac{D}{d_A} = \frac{dR'}{dR}$$

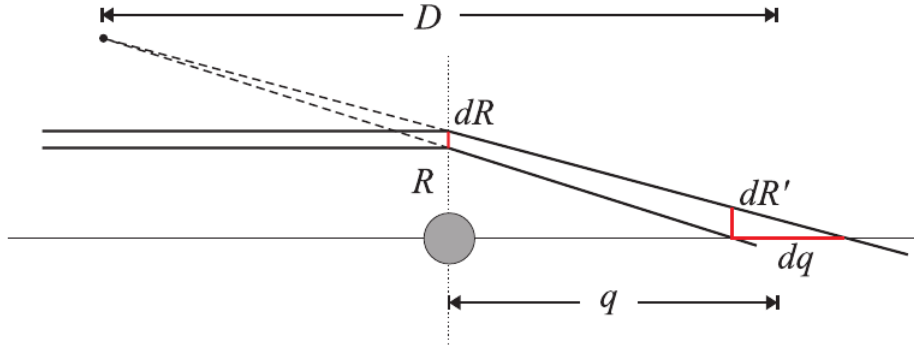


Figura 32: Immagine rappresentativa della soluzione del punto 8 (Immagine presa dalla soluzione ufficiale scritta dal gruppo olimpiadi della fisica: AIF, Progetto Olimpiadi)

Del resto però si ha:

$$\frac{dR'}{dq} = \tan \theta \approx \theta = \delta = \frac{4GM}{c^2 R}$$

Quindi sostituendo si ricava:

$$\frac{D}{d_A} = \frac{dq}{dR} \frac{4GM}{c^2 R} = \frac{c^2 R}{2GM} \frac{4GM}{c^2 R} = 2$$

In conclusione:

$$D = 2d_A$$

Ciò significa che effettivamente l'immagine si forma a una distanza dall'osservatore pari al doppio della distanza tra osservatore e galassia.

V Quarto di cilindro

Si nota abbastanza facilmente che i raggi incidenti non cambiano piano in seguito alle rifrazioni e riflessioni che subiscono, dato che le rette ortogonali alle superficie nei punti in cui incide il raggio giacciono tutte nello stesso piano ortogonale alla faccia verticale del quarto di cilindro. Ne consegue che il problema può essere considerato in sezione.

I raggi passano tutti senza problemi la faccia verticale in quanto ci incidono ortogonalmente; una parte della luce viene anche riflessa, ma resta parallela al piano e dunque non contribuisce alla sua illuminazione.

I raggi che entrano nel cilindro possono essere riflessi totalmente dalla superficie curva o avere anche un raggio rifratto uscente.

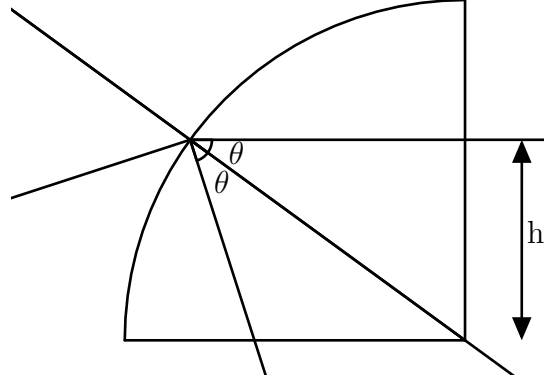


Figura 33: Disegno schematico del quarto di cilindro: da destra arriva un raggio orizzontale e si formano due raggi: uno riflesso e uno rifratto

Per quanto riguarda quelli riflessi (consideriamo anche quelli che vengono parzialmente riflessi), essi incidono solo sulla zona a distanza compresa tra $\frac{R}{2}$ e R dall'asse del cilindro. Questo perché i raggi incidono sul piano a distanza sempre più grande dall'asse al crescere dell'altezza a cui il raggio inizialmente incide sulla faccia verticale. Si nota inoltre che quando l'altezza di incidenza è molto piccola, si è nel caso in cui vale l'approssimazione di specchio sferico, quindi i raggi paralleli incidono nel fuoco, il quale si trova a distanza $\frac{R}{2}$.

Un metodo alternativo è fare i conti esatti. Prendiamo il raggio che incide sulla faccia verticale ad altezza pari a $h = xR$ con $x \in (0, 1)$. Esso incide quindi sulla faccia curva con un angolo pari a $\theta = \arcsin x$. Supponiamo per ora che questo raggio subisca una sola riflessione prima di finire sul piano. Con un disegno si nota facilmente che la distanza a cui il raggio incide sul piano è:

$$d = \sqrt{R^2 - h^2} - \frac{h}{\tan 2\theta}$$

Sostituendo θ sfruttando il fatto che è noto il suo seno e che è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, si ricava:

$$d = \sqrt{R^2 - h^2} - h \frac{1 - 2x^2}{2x\sqrt{1 - x^2}} = R\sqrt{1 - x^2} - R \frac{1 - 2x^2}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

Da cui:

$$d = R \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

La quale è chiaramente crescente in x , quindi il minimo si avrà nel limite per x che tende a 0 (quello in cui vale l'approssimazione di specchio sferico, quindi il limite vale $\frac{R}{2}$) e inoltre la funzione assume chiaramente tutti i valori tra $\frac{R}{2}$ e R , quindi la zona corrispondente è sicuramente illuminata. Qualora il raggio incontrasse di nuovo la superficie prima del piano non ci sarebbero problemi in quanto chiaramente avrebbe un angolo di incidenza maggiore di quello del raggio orizzontale passante per quel punto, quindi andrebbe a finire o sul piano a una distanza maggiore o incontrerebbe di nuovo la superficie e si potrebbe ragionare nuovamente allo stesso modo. Se ne conclude dunque che non ci sono altre zone illuminate nella parte di piano su cui poggia il quarto di cilindro.

Si considerano ora i raggi rifratti dalla superficie curva. I raggi molto vicini al piano sono equivalenti a dei raggi paralleli all'asse ottico di un diottro sferico; ne consegue che essi si concentrano in un'immagine a distanza $q + R$ dall'asse del cilindro:

$$\frac{n}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1-n}{-R}$$

Dove p sarebbe la distanza della sorgente, la quale però è all'infinito poiché i raggi sono paralleli, quindi:

$$q = \frac{R}{n-1}$$

Il raggio che incide più lontano è proprio quello che arriva molto vicino al piano orizzontale, in quanto viene deviato meno degli altri. Anche in questo caso si potevano fare i conti esatti al fine di dimostrare che effettivamente è questo il caso limite; in analogia a quanto fatto per i raggi riflessi, si trova che la distanza a cui incide il raggio in funzione della suddetta x è:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{R^2 - h^2} + \frac{h}{\tan(\theta' - \theta)} = R\sqrt{1 - x^2} + R \frac{n\sqrt{1 - n^2x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{n^2 - 1} = \\ &= nR \frac{\sqrt{1 - n^2x^2} + n\sqrt{1 - x^2}}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

Che ha chiaramente un massimo per $x = 0$. Il minimo è molto più complicato da trovare, infatti il raggio che esce tangente ha un raggio riflesso dentro al quarto di cilindro che potrebbe incontrare nuovamente la superficie e uscire tangente, ma finire sul piano più vicino all'asse. Il punto più vicino a cui finiscono i raggi è quindi quello dato dall'ultima riflessione interna di questo raggio. Notando che l'angolo al centro corrispondente al triangolo isoscele che ha per vertici i punti di riflessioni successive è $\pi - 2\theta$, si ottiene con dei

semplici calcoli che la distanza minima è quella per cui:

$$d \cos \left(\left(2 \left\lfloor \frac{\theta}{\pi - 2\theta} \right\rfloor + 1 \right) \theta + \left\lfloor \frac{\theta}{\pi - 2\theta} \right\rfloor \pi \right) = R$$

Dove $\theta = \arcsin \frac{1}{n}$. I raggi che incidono ad un'altezza maggiore vengono sempre riflessi totalmente, mentre quelli ad altezza minore finiscono sempre tra il massimo e il minimo suddetti.

VI Doppietto di lenti

Per risolvere questo problema iniziamo considerando delle lenti convergenti e dividendo il sistema da studiare nei due sottosistemi costituiti da singole lenti. In particolare vediamo come il doppietto agisce su dei fasci di luce paralleli.

Prendiamo un fascio di luce parallelo all'asse ottico che incide prima sulla lente 1. Esso viene chiaramente concentrato nel fuoco a distanza f_1 dalla lente. La seconda lente avrà come sorgente l'immagine prodotta dalla prima, la quale si trova a una distanza $d - f_1$ dalla lente 2 (con il segno già a posto, basti pensare che se f_1 è grande la distanza deve essere negativa). L'immagine complessiva si forma quindi a una distanza f dalla seconda lente, la quale rispetta:

$$\frac{1}{d - f_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2}$$

Da cui:

$$f = \frac{(d - f_1)f_2}{d - f_1 - f_2}$$

Allo stesso modo se il fascio incide sulla lente 2 con un analogo ragionamento si trova:

$$f' = \frac{(d - f_2)f_1}{d - f_1 - f_2}$$

Ora che abbiamo trovato i fuochi, bisogna trovare la distanza focale della lente equivalente e la sua posizione.

La distanza focale sarà la distanza tra i due fuochi divisa per 2:

$$2f_{\text{res}} = \frac{(d - f_1)f_2}{d - f_1 - f_2} + \frac{(d - f_2)f_1}{d - f_1 - f_2} + d = \frac{d^2 - 2f_1f_2}{d - f_1 - f_2}$$

$$f_{\text{res}} = \frac{d^2 - 2f_1f_2}{2(d - f_1 - f_2)}$$

La posizione della lente del resto è nel punto medio tra i due fuochi, quindi sarà a una distanza d' misurata dalla lente 1 verso la lente 2:

$$d' = -f' + f_{\text{res}} = \frac{d^2 - 2f_1f_2 - 2df_1 + 2f_1f_2}{2(d - f_1 - f_2)} = \frac{d^2 - 2df_1}{2(d - f_1 - f_2)}$$

Il fatto che le lenti siano convergenti non è necessario, infatti la convenzione sui segni delle distanze focali permette di utilizzare le stesse formule anche per quelle divergenti, dunque il risultato non dipende dal tipo di lenti.

VII Reticolo di diffrazione

Nel testo mi ero scordato di indicare la larghezza del reticolo d , che non è necessaria per rispondere alla prima domanda, ma lo è per le successive.

1. Come visto a lezione, la differenza di cammino ottico tra i raggi uscenti da due fenditure successive è $\frac{1}{n} \sin(\theta)$. Condizione affinché in un punto individuato dall'angolo θ si trovi un massimo principale è che tale differenza di cammino ottico sia un multiplo della lunghezza d'onda della luce utilizzata, ovvero

$$\frac{1}{n} \sin(\theta_{\max, m}) = m\lambda$$

$$\sin(\theta_{\max, m}) = nm\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$$

Si ricordi sempre che non tutte queste soluzioni hanno senso per le condizioni dovute al codominio del seno.

2. Ricordandoci la relazione che permette di trovare i minimi per Young con N fenditure, dove in questo caso $N = nd$, si ha

$$\sin(\theta_{\min, m, k}) = k \frac{\lambda}{d} + mn\lambda$$

dove $k \in \{1, \dots, nd - 1\}$ e m intero. La condizione richiesta dal testo del problema, ovvero che per $\lambda + \Delta\lambda$ l' m -esimo massimo principale coincida con il minimo successivo per l'onda di lunghezza d'onda λ , equivale a dire che essendo il primo minimo successivo a cui qui ci si riferisce indicizzato con $(k = 1; m)$

$$mn(\lambda + \Delta\lambda) = mn\lambda + \frac{\lambda}{d}$$

da cui riarrangiando si ottiene

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mnd} = \frac{1}{mN}$$

Dalla precedente relazione si ricava facilmente il caso in cui il massimo principale a cui ci si riferisce è il primo:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N}$$

3. Il ragionamento è lo stesso di quello effettuato per il caso di Young con N fenditure, con la differenza che i "raggi" arrivano già sfasati alle varie fenditure per via della loro inclinazione rispetto alla normale al piano dello schermo. Essendo δ l'angolo di incidenza con convenzione dei segni tale che $\theta = \delta$ se questi angoli sono sottesi da una stessa retta con il piano da lati opposti di quest'ultimo, allora si ha che la differenza di cammino ottico tra due raggi per arrivare a due fenditure successive è

$$\Delta L' = -\frac{\sin(\delta)}{n}$$

da cui si ha che la differenza di cammino ottico in P tra onde che provengono da due sorgenti successive è

$$\Delta L_{tot} = \frac{\sin(\theta) - \sin(\delta)}{n}$$

il cui corrispondente sfasamento è

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\sin(\theta) - \sin(\delta)}{\lambda n}$$

Trattandosi sempre di onde uniformemente sfasate l'una rispetto alla successiva si può direttamente prendere la relazione ricavata a lezione e sostituire l'espressione ricavata per lo sfasamento. Così facendo si ottiene che i massimi principali ed i minimi hanno le forme seguenti

$$\sin(\theta_{max,m}) = nm\lambda + \sin(\delta)$$

$$\sin(\theta_{min,k,m}) = nm\lambda + \sin(\delta) + k\frac{\lambda}{d}$$

dove si sono usate le stesse convenzioni del punto precedente. Osservando la soluzione ci accorgiamo che la figura di interferenza si è come "spostata angularmente" ed in particolare il massimo principale adesso si trova a $\theta = \delta$

4. Per quanto poco intenso possa essere questo fenomeno, la luce che colpisce lo schermo viene in parte riflessa: le cariche degli atomi presenti

sulla superficie dello schermo vengono accelerate dal campo elettromagnetico dell'onda che le investe e questo le fa oscillare con una frequenza che coincide con quella dell'onda con cui interagiscono. Queste cariche oscillanti si comportano da sorgenti puntiformi di onde che hanno la stessa frequenza della loro oscillazione, quindi la stessa lunghezza d'onda dell'onda originaria che investe lo schermo. Trascurando per il momento il termine dovuto alla riflessione globale dell'onda da parte dell'intero piano, di fatto osserveremmo frange di interferenza anche su questo schermo, le cui posizioni sono simmetriche rispetto a quelle ottenute sullo schermo in posizione usuale. Infatti gli unici punti dello schermo che non fungono da sorgenti infinitesime sono le fenditure, perchè lì non ci sono atomi, allora in realtà l'onda prodotta dall'oscillazione delle cariche dello schermo equivale ad un'onda che abbia come sorgenti le sole fenditure, che in realtà sono le uniche parti dello schermo a non contribuire. Questo perchè se le fenditure non esistessero, quindi lo schermo fosse intero, allora l'onda generata dallo schermo sarebbe l'onda originaria riflessa ed in quanto tale non presenterebbe frange di interferenza sullo schermo che abbiamo predisposto. Per linearità però questo campo nello spazio è quello prodotto dallo schermo con le fenditure sommato a quello prodotto dalla sola regione delle fenditure se questa fosse dello stesso materiale dello schermo. Portando questo termine all'altro membro e trascurando come detto prima il contributo dovuto alla riflessione da parte dello schermo intero, otteniamo il campo cercato e ritroviamo quanto detto precedentemente. Tuttavia questa approssimazione non è detta che si sensata e, non essendo in realtà il contributo delle fenditure in questo caso l'unico contributo al campo, bisogna considerare l'interferenza che compie con l'onda riflessa. A lezione non abbiamo discusso come si riflettono le onde piane una volta che incontrano un'interfaccia piana: nelle assunzioni fatte a lezione (campo elettrico sempre perpendicolare al piano in cui lavoriamo) si può dire che la riflessione dell'onda consiste nella produzione di un'onda di ampiezza in genere diversa da quella dell'onda incidente, che si propaga nella direzione dettata dalla legge di riflessione che abbiamo visto in ottica geometrica e con frequenza identica a quella dell'onda incidente. Osservando con una costruzione geometrica opportuna che la differenza di fase tra l'onda piana riflessa, che ad un θ fissato possiamo considerare prodotta da una sorgente puntiforme posta all'intersezione dell'onda con il piano delle fenditure, e l'onda "prodotta" dalla fenditura ad ordinata maggiore è (si intende il solo sfasamento tra le sorgenti, senza ancora

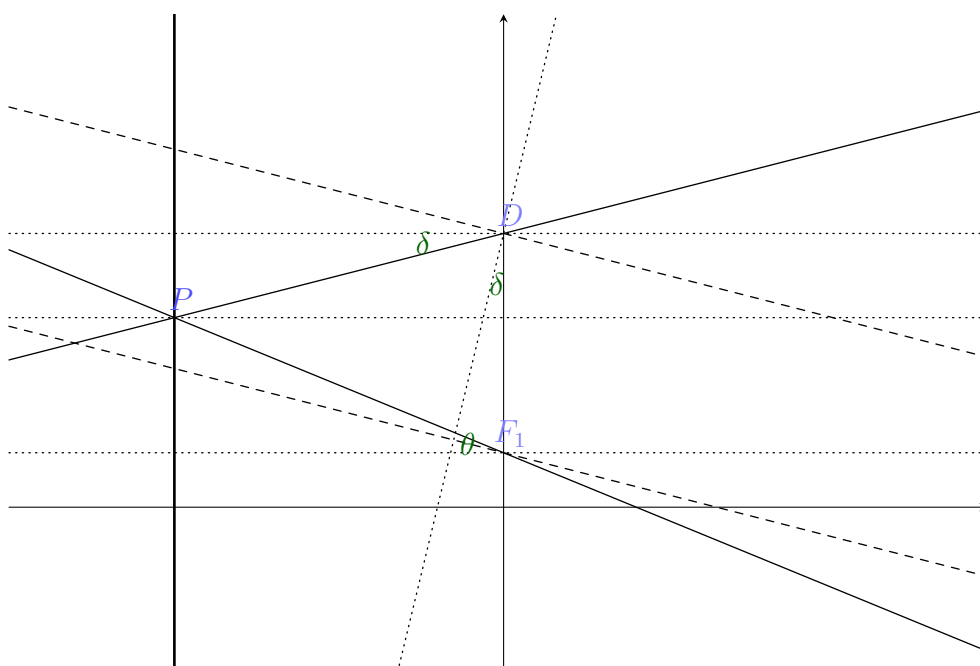


Figura 34: disegno del sistema. Il raggio riflesso dallo schermo che arriva in P è indicato con la linea tratteggiata. F_1 indica invece la posizione della fenditura ad ordinata maggiore

considerare la differenza di cammino ottico)

$$-\frac{(L) \sin(\delta) 2\pi}{\lambda}(\tan(\theta) + \tan(\delta))$$

si arriva a vedere che il campo complessivo in un punto dello schermo individuato dall'angolo θ preso con la stessa convenzione di segni usata per δ al punto precedente si ottiene

$$E(\theta, t) = E_{fenditure} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \left(\cos\left(\frac{2\pi(L)}{\lambda \cos(\theta)} - \omega t + i\Delta\phi\right) \right) + \right. \\ \left. - E_{riflessa} \cos\left(\frac{2\pi(L)}{\lambda \cos(\delta)} - \frac{(L) \sin(\delta) 2\pi}{\lambda}(\tan(\theta) + \tan(\delta)) - \omega t \right) \right)$$

dove $\Delta\phi$ è lo sfasamento trovato al punto precedente ed abbiamo considerato le differenze di fase prendendo come riferimento la fenditura con ordinata maggiore. Non avendo modo di ricavare, con gli strumenti ed i dati che abbiamo a disposizione, le ampiezze delle due componenti, non possiamo andare oltre, ma già qui si vede che l'intensità ha una dipendenza non banale da θ , quindi si vedranno in qualche forma delle frange di interferenza.

Riferimenti bibliografici

- [FLS] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *La fisica di Feynman, vol. 1*. Zanichelli.
- [Jac98] John David Jackson. *Classical Electrodynamics Third Edition*. Wiley, 1998.
- [MP13] David Morin and Edward M. Purcell. *Electricity and Magnetism, Third edition*. Cambridge University Press, 2013.
- [Tom18] Giovanni Maria Tomaselli. ottica geometrica, 2018. Reperibile [qui](#).