

Modulo di Relatività Speciale

Paolo Alessandro Xavier Tognini*

7 febbraio 2020

Sommario

Dal fatto che la velocità della luce sia la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale, si deduce la forma delle trasformazioni di coordinate tra sistemi inerziali (trasformazioni di Lorentz), e i diagrammi di Minkowski. Da questi si derivano la dilatazione dei tempi, la contrazione delle lunghezze e la perdita di simultaneità. Si introduce l'intervallo invariante. Si introduce la notazione dei quadrivettori, e si formula la conservazione del quadrimpulso, con la quale si affronta la meccanica relativistica. Formula per la velocità. Effetto Doppler relativistico. Cenni di elettrodinamica relativistica.

Brevi cenni di relatività generale. In particolare si applicherà il principio di equivalenza per ricavare, ad esempio, il redshift gravitazionale.

1 Teoria

1.1 Le premesse della teoria

La teoria speciale della relatività, che noi chiameremo relatività speciale (RS), è stata sviluppata da Albert Einstein nel 1905, per coniugare insieme due teorie fisiche - la Meccanica Classica e l'Elettromagnetismo - che sembravano contraddirsi a vicenda.

La Meccanica Classica, la teoria esposta da Newton alla fine del Seicento, si fonda sul cosiddetto “principio di relatività galileiano”. Tale principio afferma che non è possibile determinare la velocità di un corpo in termini assoluti, ma solo relativamente a un altro corpo. Si ricorderà l'esperimento mentale di Galileo in cui si fa cadere un grave a bordo di una barca che si muove di moto rettilineo uniforme, e il grave cade verticalmente *rispetto a un osservatore nella barca*, proprio come avviene se la barca è ferma.

*paolo.tognini@sns.it

Il principio di relatività richiede che le leggi della fisica devono essere tali da rendere impossibile un esperimento che permetta di determinare la “velocità assoluta” di un sistema fisico (sono invece possibili esperimenti per determinare se un sistema fisico sta ruotando: se nel suo sistema di riferimento i corpi sono affetti da una forza centrifuga).

Come si può esprimere più precisamente questa condizione? Si verifica che le leggi della Meccanica Classica (ad esempio, $F = ma$) sono invarianti sotto le trasformazioni di Galileo: esse sono cambi di coordinate tra le coordinate (x, y, z, t) di un osservatore O e le coordinate (x', y', z', t') dell'osservatore O' (per semplicità, useremo solo coordinate cartesiane). Abbiamo:

1. le 4 traslazioni dell'origine delle coordinate, tre spaziali e una temporale. Viene rappresentata qui la traslazione lungo l'asse x :

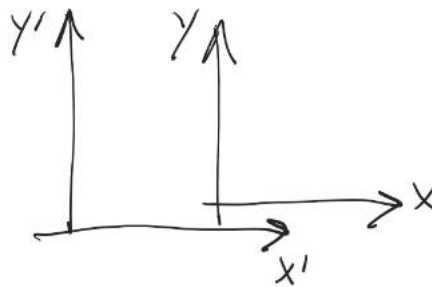


Figura 1: Il sistema O' è traslato rispetto al sistema O .

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

2. le 3 rotazioni attorno ai tre assi, da cui si possono ottenere per combinazione lineare le altre rotazioni. Viene rappresentata qui la rotazione nel piano xy :

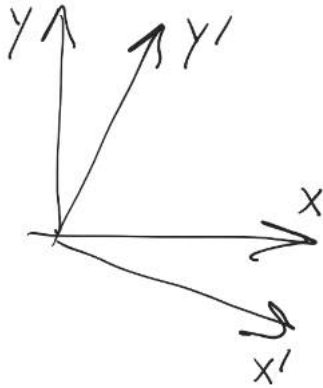


Figura 2: Il sistema O' è ruotato rispetto al sistema O .

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y' = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

3. i 3 boost di Galileo (per distinguerlo dal boost di Einstein). Un boost è un cambio di sistema di riferimento tra due osservatori che si muovono l'uno rispetto all'altro. Poiché vi sono tre direzioni spaziali, tutti i boost sono una combinazione lineare dei 3 boost lungo x , y e z . L'asse t' in figura è inclinato in quanto è la traiettoria dell'osservatore O' in cui è incentrato il sistema di riferimento O' . Viene rappresentato qui il boost di Galileo lungo x :

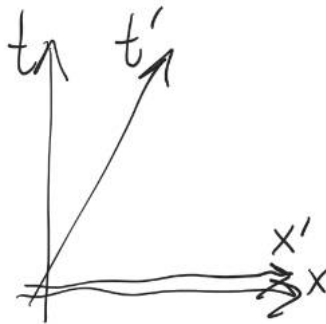


Figura 3: Il sistema O' è in moto rettilineo uniforme rispetto al sistema O .

$$\begin{cases} x' = x + v_x t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

In figura è mostrata un'asta in movimento. in entrambi i sistemi di riferimento O e O' , la lunghezza dell'asta è L .

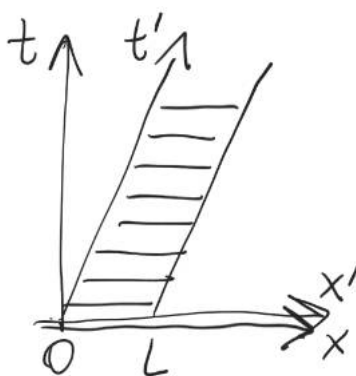


Figura 4: Un'asta in moto rispetto al sistema O , è ferma rispetto al sistema O' .

Un sistema di riferimento in cui valgono le leggi della fisica senza forze apparenti (come la forza centrifuga) si chiama *sistema di riferimento inerziale*. Le leggi della Meccanica Classica vengono enunciate in un sistema di riferimento inerziale. Applicando una trasformazione di Galileo, si passa da un sistema di riferimento inerziale a un altro: nessuno di essi è privilegiato, e le leggi fisiche assumono la stessa forma in ciascuno di essi.

Il principio di relatività galileiana era perciò a fondamento della Meccanica Classica, per mezzo della quale era stata possibile la comprensione di un gran numero di fenomeni (fluidodinamica, agitazione termica degli atomi, eccetera), ed era considerato valido.

Tuttavia, un'altra teoria era stata scoperta nell'Ottocento, che sembrava essere in contraddizione col principio di relatività.

Le leggi fisiche che spiegavano l'Elettricità e il Magnetismo erano state formulate da Maxwell nel 1865. Queste leggi predicevano l'esistenza di onde, le cosiddette onde elettromagnetiche, che si propagano alla velocità

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

all'incirca uguale alla velocità della luce nel vuoto c . Tali onde vennero rilevate per la prima volta da Hertz nel 1885, rendendo unanime l'accettazione della teoria di Maxwell, la quale spiegava ogni fenomeno elettromagnetico e permise la costruzione della radio e di molte altre invenzioni.

Il problema che venne presto notato è che le equazioni di Maxwell non sono invarianti sotto le trasformazioni di Galileo. Questo lo si può facilmente verificare analizzando le onde elettromagnetiche, poiché la teoria predice che si muovono a velocità c . Ma velocità c rispetto a chi? Effettuando un boost, la velocità cambia.

Questo non è diverso da quello che succede per l'equazione delle onde sonore, ricavata studiando il mezzo in cui le onde si propagano. In quel caso la velocità del suono era relativa al sistema in cui il mezzo era fermo! In altri sistemi di riferimento, l'equazione delle onde sonore è diversa, e la velocità di propagazione è diversa. Se la velocità del suono in aria è v_s ma la mia velocità rispetto all'aria è v , nella stessa direzione, allora la velocità del suono che misuro è $v - v_s$.

Si immaginò perciò che, come per tutte le altre onde, anche le onde elettromagnetiche si propagassero in un mezzo, che venne chiamato *etere*. Le equazioni di Maxwell erano valide solo nel sistema di riferimento in cui l'etere è fermo. Si cercarono dunque di misurare variazioni della velocità della luce facendo le misure in diversi sistemi di riferimento.

Nel 1887 Michelson e Morley effettuarono un esperimento di interferometria per cercare di misurare variazioni della velocità della luce nelle varie direzioni, in funzione del periodo dell'anno (immaginando che la Terra si muova nell'etere e cambi velocità relativa rispetto ad esso). L'esperimento tuttavia non riuscì a misurare alcuna variazione della velocità della luce: in qualunque periodo dell'anno, e comunque veniva ruotato l'apparato, essa risultava essere pari a c . Esperimenti di questo tipo vennero ripetuti nel decennio seguente, e diedero sempre lo stesso risultato.

Vi erano diverse possibili spiegazioni. Si sostenne che l'etere veniva "trascinato" dal moto della Terra attorno al Sole, e pure dalla rotazione della Terra, in modo che gli apparati sperimentali fossero sempre fermi rispetto all'etere. Vi era però un altro esperimento, l'esperimento di Fizeau, che Michelson e Morley ripeterono con maggiore precisione nel 1886: si tratta di un esperimento di interferometria in cui la luce passa per l'acqua in movimento, permettendo di determinare se l'acqua muove l'etere. La luce nell'acqua viaggia alla velocità c/n , mentre nell'acqua che si muove nella stessa direzione in direzione v , ci si aspetta viaggi alla velocità $c/n + v$, se è vera la teoria che l'acqua trascina interamente l'etere. Invece, l'esperimento fornisce un valore

della velocità della luce rispetto a noi di:

$$c_{\text{Fizeau}} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

Il trascimaneto dell'etere appare quindi essere solo parziale, e maggiore all'aumentare dell'indice di rifrazione del materiale. L'etere sembra non essere trascinato dalla Terra, ma dal materiale specifico in cui si trova!

L'aria ($n \approx 1.0003$) dunque non dovrebbe trascinare l'etere. Eppure, nell'esperimento di Michelson e Morley, il trascinamento è totale.

1.2 I principi della relatività speciale

Einstein nutriva una grande ammirazione per la teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo, che riusciva a spiegare un grande numero di fenomeni in modo molto elegante. Era inoltre convinto della correttezza dell'intuizione di Galileo secondo cui non doveva essere possibile definire una "velocità assoluta", ma solo delle velocità relative, e dunque le leggi fisiche dovevano essere uguali in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Egli assunse così che *entrambe* le teorie fossero vere. Esistono dei sistemi di riferimento inerziali, ugualmente privilegiati, e le leggi della fisica sono uguali tra di loro. Inoltre, tra le leggi della fisica vi sono le equazioni di Maxwell, che implicano che la luce si muove alla velocità c .

Come è possibile che la velocità della luce sia costante in tutti i sistemi di riferimento? Non è forse vero che, a causa dei boost, la velocità c vista da un sistema di riferimento con velocità v nella stessa direzione, sarà $c \pm v$?

È chiaro che il problema è legato ai boost. Per far luce sulla questione, osserviamo meglio come funzionano le rotazioni, in particolare le rotazioni infinitesime.

In una rotazione infinitesima di un angolo ϵ molto piccolo, al prim'ordine abbiamo:

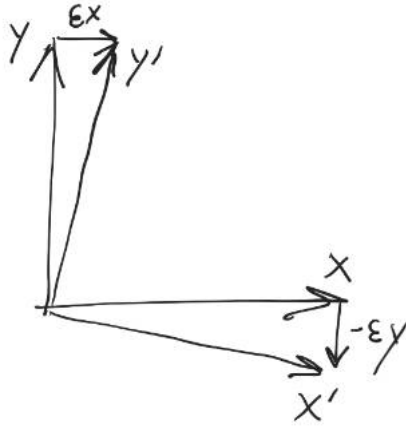


Figura 5: Il sistema O' si ottiene dal sistema O con una rotazione infinitesima di un angolo ϵ .

$$\begin{cases} x' = x - \epsilon y + O(\epsilon^2) \\ y' = \epsilon x + y + O(\epsilon^2) \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Si può verificare facilmente che la traiettoria tracciata dalla punta dei vettori è data da:

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 + O(\epsilon^2) = 1 + O(\epsilon^2)$$

Quindi, per ottenere una rotazione di un angolo non infinitesimo, bisogna applicare circa $1/\epsilon$ rotazioni infinitesime. Di conseguenza, si ottiene:

$$x'^2 + y'^2 = 1 + O(\epsilon)$$

ed effettuando il limite $\epsilon \rightarrow 0$ si ottiene che i vertici degli assi si muovono in una circonferenza.

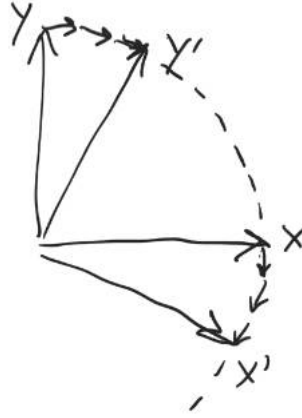


Figura 6: Effettuando tante rotazioni infinitesime, si ottiene una rotazione di un qualsiasi angolo.

Dalla forma delle trasformazioni infinitesime si può dedurre molto facilmente la forma delle trasformazioni in generale! Notiamo in figura come il vettore x cambia in modo proporzionale a $-y$, il quale cambia in modo proporzionale a $-x$. Inoltre, il vettore y cambia in modo proporzionale a x il quale cambia in modo proporzionale a $-y$. Si ottiene dunque:

$$\begin{cases} x' = f(\theta)x + f'(\theta)y \\ y' = -f'(\theta)x + f(\theta)y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f''(\theta) = -f(\theta) \end{cases}$$

ottendendo così $f(\theta) = \cos(\theta)$ e $f'(\theta) = -\sin(\theta)$, come atteso. La rotazione rappresentata in figura è quindi espressa nel modo seguente:

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y' = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

I boost sono molto più facili delle rotazioni: i boost infinitesimi sono esattamente uguali ai boost non infinitesimi. A restare costante non è una somma

di quadrati, ma $t'^2 = 1$, anzi $t' = 1$.



Figura 7: Effettuando tanti boost di Galileo infinitesimi, si ottiene un sistema di riferimento O' in moto rettilineo uniforme con velocità qualunque, rispetto al sistema originario O .

Qual è il problema? Il punto è che noi vorremmo che la traiettoria del raggio di luce, $x = ct$, nel nuovo sistema di riferimento sia $x' = ct'$. Se il boost è infinitesimo (con un parametro ϵ), vogliamo che ci siano al massimo errori di second'ordine:

$$x' = ct' + O(\epsilon^2)$$

Dal disegno si può vedere che il modo più semplice di ottenere questo risultato è fare in modo che nel boost infinitesimo l'asse delle x (ovvero la retta con $t = 0$) si inclini anch'esso verso la traiettoria della luce, proprio come l'asse t ! In questo modo, nella traiettoria della luce, a un passo lungo ct' lungo il nuovo asse temporale, corrisponde un passo x' lungo il nuovo asse spaziale.

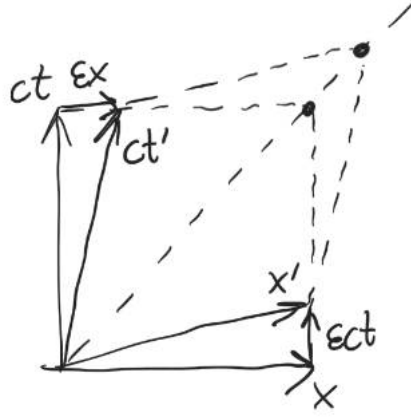


Figura 8: Dato il sistema di riferimento O , il modo più semplice per avere un sistema O' che sia in moto rettilineo uniforme rispetto ad O e che tuttavia veda comunque che la luce si muove a velocità c , è quello indicato in figura: l'asse x' si avvicina alla bisettrice così come ha fatto l'asse ct' .

Stiamo dunque cambiando la definizione di boost rispetto a quello immaginato da Galileo, per poter coniugare il principio di relatività con la costanza della velocità della luce in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Tuttavia, come vedremo in seguito, la nuova meccanica avrà correzioni proporzionali a v^2/c^2 , e quindi è piccolo per le velocità ai tempi di Newton.

Il nuovo boost infinitesimo di un angolo ϵ molto piccolo, al prim'ordine, è:

$$\begin{cases} ct' = \epsilon x + ct + O(\epsilon^2) \\ x' = x + \epsilon ct + O(\epsilon^2) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Si può verificare facilmente che la traiettoria tracciata dalla punta dei vettori è data da:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 + O(\epsilon^2) = \pm 1 + O(\epsilon^2)$$

Quindi, per ottenere un boost non infinitesimo, bisogna applicare circa $1/\epsilon$ boost infinitesimi. Di conseguenza, si ottiene:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = 1 + O(\epsilon)$$

ed effettuando il limite $\epsilon \rightarrow 0$ si ottiene che i vertici degli assi si muovono lungo rami di iperboli equilateri.

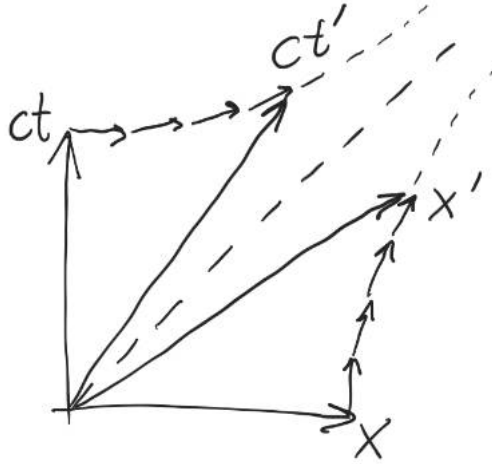


Figura 9: Effettuando tanti boost infinitesimi, si ottiene un boost di velocità arbitraria purché più piccola di c , come si vede in figura: l'asse ct' non sarà mai più inclinato della bisettrice.

Dalla forma delle trasformazioni infinitesime si può dedurre molto facilmente la forma delle trasformazioni in generale! Notiamo in figura come il vettore x cambia con ct , il quale cambia con x . Inoltre, il vettore ct cambia con x il quale cambia con ct . Si ottiene dunque:

$$\begin{cases} ct' = f(\psi)ct + f'(\psi)x \\ x' = f'(\psi)ct + f(\psi)x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f''(\psi) = +f(\psi) \end{cases}$$

ottendendo così:

$$f(\psi) = \cosh(\psi) = \frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2}$$

$$f'(\psi) = \sinh(\psi) = \frac{e^\psi - e^{-\psi}}{2}$$

Queste sono le funzioni iperboliche. Come coseno e seno sono ascissa e ordinata d'un versore che parte orizzontale rivolto a destra e che si muove in cerchio in senso antiorario, in funzione dell'angolo θ (che è proporzionale all'area spazzata dal versore nel cerchio); così coseno iperbolico e seno iperbolico sono ascissa e ordinata d'un versore che parte orizzontale rivolto a destra e che si

muove lungo l'iperbole equilatera in senso antiorario, in funzione dell'angolo iperbolico ψ (che è definito come l'area spazzata dal vettore che va dall'origine a un punto che si muove lungo l'iperbole equilatera).

L'angolo iperbolico ψ è anche detta *rapidità*, da non confondere con la velocità. Non useremo questo termine.

Una proprietà importante, facilmente verificabile, è:

$$\cosh^2(\psi) - \sinh^2(\psi) = 1$$

Questo mostra perché la punta dei vettori x' e ct' , continuando a effettuare tanti piccoli boost infinitesimi, tracciano delle iperboli (vedi figura 10).

Per coseno iperbolico e seno iperbolico valgono delle identità trigonometriche simili a quelle con coseno e seno, e vengono dimostrate allo stesso modo: usando la definizione con gli esponenziali.

Le trasformazioni di Lorentz hanno pertanto la seguente forma:

$$\begin{cases} ct' = \cosh(\psi)ct + \sinh(\psi)x \\ x' = \sinh(\psi)ct + \cosh(\psi)x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

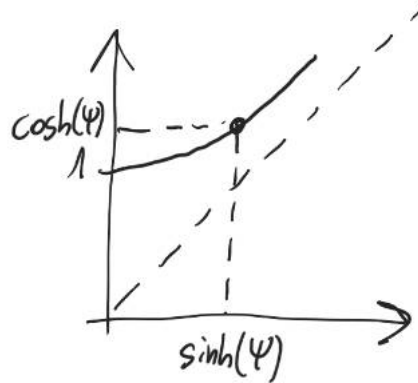


Figura 10: Ascissa e ordinata della traiettoria dell'asse ct' tracciata facendo via via più boost infinitesimi, sono rispettivamente seno iperbolico e coseno iperbolico di una certa quantità ψ .

Ora, avevamo anticipato che la correzione rispetto all'equazione normale era piccola. Dal grafico notiamo che:

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{\sinh(\psi)}{\cosh(\psi)} = \tanh(\psi)$$

Definiamo:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \cosh \psi$$

Si noti che γ si può scrivere anche come:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^2 \psi}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cosh^2 \psi}}} = \cosh(\psi) = \gamma$$

dove ho usato $\cosh^2(\psi) - \sinh^2(\psi) = 1$. Si provi a tracciare il grafico di γ in funzione di v per capirne le proprietà qualitative. Quanto vale per velocità basse? quanto vale per velocità vicine a quella della luce?

Scriviamo ora l'espressione del boost senza funzioni iperboliche, ma usando solo la velocità v e la sua funzione γ :

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(\frac{vx}{c^2} + t \right) \\ x' = \gamma(x + vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Quindi, nel limite in cui v/c è trascurabile, abbiamo:

$$\begin{cases} t' = t + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \\ x' = x + vt + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

ovvero proprio le trasformazioni di Galileo!

Per un boost di velocità v lungo una certa direzione $x_{\parallel}$, possiamo scrivere la trasformazione delle coordinate in questo modo:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(\beta x_{\parallel} + ct) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} + \beta ct) \\ \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \end{cases}$$

Abbiamo perciò formulato una teoria, la relatività speciale, in cui vale il principio di relatività galileiana, in cui le leggi fisiche (tra cui le leggi dell'Elettromagnetismo di Maxwell) hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento, e da cui otteniamo la meccanica classica come limite per velocità piccole.

1.3 La formula di somma delle velocità

Come la rotazione d'un angolo θ_1 seguita dalla rotazione d'un angolo θ_2 è equivalente a un'unica rotazione d'un angolo $\theta_1 + \theta_2$, altrettanto vale per le rotazioni iperboliche. A sommarsi però sono gli angoli iperbolicici ψ e non le velocità!

Come si sommano le velocità?

Ragioniamo, per comodità, con le velocità misurate in unità della velocità della luce, cioè con $\beta = v/c$. Ricordiamo che $\beta = \tanh(\psi)$. Poiché $\psi = \psi_1 + \psi_2$, abbiamo semplicemente bisogno di una formula di somma delle tangenti iperboliche! Essa può essere ricavata come si ricava la formula di somma per le tangenti (lo si faccia come esercizio):

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

Ovvero:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

Si noti che se $v_1, v_2 \ll c$, allora si ha:

$$v = v_1 + v_2 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

ottenendo l'usuale formula per le velocità.

Un altro modo di ottenere la formula è usare il cambio di coordinate. Sia $v_2 = \frac{dx'}{dt'}$ la velocità d'un corpo rispetto al sistema di riferimento O' , il quale si muove a velocità v_1 rispetto al sistema di riferimento O . A che velocità $v = \frac{dx}{dt}$ si sta muovendo il corpo rispetto al sistema di riferimento O ? Si sostituisca dx in funzione di dx' e dt' (e altrettanto per dt) e si calcoli il risultato (esercizio).

Si calcoli inoltre la stessa cosa per velocità trasversali $v_\perp = \frac{dy}{dt}$ e si noti che cambia con il cambiare del sistema di riferimento! Infatti, anche se $dy' = dy$, abbiamo $dt \neq dt'$. Si calcoli l'espressione corretta (esercizio).

Il motivo intuitivo è che il tempo scorre in modo diverso nei due sistemi di riferimento, cosa che vedremo meglio nel capitolo successivo

Si calcoli inoltre la somma di due velocità ortogonali (esercizio).

Si noti che se $v_2 = c$, allora $v = v_2 = c$, indipendentemente da v_1 ! Quindi, se un corpo si muove alla velocità della luce rispetto a un sistema di riferimento inerziale, si muoverà alla velocità della luce rispetto a tutti i sistemi di riferimento inerziali, esattamente come richiesto dall'esperimento di Michelson e Morley!

Nell'esperimento di Fizeau, invece, si ricorderà che la luce si muove di velocità c/n rispetto all'acqua, e l'acqua si muove a velocità v rispetto a noi. La velocità della luce rispetto a noi è dunque:

$$c_{\text{Fizeau}} = \frac{c/n + v}{1 + v/cn} = c/n + v - v/n^2 + O\left(\frac{v}{c}\right)$$

Che corrisponde con la formula di Fizeau:

$$c_{\text{Fizeau}} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

1.4 Tre conseguenze della relatività speciale

Vediamo ora tre effetti tipici della relatività speciale: la dilatazione dei tempi, la contrazione delle lunghezze e la perdita della simultaneità. Esse sono facilmente derivati dai nostri diagrammi spaziotemporali.

1.4.1 Dilatazione dei tempi

Il primo effetto, la dilatazione dei tempi, si ottiene rispondendo alla seguente domanda: avendo un sistema di riferimento O' incentrato su un'astronave che si muove a velocità v rispetto al sistema di riferimento O ; se passa un tempo Δt fra due eventi che accadono nello stesso punto nel riferimento S' , quanto è il corrispondente $\Delta t'$?

È importante porre l'accento sul fatto che l'astronave è *ferma nel sistema di riferimento O'* . Il ragionamento vale per qualunque oggetto fisico fermo nel sistema di riferimento O' . Stiamo infatti per vedere che lo scorrere del tempo dipende dal sistema di riferimento!

Noi sappiamo che l'astronave passa dall'origine $(0,0)$ al punto che nelle coordinate di O si scrive a $(\Delta x, \Delta t) = (v\Delta t, \Delta t)$, mentre nelle coordinate di O' si scrive $(0, \Delta t')$.

Noi sappiamo che $c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$. Applicando questo al punto Q ,

abbiamo:

$$(c\Delta t')^2 = (c\Delta t)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Da cui:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Questo significa che, quando sull'astronave passa un certo tempo, per noi passa un tempo inferiore!

Questo può apparire strano per motivi di simmetria. Infatti, studiando il nostro moto rispetto al sistema di riferimento dell'astronave, troveremmo la relazione opposta: $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Tuttavia, ora $\Delta t'$ e Δt non sono le stesse quantità di prima!

Per semplicità, consideriamo una rotazione. Non sorprende che, se prendo il vettore che ha coordinate $x'y'$ pari a $(0, \Delta y')$, e lo proietto lungo l'asse y , ottenendo il vettore con componenti xy pari a $(0, \Delta y)$, e poi riproietto questo lungo l'asse y' , non mi sorprende di trovare un vettore con componenti $x'y'$ pari a $(0, \Delta y'')$ con $\Delta y'' < \Delta y < \Delta y'$. Ogni volta che proietto nell'altro sistema, la quantità viene moltiplicata d'un fattore $\cos(\theta) < 1$.

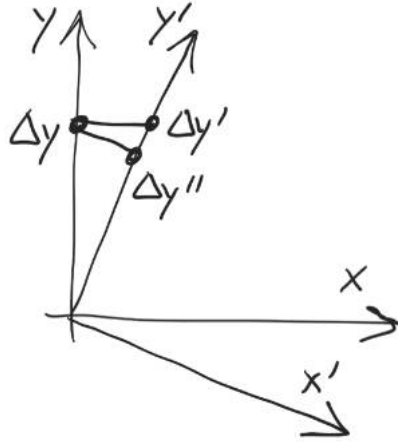


Figura 11: Proiettare una grandezza lungo l'asse y' sull'asse y la rende più piccola, e altrettanto il proiettarla dall'asse y all'asse y' . Il paradosso dei gemelli è altrettanto poco sorprendente.

Allo stesso modo, se prendo la posizione dell'astronave, che si scrive $(0, \Delta t')$ nel sistema O' , e la proietto lungo l'asse t , ottengo $\Delta t > \Delta t'$. Se ora prendo il vettore che si scrive $(0, \Delta t)$ nel sistema O , e lo riproietto lungo t' , ottengo $\Delta t'' > \Delta t > \Delta t'$. Ogni volta che proietto nell'altro sistema, la quantità viene

moltiplicata d'un fattore $\cosh(\psi) = \gamma > 1$.

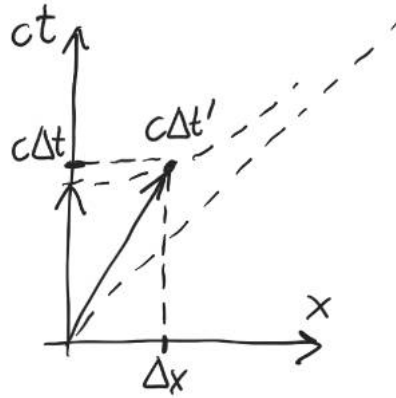


Figura 12: Una quantità lungo l'asse t' , se proiettata lungo l'asse t , diventa più grande: $\Delta t > \Delta t'$.

Questo, però, non è più strano del fatto che, in una rotazione, se proietto il vettore Q in figura, che si scrive (Δy) componente t' , troverò $\Delta y'' > \Delta y > \Delta y'$.

Ora si hanno tutti gli strumenti per affrontare il celebre *paradosso dei gemelli*.

Problema 1.1 (Paradosso dei gemelli). Esistono due gemelli. Uno resta sulla Terra per 10 anni. L'altro, viaggiando su un'astronave che va a $4/5$ della velocità della luce, arriva fino a un pianeta a 4 anni-luce da noi e poi ritorna indietro. Si disegni un grafico spaziotemporale e si ragioni su di esso. Quanto tempo passa per il gemello? Perché il sistema di riferimento del gemello a Terra è privilegiato rispetto a quello sull'astronave? Si disegnino le “retta di contemporaneità” del gemello a bordo dell'astronave, ovvero i punti che sono contemporanei a lui in accordo al *suo* sistema di riferimento (in pratica, gli assi x'), e si discuta sul *quando* il gemello sull'astronave guadagna sull'altro gemello.

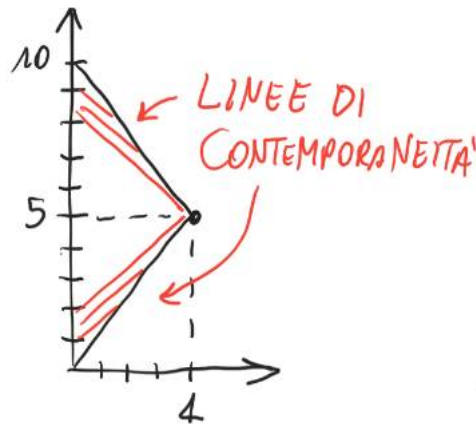


Figura 13: Il paradosso dei gemelli. Le linee di contemporaneità sono le linee che rappresentano gli eventi del presente, rispetto al sistema di riferimento dell'astronave.

1.4.2 Contrazione delle lunghezze

Il secondo effetto è detto *contrazione delle lunghezze*. Il problema che ci poniamo è il seguente: consideriamo un'asta che *quando è ferma nel sistema di riferimento O* , ha lunghezza ℓ (è importante che sia ferma nel sistema di riferimento O perché vedremo che la lunghezza di un oggetto fisico dipende dal sistema di riferimento!).

Guardiamola da un sistema di riferimento O' in cui l'asta si muove a velocità v . In quel sistema di riferimento, qual è la lunghezza dell'asta ℓ' nel sistema O' ? Consideriamo il vettore corrispondente all'asta, che parte nell'origine e arriva al punto P che nel sistema di riferimento O (quello dell'asta, che in figura è storto) ha coordinate xt pari a $(\ell, 0)$. Nel sistema di riferimento O' (che in figura è dritto) il punto P ha coordinate $x't'$ pari a $(\gamma\ell, \gamma\beta\ell)$.

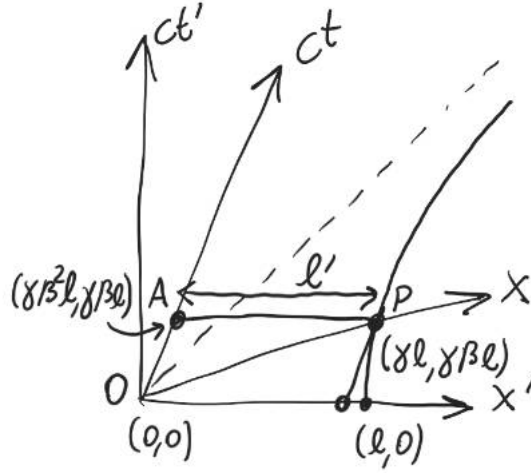


Figura 14: Un'asta è lunga ℓ nel sistema O , e infatti è ottenuta effettuando il boost di un'asta che collega i punti $(0,0)$ e $(\ell,0)$, ottenendo così l'asta che collega i punti O e P . A questo punto, però, nel sistema O la lunghezza dell'asta lungo l'asse x è dato dalla lunghezza $\ell' = \overline{AP}$.

La lunghezza dell'asta è dunque $\ell' = \gamma\ell$? No, perché il punto P - la parte anteriore dell'asta - si trova alla coordinata $t' = \gamma\beta\ell$, e per quel valore di t' , la parte posteriore dell'asta si trova nel punto A . Il punto A ha coordinata t' pari a $\gamma\beta\ell$, per definizione, mentre la coordinata x' è ottenuta moltiplicando per la velocità: $\gamma c\beta^2\ell$. La lunghezza dell'asta è dunque:

$$\ell' = x'_P - x'_A = \gamma\ell - \gamma\beta^2\ell = \gamma(1 - \beta^2)\ell = \frac{\ell}{\gamma}$$

Si ricorda la definizione di γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Si è ottenuto dunque che un'asta che si muove rispetto a noi a velocità v , e che nel suo sistema di riferimento è lunga ℓ , nel nostro sistema essa è più corta, ed è lunga ℓ/γ . Il significato è dato dal grafico: a un certo tempo t' , la distanza $\Delta x'$ tra la parte anteriore e la parte posteriore dell'asta è proprio uguale a ℓ' !

Questo dà origine ad alcuni problemi interessanti. Ad esempio, un'asta lunga ℓ nel suo sistema, che si muove a velocità $v_x \lesssim c$ e $v_y \ll c$, può attraversare una porta la cui ampiezza lungo x è pari a:

$$\ell' = \ell \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)$$

Dunque l'asta può passare attraverso una fenditura più piccola della sua lunghezza!

Il fenomeno della contrazione delle lunghezze non è un fenomeno apparente dovuto al ritardo con cui la luce arriva fino a noi, o similmente. È un fenomeno reale. Non è più strano del fatto che, data un'asta posta lungo l'asse x , se si proietta la sua lunghezza ℓ lungo l'asse x' (ottenuto ruotando l'asse x nel piano xy) essa risulta minore ($\ell' = \ell \cos(\theta) < \ell$).

Si faccia quindi attenzione quando si definisce la lunghezza di una cosa. Fate attenzione *in quale sistema di riferimento* viene definita.

1.4.3 Perdita di simultaneità

Il terzo effetto che andiamo a vedere è la *perdita della simultaneità*. È chiaro, guardando i diagrammi spaziotemporali, che due *eventi* (questo è il nome tecnico per due punti nello spaziotempo) A e B , tali che A precede B nel sistema di riferimento di O , sono invece contemporanei nel sistema di riferimento O' . A sua volta esistono sistemi di riferimento O'' in cui è B a precedere A : quali? (esercizio).

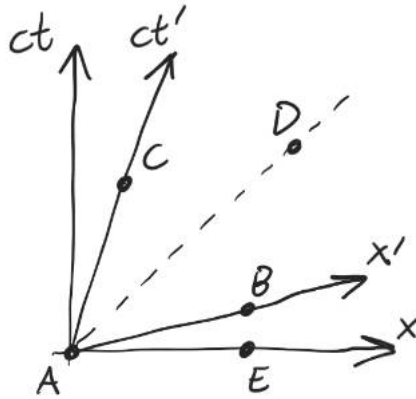


Figura 15: Mentre l'evento C ha sempre coordinata temporale maggiore dell'evento A in tutti i sistemi di riferimento raggiunti con dei boost, e mentre D può essere raggiunto da A con un fotone in tutti i sistemi di riferimento, gli eventi B e B' sono contemporanei, successivi o precedenti all'evento A a seconda del sistema di riferimento. Usando gli eventi A , B e B' , si può mostrare che superare la velocità della luce implica facilmente la possibilità di viaggiare nel tempo, il che avrebbe orribili conseguenze.

La nozione che due eventi siano simultanei dunque non è assoluta, ma dipende dal sistema di riferimento.

Tuttavia, questo non significa che non ha senso dire che un evento precede un altro. Ci sono alcuni casi in cui questo è oggettivo. Prendiamo, nella stessa figura (figura 15) i punti A e C . In entrambi i sistemi di riferimento, O e O' , l'evento C segue l'evento A . Ci si può convincere facilmente che, qualunque boost si effettui, in ogni sistema di riferimento O'' l'evento C seguirà sempre l'evento A .

Qual è la differenza rispetto al caso precedente? La differenza è che in questo caso una particella (o un'astronave) può andare da A a C a trasportare, ad esempio, un messaggio. Quindi c'è un'influenza causale: l'evento A influenza causalmente l'evento C ! Ad esempio, l'evento A può essere l'accensione dei fornelli e l'evento C il bollire dell'acqua. Non si vede come in un sistema di riferimento l'evento C possa precedere l'evento A .

Invece, nel caso degli eventi A e B , nessuna particella o astronave *che viaggi più lentamente della luce* può viaggiare tra i due eventi.

Questo, in effetti, ci aiuta a capire perché non ci aspettiamo di trovare particelle che possano viaggiare più velocemente della luce: se le trovassimo, potremmo usarle per viaggiare nel tempo! Vediamo il perché.

Immaginiamo di essere nel sistema di riferimento O e di avere uno strumento che invia comunicazioni più velocemente della luce. Se utilizzato nell'evento A , posso dunque influenzare l'evento B , che in almeno un sistema di riferimento (in questo caso il sistema O' , a velocità v rispetto al sistema O , sempre in figura 15) sono simultanei.

Quindi, dato un qualunque sistema di riferimento O'' , sappiamo come inviare comunicazioni simultanee in quel sistema di riferimento: basta mettersi nel sistema di riferimento O''' , a velocità $-v$ rispetto al sistema O'' , visto che lo strumento deve comportarsi allo stesso modo in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Quindi basta porsi in B e inviare un messaggio *simultaneo in O'* , raggiungendo A . Da qui basta inviare un messaggio *simultaneo in O* , raggiungendo E , un punto che può influenzare causalmente B . In pratica, siamo riusciti a viaggiare nel tempo! Questo permetterebbe di realizzare i paradossi temporali (ad esempio, il paradosso del nonno) la cui soluzione più accettabile è, chiaramente, postulare che il viaggio nel tempo sia impossibile.

Per questo si dice che la relatività speciale implica che niente può superare la velocità della luce; o, se ci sono particelle che lo fanno, non interagiscono con noi, e quindi non possiamo usarle per costruire lo strumento utilizzato qui sopra.

Vedremo che la relatività speciale fornisce anche motivi energetici a sostegno di questa tesi: continuando a bruciare combustibile, un'astronave si avvicina

asintoticamente alla velocità della luce, ma non può mai superarla.

Ricordatevi perciò, quando in un problema si dice: “e in quel momento entrambe le astronavi fanno questo”, di domandarvi *in quale sistema di riferimento* state ragionando, per capire che cosa significa “in quel momento”.

Come possiamo però formalizzare la differenza tra la coppia di eventi A e B , tali che A precede B in ogni sistema di riferimento inerziale; e la coppia di eventi A e C tali che in alcuni sistemi A precede C , in altri C precede A , e in altri ancora sono simultanei?

Abbiamo già notato come, se un punto ha coordinate (x, t) in un sistema e (x', t') in un altro, si ha:

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$$

Lo si può ottenere sostituendo le espressioni di x', t' in funzione di x, t nell'espressione del boost.

Questa espressione è analoga al fatto che, effettuando una rotazione, si ha:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

È facile vedere che, se si ammettono boost lungo tutte le tre direzioni e rotazioni attorno ai tre assi, l'espressione diventa:

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Queste variabili x, y, z, t si riferiscono alle coordinate d'un punto misurate rispetto all'origine delle coordinate. Effettuando una traslazione, tali variabili si riferiscono alla differenza di coordinate tra due punti qualsiasi, A e B . L'espressione diventa perciò:

$$c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$$

Dove $\Delta x = x_B - x_A$ e analogamente per le altre coordinate.

Definendo il *quadrintervallo*, o *intervallo invariante*:

$$\Delta s = \sqrt{c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}$$

abbiamo perciò:

$$\Delta s = \Delta s'$$

È perciò uguale in qualunque sistema di riferimento lo si calcoli (da cui il nome “invariante”).

Si noti che, poiché $(\Delta s)^2$ può essere negativo, Δs può essere (orribilmente)

immaginario. Ma non ci si faccia troppo caso.

Qual è l'utilità di questa quantità? Ebbene, se due eventi sono tali che si possa passare dall'uno all'altro viaggiando a velocità inferiori a quella della luce (ad esempio, gli eventi A e C in figura 15), abbiamo:

$$(\Delta s)^2 > 0$$

La distanza si dice *timelike* (o *di tipo tempo*), perché esiste un sistema di riferimento (in questo caso O') in cui i due eventi sono nello stesso luogo (stessa coordinata x') ma a tempi diversi.

Invece, se due eventi sono tali che si può passare da uno all'altro solo viaggiando a velocità superiori a quella della luce (il che, come abbiamo detto, è fisicamente impossibile), come ad esempio gli eventi A e B in figura 15, abbiamo:

$$(\Delta s)^2 < 0$$

La distanza si dice *spacelike* (o *di tipo spazio*), perché esiste un sistema di riferimento (in questo caso O') in cui i due eventi sono nello stesso tempo (stessa coordinata t') ma in luoghi diversi.

Esiste ancora un caso. Ci sono coppie di eventi tali che solo viaggiando alla velocità della luce si può passare dall'uno all'altro: è il caso dei punti A e D , in figura 15. In questo caso si ha:

$$(\Delta s)^2 = 0$$

La distanza si dice *lightlike* (o *di tipo luce*), perché in tutti i sistemi di riferimento una particella che va da A a D si sta muovendo alla velocità della luce, proprio come postulato da Einstein per ottenere la teoria.

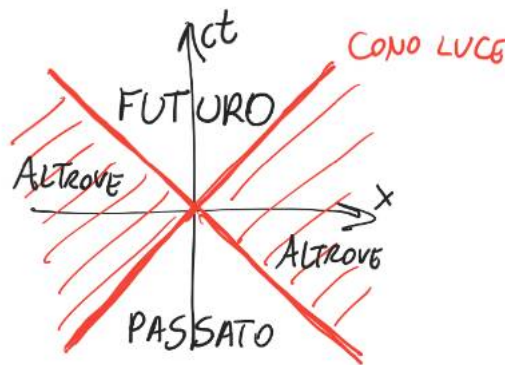


Figura 16: Dato un evento, si definiscono il suo Futuro e il suo Passato come le regioni comprese nel Cono Luce, ovvero gli eventi che possono scambiare fotoni con l'evento considerato.

Dato un qualunque evento A , possiamo dividere tutti gli altri punti dello spaziotempo nei seguenti quattro insiemi:

1. I punti con $(\Delta s)^2 > 0$ che vengono influenzati causalmente da A . Essi costituiscono il *Futuro* di A .
2. I punti con $(\Delta s)^2 > 0$ che influenzano causalmente da A . Essi costituiscono il *Passato* di A .
3. I punti con $(\Delta s)^2 = 0$. Essi costituiscono il *Cono Luce*, o *Cono Causale*, di A . Questi punti sono disposti a formare un doppio cono (anche questo potrebbe essere diviso in Cono Luce Passato e Cono Luce Futuro).
4. I punti con $(\Delta s)^2 < 0$. Essi sono simultanei, passati o futuri rispetto ad A a seconda del sistema di riferimento, ma in ogni caso non sono né influenzati né influenzano A . Possono perciò essere chiamati *Altrove*.

1.5 La notazione dei quadrivettori

Quando si effettua un cambio di sistema di riferimento per mezzo di una rotazione, esistono quantità fisiche che non cambiano, ad esempio la temperatura: esse sono dette scalari. Esistono invece terne di quantità che cambiano insieme, ad esempio le tre componenti del campo elettrico $\mathbf{E}$ o del campo magnetico $\mathbf{B}$: essi si chiamano vettori (volendo essere sottili, $\mathbf{B}$ è uno *pseudovettore*, come il momento angolare e la velocità angolare, perché non cambia segno sotto riflessioni; tuttavia sotto rotazioni si comporta come un vettore, e solo questo ci interessa per il momento).

Ruotiamo gli assi xy di un sistema di riferimento bidimensionale, facendo una rotazione antioraria di θ . Se, date le coordinate di un punto (x, y) , voglio le nuove coordinate (x', y') , le posso ottenere nel modo seguente:

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y' = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$$

Se io ho un vettore bidimensionale $\mathbf{A}$ (cioè una freccia con una certa lunghezza!), le sue componenti lungo gli assi (cioè le sue proiezioni lungo gli assi) cambieranno allo stesso modo delle coordinate:

$$\begin{cases} A'_x = \cos(\theta)A_x - \sin(\theta)A_y \\ A'_y = \sin(\theta)A_x + \cos(\theta)A_y \end{cases}$$

È chiaro che A_x , da solo, è una quantità fisica che dipende da come sono stati scelti gli assi del sistema di riferimento. Invece, il vettore $\mathbf{A}$, inteso

come la freccia nello spazio, è indipendente dal sistema di riferimento: le sue componenti A_x ed A_y dipendono però dalla scelta degli assi x e y .

Immaginiamo di avere due vettori tridimensionali, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. È possibile definire una quantità, il prodotto scalare (le componenti dei vettori saranno indicate, invece che con x, y, z , con i numeri 1, 2, 3):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$$

Dove nell'ultimo passaggio è usato il simbolo di sommatoria, che dice di calcolare l'espressione $A_i B_i$ per i valori $i = 1, 2, 3$, e di sommare tutto insieme.

Si noti come, bizzarramente, anche se A_1, A_2 e A_3 cambiano col cambiare del sistema di coordinate, e altrettanto per le componenti di $\mathbf{B}$, miracolosamente questa espressione non cambia!

Provando a porre $A = B$ otteniamo:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \sum_{i=1}^3 A_i A_i$$

che non è altro che il teorema di Pitagora.

Perché abbiamo ripetuto queste ovvietà? Perché ora, oltre alle rotazioni, possiamo effettuare dei boost: invece che mescolare una componente x con una componente y , con i boost mescoleremo una componente x con una componente t . Ma procediamo con ordine.

Poniamoci in un sistema di riferimento spaziotemporale xt , ed effettuiamo un boost di angolo iperbolico ψ in questo verso: rispetto al nuovo sistema di riferimento O' , l'origine del vecchio sistema O si sta muovendo in avanti con velocità $v_x = +c \tanh(\psi)$ (ricordo che $\beta = \tanh(\psi)$). Se, date le coordinate di un punto (x, t) , voglio le nuove coordinate (x', t') , le posso ottenere nel modo seguente:

$$\begin{cases} x' = \cosh(\psi)x + \sinh(\psi)t \\ t' = \sinh(\psi)x + \cosh(\psi)t \end{cases}$$

È possibile che esistano quantità $\mathbf{A}$ (cioè una freccia con una certa lunghezza!) tali che le sue componenti lungo gli assi (cioè le sue proiezioni lungo gli assi) cambieranno allo stesso modo delle coordinate:

$$\begin{cases} A'_x = \cosh(\psi)A_x - \sinh(\psi)A_t \\ A'_t = \sinh(\psi)A_x + \cosh(\psi)A_t \end{cases}$$

È chiaro che A_x , da solo, è una quantità fisica che dipende da come sono stati scelti gli assi del sistema di riferimento. Invece, l'oggetto $\mathbf{A}$, inteso come la freccia nello spazio, è indipendente dal sistema di riferimento: le sue componenti A_x ed A_t dipendono però dalla scelta degli assi x e t .

Immaginiamo di avere due oggetti di questo tipo in quattro dimensioni, A e B . È possibile definire una quantità, il prodotto scalare (le componenti dei vettori saranno indicate, invece che con x, y, z , con i numeri 1, 2, 3):

$$A \cdot B = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3$$

Si noti come, bizzarramente, anche se A_0, A_1, A_2 e A_3 cambiano col cambiare del sistema di coordinate, e altrettanto per le componenti di B , miracolosamente questa espressione non cambia!

Provando a porre $A = B$ otteniamo:

$$A \cdot A = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = A_0^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$$

dove abbiamo esplicitato il fatto che gli ultimi tre termini corrispondono al prodotto scalare tra vettori tridimensionali.

Abbiamo utilizzato la convenzione di segni $(+ - - -)$. Avremmo ugualmente potuto cambiare il segno davanti a tutto, usando la convenzione $(- + + +)$, che sembra più facile perché c'è un solo segno negativo; più avanti vedremo perché, per questa dispensa, è più comoda la nostra scelta. Nella letteratura vengono utilizzare entrambe.

L'oggetto A , che sotto rotazioni e boost trasforma come le coordinate, si chiama *quadrivettore*. È utile quanto il concetto di vettore: raggruppa tra loro quantità che, sotto cambio di sistema di riferimento, non trasformano da sole ma si mescolano.

Vorremmo tanto poter scrivere

$$\sum_{\mu=0}^3 A_\mu B_\mu = +A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

(dove usiamo le lettere greche per gli indici che vanno da 0 a 3), ma non è possibile, perché qui tutti i segni sono positivi! Che fare? Si usa il seguente trucco. Si definisce il quadrivettore A^μ (*non è un esponente!*), con le seguenti componenti:

$$A^0 = +A_0, A^i = -A_i$$

dove ricordiamo che $i = 1, 2, 3$. Oppure, volendo esprimere il fatto che la trasformazione è lineare:

$$A^\mu = \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} A_\nu$$

dove la funzione $g^{\mu\nu}$ ha i seguenti valori:

$$\begin{cases} g^{00} = +1 \\ g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1 \\ g^{\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad \text{se } \mu \neq \nu$$

Allo stesso modo esiste una funzione che abbassa gli indici:

$$A_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} A^\nu$$

Le cui componenti sono le stesse:

$$\begin{cases} g_{00} = +1 \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \\ g_{\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad \text{se } \mu \neq \nu$$

Possiamo ora scrivere:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu = +A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = \\ &= +A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 \end{aligned}$$

Non importa quale dei due indici alziamo, se quello di A o quello di B . L'importante è che uno sia su, così compare il segno meno quando si fa la somma.

Si vuole notare una cosa: se al posto dei $-$ si inseriscono dei $+$, l'espressione cambia col cambiare del sistema di riferimento!

L'intervallo invariante si può scrivere ora nel modo seguente:

$$(\Delta s)^2 = - \sum_{\mu=0}^3 \Delta x_\mu \Delta x^\mu$$

Rendendo chiaro il fatto che $(\Delta s)^2$ non cambia anche se cambio sistema di riferimento.

1.6 Quadrivelocità e quadrimpulso

Scopriremo che se applico un boost, alcune quantità che sembravano vettori - ad esempio l'impulso mv - si mescolano con quantità che sembravano scalari - ad esempio l'energia - andando a formare un quadrivettore che ha quattro componenti: la componente temporale è lo "scalare" e la componente spaziale è il vettore (ho messo tra virgolette perché è uno scalare rispetto alle rotazioni, non rispetto ai boost: un vero scalare rispetto ai boost resta invariante, e non si mescola con un vettore).

Non tutte le quantità però si comportano così. Ad esempio, il campo elettrico $\mathbf{E}$ e il campo magnetico $\mathbf{B}$. Infatti, le loro sei componenti si mescolano tra loro in un modo diverso. Lo scopriremo in seguito.

Definiamo per ora il *tempo proprio*:

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta s)^2/c^2$$

Se si rende infinitesima la distanza tra i due punti di cui si sta considerando l'intervallo, si ottiene:

$$d\tau = \sqrt{ds^2}/c = \sqrt{+dt^2 - \frac{dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}$$

notiamo che, se un corpo viaggia tra i due punti in questione, il tempo che scorre nel sistema di riferimento di quel corpo è proprio $d\tau$, perciò il nome "tempo proprio" è appropriato. Si ricorda che è sempre $d\tau < dt$.

Molto importante è ricordare che il tempo proprio è invariante, ovvero *non cambia se cambio il sistema di riferimento in cui lo calcolo!* Proprio in questo sta la sua importanza!

Proviamo a costruire un quadrivettore che si comporti come la velocità. Definiamo:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Questo è senza dubbio un quadrivettore, in quanto dx^μ è un quadrivettore infinitesimo (di componenti $c dt$, dx , dy e dz) e lo sto dividendo per una quantità invariante infinitesima, $d\tau$. Se avessi diviso per dt , poiché dt cambia sotto cambio di sistema di riferimento, non avrei ottenuto un quadrivettore, in quanto avrei avuto una cosa che cambia come un quadrivettore più una certa correzione!

La differenza tra usare dt e $d\tau$ appare solo a velocità vicine a quelle della luce.

Si noti infine che la quadrivelocità ha le unità di misura di una velocità.

Immaginiamo, per semplicità, di avere un corpo che si muove a velocità v

lungo l'asse x . Le componenti di u^μ sono:

$$\begin{cases} u^0 = c \frac{dt}{d\tau} = \gamma c \frac{dt}{dt} = \gamma c \\ u^1 = \frac{dx}{d\tau} = \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma v \end{cases}$$

La lunghezza del quadrivettore è, ricordiamo, la radice quadrata del prodotto scalare del quadrivettore con se stesso, il quale è:

$$\sum_{\mu=0}^3 u_\mu u^\mu = u^0 u^0 - u^1 u^1 = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2$$

Il quadrivettore $u^\mu = (\gamma c, \gamma v)$ si chiama *quadrivelocità*, ed è un'estensione del concetto di velocità. È chiaro che, per $v \ll c$, il quadrivettore assume, al second'ordine, la forma $u^\mu = (c, v)$.

Nel sistema di riferimento O' in cui il corpo è fermo, la quadrivelocità vale ovviamente $u'^\mu = (c, 0)$.

Intuitivamente, si tratta di un quadrivettore di "lunghezza" c (intesa come la norma) che è allineato con l'asse temporale del sistema di riferimento del corpo in movimento.

Ricordando che $\tanh \psi = v$, $\coth \psi = \gamma$, possiamo scrivere:

$$u^\mu = (c \cosh \psi, c \sinh \psi)$$

Così come ruotando un sistema di riferimento, le componenti di un vettore cambiano con il seno e il coseno; così effettuando un boost le componenti di un quadrivettore effettuano una rotazione iperbolica.

Per semplicità abbiamo affrontato solo il caso bidimensionale, lasciando sottinteso che le altre componenti fossero nulle. Il caso generale è: $u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$, dove abbiamo rappresentato insieme le tre componenti spaziali.

Vorremmo ora definire un quadrivettore che estenda il concetto di impulso mv , dove m è la massa a riposo della particella (quindi la massa misurata a velocità basse, in cui vale l'usuale meccanica classica). La proposta più facile è questa:

$$p^\mu = m u^\mu$$

Otteniamo un quadrivettore di componenti $(\gamma mc, \gamma m \mathbf{v})$, che per $v \ll c$ si riduce a $(mc, m \mathbf{v})$ al second'ordine. Nel sistema di riferimento O' del corpo in movimento, abbiamo $p'^\mu = (mc, \mathbf{0})$. Si tratta perciò di un quadrivettore *di tipo tempo* (esiste un sistema di riferimento in cui ha solo la componente

temporale). Possiamo porci la seguente domanda: qual è la componente temporale del quadrimpulso, con cui l'impulso si mescola? Risponderemo a questa domanda in seguito.

Veniamo ora al problema fondamentale. Stiamo cercando le equazioni della meccanica relativistica. Sappiamo che in meccanica classica valeva:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Sappiamo però che le equazioni della fisica devono essere invarianti per cambio di sistema di riferimento. Quindi non possono contenere vettori, ma quadrivettori! Infatti, effettuando un boost, i vettori si mescolano con un'altra quantità esterna (che sembrava uno scalare), mentre i quadrivettori restano costanti: cambiano solo le loro componenti.

Sembra naturale, ora che abbiamo una versione generalizzata dell'impulso - ovvero il quadrimpulso - scrivere:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

Abbiamo inserito il tempo proprio $d\tau$ perché il tempo dt non è un invariante: dipende dal sistema di riferimento! Avremmo avuto un'equazione con il lato sinistro che trasforma come un quadrivettore e un lato destro che trasforma come un quadrivettore più una correzione... non sarebbe stata un'equazione invariante sotto cambio di sistema di riferimento.

La domanda è: qual è F^μ ? Come fece Newton in meccanica classica, non risponderemo a questa domanda: l'espressione delle forze va trovata sperimentalmente.

Ci si attende che, se abbiamo un sistema di particelle isolato con l'esterno, le quadri forze F^μ tra le particelle si annullino tra loro (come nella terza legge di Newton). Ci aspettiamo perciò che *in un sistema isolato la forza totale sia uguale a zero*:

$$F_{\text{tot}}^\mu = 0$$

quindi *in un sistema isolato il quadrimpulso totale si conserva*:

$$P_{\text{tot}}^\mu = \text{cost.}$$

Ritornando all'equazione fondamentale della meccanica relativistica

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

potremmo essere preoccupati dal fatto che abbiamo quattro equazioni e non tre. È comparsa un'equazione in più?, oppure non è un'equazione indipendente dalle altre tre? Vediamo perciò che cosa afferma l'equazione nel caso

$\mu = 0$, nel limite $v \ll c$ (ovvero: trascurando tutti i fattori γ). Per abituarsi a fare i conti, farò il limite solo alla fine.

Definiamo la *quadriaccelerazione*:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$$

Usando il fatto che:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{du^\mu}{d\tau} &= \gamma \frac{du^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = \gamma (\gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} c, \gamma^3 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{v} + \gamma \dot{\mathbf{v}}) = \\ &= \gamma (\gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}, \gamma^3 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v}/c + \gamma \mathbf{a}) \end{aligned}$$

Dove $\mathbf{a} = a\hat{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{x}/dt^2$ è l'accelerazione usuale, che dipende dal sistema di riferimento scelto. Vediamo come, per $v \ll c$, abbiamo che $a^\mu \approx (0, \mathbf{a})$.

Poniamoci ora in un sistema di riferimento inerziale O' , che *per un istante* è il sistema di riferimento del corpo (ricordiamo che il corpo sta accelerando!, quindi il suo sistema di riferimento non è inerziale!). Questo sistema si chiama *sistema di riferimento incipiente* ed è mostrato in figura 17.

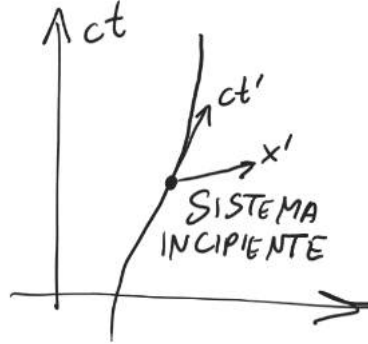


Figura 17: Dato un corpo più lento della luce che segue una certa traiettoria, il sistema incipiente è il sistema che istantaneamente vede il corpo fermo: ct' è tangente alla traiettoria, e l'inclinazione di x' viene dedotta univocamente.

Nel sistema incipiente, si ha $v' = 0$, abbiamo $a^\mu = (0, \mathbf{a}')$ dove $\mathbf{a}'$ è l'accelerazione del corpo misurata nel sistema di riferimento O' , nell'istante in

cui il corpo ha come sistema di riferimento O' . Essa si chiama *accelerazione propria*, in quanto è l'accelerazione fisicamente sentita dal corpo. Se il corpo è un'astronave, e all'interno si lascia libero un oggetto, l'accelerazione propria è l'accelerazione con cui si vede cadere l'oggetto usando le coordinate dell'astronave.

Si tratta di un quadrivettore *di tipo spazio* (esiste un sistema di riferimento in cui ha solo la componente spaziale). Il quadrivettore è lungo l'asse spaziale del corpo in movimento, e la sua lunghezza è proporzionale all'accelerazione misurata nel sistema incipiente.

Si sarà notato che nel sistema incipiente $u^\mu = (c, \mathbf{0})$ e $a^\mu = (0, \mathbf{a})$. Il prodotto scalare è dunque nullo, $u^\mu a_\mu = 0$, perciò è nullo in tutti i sistemi di riferimento. La cosa non deve sorprendere:

$$u^\mu u_\mu = c^2 \implies 0 = \frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 2u^\mu a_\mu$$

Il nostro obiettivo era però trovare il significato fisico della quarta equazione della meccanica relativistica. Ricordando che m è definita come la massa a riposo della particella, e dunque è una costante:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = ma^\mu = m\gamma(\gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}, \gamma^3(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}/c + \gamma \mathbf{a})$$

Abbiamo già visto che per $\mu = 1, 2, 3$ otteniamo, all'ordine più basso in $v/c \ll 1$, l'equazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Invece, nell'equazione con $\mu = 0$, otteniamo:

$$F^0 \approx \boldsymbol{\beta} \cdot m\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} \cdot m\mathbf{a}}{c} \approx \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c}$$

A basse velocità cF^0 è dunque il lavoro compiuto dalla particella sotto l'azione della forza esterna!, o la potenza!

Dunque la componente p^0 , sul cui significato ci eravamo interrogati in precedenza, se moltiplicata per c corrisponde all'energia: in tal modo la potenza cF^0 è la derivata temporale dell'energia, come atteso. È proprio così? Espandendo in $v/c \ll 1$:

$$\begin{aligned} cp^0 = \gamma mc^2 &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \dots \right) = \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \dots \end{aligned}$$

Notiamo che, eccetto aver cambiato lo zero dell'energia (avendolo posto uguale a mc^2 , un'energia che la particella possiede anche quando $v = 0$), all'ordine più basso abbiamo proprio l'energia cinetica della particella, cioè $mv^2/2$. Dunque possiamo scrivere:

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$$

dove $\mathbf{p} = \gamma mv \neq mv$ è l'impulso in relatività speciale, e $E = \gamma mc^2$ è l'energia in relatività speciale, compresa l'energia a riposo mc^2 .

Noi sapevamo:

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2$$

Ma si può anche scrivere:

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$$

Abbiamo perciò la famosa *relazione di dispersione*, ovvero un'equazione che lega la massa, l'impulso e l'energia di una particella:

$$E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2$$

Si ricorda che in meccanica classica la relazione di dispersione era invece:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

La relazione di dispersione è importantissima per risolvere i problemi. Un'altra relazione importante nei problemi è la seguente:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E}$$

che si verifica banalmente inserendo le definizioni di $\mathbf{p}$ ed E .

Spesso, nei problemi, è conveniente mettersi nel sistema di riferimento in cui il quadrimpulso totale $P_{\text{tot}}^\mu = \sum_k p_k^\mu$ (ottenuto sommando su tutte le particelle $k = 1, 2, \dots, N$) è puramente temporale:

$$P_{\text{CM}}^\mu = (E_{\text{CM}}/c, \mathbf{0})$$

Questo sistema viene detto *sistema del centro di massa*, e la quantità E_{CM} è l'energia totale del sistema calcolata nel sistema del centro di massa.

Come si fa a capire qual è il sistema del centro di massa? Un modo è il seguente: calcolo l'impulso totale:

$$P^\mu = (E/c, \mathbf{P})$$

e faccio un cambio di sistema di riferimento, un boost di β_{CM} , imponendo che il nuovo impulso totale sia zero nel nuovo sistema:

$$0 = P'^\mu = \gamma_{\text{CM}}(P - \beta_{\text{CM}}E/c)$$

trovando così:

$$\beta_{\text{CM}} = Pc/E$$

Poiché $E = \sqrt{M^2c^4 + P^2c^2}$ (relazione di dispersione relativistica), il β_{CM} è sempre minore di 1, a parte nel caso in cui la massa totale $M = 0$, ovvero quando tra energia totale e impulso totale vale la relazione $E = Pc$.

Questo si verifica, ad esempio, con i fotoni. I fotoni, che affronteremo brevemente nel seguente paragrafo.

Una breve nota. Ci si rende conto che non si può effettuare un boost con $\beta = 1$, perché $\psi = +\infty$. Inoltre nella nuova coordinata temporale il tempo non scorrerebbe: $\Delta t' = \Delta t/\gamma = \Delta t/\infty = 0$. Inoltre in questo sistema vedremmo la luce *ferma*, mentre abbiamo derivato la teoria della relatività speciale assumendo che in ogni sistema di riferimento la luce si muove a velocità c !

Un'altra breve nota. È chiaro che una particella di massa M può decadere in due o più particelle solo se la somma delle masse di queste particelle è *minore* di M .

Il motivo è chiaro se ci si pone nel sistema del centro di massa. In questo caso all'inizio la massa M è ferma, quindi $P^\mu = (Mc, \mathbf{0})$. In un qualunque sistema abbiamo:

$$P^0/c = \sum_i \gamma_i m_i c > \left(\sum_i m_i \right) c$$

dove sto sommando sulle particelle che compongono il sistema.

In pratica, parte dell'energia iniziale Mc^2 si trasforma in energia cinetica, quindi l'energia a riposo delle particelle è minore dell'energia iniziale.

1.7 Fotoni ed effetto Doppler

Ci sono circostanze in cui la luce, che le equazioni di Maxwell trattano come costituita da onde, manifesta alcune proprietà delle particelle. Queste circostanze sono studiate dalla meccanica quantistica. Tali particelle vengono chiamate quanti di luce, o fotoni.

Un modo per derivarne le proprietà è il seguente. Sappiamo che la loro massa è nulla. Effettuando il limite $m \rightarrow 0$ nella relazione di dispersione relativistica

$$E = m^2c^4 + p^2c^2$$

si ottiene:

$$E = pc$$

Colgo l'occasione per ricordare che in meccanica quantistica l'energia di un fotone è proporzionale alla frequenza:

$$E = \hbar\omega = \frac{h}{2\pi}\omega = h\nu$$

Il limite con il quale si ottiene il fotone può essere visto anche nel seguente modo: si manda $m \rightarrow 0$ e $\gamma \rightarrow +\infty$ in modo che il loro prodotto, proporzionale all'energia, resti costante:

$$E = \gamma mc^2 = h\nu$$

Si può definire anche il numero d'onda $k = 2\pi/\lambda$. Ricordando che $\lambda\nu = c$, abbiamo:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

Possiamo definire il quadrivettore k^μ :

$$k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$$

Esso è direttamente proporzionale all'impulso:

$$p^\mu = \hbar k^\mu$$

Si può verificare che, se ho un insieme di fotoni tutti con la stessa direzione e lo stesso verso, $E_{\text{tot}} = cP_{\text{tot}}$, mentre non è così se i fotoni hanno direzioni diverse (esercizio).

Visto che abbiamo introdotto i fotoni, approfittiamone per descrivere la forma relativistica di un fenomeno classico ben noto, l'effetto Doppler.

Immaginiamo di avere un emettitore E che emette un'onda a velocità c , e un ricevitore R che la riceve. L'unica cosa che conta è la velocità relativa tra l'emettitore E *quando emette il segnale* e il ricevitore R *quando riceve il segnale*. Anzi, neppure: conta solo la proiezione di questa velocità relativa *lungo la direzione di propagazione dell'onda ricevuta*.

È sufficiente fare un diagramma spaziotemporale per accorgersi che la causa dell'effetto è che, nel sistema di riferimento inerziale in cui l'emettitore E è fermo (o se l'emettitore E si muove in modo non inerziale, prendo il sistema di riferimento incipiente), i due fronti d'onda successivi arrivano all'emettitore con un certo periodo T , ma tra l'arrivo dei due fronti d'onda l'emettitore si è mosso!, e quindi se si allontana si misurerà un periodo $T(1 + v/c) > T$,

altrimenti un periodo $T(1 - v/c) < T$ (v è la componente della velocità del ricevitore misurata nel sistema incipiente all'emettitore, parallela alla direzione di propagazione delle onde ricevute dal ricevitore).

In relatività speciale, la situazione si complica: il tempo scorre in modo diverso per emettitore e ricevitore.

Proviamo a risolvere un caso semplice: emettitore fermo e ricevitore che si allontana lungo l'asse x a velocità v .

Ora che abbiamo introdotto il quadrivettore k^μ è facile. Scriviamone il valore per l'onda vista nel sistema di riferimento O dell'emettitore (lavoriamo solo nel piano tx):

$$k^\mu = (k, k)$$

(ricordiamo che $\omega/c = k$ a causa della relazione di dispersione!)

Effettuiamo un boost lungo l'asse x , stando attenti al segno (ricordiamo che il ricevitore si *allontana* a velocità v):

$$\begin{cases} k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k^1) = \gamma(1 - \beta)k \\ k'^1 = \gamma(k^1 - \beta k^0) = \gamma(1 - \beta)k \end{cases}$$

Quindi (ragionando con $\omega = k/c$):

$$\omega' = \gamma(1 - \beta)\omega = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}\omega$$

Vediamo che, se $\beta \ll 1$, recuperiamo l'effetto Doppler classico $\omega' = (1 - \beta + O(\beta^2))\omega$.

Si tracci un grafico della funzione ottenuta per $-1 < \beta < 1$, e si discuta la differenza rispetto al caso classico (esercizio).

Il caso che abbiamo affrontato non è il caso generale. In particolare, in relatività speciale esiste l'effetto Doppler trasverso: se nell'origine degli assi ho l'emettitore, fermo, e il ricevitore viaggia a velocità costante v lungo la retta $x = 1$, allora anche quando $y = 0$ è presente un effetto Doppler. Il motivo è chiaro: in relatività speciale il tempo per il ricevitore scorre più lentamente! Tra l'arrivo di due fronti d'onda, in cui per l'emettitore passa il tempo T , per il ricevitore scorre meno tempo: T/γ . Perciò il ricevitore percepisce i fronti d'onda più vicini, e misura una frequenza maggiore. Poiché questo è l'unico effetto, si ha:

$$\omega' = \gamma\omega$$

Si può ricavare questo risultato anche facendo un boost lungo y . Lo si faccia (esercizio). Si provi infine a calcolare il valore dell'effetto Doppler quando la velocità del ricevitore e la direzione di propagazione dell'onda ricevuta sono disallineati e formano un angolo θ_E *nel sistema di riferimento inerziale dell'emettitore* (ricordo che gli angoli non sono uguali nei due sistemi di riferimento!).

Corre voce (lo dice Wikipedia) che il risultato sia il seguente:

$$\omega' = \gamma(1 - \beta \cos(\theta_E))\omega$$

1.8 Moto Iperbolico

In meccanica classica, un moto uniformemente accelerato ($dp/dt = \text{cost.}$) in un diagramma spaziotemporale traccia una parabola, ed è detto perciò moto parabolico. In relatività speciale, un moto uniformemente accelerato traccia nel diagramma spaziotemporale un'iperbole equilatera (i due asintoti sono ad angolo retto), ed è chiamato *moto iperbolico*.

Innanzitutto, dovremmo capire che cosa si intende in relatività speciale per moto *uniformemente accelerato*. È chiaro che non si intende l'accelerazione $a = d^2x/dt^2$, in un certo sistema di riferimento O , perché questa non può certo restare costante!, o in un tempo c/a si supererebbe la velocità della luce. Si ricorderà che abbiamo introdotto il concetto di accelerazione propria: per un'astronave, è l'accelerazione che subiscono tutti i corpi (comprese le persone!) all'interno dell'astronave a causa del fatto che il sistema di riferimento non è inerziale. Inoltre è la componente vettoriale della quadriaccelerazione, se misurata nel sistema di riferimento incipiente:

$$a_{\text{incip}}^\mu = (0, \mathbf{a})$$

Vediamo bene che dobbiamo imporre

$$a_{\text{incip}}^\mu = \text{cost.} = a$$

Poiché ci aspettiamo che la soluzione sia geometrica, usiamo le funzioni iperboliche.

Sappiamo che:

$$\begin{aligned} u^\mu &= c(\cosh(\psi), \sinh(\psi)) \\ a^\mu &= \frac{du^\mu}{d\tau} = c(\sinh(\psi), \cosh(\psi)) \frac{d\psi}{d\tau} \end{aligned}$$

Dobbiamo ora calcolare a^μ nel sistema di riferimento incipiente:

$$\begin{cases} a_{\text{incip}}^0 = +\cosh(\psi)a^0 - \sinh(\psi)a^1 = 0 \\ a_{\text{incip}}^1 = -\sinh(\psi)a^0 + \cosh(\psi)a^1 = c \frac{d\psi}{d\tau} \end{cases}$$

con

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \text{cost.} = a$$

A questo punto integrare u^μ per avere la traiettoria è facilissimo:

$$x^\mu(\tau) = \int^\tau u^\mu(\bar{\tau}) d\bar{\tau} = c \frac{d\tau}{d\psi} (\sinh(\psi), \cosh(\psi)) = \frac{c}{a} (\sinh(a\tau), \cosh(a\tau))$$

Dove ho usato $\bar{\tau}$ per indicare la variabile d'integrazione.

Ovviamente, al variare di τ da $-\infty$ a $+\infty$, otteniamo un ramo di iperbole.

Il risultato è così bello che potremmo domandarci se non c'era un modo più facile e intuitivo di ottenerlo.

Ho pensato a questo. Prendiamo un corpo che nel sistema incipiente accelera di accelerazione a . Se parte da fermo nel punto A: $(x, 0)$, in un tempo ϵ arriverà nel punto B: $(x + a\epsilon^2/2 + O(\epsilon^3), c\epsilon + O(\epsilon^3))$, dove ho dato le coordinate (x, ct) per non creare problemi dimensionali. Le correzioni sono dovute al fatto che, col cambiare del sistema incipiente, nel sistema incipiente iniziale O l'accelerazione non resta a e il tempo non scorre sempre allo stesso modo. Tuttavia, come si vede, queste correzioni sono piccole.

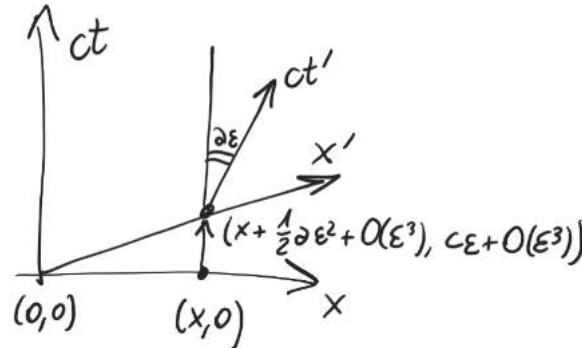


Figura 18: Un corpo parte nel punto $(x, 0)$ e subisce accelerazione costante a . In un tempo infinitesimo ϵ raggiunge il punto indicato, x' si inclina un poco, ed è possibile scegliere il numero x in modo che l'asse x' incroci l'asse x nell'origine delle coordinate.

Ora, alla fine di questo intervallo ϵ , si consideri il sistema di riferimento incipiente O' . L'asse x' va a intersecarsi con l'asse x . La pendenza infinitesima è $\approx \psi \approx \tanh(\psi) = \beta = a\epsilon/c + O(\epsilon^3)$ (un angolo iperbolico infinitesimo è indistinguibile da un angolo infinitesimo normale: si vada a rivedere la definizione di angolo iperbolico in termini di area).

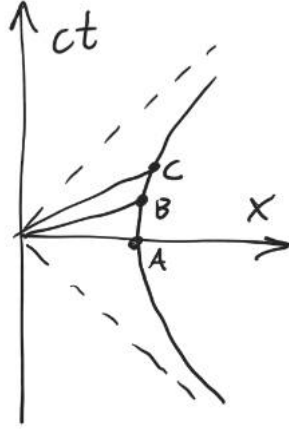


Figura 19: I vari punti $A, B, C \dots$ raggiunti dal corpo in moto uniformemente accelerato, sono raggiungibili da A attraverso dei boost, e quindi giacciono su un'iperbole.

Vogliamo che l'intersezione avvenga nel punto $(0, 0)$, e gli altri vertici del triangolo di pendenza $a\epsilon/c + O(\epsilon^3)$ sono: $(x, 0)$ e $(x + O(\epsilon^2), c\epsilon + O(\epsilon^3))$. Abbiamo dunque:

$$x = c^2/a + O(\epsilon^2)$$

In effetti questo non sorprende: per analisi dimensionale, è l'unica lunghezza che si può costruire usando il dato del problema (l'accelerazione a) e l'ubiqua costante della teoria, c .

A questo punto, il mio ragionamento è il seguente. Effettuo un boost verso il sistema di riferimento O' , e ho che il punto B viene mandato nel punto A , con coordinate $(x', ct') = (c^2/a, 0)$, con un errore di al massimo $O(\epsilon^2)$.

Ora ripeto il ragionamento e trovo il punto C . Effettuo un nuovo boost. Continuo così per $\approx 1/\epsilon$ volte, e ho dunque che tutti i punti raggiungibili in un tempo finito hanno, con un boost, le coordinate $(c^2/a, 0)$ con un errore di al massimo $O(\epsilon)$. Ora faccio il limite $\epsilon \rightarrow 0$ di infinite suddivisioni, e trovo che hanno *esattamente* coordinate $(c^2/a, 0)$.

Ma che cosa significa che con un boost tutti i punti possono avere coordinate $(c^2/a, 0)$? Significa che la traiettoria è l'insieme dei punti in cui viene mandato il punto $(c^2/a, 0)$ effettuando un boost! Con un boost di angolo iperbolico ψ abbiamo:

$$\frac{c^2}{a}(\cosh(\psi), \sinh(\psi))$$

che, al variare di ψ , traccia proprio un'iperbole.

Si noti che abbiamo trovato la traiettoria, ma non il tempo impiegato. Tuttavia, visto che nel passare dal punto A al punto B , dal punto B al punto

C, eccetera, percorrevamo sempre lo stesso angolo iperbolico $d\psi = a\epsilon/c$ e impiegavamo lo stesso tempo proprio ϵ (è il tempo del sistema di riferimento incipiente, e con un errore molto piccolo è proprio il tempo passato per il corpo!), abbiamo:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = a \Rightarrow \psi = a\tau/c$$

E la traiettoria al variare di τ è:

$$x^\mu(\tau) = \frac{c^2}{a} \left(\cosh \left(\frac{a\tau}{c} \right), \sinh \left(\frac{a\tau}{c} \right) \right)$$

1.9 Cenni di Elettromagnetismo

Ricorderemo come Einstein fu guidato, nella costruzione della teoria della relatività, dalla convinzione che la teoria dell'Elettromagnetismo scoperta da Maxwell fosse una legge fisica fondamentale, valida in tutti i sistemi di riferimento.

Questa teoria si fonda sulle quattro equazioni di Maxwell, qui scritte in forma differenziale:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Molto probabilmente siete più familiari con la forma integrale:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mathbf{I} + \frac{d}{dt} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Dove i cerchi sugli integrali servono a ricordare che si sta integrando lungo linee chiuse e superfici chiuse.

Rivediamo brevemente il significato fisico di queste leggi.

La prima è la *legge di Gauss*: il flusso di campo elettrico uscente da una superficie è proporzionale alla carica elettrica q contenuta nella superficie.

La seconda è la *legge di Gauss magnetica*: poiché non esistono cariche magnetiche (per quel che ne sappiamo), il flusso di campo magnetico uscente da una superficie è sempre nullo.

La terza è la *legge d'induzione di Faraday*: data una linea chiusa, se nella superficie in mezzo cambia il flusso magnetico, allora si crea del campo elettrico lungo la linea chiusa (il cui segno è tale da generare un campo magnetico che si opponga alla variazione di flusso).

La quarta è la *legge di Ampère e Maxwell*: data una linea chiusa, se nella superficie in mezzo passa corrente elettrica o se cambia il flusso del campo elettrico, allora si crea del campo magnetico lungo la linea chiusa.

Queste leggi permettono, date le cariche, di calcolare il campo elettrico e magnetico; inoltre permettono di sapere cosa fanno il campo elettrico e magnetico quando non ci sono cariche.

Se invece vogliamo sapere che cosa fanno le cariche in presenza di campo elettrico e magnetico, abbiamo bisogno della legge di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Con questa legge, abbiamo anche un modo per misurare sperimentalmente il valore del campo elettrico e magnetico in un punto: prendiamo una carica di prova (misurata in che modo? Per convenzione, direi), e vediamo che forza subisce se è ferma. Oppure proviamo a darle una velocità nelle varie direzioni, e vediamo che forza subisce. In questo modo, con poche misure, è possibile ottenere $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Ora, quello che non sappiamo, è che cosa succede in relatività speciale.

Non sappiamo se la carica q è uguale in tutti i sistemi di riferimento o se cambia. Perciò, non sappiamo come trasformano la densità volumica di carica ρ e la densità superficiale di corrente J . Inoltre, non sappiamo come trasformano $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$: sono componenti di un quadrivettore?, oppure trasformano in un altro modo? Quale?

Esporrò brevemente il modo in cui Einstein risolve il problema, e poi dirò come lo faremo noi.

Einstein è così sicuro che le equazioni di Maxwell valgano in ogni sistema di riferimento (visto che è la premessa da cui ha derivato la relatività speciale) che fa questo: prende la terza e la quarta equazione in assenza di cariche ($\rho, J = 0$). Ricordo che sono due equazioni vettoriali, quindi in realtà le equazioni sono sei. Scrive poi le variabili $xyzt$, che compaiono nelle derivate, in funzione delle variabili $x'y'z't'$ di un sistema di riferimento raggiunto con

un boost. Dopo molti conti, ottiene quindi delle equazioni dove $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono derivati rispetto alle variabili primarie. Ma queste equazioni devono essere uguali alle equazioni di Maxwell nel sistema O' , che sono come quelle di O ma con tutte le lettere primarie, anche i campi elettrico e magnetico! Trovando i termini corrispondenti nei due sistemi di equazioni, riesce a esprimere le componenti di $\mathbf{E}'$ e $\mathbf{B}'$ in termini delle componenti di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{B}$.

A questo punto ha scoperto come trasformano i campi elettrico e magnetico. Ora può introdurre di nuovo le cariche elettriche, e dedurre come trasformano le cariche elettriche.

Noi preferiamo seguire un approccio alternativo, che è forse meno diretto logicamente, ma richiede meno conti alla cieca e più ragionamento fisico, sia sull'elettromagnetismo che sulla relatività speciale.

L'idea è che, poiché l'elettromagnetismo è lineare (raddoppiando la carica, subisco il doppio della forza, eccetera), anche se la carica cambiasse con la velocità di qualche fattore ($q' = qf(\beta)$), nell'espressione della forza di Lorentz possiamo sempre inglobare $f(\beta)$ nei campi E' e B' *per definizione*:

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}'$$

È come in meccanica, quando abbiamo imposto che per m intendiamo la *massa a riposo* della particella. Allo stesso modo, abbiamo deciso per convenzione che q è la carica della particella misurata quando è a riposo.

Sicuri di questa definizione, possiamo capire come trasforma la densità volumica di carica:

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Il problema è che il volume infinitesimo dV non è un invariante di Lorentz: infatti, effettuando un boost, il volume si contrae: $dV' = dV/\gamma$. Inoltre, effettuando un boost di velocità $-v$ su una distribuzione di carica ferma, ovviamente compare una corrente. La densità superficiale di corrente che compare nel nuovo sistema, in cui tutte le cariche sembrano muoversi a velocità v , è ovviamente:

$$j' = \rho'v$$

Dove, per semplicità, stiamo considerando solo la componente parallela alla direzione in cui abbiamo fatto il boost. Stiamo perciò lavorando solo in due dimensioni.

Abbiamo perciò:

$$\begin{cases} c\rho' = \gamma c\rho + f(\beta)j \\ j' = \gamma\beta c\rho + g(\beta)j \end{cases}$$

Dove f, g sono funzioni non ancora note, perché $j = 0$. Tuttavia ci si attende che siano lineari. Come possiamo determinarle?

Proviamo a effettuare un boost all'indietro, di velocità v . Otteniamo:

$$\begin{cases} c\rho = c\rho'' = \gamma c\rho' + f(-\beta)j' = (\gamma^2 + f(-\beta)\gamma\beta)c\rho \\ 0 = j'' = -\gamma\beta c\rho' + g(-\beta)j' = (-\gamma^2\beta + g(-\beta)\gamma\beta)c\rho \end{cases}$$

Da cui si ottiene $f(-\beta) = -\gamma\beta$, dove usiamo il fatto che $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$, e $g(-\beta) = \gamma$. Abbiamo così:

$$\begin{cases} c\rho' = \gamma c\rho + \gamma\beta j \\ j' = \gamma\beta c\rho + \gamma j \end{cases}$$

Che è esattamente la legge con cui trasforma un quadrivettore! Definiamo perciò la quadricorrente:

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$$

Ora, l'idea è questa. Sapendo come trasformano le cariche e le correnti cambiando sistema di riferimento, e sapendo come le cariche e le correnti generano i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, possiamo calcolare nel nuovo sistema i campi $\mathbf{E}'$ e $\mathbf{B}'$ e vedere come sono collegati ai campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ del sistema precedente.

Tuttavia non è possibile usare un sistema qualsiasi: se ho una sfera carica, ed effettuo un boost, non ho una situazione stazionaria, con ρ' e j' costanti: ho una sfera che si muove, e i campi sono complicati. Bisogna perciò trovare situazioni altamente simmetriche in cui ρ, j, ρ' e j' sono costanti.

La prima situazione è questa. Abbiamo un filo di densità di carica lineare $\lambda = \rho S$ dove S è la superficie (infinitesima, se si vuole), rivolto lungo l'asse x . A distanza r lungo l'asse y si trova una carica di prova q . In questo sistema di riferimento O , il campo magnetico è nullo e abbiamo un campo elettrico uscente. Si calcoli il campo $\mathbf{E}$ in questo sistema, e poi si calcolino i campi $\mathbf{E}'$ e $\mathbf{B}'$ nel sistema di riferimento O' ottenuto effettuando un boost in avanti di velocità v . Si calcoli la forza di Lorentz che agisce sulla carica di prova effettuando i conti nei due sistemi (quindi, si calcolino F e F'). Vi aspettate che siano uguali?

Provate a fare il calcolo da soli prima di proseguire e leggere la soluzione: è un buon esercizio di elettromagnetismo (esercizio).

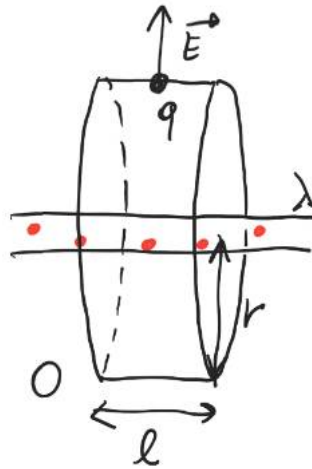


Figura 20: Nel sistema O ho un cavo carico e ho un campo elettrico radiale uscente.

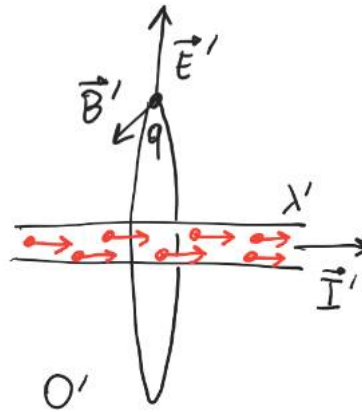


Figura 21: Nel sistema O' ho un cavo carico (con carica diversa dall'altro sistema) e con una corrente, perciò ho un campo elettrico radiale uscente e un campo magnetico che gira attorno al cavo.

Per calcolare $\mathbf{E}$, applichiamo il teorema di Gauss alla superficie di un cilindro di raggio r e di altezza l . Abbiamo:

$$2\pi r l E_y = \frac{\rho S}{\epsilon_0}$$

Da cui:

$$E = \frac{\rho S}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Per motivi di simmetria sappiamo che, dove ho posto la carica di prova, il campo elettrico non ha altre componenti oltre a E_y , e il campo magnetico è

nullo. Quindi:

$$F = qE = \frac{q\rho S}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Nel nuovo sistema, abbiamo $\rho' = \gamma\rho$, mentre $r' = r$ perché è ortogonale alla direzione del boost. Quindi:

$$E' = \gamma \frac{\rho S}{2\pi\epsilon_0 r}$$

La forza elettrica dunque è maggiore! Tuttavia, è anche apparsa una corrente $j' = \gamma\beta c\rho$. Applichiamo l'equazione di Ampère a un circuito di raggio r attorno al filo, stando attenti ai segni:

$$2\pi r B'_z = +\mu_0 I' = \mu_0 j' S$$

Abbiamo perciò:

$$B'_z = \frac{\mu_0 \gamma \beta c \rho S}{2\pi r} = \gamma \beta \frac{\rho S}{2\pi \epsilon_0 c r}$$

Dove ho usato $c = 1/\epsilon_0 \mu_0$. Per motivi di simmetria sappiamo che, dove ho posto la carica di prova, il campo elettrico non ha altre componenti oltre a E'_y , e il campo magnetico non ha altre componenti oltre a B'_z . Quindi (ricordando che la particella all'inizio è ferma, e quindi ora ha una velocità v dello stesso verso di j):

$$F' = qE' + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qE_y - qvB_z = \frac{q\rho S}{2\pi\epsilon_0 r}(\gamma - \gamma\beta^2) = \gamma qE$$

La forza calcolata nel nuovo sistema di riferimento è cambiata. Pensate al motivo per cui questo non è un problema: il tempo scorre in modo diverso nei due sistemi di riferimento.

Inoltre, se all'inizio la particella avesse avuto una velocità non nulla, ora la forza dovuta al campo magnetico sarebbe stata diversa: quindi non ci aspettavamo che uscisse lo stesso risultato.

Ci si può porre la domanda: la carica di prova si sta muovendo per effetto del campo elettrico oppure per effetto sia del campo elettrico che del campo magnetico? Ora è chiaro che la risposta a questa domanda *dipende dal sistema di riferimento*. Il campo elettrico e il campo magnetico sono due aspetti della stessa entità fisica: allo stesso modo di come E_x ed E_y sono due aspetti della stessa quantità, e la suddivisione in due componenti dipende dalla scelta degli assi x e y .

Studiamo ora il seguente problema. Prendiamo un solenoide cilindrico infinito, di raggio r , con asse lungo l'asse x , dove il numero di spire per unità di lunghezza è $n = dN/dx$. La corrente in ogni spira è $I = jS$, e circola in senso antiorario. Misuriamo i campi lungo l'asse del cilindro. In questo sistema di riferimento O , per motivi di simmetria è presente solo la componente B_x del campo magnetico; inoltre il campo elettrico è nullo.

Applichiamo il teorema di Ampère a un circuito a forma di rettangolo, in cui un lato passa per l'asse centrale del solenoide (percorrendolo nel verso positivo), e il lato opposto è esterno al solenoide, come in figura 23.

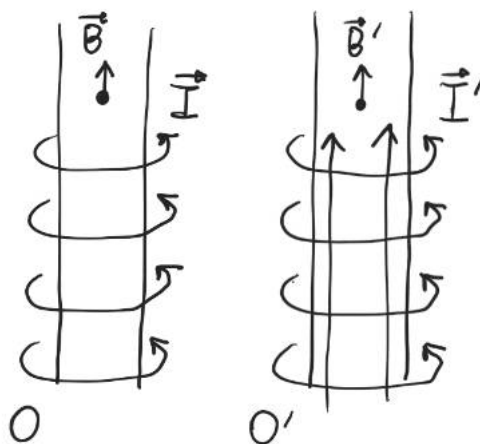


Figura 22: Nel sistema O la corrente del solenoide $\mathbf{I}$ è solo angolare, e genera il campo $\mathbf{B}$; nel sistema O' la corrente del solenoide $\mathbf{I}'$ è in parte longitudinale e in parte angolare, ma la prima non contribuisce al campo magnetico all'interno, mentre la seconda fornisce un campo $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

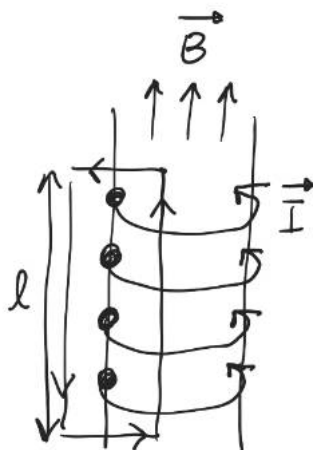


Figura 23: Il calcolo di $\mathbf{B}$ viene effettuato calcolando la circuitazione nel cammino rettangolare indicato.

Abbiamo:

$$B_x l = \mu_0 N I = \mu_0 n l I$$

Da cui:

$$B_x = \mu_0 n I$$

Effettuiamo un boost lungo l'asse x in modo che la carica presente nel solenoide acquisti una velocità v positiva lungo l'asse x . Per linearità, invece di avere una corrente che fa delle spirali sulla superficie del cilindro avanzando verso l'alto, possiamo immaginare di avere una corrente che viaggia ancora in

cerchi, *più* una corrente verticale.

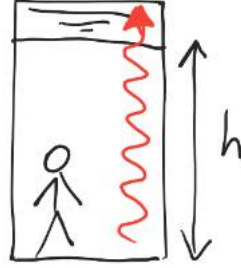


Figura 24: In un ascensore uniformemente accelerato verso l'alto, in assenza di gravità, si spara un fotone verso l'alto. Questo, per il principio di equivalenza, è analogo ad avere un ascensore fermo in presenza di gravità.

È facile vedere, per simmetria, che la corrente verticale non genera nessun campo magnetico lungo l'asse del cilindro. Tutti i contributi si annullano a vicenda.

Resta la componente della corrente che viaggia ancora in cerchi. Essa è, ovviamente:

$$B'_x = \mu_0 n' I'$$

Ora la corrente è la carica su unità di tempo: la carica nel nuovo sistema di riferimento è la stessa di prima, ma il tempo scorre in modo diverso:

$$I' = \frac{dq}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{dq}{dt} = \frac{I}{\gamma}$$

Invece, il numero di spire per unità di lunghezza, mentre il numero di spire ovviamente non cambia, cambiano le unità di misura della lunghezza:

$$n' = \frac{dN}{dx'} = \gamma \frac{dN}{dx} = \gamma n$$

Abbiamo perciò:

$$B'_x = \mu_0 n' I' = \mu_0 n I = B_x$$

Per simmetria, sappiamo che nel nuovo sistema non ci sono altre componenti del campo magnetico, e che il campo elettrico è nullo.

Abbiamo ora tutto ciò che ci serve per trovare le leggi di trasformazione dei campi.

Ricapitoliamo.

Sappiamo che, sotto un boost lungo x , il campo E_y si mescola solo il campo magnetico B_z (il campo E_y dà origine a E'_y e B'_z ; se facendo il boost contrario B_z si mescolasse con altre componenti, queste diventerebbero non nulle e avrei una contraddizione):

$$\begin{cases} E'_y = \gamma E_y + f(\beta) B_z \\ B'_z = \gamma \beta E_y + g(\beta) B_z \end{cases}$$

Dove f, g sono funzioni non ancora note, perché $B_z = 0$. Tuttavia, facendo il boost all'indietro, è possibile determinarle, come avevamo fatto per la quadricorrente. Il conto è identico, perciò viene:

$$\begin{cases} E'_y = \gamma E_y + \gamma \beta B_z \\ B'_z = \gamma \beta E_y + \gamma B_z \end{cases}$$

Ora, cambiamo i nomi degli assi effettuando una rotazione di un angolo retto attorno all'asse x : mandiamo y in z e z in $-y$, così che la terna resti destrorsa e non ci siano problemi con i prodotti vettoriali (oppure, si rifacciano gli stessi conti immaginando che la carica di prova non sia a distanza r lungo l'asse y , ma lungo l'asse z : è la stessa cosa).

Otteniamo:

$$\begin{cases} E'_z = \gamma E_z - \gamma \beta B_y \\ B'_y = -\gamma \beta E_z + \gamma B_y \end{cases}$$

Inoltre, abbiamo visto che il campo magnetico parallelo alla direzione del boost non si mescola con niente:

$$B'_x = B_x$$

Per esclusione, deduciamo che il campo elettrico non si mescola con niente; per non avere contraddizioni, dobbiamo avere:

$$E'_x = E_x$$

Abbiamo così trovato le regole di trasformazione per i campi elettrico e magnetico in relatività speciale! Esse possono essere messe in questa forma più compatta:

$$\begin{cases} E'_\parallel = E_\parallel \\ B'_\parallel = B_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp = \gamma \mathbf{E}_\perp - \gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_\perp \\ \mathbf{B}'_\perp = +\gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_\perp + \gamma \mathbf{B}_\perp \end{cases}$$

Vediamo come, potendo effettuare rotazioni e boost, tutte le componenti si mescolano con tutte le altre. Campo elettrico e campo magnetico sono due aspetti diversi della medesima entità, che viene detta *campo elettromagnetico*. Queste regole di trasformazione possono sembrare un po' complicate, ma questa è la forma più semplice per vederle. Inoltre, possono sembrarvi come date a caso: per quest'ultimo problema, esiste una notazione bellissima (quella del campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$), ma non rientra nello scopo di questa lezione.

1.10 Cenni di relatività generale

La relatività generale è l'attuale teoria della gravità.

Einstein sviluppò la relatività speciale nel 1905, e ben presto si accorse che era in contraddizione con la legge di gravitazione universale. Secondo Newton, la forza tra due corpi di massa m_1 ed m_2 è una forza attrattiva di modulo:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

Secondo Newton questa forza è istantanea, e la distanza r_{12} è la differenza delle posizioni delle due masse *nello stesso momento*. Ma in relatività speciale, la simultaneità dipende dal sistema di riferimento! È chiaro quindi che la teoria della gravità va modificata.

Einstein passò dieci anni a cercare la teoria corretta, e gli ultimi tre anni li impiegò a lottare contro le difficoltà interpretative della teoria, e alla fine ci riuscì.

Noi non studieremo la teoria che elaborò nel 1915, ma studieremo uno dei principi che guidò Einstein nella ricerca della teoria. Si tratta del *principio di equivalenza*.

Immaginate di trovarvi in un ascensore in caduta libera: vi sentireste senza peso. Oppure: immaginate di trovarvi in un ascensore in cui misurate un'accelerazione $-\mathbf{g}$ verso il basso. Più tardi, uscite dall'ascensore e vi accorgete di essere nell'astronave che si muove di moto iperbolico di cui abbiamo parlato in precedenza, e che l'astronave ha un'accelerazione propria di $+\mathbf{g}$.

Sembra quindi che non ci sia modo, senza aprire l'ascensore, di capire se ci troviamo in un ascensore fermo su un pianeta di gravità $-\mathbf{g}$ oppure se ci troviamo a bordo di un'astronave che sta in un sistema di riferimento non inerziale, uniformemente accelerato con accelerazione propria $\mathbf{g}$.

In realtà, un modo per distinguere i due casi ci sarebbe: la forza di gravità è rivolta verso il centro del pianeta, e se l'ascensore ci permette di porre due

masse a distanza d'un metro $d = 1$ m, avremo una differenza di angolo pari a:

$$\theta = \frac{d}{R_{\text{Terra}}} = \frac{1 \text{ m}}{6000 \text{ km}} \approx 1.6 \cdot 10^{-7}$$

Si tratta perciò di un effetto molto piccolo, che va a zero nel limite in cui il pianeta è infinitamente grande e infinitamente massivo, in modo che il campo gravitazionale sia esattamente $-\mathbf{g}$ all'interno dell'ascensore, rivolto sempre verso il basso, senza correzioni.

Enunciamo perciò il principio di equivalenza.

Il principio di equivalenza afferma che, facendo solo misure locali (cioè, senza aprire l'ascensore, e in una regione in cui il campo gravitazionale è uniforme), è impossibile distinguere la forza gravitazionale dalla “forza d'inerzia” tipica di un sistema di riferimento non inerziale.

Non si tratta di un principio originale. Newton stesso lo usa quando calcola l'orbita della Luna rispetto alla Terra: egli sa che entrambi i corpi subiscono la forza gravitazionale del Sole. Tuttavia, egli sa che Terra e Luna subiscono la stessa accelerazione:

$$a_T = \frac{F_{TS}}{m_T} = G \frac{m_S}{r_{TS}^2}$$

$$a_L = \frac{F_{LS}}{m_L} = G \frac{m_S}{r_{LS}^2} \approx G \frac{m_S}{r_{TS}^2}$$

Dove ho usato che $r_{TS} \approx r_{LS}$: la distanza tra Terra e Luna è di 3.8×10^8 km, mentre quella tra Terra e Sole è di 1.5×10^{11} km.

Il motivo è che la massa presente nella formula $F = ma$ (la “massa inerziale”, che chiameremo m) è uguale alla massa presente nella legge di gravitazione universale $F = GMm/r^2$ (la “massa gravitazionale”, che è per la gravità quello che la carica elettrica è per l'elettromagnetismo, e che per ora chiameremo q_G).

Immaginiamo di avere una qualunque forza come la gravità o l'elettromagnetismo, proporzionale alle “cariche” q_{G1} e q_{G2} e all'inverso del quadrato della distanza:

$$F = k \frac{q_{G1} q_{G2}}{r^2}$$

Due corpi sottoposti all'azione di un terzo corpo lontano subiscono la stessa accelerazione solo se il *rapporto tra carica e massa inerziale è costante*, cioè se:

$$\frac{q_{G1}}{m_1} = \frac{q_{G2}}{m_2}$$

Nell'elettromagnetismo questo non succede: un neutrone e un protone hanno circa la stessa massa inerziale, ma uno ha carica nulla e l'altro no.

In gravità, invece, sperimentalmente sembra che la “carica gravitazionale” o “massa gravitazionale” sia sempre proporzionale alla massa inerziale ($q_G = \alpha m$). La costante di proporzionalità può essere inglobata nella costante k ($G = k\alpha^2$), ottenendo così la legge di gravitazione universale:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Potremmo pensare che il fatto che la “carica gravitazionale” sia proporzionale alla massa inerziale sia solo una coincidenza: magari esiste un qualche materiale, che non conosciamo, per cui il rapporto è leggermente diverso. Un materiale simile, sotto effetto del Sole e delle galassie lontane, subirebbe un'accelerazione diversa rispetto alla materia normale. Un materiale simile non è stato mai trovato. Ai tempi di Einstein si sapeva, grazie agli esperimenti di Eötvös, che il rapporto tra “carica gravitazionale” e massa inerziale era sempre lo stesso per un gran numero di materiali, con un errore piccolissimo:

$$\left| \frac{q_G - m}{m} \right| < 10^{-8}$$

Attualmente l'errore è stato ulteriormente diminuito:

$$\left| \frac{q_G - m}{m} \right| < 10^{-13}$$

Einstein elaborò la teoria partendo dal presupposto che questa non sia una coincidenza, e che per tutte le sostanze valga esattamente:

$$q_G = m$$

Questo significa che è del tutto impossibile distinguere tra queste due situazioni:

1. se mi trovo in un sistema di riferimento inerziale in cui vi è un campo gravitazionale $-\mathbf{g}$;
2. se mi trovo in un sistema di riferimento non inerziale, che rispetto a un sistema di riferimento inerziale ha un'accelerazione di $\mathbf{g}$.

A questo punto, potremmo domandarci quanto siamo sicuri di essere in un sistema di riferimento inerziale; anzi, potremmo domandarci quanto abbia senso fisico questa domanda, visto che per il principio di equivalenza è impossibile saperlo.

Einstein fu così portato a formulare una teoria dove i sistemi inerziali non sono privilegiati rispetto agli altri: tutti i sistemi di coordinate sono ugualmente validi, e in ciascuno di essi le leggi della fisica assumono la stessa forma.

Allo stesso modo di come il principio di relatività galileiano afferma che non è possibile determinare la velocità di un corpo in termini assoluti, ma solo relativamente a un altro corpo; ora Einstein fu portato ad affermare che *anche l'accelerazione di un corpo* non è determinabile in termini assoluti, ma solo rispetto ad altri termini. Infatti, se mi trovo in un ascensore, e mi sento spinto verso il basso, non posso sapere se sto accelerando con l'ascensore o se mi trovo fermo sulla superficie di un pianeta.

Poiché estende il principio di relatività anche alle accelerazioni, la nuova teoria venne chiamata da Einstein teoria generale della relatività, o relatività generale (RG).

Ritorniamo al principio di equivalenza.

Per quello che ci importa, il principio di equivalenza permette di dedurre un effetto molto interessante, il *redshift gravitazionale*.

Consideriamo un ascensore di altezza h , che si trova fermo sulla superficie di un pianeta dove vi è un campo gravitazionale uniforme $-\mathbf{g}$. Poniamo un emettitore di fotoni di frequenza angolare ω sul pavimento, e poniamo un ricevitore di fotoni sul soffitto.

Potremmo aspettarci che riceverà la stessa frequenza, ma questo è sbagliato. Vediamo perché.

Per il principio di equivalenza, il risultato di questo esperimento deve essere lo stesso che se l'ascensore sta accelerando con accelerazione propria costante $\mathbf{g}$, verso l'alto, in assenza di gravità.

Ragioniamo all'ordine più basso possibile. Quando il fotone va dal pavimento alla sommità dell'ascensore, impiega un tempo $\Delta t \approx h/c$ (in realtà la sommità dell'ascensore si è spostata, ma la luce è molto veloce, quindi trascureremo questo effetto). Quando riceve il fotone, la sommità dell'ascensore è a una velocità diversa rispetto al pavimento dell'ascensore quando ha emesso il fotone: se all'inizio l'ascensore era fermo, ora si sta muovendo alla velocità è $v = g\Delta t = gh/c$.

Si applica perciò l'effetto Doppler classico (non consideriamo la correzione relativistica):

$$\omega' = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \omega = \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \omega$$

Ritorniamo nell'ascensore fermo sulla superficie del pianeta. Il sistema è inerziale, l'emettitore e il ricevitore sono entrambi fermi, la luce si muove a velocità c : se due fronti d'onda partono a distanza Δt , allora arriveranno a

distanza Δt , come mostrato in figura 25.

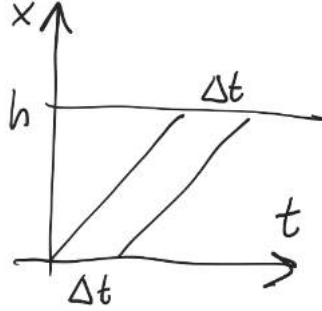


Figura 25: Nel sistema di coordinate xt , poiché la situazione non cambia nel tempo, la traiettoria compiuta dalla luce partita in due tempi diversi deve essere la stessa traiettoria, solo traslata. Perciò il Δt di partenza e di arrivo è lo stesso. Evidentemente questo non corrisponde al tempo proprio all'altezza di partenza e all'altezza di arrivo. In assenza di gravità, invece, per un osservatore fermo ($\Delta x = 0$) valeva necessariamente $\Delta\tau = \Delta t$.

Come è possibile che il ricevitore riceva una frequenza diversa? È chiaro che Δt non rappresenta il tempo proprio che sta passando per il ricevitore! Per il ricevitore, un tempo Δt corrisponde a un tempo proprio:

$$\Delta\tau = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \Delta t$$

In questo modo, per il ricevitore passa più tempo tra l'arrivo dei due fronti d'onda, e quindi riceverà una frequenza angolare minore.

Si ricorda che l'effetto è stato calcolato al prim'ordine in $gh/c^2 \ll 1$, l'unica quantità adimensionale che si può costruire coi dati del problema. In realtà *la formula non è esatta*. Tuttavia, ponendo $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ e $h \approx 1 \text{ m}$, abbiamo:

$$\frac{gh}{c^2} \approx 10^{-16}$$

Il che è, in effetti, è tanto piccolo. Tuttavia, con $h \approx 20 \text{ m}$, è stato misurato da Pound e Rebka nel 1959.

Per esercizio si calcoli il redshift gravitazionale in quest'altro modo, usando la conservazione dell'energia.

Innanzitutto, convincetevi che l'energia potenziale di una particella non è $m\phi$, ma $E\phi/c^2$: altrimenti, quando ho due particelle di massa m che si

fondono per formare una particella di massa $M > 2m$, comparirebbe energia potenziale dal nulla e potrei fare un ciclo in cui produco energia, abbassando particelle di massa M e alzando particelle di massa m usando carrucole.

Immaginate di avere ad altezza $z = h$ un atomo nello stato a energia più bassa E_0 , mentre ad altezza $z = 0$ un atomo nello stato eccitato $E_1 = E_0 + \hbar\omega$. Immaginiamo che l'atomo eccitato emetta un fotone di energia $\hbar\omega$ e finisca nello stato a energia più bassa E_0 . Il fotone sale e colpisce l'atomo a $z = h$, che va nello stato eccitato.

A questo punto, usate una carrucola per scambiare i due atomi. Poiché l'atomo con maggiore energia è sopra, esso ha più energia potenziale gravitazionale, ed è possibile ottenerla e produrre energia!, anche se siamo tornati nella situazione originale!

Come deve cambiare ω perché non sia possibile produrre energia né con questo processo, né con il processo inverso (in cui prima si usa la carrucola, e poi l'atomo sopra manda un fotone all'atomo sotto)? (esercizio)

1.11 A ruota libera...

Quest'ultimo capitolo contiene alcuni approfondimenti che sono completamente superflui¹ per la preparazione alle gare di fisica. Tuttavia a me fa piacere parlare di queste cose, e a voi potrebbero interessarvi per cultura generale, quindi le scrivo qui.

Per prima cosa, vi dirò un fatto bizzarro che il professore di liceo di Feynman gli disse un giorno che a lezione lo vide annoiato. Feynman, continuando a ragionarci, usò questo fatto buffo per riformulare la meccanica quantistica e unificarla con successo con la teoria elettromagnetica, vincendo così il Nobel. Il fatto bizzarro è il seguente. Quando un corpo va dal punto spaziotemporale A al punto spaziotemporale B , invece che studiare il moto in termini di forze, è possibile studiarlo in questo modo: per ogni traiettoria possibile che va da A a B , è possibile calcolare una quantità che si chiama azione. La traiettoria che ha azione minore è quella che si realizza effettivamente.

Questo principio è inutile se non specifico l'azione; un po' come $F = ma$ è inutile se non specifico qual è la forza che agisce sul corpo. Diciamo che di solito, in meccanica classica, l'azione è:

$$S = \int_A^B (K - U) dt$$

Dove K è l'energia cinetica e U è l'energia potenziale.

Esistono dei metodi magici per calcolare [[ZC19] capitolo 14.3], data l'azione, qual è la traiettoria che ha azione minore. Questi metodi prendono il nome di “calcolo delle variazioni”, un nome molto pomposo. Attraverso questi metodi, si può dimostrare che la traiettoria che minimizza l'azione data qui sopra è la traiettoria che soddisfa:

$$m\mathbf{a} = -\nabla U$$

Che è proprio la seconda legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

L'azione in meccanica classica sembra una cosa molto complicata: anche in assenza di potenziale, abbiamo

$$S = \int_A^B K dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2}mv^2 dt$$

¹Nota di redazione: sono anche dannosi se ci si dedica più di una singola lettura. Sono oggettivamente molto interessanti e belli, ma non è davvero il momento per studiarli. Dedicargli più di una singola lettura vuol dire togliere tempo a cose che bisogna davvero sapere.

Invece, in relatività speciale, in assenza di potenziali, abbiamo (per un corpo massivo, e non per i fotoni):

$$S = -mc^2 \int_A^B d\tau$$

L'Azione è semplicemente il tempo proprio! Il segno è cambiato, perché in relatività speciale un corpo, in assenza di forze, si muove secondo la traiettoria per cui per il corpo stesso passa un tempo *maggiore*.

È davvero così? Consideriamo un diagramma spaziotemporale xt , e un corpo che va dall'evento A all'evento B . Chiaramente va a velocità costante. Poiché non stiamo parlando di fotoni, l'intervallo tra A e B è di tipo tempo: esiste un sistema di riferimento inerziale in cui A e B sono nello stesso luogo ma a tempo diversi. In questo sistema di riferimento, la traiettoria che si realizza è quella in cui il corpo sta fermo.

Si ricorderà il paradosso dei gemelli: se in un sistema inerziale un gemello sta fermo e l'altro si muove e poi ritorna al punto di partenza, per il secondo gemello passerà un tempo minore. Quindi la traiettoria che si realizza è quella in cui il corpo percepisce un tempo maggiore.

Lo stesso si può vedere guardando l'azione:

$$S = -mc^2 \int_A^B d\tau = -mc^2 \int_A^B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Il modo per minimizzare l'azione, e massimizzare il tempo proprio, è porre $v = 0$.

Si può verificare che, se $v \ll c$, l'azione relativistica corrisponde all'azione classica più una costante (che, chiaramente, non cambia quale sia la traiettoria con azione minima).

Potreste chiedervi *perché* i corpi, o meglio le particelle, si muovono in modo tale da minimizzare l'azione. È vero che in fisica i *perché*, dopo un po', finiscono per restare senza risposta, ma in questo caso è possibile rispondere. Feynman ha scoperto che in meccanica quantistica una particella, finché non viene osservata (cioè, finché non viene rilevata da un rilevatore), segue tutti i cammini possibili. Inoltre, se c'è una particella nel punto spaziotemporale A e abbiamo un rilevatore nel punto spaziotemporale B , non possiamo mai sapere *per certo* se il rilevatore osserverà la particella: possiamo solo calcolare la probabilità che la osservi, con la seguente ricetta misteriosa.

Si calcola $e^{iS/\hbar}$ per ogni traiettoria, dove $\hbar$ è la costante di Planck ridotta, un numero piccolissimo. Si sommano i valori per ogni traiettoria (lo so, le traiettorie sono infinite... anche con l'integrale però si somma l'area di

infiniti rettangolini: anche in questo caso, c'è un modo di farlo). Il risultato è un numero complesso, una freccia nel piano complesso. L'area del quadrato che ha per lato quella freccia, è la probabilità di osservare la particella in B .

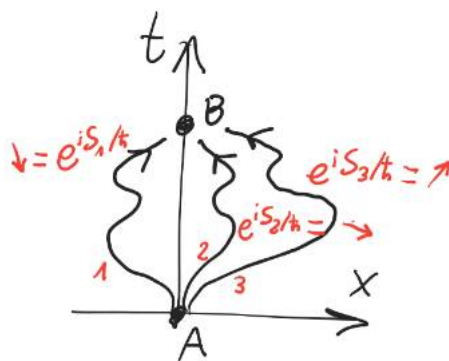


Figura 26: Per sapere che probabilità c'è che una particella arrivi alle coordinate spazio-temporali B , sapendo che parte in A , bisogna: (1) immaginare tutte le possibili traiettorie, (2) associare a ciascuna di esse il numero complesso $e^{iS/\hbar}$ dove S dipende dalla traiettoria...

Perché questo dovrebbe “spiegare” il fatto che in meccanica classica bisogna minimizzare l'azione?

Il motivo è che nel cammino dove l'azione è minima, i cammini vicini hanno la stessa azione al prim'ordine. Quindi le frecce dei numeri complessi sono allineate e danno un forte contributo positivo. Altrove, le frecce dei cammini vicini sono tutte rivolte verso direzioni diverse, e tendono a controbilanciarsi a vicenda, fornendo una probabilità circa nulla.



Figura 27: ... (3) sommare tutti questi numeri complessi qui rappresentati come frecce, (4) elevare al quadrato il risultato, ottenendo così la probabilità che l'evento accada. La meccanica quantistica predice solo probabilità, ovvero la frequenza con cui un certo avvenimento accade se si ripete molte volte lo stesso esperimento.

Ora, se siete tentati di chiedermi *perché* i cammini vanno pesati con $e^{iS/\hbar}$, perché bisogna sommare il tutto e calcolare l'area del quadrato, ebbene, nessuno lo sa.

Ritorniamo alla relatività generale. Grazie al principio di equivalenza, in qualche modo ci rendiamo conto che le forze gravitazionali non possono essere realmente distinte dalle forze inerziali (le forze apparenti che appaiono nei sistemi di riferimento non inerziali). La distinzione tra le due dipende dalla scelta del sistema di riferimento: così come la distinzione tra campo elettrico e campo magnetico. Perciò, entrambe saranno descritte dallo stesso oggetto fisico.

Inoltre, il *redshift gravitazionale* (derivato dal principio di equivalenza) mostra come, in generale, il tempo scorre in modo diverso in punti diversi. Diciamo meglio: se scegliamo un sistema di coordinate, in generale non dovremmo aspettarci che per uguali intervalli Δt (dove t è la coordinata temporale che abbiamo scelto) corrispondano uguali intervalli di tempo proprio $\Delta\tau$. Se abbiamo due gemelli, e uno va a vivere sulla cima della montagna e l'altro ai piedi della montagna, e poi si reincontrano, il gemello ai piedi della montagna sarà più giovane (l'effetto in realtà è molto piccolo, minore di un secondo; si faccia il conto).

Questo effetto c'entra però anche col concetto di spazio curvo.

Definirò lo spazio curvo a due dimensioni, cioè una superficie curva. Una superficie curva è una superficie che, guardata da vicino, sembra piatta (nel senso che vale la geometria euclidea, la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a mezzo angolo giro, eccetera). Tuttavia, se io cerco di andare lungo una direzione per una lunghezza ℓ , poi giro a sinistra di un angolo retto e proseguo per una lunghezza ℓ , poi giro di nuovo a sinistra e proseguo, e poi ancora una quarta volta, in generale non torno al punto di partenza.

Questo si verifica, ad esempio, sulla superficie di una sfera, come mostrato in figura 28.

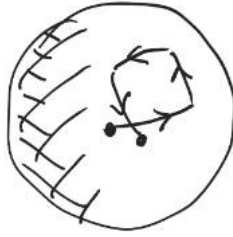


Figura 28: Sulla superficie di una sfera, se io avanzo in una certa lunghezza, poi giro a sinistra di novanta gradi, avanzo della stessa lunghezza, giro di nuovo altre due volte avanzando della stessa quantità, non torno al punto di partenza. Questo è un sintomo del fatto che lo spazio non è piatto, ma è curvo.

È facile notare che lo stesso avviene nello spaziotempo sulla superficie di un pianeta: io posso salire in altezza di Δx e andare avanti nel futuro di un tempo $\Delta \tau$. Oppure posso andare avanti di $\Delta \tau$ e poi salire in altezza di Δx . È chiaro che il rettangolo nello spaziotempo non si chiude!

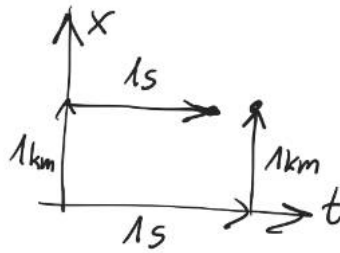


Figura 29: Il redshift gravitazionale mostra come il seguente rettangolo, in un campo gravitazionale costante, non si chiude: se io vado in alto di un chilometro e lascio passare un secondo, non è la stessa cosa che lasciar passare un secondo e poi andare in alto di un chilometro. Questo è un sintomo del fatto che lo spazio-tempo non è piatto in presenza di gravità, ma è curvo.

Il principio di equivalenza ci spinge dunque a cercare un linguaggio che permetta di trattare lo spaziotempo curvo.

Ricordiamo come abbiamo introdotto la funzione $g_{\mu\nu}$ che permette di abbassare gli indici dei quadri-vettori:

$$A_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} A^\nu$$

Le sue componenti in relatività speciale sono:

$$\begin{cases} g_{00} = +1 \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \\ g_{\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad \text{se } \mu \neq \nu$$

Ricordiamo

$$(\Delta\tau)^2 = -(\Delta s)^2 = \sum_{\mu=0}^3 \Delta x^\mu \Delta x_\mu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

Poiché è troppo noioso continuare a scrivere queste sommatorie, da ora in avanti le lascerò sottointese: ogni volta che in un termine vedrete un indice ripetuto due volte, una volta in alto e una volta in basso, è sottintesa una sommatoria. Vi assicuro che è impossibile confondersi. Scriviamo quindi:

$$(\Delta\tau)^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

Questa convenzione di sottointendere le somme è chiamata *convenzione di Einstein*. Ma torniamo a noi.

Ora, sappiamo che la funzione $g_{\mu\nu}$ non può essere costante nello spazio. Nella fattispecie, sulla superficie di un pianeta deve valere:

$$\Delta\tau = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \Delta t$$

dove

$$\phi = gz = \frac{GM}{R^2} z$$

è l'energia potenziale gravitazionale su unità di massa, e z è l'altezza misurata rispetto a un punto arbitrario. Prendiamo perciò un intervallo $\Delta x^\mu = (\Delta t, \mathbf{0})$. Abbiamo:

$$(\Delta\tau)^2 = g_{00}(\Delta t)^2$$

Ma sappiamo che:

$$(\Delta\tau)^2 = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)^2 (\Delta t)^2 \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) (\Delta t)^2$$

Abbiamo perciò, all'ordine più basso:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

È possibile verificare che quando ho un oggetto, ad esempio una palla, lanciata in aria nel campo gravitazionale terrestre, va dal punto spaziotemporale A al punto spaziotemporale B percorrendo la traiettoria che impiega il tempo proprio maggiore.

Esso percorre all'incirca una parabola (trascurando la resistenza dell'aria, gli effetti di relatività speciale per cui il moto sarebbe iperbolico e non parabolico, e il fatto che il campo gravitazionale non è esattamente uniforme verso il basso). Il motivo per cui non viaggia in linea retta è che il tempo scorre in modo diverso a diverse altezze: poiché a parità di Δt , il $\Delta\tau$ è maggiore in alto, la parabola è più rialzata rispetto alla linea retta tra A e B , che sarebbe stata la traiettoria seguita in assenza di campo gravitazionale.

Come si può verificare che g_{00} è sufficiente a cogliere tutti gli effetti della legge di gravitazione universale di Newton? È possibile farlo con il principio lagrangiano.

Noi sappiamo che, in un sistema di riferimento inerziale, un corpo che va da A a B segue la traiettoria che minimizza l'azione:

$$S = -mc^2 \int_A^B d\tau = -mc^2 \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = -mc^2 \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau$$

Tuttavia, se vogliamo che i sistemi inerziali non siano privilegiati rispetto ai sistemi non inerziali, dobbiamo immaginare che questa legge fisica che impone di minimizzare l'azione debba valere anche nei sistemi uniformemente accelerati. Quindi, per il principio di equivalenza, deve valere anche in presenza di un campo gravitazionale uniforme!

Abbiamo perciò:

$$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau = -mc^2 \int_A^B \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}} dt \approx \\ &\approx -mc^2 \int_A^B \left(1 + \frac{\phi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) dt = \text{cost.} + \int_A^B \left(-m\phi + \frac{1}{2}mv^2 \right) dt \end{aligned}$$

Che è esattamente l'azione classica in presenza di un potenziale: l'integrale nel tempo della differenza tra energia cinetica ed energia potenziale!

Abbiamo perciò scoperto che il potenziale gravitazionale in realtà non è un qualunque potenziale ϕ , ma è in effetti g_{00} , che fa in modo che in punti diversi dello spazio il tempo scorra in modo diverso: questo effetto è sufficiente a fare in modo che i corpi lanciati in aria si muovano lungo una parabola, che i pianeti si muovano secondo ellissi, eccetera.

Si vuole notare come in molte presentazioni divulgative della relatività generale, si dice che il Sole curva lo spazio, visualizzato come un tappeto elastico,

ed è per questo che la Terra orbita attorno al Sole. Questa presentazione è sbagliatissima. La curvatura dello spazio, che pure c'è, è trascurabile (è un termine di ordine superiore). La Terra orbita attorno al Sole a causa della *curvatura del tempo*: ovvero che il tempo scorre in modo diverso a seconda della distanza dal Sole.

Abbiamo scoperto come si muovono i corpi in presenza del campo gravitazionale $g_{\mu\nu}$: essi minimizzano l'azione

$$S = -mc^2 \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau$$

È facile vedere che, se $v \ll c$, allora anche se ci fossero dei termini g_{0i} e g_{ij} non nulli (e ci sono!), essi vanno comunque moltiplicati per quantità piccole, e sono dunque irrilevanti.

Ci aspettiamo però che, nel caso più generale, tutte e sedici le componenti di $g_{\mu\nu}$ contribuiscano in modo non banale. Una nota: poiché $g_{\mu\nu}$ è definito come il coefficiente di $dx^\mu dx^\nu$ per trovare $d\tau^2$, è chiaro che posso scegliere liberamente che coefficienti dare a $dx dy$ e a $dy dx$, purché la somma dei due coefficienti sia fissata. Quindi posso decidere di imporre $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Quindi le componenti indipendenti sono dieci.

Perché ci aspettiamo che anche le altre componenti contribuiscano? Non potrebbe essere che il campo gravitazionale corrisponda al solo g_{00} ?

La domanda è analoga a: se sappiamo che E_x influenza il moto delle particelle cariche, perché ci aspettiamo che anche E_y e E_z lo influenzino?

Il motivo è che, cambiando sistema di riferimento, anche le componenti diverse da g_{00} vengono cambiate! In che modo? Calcoliamolo.

Noi sappiamo che, effettuando un boost lungo l'asse x dal sistema O' al sistema O , abbiamo:

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu$$

dove:

$$\begin{cases} \Lambda^0{}_0 = \Lambda^1{}_1 = \gamma \\ \Lambda^1{}_0 = \Lambda^0{}_1 = \gamma\beta \\ \Lambda^2{}_2 = \Lambda^3{}_3 = -1 \end{cases}$$

e tutti gli altri termini nulli.

Ora, noi sappiamo che:

$$g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dy'^\beta = d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha dx'^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta dy'^\beta$$

Confrontando i coefficienti tra il primo e l'ultimo termine, abbiamo:

$$g'_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} g'_{00} = \gamma^2 g_{00} \\ g'_{01} = g'_{10} = \gamma^2 \beta g_{00} \\ g'_{11} = \gamma^2 \beta^2 g_{00} \\ g'_{22} = g'_{33} = -1 \end{cases}$$

e tutti gli altri termini nulli.

Dunque, anche se per un osservatore in orbita attorno alla Terra per cui $v \ll c$ conta solo la componente g_{00} , per un osservatore che passa vicino alla Terra a $v \lesssim c$, anche le componenti $g_{01} = g_{10}$ e g_{11} sono diverse da zero e non possono essere trascurate quando si minimizza l'azione

$$S = -mc^2 \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau$$

Vi è un altro motivo per cui non bisogna trascurare tutte le componenti di $g_{\mu\nu}$: esse permettono di trattare tutti i sistemi di riferimento non inerziali. Mettiamoci, ad esempio, nel sistema di riferimento non inerziale O' che ruota a velocità angolare costante ω rispetto al sistema di riferimento inerziale O . Noi sappiamo che

$$d\tau^2 = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dy'^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu$$

Dove il tempo proprio, poiché ha un diretto significato fisico, deve essere uguale in qualunque sistema di riferimento io lo calcoli.

Sostituendo per dx^μ l'espressione in termini di dx'^μ calcolata usando la trasformazione

$$\begin{cases} t = t' \\ x = \cos(\omega t')x' - \sin(\omega t')y' \\ y = \sin(\omega t')x' + \cos(\omega t')y' \\ z = z' \end{cases}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{\omega^2}{c^2}(x'^2 + y'^2) \\ g_{01} = g_{10} = \frac{\omega y'}{c} \\ g_{02} = g_{20} = -\frac{\omega x'}{c} \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \end{cases}$$

e tutti gli altri termini sono nulli.

Si noti inoltre come tutti gli effetti di un sistema di riferimento rotante - ovvero forza centripeta e forza di Coriolis - sono contenuti nella funzione $g_{\mu\nu}$, il campo gravitazionale.

Anche in questo sistema di riferimento, i corpi si muovono minimizzando la stessa azione:

$$S = -mc^2 \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau$$

Abbiamo visto che $g_{\mu\nu}$ permette di trattare, oltre alle forze gravitazionali, tutte le forze dovute al fatto che il sistema di riferimento non è inerziale.

Esiste anche un altro tipo di forza apparente: quella che viene sentita in un sistema di riferimento non cartesiano.

Prendiamo ad esempio sul piano xy un corpo che si muova di moto rettilineo uniforme, ad esempio che si muova lungo la retta $x = d$ con velocità v costante. Se studiamo il moto in coordinate cartesiane le accelerazioni sono nulle:

$$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$$

Invece, se studiamo il moto in coordinate cilindriche r, θ, z , abbiamo:

$$\begin{cases} r = \sqrt{d^2 + v^2 t^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{vt}{d}\right) \\ z = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{v^2 d^2}{\sqrt{d^2 + v^2 t^2}} \\ \ddot{\phi} = \frac{-2dv^3 t}{(d^2 + v^2 t^2)^2} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Sembra dunque che, per un sistema di riferimento sferico, ci siano sempre delle forze apparenti, che potremmo chiamare “forze di coordinate” o qualcosa del genere.

Potremmo credere che queste espressioni siano troppo complicate per poter essere trattate con $g_{\mu\nu}$. Forse dobbiamo limitarci a trattare i sistemi di coordinate in cui le coordinate sono cartesiane.

In questo sistema di riferimento ricordiamo che le distanze spaziali nel piano xy sono:

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

e quindi:

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2$$

da cui, per confronto, troviamo $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{cases} g_{00} = +1 \\ g_{rr} = -1 \\ g_{\theta\theta} = -r^2 \\ g_{zz} = -1 \end{cases}$$

Quindi, la domanda è: anche in questo caso le particelle seguono la traiettoria che minimizza l'azione

$$S = -mc^2 \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau$$

oppure no?

Prima di chiarire questo dubbio, però, domandiamoci: possiamo sempre scegliere un sistema di coordinate cartesiane?

Vi sono casi in cui non è possibile. Per semplicità, consideriamo un universo bidimensionale, come nel libro *Flatlandia*. Se è come la superficie di un piano, allora chiaramente possiamo scegliere il sistema cartesiano xy . Invece, se è simile alla superficie di una sfera molto grande, allora non possiamo scegliere un sistema di coordinate cartesiane. Possiamo scegliere come coordinate gli angoli delle coordinate sferiche θ , ϕ (latitudine e longitudine), mentre il raggio è fissato e pari a R . La distanza tra due punti in coordinate sferiche è data da:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

Se $r = R$ abbiamo:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

e quindi:

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

da cui, per confronto, troviamo $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{cases} g_{00} = +1 \\ g_{\theta\theta} = -R^2 \\ g_{\phi\phi} = -R^2 \sin^2 \theta \end{cases}$$

e tutti gli altri termini nulli. Poiché stiamo studiando uno spazio a due dimensioni, lo spaziotempo ha tre dimensioni e l'indice μ può assumere solo tre

valori: $\mu = 0, \theta, \phi$. Quindi $g_{\mu\nu}$ è composto da nove numeri (sei se ricordiamo che $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$).

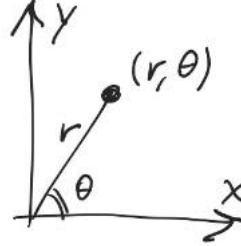


Figura 30: Sistema di coordinate polari: un punto del piano xy è identificato da r e θ .

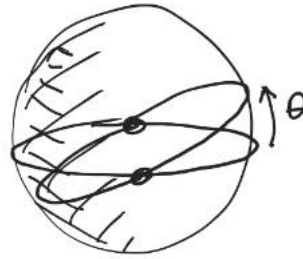


Figura 31: La traiettoria di una particella vincolata a stare su una sfera è un cerchio massimo. Nella coordinata θ però un cerchio massimo sembra una sinusoide, come se ci fosse una forza apparente lungo θ che tira indietro la particella quando cerca di allontanarsi dall'equatore.

Tuttavia, se consideriamo l'orbita di una particella che gira attorno a un cerchio massimo che è come l'equatore ma un po' storto (mostrato in figura 31), è chiaro che c'è un'accelerazione lungo θ :

$$\ddot{\theta} = -k\theta$$

Si tratta perciò di una forza apparente, che compare perché $g_{\mu\nu}$ non è quello di uno spazio piatto senza gravità.

Un abitante della superficie della sfera potrebbe credere che lo spazio sia piatto, e introdurre un sistema di coordinate cartesiano, senza sapere che su grandi distanze non può funzionare. Anche le coordinate θ e ϕ , la latitudine e la longitudine, in regioni piccole definiscono un reticolo quadrato, e sembrano coordinate cartesiane. Tuttavia, su lunghe distanze, compaiono forze

apparenti.

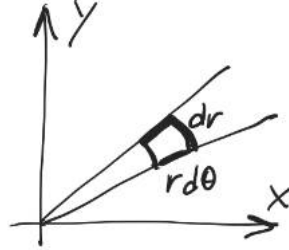


Figura 32: Una quadretto infinitesimo in cui le coordinate polari vanno da r a $r + dr$ e da θ a $\theta + d\theta$, ha un'area pari a $r dr d\theta$.

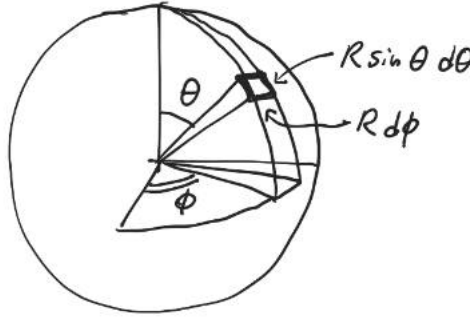


Figura 33: Una quadretto infinitesimo in cui le coordinate sferiche angolari vanno da θ a $\theta + d\theta$ e da ϕ a $\phi + d\phi$, ha un'area pari a $R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$, dove R è il raggio della sfera.

Quindi, ci aspettiamo che sia possibile formulare le leggi della fisica anche in sistemi di coordinate non cartesiane, esattamente allo stesso modo. E infatti, in entrambi i casi di cui abbiamo parlato - ovvero il moto rettilineo uniforme studiato in coordinate cilindriche, e il moto di una particella libera vincolata a stare sulla superficie di una sfera - la traiettoria percorsa per andare da un punto A a un punto B è quella che minimizza sempre la stessa azione:

$$S = -mc^2 \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau$$

Abbiamo scoperto la cosa seguente. Possiamo fissare un sistema di coordinate arbitrario: coordinate cartesiane, cilindriche, sferiche, ellittico, o qualcosa di ancor più complicato. A quel punto, se in ogni punto dello spaziotempo conosciamo $g_{\mu\nu}$, sappiamo che le particelle seguono la traiettoria che minimizza

l'azione:

$$S = -mc^2 \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau$$

In questo modo possiamo trattare la forza gravitazionale, le forze inerziali (forza di accelerazione, forza centripeta, forza di Coriolis) e le “forze di coordinate” dovute al fatto che il sistema di riferimento non è cartesiano, e le forze dovute al fatto che l'universo globalmente non è piatto ma curvo.

Sappiamo perciò, dato $g_{\mu\nu}$, come calcolare il moto delle particelle (massive). La domanda è: come si calcola $g_{\mu\nu}$?

Studiamo prima il modo in cui si calcola ϕ secondo Newton. In presenza di una massa M si ha:

$$\phi = G \frac{M}{r^2}$$

Da cui si calcola la forza gravitazionale $m\mathbf{g}$ subita da una massa di prova m :

$$m\mathbf{g} = -\nabla\phi$$

Questo è analogo alla forza di Coulomb: in presenza di una carica Q si ha:

$$\phi_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Da cui si calcola la forza elettrica $q\mathbf{E}$ subita da una carica di prova q :

$$q\mathbf{E} = -\nabla\phi_Q$$

In elettromagnetismo si poteva scrivere:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_Q}{\epsilon_0}$$

Dove ρ_Q è la densità volumica di carica. Analogamente in gravità si può scrivere:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = 4\pi G\rho$$

Dove ρ è la densità volumica di materia. Utilizzando $m\mathbf{g} = -\nabla\phi$, troviamo:

$$-\nabla \cdot \nabla\phi = 4\pi G\rho$$

oppure:

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho$$

questa è l'equazione di Poisson. Data una distribuzione di carica ρ , permette di trovare il campo gravitazionale newtoniano ϕ .

È un'equazione con derivate seconde. La sorgente del campo è ρ , cioè la distribuzione di materia. Il campo è ϕ . La sorgente è proporzionale alle derivate seconde del campo. La forza su unità di massa, $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, è proporzionale alle derivate prime del campo.

Vediamo ora come l'equazione dell'elettromagnetismo ha una struttura simile. Abbiamo già visto che la sorgente nell'elettromagnetismo è la distribuzione di carica, che è data da $j^\mu = (c\rho_Q, \mathbf{j})$. Esiste un campo che si chiama $A_\mu = (c\phi_Q, \mathbf{A})$, dove ϕ_Q è il potenziale elettrico (il voltaggio), mentre $\mathbf{A}$ probabilmente non lo avete mai visto. Ci sarebbero un po' di sottigliezze, ma si può scrivere l'elettromagnetismo come:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j^\mu$$

Dove

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

Si noti che il quadrivettore “derivata” ha il segno meno quando l'indice è in alto!, al contrario di tutti gli altri quadrivettori che abbiamo studiato! Infatti:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

La sottigliezza che ho trascurato è che l'equazione di sopra non basta a determinare il campo A_μ in funzione della sorgente j^μ , ma dobbiamo fissare una condizione:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Ma ora non ci importano questi dettagli. L'importante è che abbiamo un'equazione della stessa forma dell'equazione della gravità newtoniana: abbiamo una sorgente uguale a una particolare combinazione delle derivate seconde del campo.

Anche in questo caso le forze sono proporzionali alla derivata seconda del campo. Definiamo il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Chiaramente $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, perciò ha solo sei componenti indipendenti. Se poniamo $A_\mu = (c\phi_Q, \mathbf{0})$ troviamo facilmente:

$$F_{0i} = -F_{i0} = -c \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = -cE_i$$

Sapendo che sotto boost il campo elettromagnetico trasforma come:

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu F_{\alpha\beta}$$

Troviamo il significato delle altre componenti:

$$\begin{cases} F_{12} = -F_{21} = (\nabla \times \mathbf{A})_3 = B_3 \\ F_{23} = -F_{32} = (\nabla \times \mathbf{A})_1 = B_1 \\ F_{31} = -F_{13} = (\nabla \times \mathbf{A})_2 = B_2 \end{cases}$$

Il che mostra anche il significato di $\mathbf{A}$.

Questo è il linguaggio in cui si vede come $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono in realtà componenti dello stesso oggetto fisico, e di come la divisione in componenti dipenda dalla scelta del sistema di riferimento. Inoltre è chiaro ora che la regola con cui trasformano $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sotto boost non è casuale: deriva dal modo naturale in cui trasforma $F_{\mu\nu}$.

L'equazione della forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

diventa:

$$F^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

Vediamo perciò che $F^{\mu\nu}$ è una specie di forza su unità di carica (se si eccettua il fatto che bisogna contrarre un indice con la velocità u^μ)

Ci aspettiamo quindi che l'equazione della relatività generale sia della stessa forma: una sorgente uguale alle derivate seconde del campo. Inoltre questa equazione, nel caso di masse non troppo elevate, deve ricondursi all'equazione newtoniana:

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho$$

Abbiamo già argomentato a lungo sul fatto che il campo gravitazionale sia $g_{\mu\nu}$. Qual è invece la sorgente? Potremmo aspettarci che, come in elettromagnetismo, sia la quadricorrente di massa:

$$j_m^\mu = (c\rho, \mathbf{j}_m)$$

Il che ci porrebbe in imbarazzo, visto che il campo ha due indici e la quadricorrente uno solo.

Tuttavia, questa scelta non è corretta. C'è una differenza enorme tra la carica e la massa: in un urto, la somma delle cariche q si conserva, mentre la somma delle masse m no: infatti, parte della massa può trasformarsi in energia.

Ciò che si conserva in un urto è la somma dei quadrimpulsi P^μ . Se per ciascuno di essi definiamo una corrente (per P^0 definiamo la quadricorrente $T^{\mu 0} = (c\rho^0, \mathbf{j}^0)$, eccetera) otteniamo il seguente oggetto:

1. T^{00} è la densità volumica di energia;

2. T^{i0} è la componente i della densità superficiale della corrente di energia;
3. T^{0j} è la densità volumica dell'impulso lungo j ;
4. T^{ij} è la componente i della densità superficiale della corrente di impulso lungo j .

Quindi l'equazione fondamentale della relatività generale sarà di questa forma: $f^{\mu\nu}(g) = T_{\mu\nu}$. Dove f è una funzione che include derivate al più seconde. Notate bene: come in elettromagnetismo, forse bisognerà imporre altre condizioni su $g_{\mu\nu}$; ma per ora non ce ne occuperemo. Inoltre vogliamo che le forze siano le derivate prime di $g_{\mu\nu}$. In effetti, il principio di minima azione

$$S = -mc^2 \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau$$

che abbiamo richiamato così tante volte, attraverso i magici metodi del calcolo delle variazioni fornisce la seguente equazione:

$$a^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma$$

dove $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ è la forza gravitazionale, ed è uguale a:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\beta g_{\sigma\gamma} + \partial_\gamma g_{\beta\sigma} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma})$$

Calcoliamo l'accelerazione nel caso $v \ll c$. Si ha $a^\alpha \approx (0, \mathbf{a})$, perciò calcoliamo solo la componente spaziale:

$$a^i = -\Gamma^i_{00} c^2 = +\frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \partial_\sigma (g_{00}) c^2 = +\frac{1}{2} g^{i\sigma} \partial_\sigma \left(\frac{2\phi}{c^2} \right) c^2 = +g^{i\sigma} \partial_\sigma \phi$$

Dove le derivate rispetto a ∂_0 sono state eliminate perché contengono c al denominatore, e quindi sono più piccole delle derivate spaziali di un fattore v/c .

Inoltre, ora possiamo approssimare $g^{i\sigma}$ con il valore che ha nel caso in cui il campo gravitazionale è nullo (ovvero -1 se $\sigma = i$ e 0 negli altri casi). Eventuali correzioni sono di ordine più alto. Abbiamo perciò:

$$a^i = -\partial_i \phi$$

Ovvero:

$$\mathbf{a} = -\nabla \phi$$

Abbiamo ottenuto l'accelerazione in presenza del potenziale newtoniano ϕ .

L'unica cosa che resta da fare sembra trovare la funzione f . Sembra un'impresa impossibile: certamente ci sono infinite combinazioni possibili che contengono le derivate seconde di $g_{\mu\nu}$! Tuttavia, per restringere la ricerca, possiamo usare un particolare argomento. Questa non è la via che ha seguito Einstein, ma è una via molto istruttiva.

Riguardiamo l'equazione della gravità newtoniana:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$$

Scriviamo esplicitamente le derivate:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 4\pi\rho$$

Questa combinazione di derivate è l'unica combinazione di derivate al più seconde che è invariante sotto rotazioni (oltre alla combinazione senza derivate, ovviamente)! Se effettuo una rotazione, ho:

$$x^i = R^i_j x'^j$$

L'equazione diventa:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \phi = 4\pi\rho$$

Nel nuovo sistema l'equazione ha la stessa forma!

Vediamo l'equazione dell'elettromagnetismo. In questo caso, poiché siamo in relatività speciale, vogliamo sicuramente che l'equazione abbia esattamente la stessa forma col cambiare dei boost. L'equazione è:

$$f^\mu(A) = j^\mu$$

Per cui vogliamo che f sia una combinazione con un indice μ in alto. Le uniche due combinazioni che abbiano un unico indice in alto, e derivate al più seconde di A^α , sono: $\partial^\nu \partial_\nu A^\mu$, $\partial^\mu \partial_\nu A^\nu$ e A^μ (ha derivate *al più* seconde: nella fattispecie, di ordine zero).

Per motivi che non vedremo, è possibile imporre la condizione $\partial_\mu A^\mu = 0$. Abbiamo perciò:

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu + m^2 A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j^\mu$$

Dove il coefficiente di A^μ l'ho chiamato m^2 perché questa è l'equazione dell'elettromagnetismo in cui il fotone ha massa m . Se pongo $m = 0$ ottengo:

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j^\mu$$

In questa equazione, sotto un boost, il lato destro cambia allo stesso modo del lato sinistro: come un quadrivettore.

Si vede dunque come, sapendo quali trasformazioni devono lasciare l'equazione uguale, è possibile vincolarla in modo quasi univoco.

Ora, abbiamo già detto che non vogliamo avere sistemi di riferimento privilegiati: inerziali o non inerziali vanno bene ugualmente. Inoltre, abbiamo anche detto che vanno bene sistemi di coordinate non cartesiani: cilindriche, sferiche, eccetera. Diciamo perciò chiaramente: qualunque sistema di coordinate $x^\alpha = x^0, x^1, x^2, x^3$ deve andare bene per formulare le leggi della fisica. Questo è il *principio di covarianza*. Le leggi della fisica devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di coordinate.

Attraverso questa richiesta, si scopre che esistono solo tre combinazioni con derivate *al più* seconde tali per cui i due lati dell'equazione trasformano allo stesso modo sotto un cambio di coordinate.

Le prime due combinazioni sono $R_{\alpha\beta}$ e $Rg_{\alpha\beta}$, dove:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta} = R^\sigma_{\alpha\sigma\beta}$$

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta} \Gamma^\sigma_{\beta\gamma}$$

La terza combinazione è banalmente $g_{\alpha\beta}$. Abbiamo perciò:

$$AR_{\alpha\beta} + BRg_{\alpha\beta} + Cg_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$$

Dove A, B, C sono costanti da determinare.

Nota: volendo essere sottili, esistono altre combinazioni con derivate al più quadrate, ad esempio R^2 o $R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$ o altre cose simili, ma per ora consideriamo la teoria più semplice possibile. Esistono argomenti per cui questi termini sono irrilevanti a meno che non siamo in una situazione con altissima energia, ma non ci importa adesso.

Ora, una condizione la si trova nel modo seguente.

Per il principio di equivalenza, se io scelgo un punto spaziotemporale P , esiste un cambio di coordinate in cui la forza gravitazionale è nulla *in* P ($\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$): si tratta banalmente del sistema il cui asse temporale è la traiettoria di una

particella in caduta libera messa in P. È come se in P avessimo messo un piccolo ascensore in caduta libera, all'interno del quale non si sente il peso. In quel sistema di riferimento, vale la relatività speciale, senza gravità o forze inerziali, quindi siamo sicuri che deve valere la conservazione del quadrimpulso. Come la conservazione della carica elettrica è data da $\partial_\alpha j^\alpha = 0$, così la conservazione del quadrimpulso si scrive:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

Così, abbiamo una condizione in più applicando ∂^α :

$$\partial^\alpha (AR_{\alpha\beta} + BRg_{\alpha\beta}) = 0$$

Dove abbiamo usato che $\partial^\alpha g_{\alpha\beta} = 0$ perché si può scrivere (non è difficile) in termini di $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, la forza gravitazionale, che abbiamo detto essere nulla.

I conti sono semplificati dal fatto che nel punto P col nostro sistema di coordinate $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ è nullo, *ma non le sue derivate*: infatti allontanandosi da P $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$ in generale. Se si fossero annullate pure le derivate, $R_{\alpha\beta}$ sarebbe stato nullo. Nonostante la semplificazione, i conti sono comunque molti, ma alla fine si trova che l'unica combinazione che permette la conservazione del quadrimpulso è $B = -A/2$.

A questo punto abbiamo solo due parametri da determinare. Se la materia obbedisce a $v \ll c$ abbiamo $T_{ij} \ll T_{i0} \approx T_{0j} \ll T_{00} \approx c^2 \rho$ ($E \approx mc^2$, perciò la densità di energia è c^2 volte la densità di materia). Dopo innumerevoli conti dall'altro lato dell'equazione, e ricordando $g_{00} = 2\phi/c^2$ abbiamo:

$$A\nabla^2\phi + C\phi = \frac{c^4}{2}\rho$$

Se vogliamo trovare $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$, dobbiamo dire che C è trascurabile e che $A = c^4/8\pi G$. Di solito l'equazione viene scritta nella forma seguente

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}$$

Il termine Λ può essere portato al lato destro dell'equazione ed essere interpretato come una “densità di energia del vuoto”, che tende a far espandere l'universo in modo accelerato. Nel 1998 è stato scoperto che $\Lambda \neq 0$, ma ha comunque un valore molto piccolo.

L'equazione è esattamente come l'avevamo pensata: la sorgente $T_{\alpha\beta}$ è proporzionale a una funzione delle derivate al più seconde del campo gravitazionale $g_{\alpha\beta}$, una funzione che è la stessa in qualunque sistema di coordinate.

Le equazioni che abbiamo studiato, della forma in cui la sorgente è uguale a una funzione delle derivate al più seconde del campo, ovvero

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j^\mu$$

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

hanno tutte lo stesso “problema”: il campo non è univocamente determinato dalla sorgente. Nei primi due casi, ad esempio, è possibile sommare al campo una funzione lineare nelle coordinate $Ax^\mu + B$, e continuerebbe a soddisfare l'equazione.

Nel primo caso è addirittura possibile sommare al campo una funzione arbitraria del tempo $\phi_0(t)$, e da una soluzione si troverebbe un'altra soluzione! Se $\phi_0(t < 1) = 0$, allora ho infinite soluzioni che obbediscono alle stesse condizioni iniziali per $t = 0$: quindi l'equazione non è deterministica! Com'è possibile?

Nel primo caso è chiaro che cosa sta succedendo: sto usando la libertà di cambiare lo zero del potenziale per ridefinirlo a ogni istante di tempo. Tuttavia, come ben sappiamo, la cosa non ha alcun effetto fisico: $g = -\nabla\phi$ non cambia, perciò tutti i corpi sentono la stessa forza gravitazionale. Le due soluzioni, apparentemente distinte poiché differiscono della funzione $\phi_0(t)$, stanno descrivendo la stessa situazione fisica. C'è una ridondanza. per toglierla, si può imporre un'altra equazione che fissi lo zero del potenziale. Ad esempio, sulla superficie della Terra, possiamo imporre:

$$\phi(h = 0) = 0$$

dove h è l'altezza misurata rispetto al pavimento, ad esempio.

Nel secondo caso, è possibile sommare al campo A^μ il termine $\partial^\mu f$, dove f è una funzione arbitraria delle coordinate. Anche in questo caso è possibile trovare infinite soluzioni che obbediscano alle stesse condizioni iniziali. Tuttavia, anche in questo caso, il campo elettromagnetico è uguale per tutte queste soluzioni apparentemente diverse:

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

Anche in questo caso è possibile risolvere tutto imponendo una condizione aggiuntiva:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0$$

Tuttavia, abbiamo ancora la possibilità di aggiungere $\partial_\mu f$ se f soddisfa:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha f = 0$$

che, come si vede, permette al campo di soddisfare ancora sia l'equazione che la condizione aggiuntiva. A questo punto, se sappiamo che non ci sono onde elettromagnetiche entranti o uscenti, si può imporre

$$f(\mathbf{x} = \infty, t) = 0$$

oppure, se tali onde ci sono, si impone una condizione per f all'infinito in modo da fissare univocamente la soluzione.

Infine, in relatività generale abbiamo anche qui un'ampia libertà. Secondo il principio di covarianza, possiamo ridefinire il sistema di coordinate in modo del tutto arbitrario.

Il seguente argomento - il cosiddetto “argomento del buco” - ha spinto Einstein a credere che una qualunque equazione fondata sul principio di covarianza non potesse essere deterministica (vero) e che quindi non potesse essere l'equazione che cercava (falso: non è un problema, come non è un problema per l'elettromagnetismo o per la gravità newtoniana).

L'argomento è il seguente. Immaginiamo di avere un universo con una certa distribuzione di materia, e un “buco”, ovvero un'ampia regione di spazio in cui non c'è materia. Specifichiamo le condizioni iniziali, usiamo l'equazione fondamentale (che ancora Einstein non aveva) e l'equazione del moto delle particelle per trovare il valore del campo $g_{\mu\nu}$ e la distribuzione di materia $T_{\alpha\beta}$ in tutti i tempi successivi. Si presume che il “buco” resti privo di materia almeno fino al tempo $t = 3$.

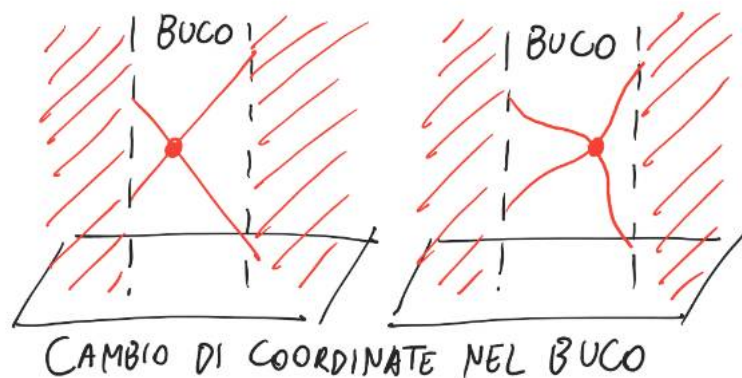


Figura 34: L'argomento del buco: esistono diverse soluzioni delle equazioni della gravità con le stesse condizioni iniziali, ottenute cambiando il sistema di coordinate. In questo caso, cambiando il sistema di coordinate nel "buco" (una regione senza materia), le coordinate spazio-temporali dell'evento in cui due particelle si incontrano cambia. Solo dopo tre anni, Einstein comprese che cambiare sistema di coordinate equivale a cambiare i nomi con cui chiamo i punti dello spatio-tempo, mentre la fisica resta esattamente la stessa!

Ora, immaginiamo di usare la libertà di ridefinire il sistema di coordinate per ridefinire le coordinate all'interno del buco tra i tempi $t = 1$ e $t = 3$, magari allargando o storcendo il reticolo spaziale che determina le coordinate. Abbiamo infinite soluzioni alle equazioni, e con le stesse condizioni iniziali.

Ora, immaginiamo che, in effetti, il buco non sia completamente vuoto: due particelle lo attraversano e si incontrano all'interno del buco al tempo $t = 2$. Le due soluzioni trovate hanno diversi valori di $g_{\mu\nu}$ all'interno del buco, e quindi le particelle seguiranno traiettorie diverse: si incontreranno, ma in un altro luogo!

Questo fatto convinse Einstein che equazioni che obbediscano al principio di covarianza non potessero essere accettate, perché non erano deterministiche. Questo fu quello che pensò nel 1912, e che lo spinse per tre anni a provare equazioni non covarianti per descrivere la gravità. Alla fine, nell'autunno del 1915, si convinse di nuovo che le equazioni dovessero invece essere covarianti, e giunse alle equazioni che abbiamo scritto (seguendo una via diversa, però). Che cosa gli fece cambiare idea? Il punto è che si accorse che il fatto che il punto in cui si incrociavano le particelle fosse "un altro luogo" *non ha significato fisico*. I "nomi dei luoghi" dati dalle coordinate si possono cambiare: il principio di covarianza permette di rinominare le coordinate spaziotemporali di tutti i punti dell'Universo. L'unica cosa che determina la diversità di un luogo rispetto all'altro sono gli eventi fisici che avvengono: l'incrocio tra particelle, ad esempio. Le interazioni locali.

Nel caso dell'argomento del buco, avevamo infinite soluzioni in cui le due particelle si incontravano “in luoghi diversi”, cioè in punti in cui il valore delle coordinate è diverso. E con ciò? Il valore delle coordinate non può essere misurato, è scelto arbitrariamente. Se un luogo è determinato dagli eventi fisici che avvengono, allora il luogo definito come “il punto spaziotemporale in cui si incontrano le due particelle nel buco” è ben definito, ed è lo stesso in tutte le soluzioni. Non importa che i nomi dei punti siano diversi, o che il campo gravitazionale $g_{\mu\nu}$ sia diverso: abbiamo già visto come cambia usando un sistema di coordinate più grande, oppure, più banalmente: se raddoppio la lunghezza dei miei righelli, il valore Δx^μ delle coordinate si dimezza, quindi, ricordando

$$(\Delta\tau)^2 = g_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu$$

abbiamo che il valore del campo gravitazionale quadruplica. La cosa non ci lascia sconvolti.

È per questa sottile questione di interpretazione che Einstein impiegò tanto tempo per scrivere l'equazione della relatività generale. Tuttavia, si tratta di un punto importante: *possiamo assegnare arbitrariamente i nomi ai punti dello spaziotempo, perché non hanno significato fisico*. Il fatto che un “luogo e tempo” sia tale è dovuto agli eventi fisici che vi accadono, come le interazioni locali tra particelle. Scompare così definitivamente lo “Spazio assoluto” che aveva introdotto Newton per spiegare *rispetto a cosa* bisognasse misurare le accelerazioni.

1.12 Problemi

Problema 1.2 (Trigonometria iperbolica). Le seguenti equazioni sono valide per le funzioni trigonometriche, seno e coseno. Si cerchi di dimostrare equazioni “analoghe” per seno iperbolico e coseno iperbolico. Spesso è sufficiente solo cambiare un segno da qualche parte.

Anche in questo caso, l'idea chiave è scrivere le funzioni in termini di esponenziali.

$$(i) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$(ii) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$(iii) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$(iv) \quad \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) - 1}{\cot(\beta) + \cot(\alpha)}$$

$$(v) \quad \sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$(vi) \quad \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$(vii) \quad \sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$(viii) \quad \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$(ix) \quad \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$(x) \quad 1 + 2 \cos(x) + 2 \cos(2x) + 2 \cos(3x) + \dots + 2 \cos(nx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \quad (\text{temo non ne esista una versione iperbolica...})$$

$$(xi) \quad \sin^3(\alpha) \text{ in funzione di } \sin(\alpha), \sin(2\alpha), \sin(3\alpha), \dots$$

Problema 1.3 (L'orologio luce). Si consideri uno strumento fatto in questo modo: due specchi paralleli, posti uno di fronte all'altro, all'interno del quale rimbalza un fotone (è uno strumento ideale, chiaramente). Esso si chiama orologio luce. Il numero di rimbalzi segna lo scorrere del tempo.

Si studi il comportamento dell'orologio luce che si muove perpendicolarmente all'asse degli specchi, con velocità v . Quanti rimbalzi avvengono in un intervallo di tempo Δt ? Invece, quanti rimbalzi devono avvenire per l'osservatore che si muove assieme allo specchio, se tutti i sistemi di riferimento inerziali sono ugualmente privilegiati? Che effetto relativistico abbiamo dedotto?

Problema 1.4 (Aberrazione degli angoli). Si calcoli come cambiano gli angoli tra due sistemi di riferimento O e O' legati da un boost. Quindi un'astronave che si muove a $v \lesssim c$, dove vedrà quasi tutte le stelle del cielo? Inoltre, le vedrà rosse o blu? (ricordare l'effetto Doppler)

Problema 1.5 (Paradosso dell'astronave di Bell). Abbiamo due astronavi a distanza ℓ collegate da un filo. Al nostro tempo $t = 0$ esse iniziano a muoversi di moto iperbolico con accelerazione propria $+a$. Il filo si spezza?

Problema 1.6 (Paradosso di Ehrenfest). Consideriamo un oggetto relativistico rotante con velocità angolare ω . Considerando l'effetto di contrazione delle lunghezze, a distanza r dal centro la circonferenza è maggiore, uguale o minore di $2\pi r$? Si ragioni con calma.

Problema 1.7 (Il biscotto relativistico). Consideriamo una pasta per biscotti su un nastro trasportatore che si muove a velocità v (comparabile con quella della luce) in una data direzione. Sopra di questo c'è uno stampo di forma circolare (diametro L a riposo). Quando azionato, questo scende perpendicolarmente sul nastro e taglia nella pasta un biscotto. Quando poi il nastro si ferma, quale sarà nel sistema a riposo la forma del biscotto? Le risposte che si possono dare sono tre:

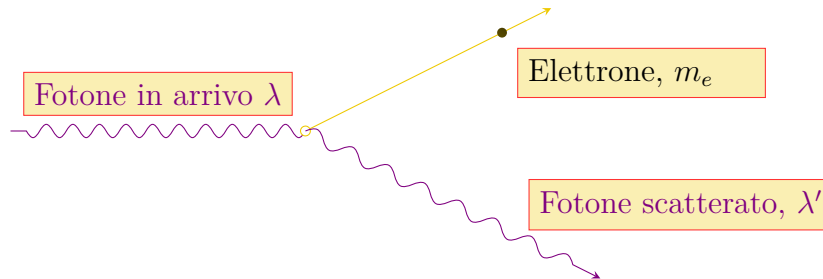


Figura 35: scattering Compton.

1. Il biscotto sarà circolare.
2. Il biscotto apparirà di forma ovale, con il semiasse maggiore parallelo alla direzione del moto.
3. Il biscotto apparirà di forma ovale, ma con il semiasse maggiore perpendicolare alla direzione del moto.

Problema 1.8 (Effetto Compton). Si consideri l'urto elastico di un fotone di frequenza ν contro un elettrone di massa m_e ², inizialmente fermo nel sistema S . Il fotone viene emesso con un angolo ϕ rispetto alla direzione di volo iniziale. Si calcoli la differenza $\lambda' - \lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda del fotone prima dell'urto e quella primata è quella dopo.

Problema 1.9 (Decadimento del π^-). Il π^- è un mesone carico con una massa di circa $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$. Questa particella decade principalmente in un muone μ di massa $m_\mu = 100 \text{ MeV}/c^2$ e in un antineutrino muonico $\bar{\nu}_\mu$, di massa talmente piccola da essere approssimabile a 0. Nel riferimento S il π^- si dirige lungo l'asse x con una certa velocità β . Viene rivelato il muone con un angolo θ rispetto alla direzione di volo. Si calcoli l'energia del muone in funzione di β e θ .

Problema 1.10 (Decadimento del π^0). Consideriamo ora un π^0 , parente stretto del π^- studiato nel problema 1.9. La massa del π^0 è la stessa del π^- , ma questa particella decade in due fotoni. Si assuma che nel riferimento in cui il π^0 è a riposo, la probabilità di decadimento in una certa direzione sia uniforme, ovvero che sia ugualmente probabile decadere in una qualsiasi

²Nel problema non si richiedono calcoli numerici, ma il lettore può essere interessato a conoscerne il valore di $m_e = 511 \text{ keV}$. Inoltre, può essere comodo ricordare che $\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$.

direzione. Nel riferimento del laboratorio il π^0 si muove con una velocità β lungo l'asse x .

- Si calcoli qual è l'angolo minimo possibile fra i due fotoni nel riferimento del laboratorio.
- Si ricavi la distribuzione in energia dei prodotti di decadimento nel sistema di riferimento del laboratorio, ovvero la distribuzione di probabilità che uno dei due fotoni abbia una certa energia.³
- Si calcoli la distribuzione di probabilità del numero di eventi in funzione dell'angolo α compreso fra i due fotoni nel riferimento del laboratorio.⁴

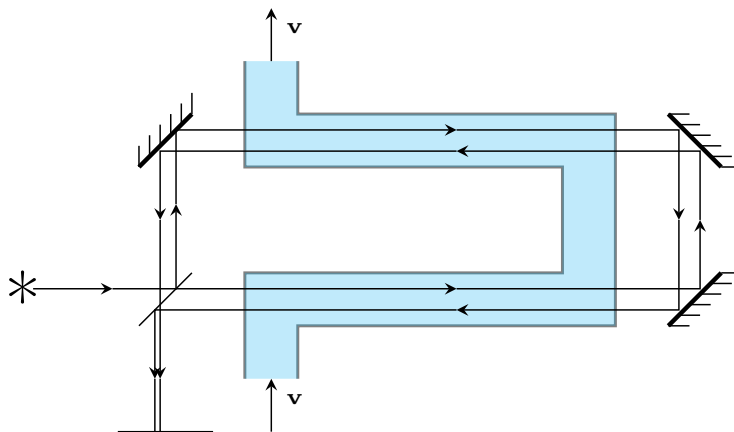


Figura 36: esperimento di Fizeau.

Problema 1.11 (Esperimento di Fizeau). Consideriamo l'esperimento di interferenza in figura 36. Una sorgente di luce coerente emette luce di lunghezza d'onda λ che segue il percorso di specchi indicato in figura. Dentro al tubo vi è un liquido di indice di rifrazione n che si muove a velocità costante u rispetto al tubo. Si supponga che gli unici tratti che contribuiscono ad accumulare differenza di cammino ottico siano quelli orizzontali dentro al fluido. Si supponga che il lato del tubo orizzontale sia lungo L .

³Ovviamente l'energia del fotone può assumere solo un ristretto intervallo di valori. La domanda del testo è: se i valori che può assumere l'energia sono compresi fra $E_{\max}$ ed $E_{\min}$, questi valori sono tutti equiprobabili oppure c'è qualche valore particolare per cui si ha un massimo/minimo di probabilità?

⁴Si noti che nel riferimento del centro di massa questa distribuzione è una delta di Dirac, ovvero tutti gli eventi accadono con $\alpha = \pi$. Nel riferimento del laboratorio la cosa cambia e non di poco.

Si mostri che la differenza di fase $\Delta\phi$ fra i due raggi che seguono i due percorsi diversi vale

$$\Delta\phi = 8\pi \frac{L}{\lambda} c \frac{u(n^2 - 1)}{c^2 - n^2 u^2}$$

Problema 1.12 (APhO 2013). Si consideri un punto materiale di massa m . Indichiamo con S il riferimento *a riposo*, ovvero quello del laboratorio. Indichiamo con S' una famiglia di sistemi di riferimento inerziali definiti nel seguente modo. Dato il tempo misurato nel laboratorio, t , il riferimento $S'(t)$ è il sistema di riferimento centrato nel punto materiale che si muove con velocità $\beta(t)$ uguale a quella della massa m nel riferimento S , ovvero una famiglia di sistemi di riferimento che “insegue” la pallina di massa m . Tale famiglia di sistemi viene usualmente chiamata *sistema tangente alla particella*. Supponiamo che la pallina sia soggetta ad una forza esterna $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{x}}$, definita nel riferimento S , costante ed uniforme e supponiamo per semplicità che al tempo $t = 0$ la pallina sia al centro del riferimento. Si definisce la quantità $g = F/m$, da usare per brevità.

- Calcolare la velocità $v(t)$ della particella nel riferimento S all'istante di tempo t .
- Calcolare l'accelerazione propria della particella all'istante t , definita come l'accelerazione misurata nel sistema di riferimento tangente.
- Calcolare la velocità della particella v nel riferimento S , ma non in funzione del tempo t del sistema S , bensì in funzione di τ , il tempo proprio misurato dalla particella.
- Trovare un'equazione che esprima t in funzione di τ e di altri parametri rilevanti.
- Consideriamo ora il *ritardo dell'informazione*. Sia τ il tempo proprio della particella. Al tempo τ , la particella *legge* su un grande orologio situato nell'origine del riferimento S un tempo $t_0(\tau)$. Si trovi questa funzione e si studi in particolare il comportamento per $\tau \rightarrow \infty$.

Andiamo ora a considerare un sistema di 2 particelle di massa m , uguali, chiamate A e B . All'istante iniziale A è nell'origine di S , B è a $x = L$ e sono entrambe ferme. Nota bene: In questa parte del problema *non* si consideri il ritardo dell'informazione. Le due palline sono entrambe soggette alla stessa forza F definita prima.

- Ad un certo istante di tempo, un osservatore solidale al sistema S vede⁵ che l'orologio di A segna un tempo τ_A . Che tempo τ_B segna l'orologio di B , sempre visto dall'osservatore in S ?
- Consideriamo adesso un osservatore nel sistema tangente di A . In un certo momento questo osservatore vede che l'orologio di A segna un tempo τ_1 , mentre l'orologio di B segna un tempo τ_2 . Si mostri che vale la relazione

$$\sinh\left(\frac{F}{mc}(\tau_2 - \tau_1)\right) = C_1 \sinh\frac{F}{mc}\tau_1$$

Dove C_1 è una costante. Si calcoli inoltre C_1

- La prima particella vedrà allontanarsi la seconda. Si mostri che il tasso di cambio di distanza (ovvero la velocità), visto dalla prima particella vale

$$\frac{dL'}{d\tau_1} = C_2 \frac{\sinh\frac{F\tau_2}{mc}}{\cosh\frac{F}{mc}(\tau_2 - \tau_1)}$$

Si calcoli la costante C_2

Si consideri una situazione simile a quella di prima, in cui le due particelle però sono soggette a forze diverse. In particolare, sia g_A l'accelerazione della prima particella, g_B quella della seconda.

- Nel riferimento S esiste un punto x_p tale che esso si trova *sempre alla stessa distanza* dalla pallina A , secondo la pallina A . Si trovi x_p .
- Data l'accelerazione g_A , si calcoli l'accelerazione g_B che permetta alla pallina A di vedere sempre la pallina B alla stessa distanza.
- Si calcoli il rapporto fra i tempi propri misurati dalle due palline

$$R = \frac{d\tau_A}{d\tau_B}$$

La sezione precedente serviva tutta per calcolare le correzioni relativistiche che servono per regolare gli orologi dei GPS.

- Si consideri un satellite in orbita GPS. Tali orbite sono tali da avere periodo di 12 h. Sia $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$. Si calcoli la velocità rispetto al centro della Terra di un satellite e si calcoli anche l'accelerazione di gravità a quella quota. Si ricordi che il raggio della Terra vale $R_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ e che un giorno dura 24 h.

⁵*Repetita juvant*: Non si consideri il ritardo dell'informazione

- Ci sono due effetti in gioco che rendono diverso il tempo misurato da un osservatore sulla superficie terrestre e il satellite. Uno è di relatività ristretta, dovuto al fatto che entrambe gli osservatori sono in moto rispetto ad un riferimento inerziale, ma con velocità diverse. L'altro è dovuto all'accelerazione di gravità. Si usi il principio di equivalenza per tenere conto del secondo effetto. Si dica quale dei due effetti è più rilevante e si calcoli la differenza di tempo accumulata in un giorno fra i due orologi.
- Si stimi l'errore sulla posizione data dal GPS se gli orologi in orbita non tenessero conto di questo effetto.

Problema 1.13 (Razzo relativistico). Si consideri un razzo di massa iniziale M . Poniamo il razzo nel vuoto per semplicità. Sia S un sistema di riferimento inerziale e si posizioni il razzo al centro del riferimento all'istante iniziale. Il razzo perde massa per unità di tempo ad un tasso costante Γ . Si noti che questa affermazione è volutamente ambigua, in quanto non ho detto il tempo misurato da *chi*. Sta al lettore capire con il suo senso fisico qual è il tempo sensato rispetto a cui si deriva. Prima di immergersi in conti, si consiglia di controllare se l'istinto ha funzionato bene o meno leggendo la prima riga della soluzione.

Il razzo spara indietro la massa che perde ad una velocità relativa costante $u = \beta_0 c$. Notare bene la parola "relativa". Il lettore si renda conto dei problemi che derivano da questa frase.

Si calcoli la velocità del razzo quando esso ha una massa m . Si assuma che il metodo di espulsione del carburante non aggiunga energia sotto forma di energia chimica al tutto. Si immagini per esempio che l'espulsione avvenga con un decadimento α .

Problema 1.14 (Vela solare). Consideriamo un satellite con un grosso specchio piano in grado di riflettere la luce solare, orientabile a piacimento. Lo specchio ha area A . Il satellite, specchio incluso, ha massa $m \ll M_\odot$ dove $M_\odot$ è la massa del Sole. Inizialmente il satellite si trova ad una distanza r_0 dal Sole, su un'orbita circolare. Trascurare la presenza degli altri pianeti. Ad un certo punto il satellite apre la vela solare, facendo in modo da tenere sempre lo specchio rivolto esattamente verso il Sole.

PARTE 1

Il Sole ha un'intensità I_0 , misurata alla distanza r_0 , definita come potenza per unità di area.

- Trovare il valore minimo di A che permette al satellite di abbandonare il sistema solare.

- Se il satellite non rivolge più in modo esatto lo specchio verso il Sole ma fa in modo che la normale allo specchio formi un angolo α variabile a piacimento $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, dire come cambiano le forze e studiare il problema per piccoli α e tempi piccoli. Si assuma per questo punto che la forza di radiazione sia piccola rispetto a quella gravitazionale.

PARTE 2

È facile mettere dei dati numerici per accorgersi che si possono rapidamente raggiungere relativistiche una volta abbandonato il sistema solare. Per questo motivo non è più possibile che la forza esercitata dalla pressione di radiazione dipenda solo dalla posizione del satellite e non dalla sua velocità.

Consideriamo quindi una sorgente monocromatica di luce che emette fotoni di frequenza fissa ν nel suo riferimento. La sorgente emette una quantità n di fotoni per unità di tempo nel suo riferimento. Consideriamo uno specchio di massa m , tale che $h\nu \ll mc^2$ rivolto verso la sorgente che si allontana dalla stessa ad una velocità v .

Si diano tutti i risultati al primo ordine in $\frac{h\nu}{mc^2}$.

- Trovare l'accelerazione dello specchio nel riferimento della sorgente in funzione di β, n, ν, m (assumere il sole come sorgente monocromatica)
- Usare il risultato appena trovato per esprimere la forza di spinta dovuta ai fotoni agente sul satellite in funzione della sua distanza dal Sole r e della sua velocità v (e degli altri parametri rilevanti)

Problema 1.15 (Buco Nero di Schwarzschild). Abbiamo studiato nel capitolo sulla relatività generale che il redshift gravitazionale è dato dalla formula:

$$\omega' = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \omega$$

Questo significa che al cambiare del potenziale ϕ , a parità di Δt il tempo proprio $\Delta\tau$ è diverso.

In relatività generale, nei dintorni di un oggetto massivo a simmetria sferica di massa M (un buco nero, oppure la Terra), si ha che $g_{\mu\nu}$ ha un valore diverso. Perciò, nella formula del tempo proprio, si ha:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

dove

$$r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

è (a parte il fattore 2) l'unica quantità con unità si misura di una lunghezza che può essere costruita usando M e i parametri della teoria c e G .

Si calcoli:

1. il redshift gravitazionale tra un emettitore a r_1 e un ricevitore a r_2 , all'ordine più basso, e si verifichi che torna il limite newtoniano. Si calcoli la correzione all'ordine successivo.
2. Si calcoli la traiettoria $r(t)$ (lasciando indicati eventuali integrali) di un raggio di luce che si muove radialmente (sia entrante sia uscente): che cosa bisogna imporre nell'equazione?
3. Si calcoli il valore della traiettoria quando $r \approx r_S$ (sia entrante sia uscente). Ha la forma di una funzione molto nota: quale?
4. Si discuta qualitativamente quale problema si vede nell'equazione del tempo proprio quando $r = r_S$. Si dica che cosa succede quando $r < r_S$.
5. Si calcoli la traiettoria di un raggio di luce (sia entrante sia uscente) nella regione $r < r_S$.

Problema 1.16 (La scatola di Einstein e Bohr). É noto che, a causa del principio di equivalenza, il tempo scorre in modo diverso a diverse altezze. Si ripensi al problema della scatola di Einstein della lezione di Ottica Fisica. Alla luce delle conoscenze attuali, è corretto l'argomento di Einstein secondo cui si può violare il principio d'indeterminazione nella forma $\Delta t \Delta E \geq h/2$?

1.13 Soluzioni

Soluzione 1.1 (Paradosso dei gemelli). Per il gemello sulla Terra passano 10 anni, per il gemello sull'astronave il tempo trascorso va diviso per il fattore $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 5/3$, dove $\beta = 4/5$. Quindi sono passati 6 anni.

Il sistema di riferimento del gemello a Terra è privilegiato perché non si verificano mai accelerazioni. Come mostrato nella figura 13, nel breve periodo in cui il gemello sull'astronave fa retromarcia (indicato da un punto), le sue "rette di contemporaneità" cambiano di colpo, e l'età del gemello sulla Terra che è "contemporaneo" al gemello sull'astronave cambia di colpo.

Soluzione 1.2 (Trigonometria iperbolica). Il modo migliore di trovare le formule per le funzioni iperboliche, se si hanno a disposizione quelle per le formule trigonometriche, è effettuare la seguente sostituzione:

$$\begin{cases} i\theta = \chi \\ \cos(\theta) = \cosh(i\theta) = \cosh(\chi) \\ \sin(\theta) = -i \sinh(i\theta) = -i \sinh(\chi) \end{cases}$$

Otteniamo perciò:

- (i) $\sinh(\alpha + \beta) = \sinh(\alpha) \cosh(\beta) + \sinh(\beta) \cosh(\alpha)$
- (ii) $\cosh(\alpha + \beta) = \cosh(\alpha) \cosh(\beta) + \sinh(\alpha) \sinh(\beta)$
- (iii) $\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\tanh(\alpha) + \tanh(\beta)}{1 + \tanh(\alpha) \tanh(\beta)}$
- (iv) $\coth(\alpha + \beta) = \frac{\coth(\alpha) \coth(\beta) + 1}{\coth(\beta) + \coth(\alpha)}$
- (v) $\sinh(\alpha) + \sinh(\beta) = 2 \sinh\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cosh\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
- (vi) $\cosh(\alpha) + \cosh(\beta) = 2 \cosh\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cosh\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
- (vii) $\sinh(\alpha) \cosh(\beta) = \frac{1}{2}(\sinh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha - \beta))$
- (viii) $\cosh(\alpha) \cosh(\beta) = \frac{1}{2}(\cosh(\alpha + \beta) + \cosh(\alpha - \beta))$
- (ix) $\sinh(\alpha) \sinh(\beta) = \frac{1}{2}(-\cosh(\alpha - \beta) + \cosh(\alpha + \beta))$
- (x) $1 + 2 \cosh(x) + 2 \cosh(2x) + 2 \cosh(3x) + \dots + 2 \cosh(nx) = \frac{\sinh((n + \frac{1}{2})x)}{\sinh(\frac{x}{2})}$
(dunque esiste una versione iperbolica!)
- (xi) Così come la versione trigonometrica è $\sin^3(x) = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$, così la versione iperbolica è $\sinh^3(x) = \frac{-3 \sinh x + \sinh 3x}{4}$

È inoltre possibile dimostrare queste formule direttamente, sostituendo la definizione di seno e coseno iperbolico con gli esponenziali.

Sulle prime due equazioni basta sostituire. Sulla terza e sulla quarta si possono riciclare le prime due: ad esempio per la terza si ha $\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\sinh(\alpha + \beta)}{\cosh(\alpha + \beta)} = \frac{\sinh(\alpha) \cosh(\beta) + \sinh(\beta) \cosh(\alpha)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta) + \sinh(\alpha) \sinh(\beta)} = \frac{\tanh(\alpha) + \tanh(\beta)}{1 + \tanh(\alpha) \tanh(\beta)}$, dove nell'ultimo passaggio si è diviso sopra e sotto per $\cosh(\alpha) \cosh(\beta)$.

La quinta e la sesta sono uguali alla settima e all'ottava, se solo si cambiano i nomi degli angoli e si scambiano i due lati dell'equazione.

La settima si trova dalla prima: se si sommano $\sinh(\alpha + \beta)$ e $\sinh(\alpha - \beta)$ calcolati con la prima equazione (ricordando che $\sinh(-\alpha) = -\sinh(\alpha)$ e che $\cosh(-\alpha) = \cosh(\alpha)$), si ottiene $2\sinh(\alpha)\sin(\beta)$. Si divida per 2.

L'ottava si trova dalla seconda allo stesso modo.

La nona si ottiene dalla seconda allo stesso modo, scegliendo i segni per far sopravvivere solo il termine $\sinh(\alpha)\sinh(\beta)$. Nella decima bisogna usare la definizione del coseno con gli esponenziali, notando che si ottiene la serie geometrica $e^{nx} + e^{(n-1)x} + \dots + e^{-nx} = e^{nx}(1 + e^{-nx} + \dots + e^{-2nx}) = e^{nx} \frac{1 - e^{-(2n+1)x}}{1 - e^{-nx}} = \frac{e^{(n+1/2)x} - e^{-(n+1/2)x}}{e^{nx/2} - e^{-nx/2}} = \frac{\sinh((n+\frac{1}{2})x)}{\sinh(\frac{x}{2})}$, ricordando la definizione del seno iperbolico.

L'undicesima si trova usando un analogo di De Moivre: $\cosh(3x) + j \sinh(3x) = (\cosh(x) + j \sinh(x))^3$, dove j è una quantità misteriosa che soddisfa $j^2 = +1$, ma che è diversa da ± 1 . Prendendo solo le parti "immaginarie" di ambo i membri, e semplificando le j , ottengo: $\sinh(3x) = 3\cosh^2(x)\sinh(x) + \sinh^3(x) = 3(1 + \sinh^2(x))\sinh(x) + \sinh^3(x) = 3\sinh(x) + 4\sinh^3(x)$. Esplicitando il termine di interesse si ottiene $\sinh^3(x) = \frac{-3\sinh x + \sinh 3x}{4}$.

Soluzione 1.3 (L'orologio luce). Se lo specchio fosse fermo, con i due estremi a distanza ℓ , e in un intervallo di tempo Δt vengono fatti $N = \frac{\ell}{c\Delta t}$ rimbalzi. Per un osservatore che vede lo specchio muoversi a velocità v , la luce si muove a velocità c ma in modo inclinato, perciò la velocità parallela all'asse che separa i due specchi, per il teorema di Pitagora, è $\sqrt{c^2 - v^2}$. Il numero di rimbalzi è perciò $N' = \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}\Delta t} = \gamma N$.

Un osservatore in movimento con lo specchio vede dunque N' rimbalzi? Questo è in contrasto col principio di relatività, visto che lui non può sapere se si sta muovendo o no! Perciò, il tempo dovrebbe scorrere in modo diverso per lui, di un fattore γ , in modo che anche lui veda N rimbalzi.

Abbiamo dedotto la dilatazione dei tempi.

Soluzione 1.4 (Aberrazione degli angoli). Vediamolo per gli angoli sul piano xy , dove il boost avviene lungo l'asse x . Il caso generico è troppo complicato. Immaginiamo un raggio di luce che arrivi sull'astronave nel sistema di riferimento O dell'astronave, con un angolo θ rispetto all'asse dell'astronave (se $\theta = 0$ vuol dire che il raggio di luce arriva da davanti). La traiettoria del raggio di luce è perciò

$$\begin{cases} x = -ct \cos(\theta) \\ y = -ct \sin(\theta) \end{cases}$$

Quando cambio sistema di riferimento ho $x' = \gamma(x + \beta ct)$ e $y' = y$ quindi abbiamo:

$$\tan(\theta') = \frac{\gamma(\cos(\theta) - \beta)}{\sin(\theta)}$$

Da cui implicitamente troviamo θ' .

Si noti come gli angoli diminuiscono quando l'astronave accelera in avanti. Questo vuol dire che un'astronave che si muovesse a velocità molto vicine a quelle della luce, vedrà quasi tutte le stelle del cielo davanti a sé, e le vedrà blu (a causa dell'effetto Doppler la loro frequenza aumenterà) mentre le poche stelle non ammassate a prua, le vedrà spostate verso il rosso. Si ricorda che l'effetto Doppler relativistico non è uguale quantitativamente a quello non relativistico, ma c'è comunque blueshift avvicinandosi e redshift allontanandosi.

Soluzione 1.5 (Paradosso dell'astronave di Bell). Scegliamo il sistema di riferimento in modo che l'astronave più arretrata delle due sia in posizione $+c^2/a$, come in figura 19: si ricorderà che la traiettoria del moto iperbolico aveva equazione

$$\frac{c^2}{a}(\cosh(\psi), \sinh(\psi))$$

dove ψ è un parametro. Inoltre, si ricorderà che la distanza dell'astronave dall'origine degli assi, visto nel sistema incipiente dell'astronave, è sempre costante (in figura sono le distanze $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ eccetera).

Disegniamo perciò il luogo dei punti che, in ogni istante, sono *davanti all'astronave* a una certa distanza fissa ℓ , ma una distanza calcolata di volta in volta nel sistema di riferimento incipiente dell'astronave. Questo si ottiene prolungando dal lato destro i segmenti $\overline{OA}$ eccetera, ottenendo i punti A' eccetera, i quali hanno distanza dall'origine degli assi maggiore di un fattore $\frac{\ell+c^2/a}{c^2/a}$. L'equazione della traiettoria è perciò:

$$\frac{c^2}{a'}(\cosh(\psi), \sinh(\psi))$$

Con $a' < a$.

Perciò se l'astronave che è davanti accelera a un'accelerazione a , non resta equidistante, ma la distanza misurata nel sistema incipiente aumenta! Ma il sistema incipiente è quello della corda! Perciò la corda si spezza.

Soluzione 1.6 (Paradosso di Ehrenfest). La risposta dipende dall'osservatore. Per un osservatore fermo, chiaramente vale sempre $C = 2\pi r$ visto che il disco è come se non ci fosse. Invece, per un osservatore solidale con il disco, il disco subisce la contrazione delle lunghezze lungo la direzione del moto, che è tangenziale. Perciò i righe di un osservatore solidale col disco si accorceranno nella direzione tangenziale, e misureranno una distanza più lunga pari a $\frac{2\pi r}{\sqrt{1-\omega^2 r^2/c^2}}$.

Soluzione 1.7 (Il biscotto relativistico). Vista dal sistema di riferimento dello stampo, in cui la pasta è in movimento, lo stampo crea una forma circolare di una pasta la quale è contratta nella direzione del moto di un fattore γ . Quando il nastro trasportatore si ferma, la pasta si riallungherà di un fattore γ nella direzione del moto. La risposta giusta è la 2.

Soluzione 1.8 (Effetto Compton). Questo problema è di riscaldamento. Al solito, dobbiamo imporre la conservazione del quadrimpulso. Indichiamo con E e p l'energia e il modulo del tri-impulso dell'elettrone dopo l'urto. Sappiamo che per un fotone si ha $E_\nu = h\nu$ e che la quantità di moto è $pc = E$. Notare che le due equazioni sotto sono state moltiplicate per c per rendere i conti un po' più semplici.

$$\begin{cases} mc^2 + h\nu = E + h\nu' \\ h\nu = pc \cos \psi + h\nu' \cos \theta \\ h\nu' \sin \theta = pc \sin \psi \end{cases}$$

Liberiamoci dell'angolo ψ , che non ci interessa, usando un classico $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$. Otteniamo una nuova coppia di equazioni

$$\begin{cases} mc^2 + h\nu = E + h\nu' \\ h^2(\nu - \nu' \cos \theta)^2 + h^2\nu' \sin^2 \theta = p^2 c^2 \end{cases}$$

E a questo punto sfruttiamo il fatto che $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$, dove m è la massa dell'elettrone

$$(mc^2 + h(\nu - \nu'))^2 - h^2(\nu - \nu' \cos \theta)^2 + h^2\nu' \sin^2 \theta = m^2 c^4$$

Riordinando questa equazione si semplifica quasi tutto e rimane semplicemente

$$\nu\nu'(1 - \cos \theta) = \frac{mc^2}{h}(\nu - \nu')$$

Per ottenere la risposta richiesta dal testo, basta ricordarsi che $c = \lambda\nu$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)$$

Soluzione 1.9 (Soluzione del problema Decadimento del π^-). Questo era un problema di riscaldamento. Il problema si può risolvere imponendo la conservazione del quadrimpulso. Indichiamo con $p_0 = \gamma m_\pi c\beta$ e con $E_0 = \gamma m_\pi c^2$. Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} E_0 = E_\mu + E_\nu \\ p_0 = p_\mu \cos \theta + p_\nu \cos \phi \\ p_\mu \sin \theta = p_\nu \sin \phi \end{cases}$$

Il modo migliore di fare questi conti è di **non** tirare radici, ma di continuare a sfruttare in modo intelligente le relazioni $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$. Inoltre, dato che qui abbiamo l'angolo ϕ incognito, che non ci interessa più di tanto, sfruttare un $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ può essere utile. Per cui,

$$\begin{cases} E_0 = E_\mu + E_\nu \\ (p_\mu \sin \theta)^2 = (p_\nu \sin \phi)^2 \\ (p_0 - p_\mu \cos \theta)^2 = (p_\nu \cos \phi)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_0 = E_\mu + E_\nu \\ p_0^2 - 2p_0 p_\mu \cos \theta + p_\mu^2 = p_\nu^2 \end{cases}$$

A questo punto bisogna liberarsi del neutrino. Per farlo, possiamo sfruttare il fatto che $E_\nu^2 = p_\nu^2 c^2$, dato che il neutrino ha massa quasi nulla.

$$\begin{cases} (E_0 - E_\mu)^2 = E_\nu^2 \\ p_0^2 - 2p_0 p_\mu \cos \theta + p_\mu^2 = p_\nu^2 \end{cases} \Rightarrow (E_0^2 - p_0^2 c^2) + (E_\mu^2 - p_\mu^2 c^2) + 2p_0 p_\mu c^2 \cos \theta - 2E_0 E_\mu = 0$$

Siamo quasi arrivati in fondo, abbiamo una sola equazione in cui compaiono solo quantità che sappiamo e due incognite, E_μ e p_μ . Vediamo come concludere

$$(E_0^2 - p_0^2 c^2) + (E_\mu^2 - p_\mu^2 c^2) + 2p_0 p_\mu c^2 \cos \theta - 2E_0 E_\mu = 0 \Rightarrow 2p_0 p_\mu c^2 \cos \theta = 2E_0 E_\mu - (m_\pi^2 + m_\mu^2) c^4$$

$$4p_0^2 p_\mu^2 c^4 \cos^2 \theta = 4E_0^2 E_\mu^2 + (m_\pi^2 + m_\mu^2)^2 c^8 - 4E_0 E_\mu (m_\pi^2 + m_\mu^2) c^4$$

Soluzione 1.10 (Decadimento del π^0). L'idea è al solito di imporre la conservazione del quadriimpulso e di sfruttare in modo intelligente le masse invarianti. In questa sezione supporremo che il π^0 si propaghi lungo l'asse z . Inoltre come conseguenza della conservazione della componente spaziale del quadriimpulso totale possiamo assumere che il moto dei prodotti di decadimento avvenga sul piano xz . I quadriimpulsi dei due fotoni quindi sono:

$$p_1^\mu = \frac{E_1}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad p_2^\mu = \frac{E_2}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \theta_2 \\ 0 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

Dove gli angoli sono stati presi con il segno sempre positivo! La massa invariante della somma dei quadriimpulsi dei due fotoni deve essere uguale alla massa invariante del π_0 . Segue quindi, riarrangiando i termini e usando $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$:

$$m_\pi^2 c^4 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 E_2 (1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

essendo la massa dei fotoni nulla,

$$m_\pi^2 c^4 = 2E_1 E_2 (1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

Usando facili formule trigonometriche, si ottiene la relazione finale:

$$m_\pi^2 c^4 = 4E_1 E_2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

con $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ l'angolo di apertura fra i fotoni. La cosa interessante è che tramite le masse invarianti non abbiamo dovuto imporre nessun conto di conservazione delle componenti del quadriimpulso! Possiamo a questo punto calcolare l'angolo minimo. Infatti, nel riferimento del laboratorio deve essere $E_1 + E_2 = E_\pi$, dove E_π è l'energia del π^0 nel riferimento del laboratorio. La parte importante è che è una quantità fissata, per cui possiamo scrivere

$$m_\pi^2 c^4 = 4E_1 (E_\pi - E_1) \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

Ovviamente, il $\sin^2$ sarà minimo quando la cosa che lo moltiplica sarà massima. La cosa che lo moltiplica è una parabola con concavità verso il basso in E_1 , per cui il massimo si avrà in $E_1/2$, ovvero quando

$$m_\pi^2 c^4 = E_\pi^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

Che è una ovvia equazione per l'angolo minimo. Studiamo adesso la distribuzione in energia. Come osservazione preliminare, ricordiamo che la trasformazione degli angoli in sistemi di riferimento diversi è presente, seppure in forma diversa, negli urti fra particelle classiche. Adottiamo la convenzione che gli angoli contrassegnati con * sono quelli visti nel sistema del π , mentre quelli senza sono gli angoli visti nel sistema del laboratorio. Sappiamo che nel sistema del π il decadimento è uniforme. Questo significa che il numero di conteggi è uniforme in $\cos \theta^*$ è $\frac{dN}{d \cos \theta^*} = c$, con c costante da determinare. Per determinare la costante, basta imporre che l'integrale su tutto l'angolo solido sia 1.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dN}{d \cos \theta^*} d \cos \theta^* = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Si osservi che una distribuzione uniforme in $\cos \theta^*$ non lo è in θ^* . Perchè quindi la condizione giusta da imporre è la prima dei due casi? La risposta sta nel fatto che gli integrali sugli angoli solidi vengono fatti proprio in $d \cos \theta$, la misura dell'angolo solido. È il problema di utilizzare le coordinate sferiche invece di quelle cartesiane: sono più semplici per fare i conti, ma la misura dello spazio non è il semplice $dx \wedge dy \wedge dz$, bensì $r^2 dr \wedge \sin \theta d\theta \wedge d\phi = r^2 dr \wedge d \cos \theta \wedge d\phi$. Adesso la cosa importante da capire, prima di immergersi nei conti, è di capire bene che cosa vuol dire *distribuzione in energia degli eventi*, scritto con i differenziali, in modo da poi poter fare manipolazioni algebriche per calcolarlo. La distribuzione in eventi sarà evidentemente una cosa del tipo

$$\frac{dN}{dE_\gamma}$$

Per cui, ora possiamo fare il calcolo della distribuzione di eventi in funzione dell'energia dei fotoni del laboratorio

$$\frac{dN}{dE_\gamma} = \frac{dN}{d \cos \theta^*} \frac{d \cos \theta^*}{dE_\gamma} = \frac{1}{2} \frac{d \cos \theta^*}{dE_\gamma}$$

La quantità a destra è brutta: abbiamo un angolo misurato nel sistema del π in funzione di una energia misurata nel laboratorio. La cosa naturale da fare è cercare di capire come trasformare l'energia dal sistema del laboratorio a quello a riposo. E' evidente che nel sistema del π i quadriimpulsi dei fotoni debbano essere:

$$p_1^{\mu*} = \frac{cm_\pi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad p_2^{\mu*} = \frac{cm_\pi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos \theta_2 \\ 0 \\ -\sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

Per trovare l'energia E_γ nel laboratorio, basta sfruttare le trasformazioni di Lorentz (i cui parametri dipendono dalla velocità del π v_π).

$$E_1 = \gamma E_1^* + \gamma \beta c p_{1,z}^* = \gamma \frac{m_\pi}{2} (1 + \beta \cos \theta^*) c^2 \quad E_2 = \gamma E_2^* + \gamma \beta c p_{2,z}^* = \gamma \frac{m_\pi}{2} (1 - \beta \cos \theta^*) c^2$$

Invertendo si ottiene facilmente che

$$\frac{d \cos \theta^*}{dE_\gamma} = \frac{2}{c p_\pi}$$

con p_π il momento nel laboratorio lungo z del pione. Un altro metodo per calcolare questa quantità è di calcolare $\frac{dE_\gamma}{d \cos \theta^*}$ e di usare il fatto che è l'inverso

della quantità cercata. In questo caso il metodo è inutile, ma spesso ci evita di dover invertire la relazione, che potrebbe pure essere più brutta. Mettendo tutto assieme si ha che la distribuzione in energia dei decadimenti è:

$$\frac{dN}{dE_\gamma} = \frac{1}{cp_\pi}$$

Si osservi come questa distribuzione sia piatta!

A questo punto dobbiamo farci del male per andare a calcolare anche la distribuzione angolare. Andiamo quindi a calcolare la quantità

$$\frac{dN}{d\alpha} = \frac{dN}{d\cos\theta^*} \frac{d\cos\theta^*}{d\alpha}$$

Il modo migliore per farlo è di riscrivere l'equazione per $\sin^2 \alpha/2$

$$\sin^2 \alpha/2 = \frac{m_\pi^2 c^4}{4E_1 E_2} = \frac{1}{\gamma^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta^*)}$$

Che si può invertire facilmente per ricavare

$$\cos \theta^* = \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2 \sin^2 \alpha/2}}$$

Facendo una facile derivata si ricava quindi

$$\frac{dN}{d\alpha} = \frac{1}{4\beta\gamma} \frac{\cos \alpha/2}{\sin^2 \alpha/2} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 \sin^2 \alpha/2 - 1}}$$

Soluzione 1.11 (Esperimento di Fizeau). Il problema è abbastanza semplice, l'unica cosa a cui bisogna stare attenti è di usare la legge giusta di trasformazione delle velocità, ovvero quella relativistica.

Nel sistema del laboratorio, sappiamo che nei due tratti la luce continua ad avere frequenza ν : la frequenza non cambia se la luce attraversa mezzi stazionari.

La differenza di fase nel sistema del laboratorio si può calcolare in termini delle due lunghezze d'onda nei due tratti:

$$\Delta\phi = 2\pi L \left(\frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+} \right)$$

Tuttavia non sappiamo ancora la lunghezza d'onda in quanto non sappiamo la velocità di propagazione della luce nel laboratorio.

Dato che sappiamo bene le leggi di propagazione della luce in mezzi fermi, ci conviene passare al sistema in cui il fluido è fermo.

Nel sistema solidale al fluido, la velocità di propagazione della luce è $\frac{c}{n}$ per considerazioni di elettromagnetismo.

Per passare alla velocità di propagazione nel sistema del laboratorio, basta usare la formula di addizione delle velocità relativistica per ottenere le velocità nei due tratti

$$v_{\pm} = c \frac{1/n \pm \frac{u}{c}}{1 \pm \frac{u}{nc}} = c \frac{c \pm un}{cn \pm u}$$

dove nei due casi abbiamo considerato una velocità del sistema di riferimento di $\pm u$.

Si ottengono quindi le rispettive lunghezze d'onda $\lambda_{\pm} = v_{\pm}/\nu$, che a loro volta portano ad una differenza di fase

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2\pi L \left(\frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+} \right) = \frac{2\pi L\nu}{c} \left(\frac{cn - u}{c - un} - \frac{cn + u}{c + un} \right) \\ &= \frac{2\pi L\nu}{c} \frac{(cn - u)(c + un) - (cn + u)(c - un)}{c^2 - u^2n^2} = \\ &= \frac{8\pi L}{\lambda} c \frac{un^2}{c^2 - u^2n^2} \end{aligned}$$

che è il risultato richiesto.

Soluzione 1.12 (APhO 2013). Affronteremo degli approcci leggermente diversi dalla soluzione ufficiale, per permettervi di vedere lo stesso problema sotto punti di vista diversi.

- Dato che la forza è *definita* nel riferimento S , possiamo semplicemente scrivere

$$F = \frac{dp}{dt}$$

E integrarla banalmente dato che F non dipende dal tempo.

$$p = Ft \Rightarrow \beta\gamma = \frac{Ft}{mc} \Rightarrow \beta(t) = \frac{\frac{Ft}{mc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}$$

Calcoliamoci subito anche γ e $x(t)$, che ci servirà fra poco.

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}$$

$$x(t) = c \int_0^t \beta(t) dt = \frac{mc^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} - 1 \right) \quad (1)$$

- Nel riferimento tangente si ha sempre $\beta = 0$. Possiamo sfruttare questa informazione per semplificare alcune cose che sappiamo. Indichiamo con gli apici tutte le quantità nel sistema tangente alla particella. In un generico riferimento S , possiamo andare a calcolare la quadriaccelerazione

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma c \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix}$$

Che, specializzati al sistema tangente, in cui si ha $\beta = 0$ e $\gamma = 1$, facendo la derivata molti termini si semplificano e rimane solo

$$a'^\mu = c \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\beta}{dt} \end{pmatrix}$$

Per cui quello che ci interessa per calcolare l'accelerazione propria è la componente spaziale della quadriaccelerazione nel riferimento tangente. Calcolarla non è difficile, in quanto nel riferimento S conosciamo ogni cosa, quindi con delle semplici derivate e un boost siamo in grado di ricavarla.

$$a^\mu = \gamma c \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix} = c \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} \begin{pmatrix} \frac{\frac{F^2 t}{m^2 c^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2}} \\ \frac{F}{mc} \end{pmatrix} = \frac{F}{m} \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} \frac{Ft}{mc} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Andiamo a fare adesso un boost lungo x , proprio di β , per metterci nel riferimento tangente

$$a'^\mu = \frac{F}{m} \gamma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} \frac{Ft}{mc} - \beta \\ 1 - \frac{\beta}{\gamma} \frac{Ft}{mc} \end{pmatrix} = \frac{F}{m} \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{\left(\frac{Ft}{mc} \right)^2}{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per cui l'accelerazione propria è costante e vale g .

- Per seguire un metodo alternativo alla soluzione ufficiale, calcolerà prima il tempo proprio in funzione del tempo nel riferimento S e poi calcolerà β .

$$\tau(t) = \int_0^\tau d\tau = \int_0^t \frac{dt}{\gamma} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2}} = \frac{mc}{F} \sinh^{-1} \frac{Ft}{mc}$$

Scritta un pochino meglio,

$$\sinh \frac{g\tau}{c} = \frac{gt}{c}$$

Da questa possiamo facilmente andare a calcolare $\beta(\tau)$

$$\beta(\tau) = \frac{\sinh \frac{g\tau}{c}}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{g\tau}{c}}} = \tanh \frac{g\tau}{c}$$

- Qui bisogna fare molta attenzione a come fare le cose. Quello di cui si è sempre sicuri è fare le cose in un solo riferimento inerziale. Per esempio, consideriamo il riferimento del laboratorio. Ad un certo istante t_0 dall'origine parte il segnale luminoso su cui c'è scritta l'ora. Quand'è che questo raggio arriva alla particella? L'equazione per il tempo t è

$$c(t - t_0) = x(t)$$

Chiaramente questa equazione, se siamo in grado di risolverla, ci porta anche in fondo, in quanto possiamo esprimere direttamente t in funzione di τ per rispondere poi alla domanda.

$$\begin{aligned} c \left(\frac{c}{g} \sinh \frac{g\tau}{c} - t_0 \right) &= \frac{c^2}{g} \left(\cosh \frac{g\tau}{c} - 1 \right) \\ \Rightarrow \frac{gt_0}{c} &= 1 + \sinh \frac{g\tau}{c} - \cosh \frac{g\tau}{c} = 1 - e^{-\frac{g\tau}{c}} \end{aligned}$$

Per cui effettivamente si ha un congelamento del tempo segnato sull'orologio ad un certo tempo limite.

- Si ha ovviamente $\tau_A = \tau_B$
- Affronterò in modo diverso dalla soluzione ufficiale questa domanda. Che cosa vuol dire che A vede l'orologio di B che segna un tempo τ_B ? Vuol dire che nel riferimento tangente ad A , l'osservatore guarda *contemporaneamente*⁶ i due orologi. I due eventi “ A è in un certo punto e segna τ_A ” e “ B è in un certo punto e segna τ_B ” sono contemporanei nel riferimento tangente S' . Si avrà quindi una situazione del genere

$$\Delta x'^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2)$$

⁶Secondo lui, ricordiamo che in relatività la contemporaneità è una cosa che dipende dal sistema di riferimento.

Dove χ è un'opportuna lunghezza, che non vale L , ma varrà qualcosa. Nel riferimento S , la differenza spaziotemporale fra i due eventi, sarà, dalle trasformazioni di Lorentz

$$\Delta x = \gamma(t) \begin{pmatrix} \beta(t)\chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Dove t è il tempo che corrisponde a τ_A , ovvero

$$\frac{gt}{c} = \sinh \frac{g\tau_A}{c}$$

A questo punto bisogna letteralmente fare cose a caso cercando di trovare espressioni in cui si semplifichi tutto tranne quello che ci serve. Consideriamo per esempio

$$\beta(t) = \frac{\gamma\chi\beta}{\gamma\chi} = \frac{ct_A - ct_B}{x_A(t) - x_B(t)} \quad (3)$$

Per quanto riguarda $t_{A,B}$, l'espressione è quella con il seno iperbolico, mentre per $x(t)$ abbiamo l'altra espressione che ora vediamo più in dettaglio

$$x_A(\tau) = \frac{mc^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft(\tau)}{mc} \right)^2} - 1 \right) = \frac{mc^2}{F} \left(\cosh \frac{g\tau_A}{c} - 1 \right)$$

E analoga per x_B , con l'aggiunta di L . Possiamo quindi riscrivere l'espressione 3

$$\tanh \frac{g\tau_A}{c} = \beta(t) = \frac{g}{c^2} \frac{\sinh \frac{g\tau_B}{c} - \sinh \frac{g\tau_A}{c}}{L + \frac{mc^2}{F} (\cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c})}$$

Per cui

$$\tanh \frac{g\tau_A}{c} = \frac{\sinh \frac{g\tau_B}{c} - \sinh \frac{g\tau_A}{c}}{\frac{gL}{c^2} + \cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c}}$$

Distribuendo,

$$\sinh \frac{g\tau_A}{c} \left(\frac{gL}{c^2} + \cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c} \right) = \left(\sinh \frac{g\tau_B}{c} - \sinh \frac{g\tau_A}{c} \right) \cosh \frac{g\tau_A}{c}$$

Semplificando e riconoscendo la formula di addizione del seno iperbolico,

$$\sinh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c} = \frac{gL}{c^2} \sinh \frac{g\tau_A}{c} \quad (4)$$

Che era la richiesta del testo.

- Utilizzando la definizione di χ usata nell'espressione 2, la richiesta del testo è l'esplicito calcolo di $\frac{d\chi}{d\tau_A}$

$$\begin{aligned}\frac{d\chi}{d\tau_A} &= \frac{d}{d\tau_A} \frac{x_B - x_A}{\gamma} = \frac{d}{d\tau_A} \frac{L + \frac{c^2}{g} (\cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c})}{\cosh \frac{g\tau_A}{c}} = \\ &= -\frac{gL}{c} \frac{1}{\cosh^2 \frac{g\tau_A}{c}} + c \frac{\sinh \frac{g\tau_B}{c}}{\cosh \frac{g\tau_A}{c}} \frac{d\tau_B}{d\tau_A} - c \frac{\cosh \frac{g\tau_B}{c}}{\cosh^2 \frac{g\tau_A}{c}} \sinh \frac{g\tau_A}{c}\end{aligned}$$

A parte un sacco di fastidiosa algebra, bisogna calcolare il rapporto fra i tempi propri. Per farlo, possiamo differenziare l'espressione 4

$$\cosh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c} (d\tau_B - d\tau_A) = \frac{gL}{c^2} \cosh \frac{g\tau_A}{c} d\tau_A \Rightarrow \frac{d\tau_B}{d\tau_A} = 1 + \frac{gL}{c^2} \frac{\cosh \frac{g\tau_A}{c}}{\cosh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c}}$$

Per cui

$$\begin{aligned}\frac{d\chi}{d\tau_A} &= \frac{c}{\cosh^2 \frac{g\tau_A}{c}} \left(\sinh \frac{g\tau_B}{c} \cosh \frac{g\tau_A}{c} \left(1 + \frac{gL}{c^2} \frac{\cosh \frac{g\tau_A}{c}}{\cosh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \cosh \frac{g\tau_B}{c} \sinh \frac{g\tau_A}{c} - \frac{gL}{c^2} \right) = \\ &= \frac{c}{\cosh^2 \frac{g\tau_A}{c}} \left(\sinh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c} - \frac{gL}{c^2} \right) + \frac{gL}{c} \frac{\sinh \frac{g\tau_B}{c}}{\cosh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c}}\end{aligned}$$

- Tutti i punti alla destra dell'origine, prima o poi hanno distanza zero dalla nostra massa. Di conseguenza, se si vuole un punto a distanza fissa dalla massa, dovrà essere ad una coordinata x negativa. In particolare, dalla contrazione delle lunghezze si dovrà avere

$$\mathcal{C} = \frac{x_P + x(t)}{\gamma(t)} \quad \forall t \rightarrow \mathcal{C} \cosh \frac{g\tau}{c} = x_p + \frac{c^2}{g} \left(\cosh \frac{g\tau}{c} - 1 \right)$$

Che è evidentemente soddisfatta dalla coppia

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \frac{c^2}{g} \\ x_P = \frac{c^2}{g} \end{cases}$$

- Questo punto si può affrontare in due modi diversi, uno un po' a caso e uno più rigoroso. Noi faremo entrambe per completezza. Iniziamo

da quello più veloce. Abbiamo visto nel punto precedente che per la pallina A esiste un punto estremamente lontano e all'indietro rispetto al centro del riferimento S che rimane sempre alla stessa distanza per lei. Ovviamente esisterà un siffatto punto anche per B . Il fatto è che se i due punti speciali dovessero coincidere, allora A e B dovrebbero per forza vedersi sempre alla stessa distanza e il motivo è che le trasformazioni di Lorentz sono lineari, quindi non ci può essere un “addensamento” di punti da qualche parte, obbligando A e B a vedersi sempre alla stessa distanza.

Proviamo quindi ad imporre che i due punti coincidano e vediamo se troviamo un'equazione che leghi g_A e g_B .

$$\begin{cases} x_A = -\frac{c^2}{g_A} \\ x_B = L - \frac{c^2}{g_B} \end{cases} \Rightarrow -\frac{c^2}{g_A} = L - \frac{c^2}{g_B}$$

Per cui

$$g_B = \frac{c^2}{L + \frac{c^2}{g_A}} = \frac{g_A}{1 + \frac{g_A L}{c^2}}$$

Vediamo ora di fare le cose in modo un po' più sistematico usando le trasformazioni di Lorentz. Fissiamo due eventi: l'evento 1 è che la pallina A si trova in un certo punto ad un istante di tempo fissato. Il secondo evento è che la pallina B si trovi in un altro punto ad un altro istante di tempo, ma tale che nel riferimento tangente ad A sia allo stesso tempo del primo evento. Nel riferimento tangente ad A , questo evento si scrive come quadrivettore

$$\Delta x'^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}$$

E questo è perché vogliamo che la pallina A veda sempre la pallina B alla stessa distanza L . Trasformiamo ora questo evento nel riferimento S

$$\Delta x^\mu = \begin{pmatrix} \gamma\beta L \\ \gamma L \end{pmatrix}$$

Evidentemente nel riferimento S i due eventi non sono simultanei. Possiamo tuttavia andare a calcolare tutto senza troppi problemi nel seguente modo. Supponiamo che al primo evento l'orologio di A segni τ_A . Sappiamo quanto vale il tempo nel riferimento S corrispondente a questo evento dalla relazione

$$\frac{g_A t_1}{c} = \sinh \frac{g_A \tau_A}{c}$$

Per cui il secondo evento nel riferimento S avviene ad un tempo

$$t_2 = t_1 + \gamma \beta(\tau_A) \frac{L}{c} = \frac{c}{g_A} \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} + \frac{L}{c} \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} = \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} \left(\frac{c}{g_A} + \frac{L}{c} \right)$$

A questo punto l'idea è che possiamo scrivere la differenza spaziale nel riferimento S in due modi diversi e possiamo imporli uguali, sperando di ottenere condizioni restrittive su g_A e g_B . Infatti, sappiamo che

$$\begin{cases} x_A(t_1) = \frac{c^2}{g_A} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_A t_1}{c} \right)^2} - 1 \right) \\ x_B(t_2) = L + \frac{c^2}{g_B} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_B t_2}{c} \right)^2} - 1 \right) \end{cases}$$

E a questo punto possiamo imporre $x_B(t_2) - x_A(t_1) = \gamma(\tau_A)L$

$$\begin{aligned}
L + \frac{c^2}{g_B} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_B t_2}{c} \right)^2} - 1 \right) - \frac{c^2}{g_A} \left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right) - L \cosh \frac{g_A \tau_A}{c} &= 0 \\
\frac{c^2}{g_B} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_B t_2}{c} \right)^2} - 1 \right) - \left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right) \left(L + \frac{c^2}{g_A} \right) &= 0 \\
1 + \left(\frac{g_B t_2}{c} \right)^2 - \left(1 + \left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right) \left(\frac{g_B L}{c} + \frac{g_B}{g_A} \right) \right)^2 &= 0 \\
\left(\frac{g_B L}{c^2} + \frac{g_B}{g_A} \right)^2 \left(\left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right)^2 - \right. & \\
\left. - \sinh^2 \frac{g_A \tau_A}{c} \right) + \left(\frac{g_B L}{c^2} + \frac{g_B}{g_A} \right) \left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right) &= 0 \\
\left(\frac{g_B L}{c^2} + \frac{g_B}{g_A} - 1 \right) \left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right) &= 0
\end{aligned}$$

E questa equazione deve essere vera per ogni τ_A , quindi deve per forza essere nullo il coefficiente davanti al $\cosh$, ovvero

$$g_B = \frac{1}{\frac{L}{c^2} + \frac{1}{g_A}} = \frac{g_A}{1 + \frac{g_A L}{c^2}}$$

Esattamente come prima.

- A questo punto bisogna calcolare il rapporto fra i tempi propri nei due sistemi di riferimento. La prima cosa che potrebbe fare una persona è di andare a scrivere la seguente equazione

$$\frac{c}{g_A} \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} = t = \frac{c}{g_B} \sinh \frac{g_B \tau_B}{c}$$

Questa equazione non è utilizzabile per ricavare l'informazione richiesta dal testo. Il motivo è abbastanza contorto ed è difficile da spiegare in questo modo, ma spero che il lettore ci rifletta e capisca il motivo. Ha a che fare con il fatto che fissare un certo tempo di riferimento t nel riferimento S non è la cosa giusta da fare. Il riferimento S non ha niente di privilegiato rispetto a tutti gli altri sistemi di riferimento. La perdita di simultaneità tipica della relatività ristretta purtroppo porta al fatto che fissare un tempo in questo riferimento non è la stessa cosa di andare a considerare il $d\tau_A$ nel riferimento tangente⁷ e calcolare quanto vale il

⁷Che invece ha senso di essere *privilegiato* per A

corrispondente $d\tau_B$ nel riferimento B fra gli stessi eventi.

Mi rendo conto di non essere stato chiarissimo, ma mi è difficile esprimermi in modo più chiaro, spero che il lettore riesca a riflettere e a capire il messaggio che voglio passare. Ad ogni modo, possiamo comunque passare per il riferimento S , a patto di non fissare l'istante di tempo nel riferimento S ma indicando effettivamente la giusta separazione temporale fra gli eventi che avvengono a distanza $d\tau_A$ nel riferimento A . In effetti abbiamo fatto la stessa cosa poco fa, per calcolare il rapporto fra le accelerazioni. Allo stesso modo, si ricava

$$\begin{aligned}
 t_2 &= t_1 \left(1 + \frac{g_A L}{c^2} \right) \\
 \frac{c^2}{g_B} \sinh \frac{g_B \tau_B}{c} &= \frac{c^2}{g_A} \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} \left(1 + \frac{g_A L}{c^2} \right) \\
 \sinh \frac{g_B \tau_B}{c} &= \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} \\
 g_B \tau_B &= g_A \tau_A \\
 \frac{d\tau_B}{d\tau_A} &= \frac{g_A}{g_B} = 1 + \frac{g_A L}{c^2}
 \end{aligned}$$

- Tutti questi punti sarebbero identici alla soluzione ufficiale. Mi limito a copiare i risultati finali. L'effetto di relatività generale è $\Delta\tau_g = 4.55 \times 10^{-5}$ s. Quello di RR viene $\Delta\tau_s = -7.18 \times 10^{-6}$ s e l'effetto complessivo è quindi la somma dei due. Il $\Delta L = c\Delta\tau = 11.5$ km

Soluzione 1.13 (Razzo relativistico). Il metodo migliore di affrontare il problema è di considerare il quadrimpulso del sistema all'istante t e all'istante $t + dt$ e dire che deve essere conservato. Questa affermazione deriva dal fatto che l'espulsione del carburante avviene senza il rilascio di energia chimica. Definiamo v come la velocità del razzo rispetto ad un riferimento S inerziale che può essere per esempio la terra, v_1 come la velocità del carburante rispetto al riferimento S e u la velocità relativa fra razzo e carburante. Per semplicità, denotiamo con $\beta = \frac{v}{c}$, $\beta_u = \frac{u}{c}$ e con $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$. Innanzitutto utilizzeremo la formula di addizione relativistica delle velocità che ci porta a dire che

$$\beta_1 = \frac{\beta - \beta_u}{1 - \beta\beta_u}$$

La conservazione della quantità di moto, che va sviluppata al primo ordine in $d\beta$ e dm , dM ⁸

$$\begin{aligned}\frac{M\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{(M+dM)(\beta+d\beta)}{\sqrt{1-(\beta+d\beta)^2}} + \frac{dm\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \\ \Rightarrow \frac{M d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta dM}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{M\beta^2 d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}} + \frac{dm}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \frac{\beta - \beta_u}{1 - \beta\beta_u} &= 0\end{aligned}$$

Che è la prima delle due equazioni che useremo. La seconda è la conservazione dell'energia, sempre da sviluppare al primo ordine

$$\begin{aligned}\frac{M}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{M+dM}{\sqrt{1-(\beta+d\beta)^2}} + \frac{dm}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \\ \Rightarrow \frac{dm}{\sqrt{1-\beta_1^2}} &= -\frac{dM}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{M\beta d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}\end{aligned}$$

Vorrei far notare che abbiamo avuto bisogno di due equazioni e non di una sola in quanto classicamente è ovvio che $dm = dM$, in relatività la massa è leggermente più ostica da trattare. Sostituendo quest'ultima nella conservazione della quantità di moto, otteniamo, facendo i conti (magicamente scompare il termine $\gamma(\beta_1)$, fastidioso da calcolare)

$$M d\beta + \beta_u dM (1 - \beta^2) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\beta}{1 - \beta} + \frac{d\beta}{1 + \beta} = -2\beta_u \frac{dM}{M}$$

che quindi ci dà la soluzione

$$\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{\frac{c}{2u}}$$

Esprimiamo il risultato in modo più carino prendiamo il logaritmo di entrambe i membri

$$\ln \frac{M}{M_0} = -\frac{1}{\beta_u} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dove ho anche girato la frazione portando un meno fuori dal logaritmo. Ho fatto questo giochetto in quanto la funzione a destra è esattamente $\tanh^{-1}(\beta)$, ovvero

⁸Il motivo per cui va sviluppata al primo ordine è che stiamo cercando un'equazione differenziale che legghi β a M . Andando a fare il limite per $d\beta \rightarrow 0$, gli unici termini che contano sono per l'appunto quelli al primo ordine.

$$\ln \frac{M}{M_0} = -\frac{1}{\beta_u} \tanh^{-1} \beta$$

Osserviamo che per $\beta \ll 1$ torna la soluzione classica $M = M_0 e^{\frac{v}{u}}$, in quanto $\tanh^{-1}(dx) \approx dx$. Inoltre,

$$\beta = \tanh \left(\beta_u \ln \frac{M_0}{M} \right) \quad (5)$$

Un risultato simile è abbastanza rassicurante riguardo la sua validità, in quanto la tangente iperbolica è sempre compresa fra -1 e 1 . Inoltre torna il caso notevole $M \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow 1$. Non solo, torna anche il caso notevole $\beta_u = 0 \Rightarrow \beta = 0$. Purtroppo, come potete ben capire, il fatto che ci sia la tangente iperbolica di un logaritmo non è altrettanto rassicurante riguardo la possibilità ingegneristica di avvicinarsi a c in questo modo.

Soluzione 1.14 (Vela solare). 1. Come prima cosa calcoliamo la forza dovuta alla radiazione $\mathbf{F}_{rad}$. Se lo specchio riflette perfettamente, allora i fotoni incidenti perpendicolarmente sullo specchio mantengono la direzione e cambiano verso. Per calcolare la forza è quindi sufficiente calcolare la variazione di quantità di moto dei fotoni incidenti sulla superficie del satellite per unità di tempo.

L'intensità della radiazione è pari a:

$$I = Nh\bar{\nu}$$

con N numero di fotoni incidenti per unità di tempo e area e $\bar{\nu}$ frequenza media dei fotoni. L'impulso trasportato quindi nell'unità di tempo e superficie è

$$Nh \frac{\bar{\nu}}{c} = \frac{I(r)}{c}$$

Segue subito quindi che la variazione di impulso per unità di tempo dello specchio, essendo l'opposto della variazione di impulso dei fotoni è

$$F_{rad} = \frac{dP}{dt} = 2 \frac{I(r)A}{c}$$

Consideriamo adesso solo il caso di forza radiale (normale alla superficie parallela al raggio satellite-sole). In questo caso la forza è solo radiale, e per comodità ometteremo il simbolo di vettore nelle formule.

Per calcolare F_{rad} , dobbiamo fare attenzione al fatto che l'intensità della radiazione incidente sulla vela diminuisce all'aumentare del raggio.

In particolare, dato che la potenza emessa integrata su una superficie sferica non deve dipendere dal raggio di questa, deve valere la relazione

$$I_0 r_0^2 = I(r) r^2$$

che può anche essere interpretata come una conservazione del numero di fotoni.

Quindi si ha che la forza radiale è del tipo:

$$F_{rad} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A}{c r^2}$$

Si osservi quindi che la forza in gioco totale agente sul satellite è nella forma:

$$\frac{2I_0 r_0^2 A/c - GM_\odot m}{r^2}$$

Ossia è come se ci fosse una forza gravitazionale “efficace” diversa dalla solita! Pertanto il problema è riconducibile ad un problema di un corpo che orbita attorno ad un pianeta di massa diversa. Quindi, dopo l’apertura della vela, l’energia (contando anche quella dovuta all’interazione con i fotoni solari) si conserva!

Sempre come conseguenza del fatto che tutte le forze in gioco sono radiali, il momento angolare L del satellite rispetto al sole è conservato.

La condizione per riuscire a uscire dall’orbita solare è, in analogia con problemi gravitazionali standard:

$$E_{cin,in} + U'_{in} \geq 0$$

dove $U' = \frac{2I_0 r_0^2 A/c - GM_\odot m}{r}$ è il finto potenziale gravitazionale.

L’energia cinetica iniziale è, per continuità, la stessa subito prima dell’apertura della vela⁹:

$$\frac{GM_\odot m}{2r_0}$$

Segue quindi la condizione:

$$A \geq \frac{cGM_\odot m}{4I_0 r_0^2}$$

Si osservi che per questo valore di A la forza efficace è ancora attrattiva: il satellite si muove di moto parabolico verso l’infinito.

⁹Segue rapidamente dal teorema del viriale: $2\langle K \rangle = -\langle U \rangle$

2. La diversa angolazione della vela ha due effetti principali. Il primo è che l'area effettivamente investita dai fotoni sia:

$$A_{\text{eff}} = A \cos \alpha$$

Il secondo è che la forza radiale dovuta alla radiazione sia:

$$F_{\text{rad},r} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A_{\text{eff}} \cos \alpha}{cr^2} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A \cos^2 \alpha}{cr^2}$$

Inoltre si ha che il momento angolare non si conserva, visto che si ha una componente angolare della forza, pari a

$$F_{\text{rad},\theta} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A_{\text{eff}} \sin \alpha}{cr^2} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A \cos \alpha \sin \alpha}{cr^2}$$

Si osservi che il campo di forze non è più conservativo: basta vedere che integrando su un cammino a r fissato si ha un lavoro ovviamente non nullo.

Per studiare il problema per piccoli angoli, è utile fare la seguente approssimazione: dato che comunque la forza tangenziale non sarà troppo grande, è lecito supporre che il moto del satellite avvenga sempre su una circonferenza e che la velocità radiale sia trascurabile.

Scriviamo ora la legge di conservazione dell'energia per il satellite, considerando anche che la forza di spinta del sole sta compiendo lavoro su di esso. La parte radiale la riassorbiamo nel solito finto potenziale, mentre la parte tangenziale inietta energia.

Si ha quindi

$$\frac{dE}{dt} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A \cos \alpha \sin \alpha}{cr} \dot{\theta}$$

Adesso, se assumiamo che l'angolo sia piccolo e la vela non troppo grande, possiamo supporre che il satellite si muova su orbite circolari e che la velocità radiale sia molto minore delle altre velocità in gioco. A questo punto è legittimo assumere che l'energia in media sia circa quella che si ha su una orbita circolare di un dato r , ossia

$$E = - \frac{GmM_{\odot} - 2I_0 r_0^2 A \cos^2 \alpha / c}{2r}$$

da cui

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GmM_{\odot} - 2I_0 r_0^2 A \cos^2 \alpha / c}{2r^2} \dot{r}$$

Dato che il moto è circolare, deve valere la seguente relazione fra $\dot{\theta}$ e r , che è una sorta di generalizzazione del momento angolare

$$r^3 = \frac{GmM_{\odot} - 2I_0r_0^2A \cos^2 \alpha/c}{m} \dot{\theta}^2$$

Quindi, sostituendo r dentro $\dot{\theta}$, si ottiene una equazione del moto per r , che sarà valida per piccoli t .

$$\frac{GmM_{\odot} - 2I_0r_0^2A \cos^2 \alpha/c}{2r^2} = \frac{2I_0r_0^2A \cos \alpha \sin \alpha/c}{r} \left(\frac{m}{GmM_{\odot} - 2I_0r_0^2A \cos^2 \alpha/c} \right)^{1/2} r^{3/2}$$

che è nella forma

$$\dot{r} = Cr^{5/2}$$

che ha una soluzione del tipo “polinomiale” del tipo:

$$r = \frac{C_1}{(C_2 - t)^{2/3}}$$

Dato che è istruttivo vedere come si ricava questo risultato, facciamolo.

$$\frac{dr}{dt} = Cr^{5/2} \Rightarrow r^{-5/2} dr = C dt \Rightarrow \int_{r_0}^{r(t)} r^{-5/2} dr = C \int_0^t dt$$

Fare questi due integrali è semplice, possiamo svolgerli esplicitamente

$$-\frac{2}{3} \left(r(t)^{-3/2} - r_0^{-3/2} \right) = Ct \Rightarrow r(t) = \frac{1}{\left(r_0^{-3/2} - \frac{3}{2}Ct \right)^{2/3}}$$

Che effettivamente è della forma indicata prima.

3. Analizziamo il problema nel sistema di riferimento tangente. Supponiamo che uno dei fotoni radiati si propaghi lungo x , direzione del moto dello specchio. Il quadriimpulso è quindi nella forma:

$$p_1'^{\mu} = \frac{h\nu'}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dopo rimbalza sullo specchio, e il quadriimpulso diventa:

$$p_2'^\mu = \frac{h\nu'}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto si può calcolare l'impulso trasferito allo specchio per unità di tempo sommando l'impulso di tutti i fotoni:

$$\frac{\Delta p'_x}{\Delta \tau} = 2 \frac{n'_{\text{colp}} h\nu'}{c}$$

dove n'_{colp} sono i fotoni incidenti per unità di tempo proprio. Ma questi, vista la relazione fra t e τ , sono pari a

$$n'_{\text{colp}} = \gamma n_{\text{colp}}$$

dove γ è calcolato con la velocità v dello specchio rispetto alla sorgente. E' lecito usare la formula di dilatazione temporale perchè i fotoni colpiscono punti con la stessa coordinata!

Adesso dobbiamo collegare n_{colp} a n . Non è difficile mostrare la relazione:

$$n_{\text{colp}} = n(1 - \beta)$$

Applicando la legge di Newton nel sistema tangente (la formula non relativistica va bene perchè siamo istantaneamente fermi), si ottiene l'accelerazione lungo l'asse x:

$$a' = 2\gamma n(1 - \beta) \frac{h\nu'}{mc}$$

Se lo specchio si muove a velocità v rispetto al laser, allora intuitivamente nel sistema che inerziale che istantaneamente è solidale con lo specchio i fotoni hanno frequenza minore per effetto Doppler. Infatti, trasformando il quadriimpulso del fotone incidente, si ha che la sua frequenza ν' vista dallo specchio è:

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \nu < \nu$$

Dunque si ha:

$$a' = 2h \frac{n' h\nu'}{mc} = 2 \frac{nh\nu}{mc} \gamma(1 - \beta) \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = 2 \frac{nh\nu}{mc} \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

Per trovare l'accelerazione nel sistema S , è conveniente trasformare la quadriaccelerazione. Nel sistema tangente la quadriaccelerazione è:

$$a'^{\mu} = \frac{dv'^{\mu}}{d\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2n \frac{h\nu}{mc} \frac{1-\beta}{1+\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per tornare in S dobbiamo applicare boost di Lorentz con velocità $-v$ lungo x . Segue quindi che in S la quadriaccelerazione è:

$$a^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \begin{pmatrix} 2\gamma\beta n \frac{h\nu}{mc} \frac{1-\beta}{1+\beta} \\ 2\gamma n \frac{h\nu}{mc} \frac{1-\beta}{1+\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare l'accelerazione $a = \frac{dv}{dt}$, basta scrivere con cura la definizione di quadriaccelerazione e ricordarsi che è

$$a^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma^4 \beta \frac{dv}{c dt} \\ \gamma^4 \frac{v^2}{c^2} \frac{dv}{dt} + \gamma^2 \frac{dv}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato nelle derivate il fatto che per moti 1D la derivata del modulo di $\mathbf{v}$ è l'accelerazione. Segue eguagliando le due espressioni per a_x (ossia la parte spaziale della quadriaccelerazione) che l'accelerazione $\frac{dv}{dt}$ in S (che non è la componente spaziale della quadriaccelerazione) è:

$$\frac{dv}{dt} = 2 \frac{nh\nu}{\gamma^3 mc} \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

4. La distanza dal sole influisce sul numero di fotoni incidenti $N(r)$:

$$N(r) = \frac{I(r)A}{h\nu} = \frac{AI_0 r_0^2}{h\nu r^2}$$

Abbiamo supposto il sole come sorgente monocromatica: la cosa può essere sembrare resitrittiva ma in realtà non lo è perchè la distribuzione spettrale si comporta bene sotto boost.

Per definizione, nel sistema S la forza è

$$F = \frac{d(m\gamma v)}{dt} = m\gamma^3 \frac{dv}{dt}$$

Da cui

$$F = \frac{n(r)h\nu}{c} \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

Adesso dobbiamo legare n (numero di fotoni emessi dal sole per unità di tempo che incidono sulla vela) a $N(r) = \frac{I(r)}{h\nu}$ (numero di fotoni emessi per unità di tempo e superficie a distanza r dal sole).

Il numero di fotoni emessi per unità di tempo destinati a colpire la vela sono proprio

$$n(r) = \frac{AI_0r_0^2}{h\nu r^2}$$

Segue quindi che la forza è

$$F = \frac{I_0r_0^2A}{cr^2} \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

Soluzione 1.15 (Buco Nero di Schwarzschild). 1. All'ordine più basso abbiamo

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\sqrt{-\frac{2GM}{r_1c^2}}}{\sqrt{-\frac{2GM}{r_2c^2}}} \approx 1 + \frac{GM}{c^2} \left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 1 - \frac{\Delta U_{12}}{c^2}$$

Torna ovviamente con il limite Newtoniano, nel quale in ogni punto il tempo scorre in modo diverso tra i punti 1 e 2 di un fattore $1 - \frac{U_{12}}{c^2}$. Il segno del rapporto non serve calcolarlo: basta ricordare che quando la luce si allontana dal campo gravitazionale, subisce un redshift, e quindi la frequenza diminuisce.

2. Basta porre nell'equazione $ds = 0$ (è la luce), $d\theta = d\phi = 0$ (il moto è radiale). Otteniamo

$$dr = \pm \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) c dt$$

(Si noti la c nel termine di destra. Questa c era stata dimenticata nei dati del problema). Integrando:

$$\int \frac{dr}{1 - \frac{r_s}{r}} = \pm ct$$

La quale deve essere risolta e poi invertita per trovare $r = r(t)$.
 Si noti che è possibile risolvere questa espressione in modo esplicito.

3. Se $r \approx r_s$ diciamo che

$$1 - \frac{r_s}{r} = \frac{r - r_s}{r} \approx \frac{r - r_s}{r_s}$$

Sostituendo dentro l'equazione trovata nel punto precedente, l'integrale diventa

$$\int \frac{r_s dr}{r - r_s} = \pm ct$$

da cui

$$r_s \log(r/r_0) = \pm ct$$

Ribaltando:

$$r = r_0 e^{\pm ct/r_s}$$

È un esponenziale.

4. Il problema con il tempo nel Buco Nero di Schwarzschild per $r = r_s$ è dovuto al fatto che, per un corpo che sta fermo ($dr = d\theta = d\phi = 0$) abbiamo

$$\frac{d\tau}{dt} = 0$$

ovvero, anche se la coordinata t aumenta, non scorre tempo proprio per il corpo in questione! Per questo le traiettorie di luce si avvicinano asintoticamente a $r = r_s$ ma non lo toccano mai per un valore finito di t : anche se t aumenta molto, non scorre tempo proprio e il corpo quasi non si muove.

Per $r < r_s$ troviamo addirittura $\frac{d\tau}{dt} < 0$, il che significa che la coordinata t all'interno dell'orizzonte non rispecchia l'ordinamento causale degli eventi. Con l'aumentare del tempo proprio che passa per un osservatore, t diminuisce.

5. La traiettoria di un raggio di luce nella regione $r > r_s$ è data dalla stessa equazione che nella regione esterna. Per $r \approx r_s$ è ancora un'esponenziale. Si ricordi che, poiché il segno di dt è il contrario del segno di $d\tau$, si ha che i raggi entranti hanno $dr/dt > 0$, visto che così $dr/d\tau < 0$ e quindi l'osservatore che viaggia (quasi) alla velocità del raggio, percepisce di starsi avvicinando.

L'interpretazione di questi raggi entranti e uscenti nella regione $r < r_s$ in realtà è molto più complicata di così: il sistema di coordinate t, r, θ, ϕ

non è il migliore per trattare questa regione, ed esistono sistemi di coordinate (come quello di Penrose) in cui tutto è chiaro e limpido. Ma non è il luogo per affrontare tutto questo argomento.

Soluzione 1.16 (La scatola di Einstein e Bohr). Bohr sosteneva che, in analogia al principio d'indeterminazione di Heisenberg per le tre dimensioni spaziali

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq h \\ \Delta y \Delta p_y \geq h \\ \Delta z \Delta p_z \geq h \end{cases}$$

ne dovesse anche valere uno per la dimensione temporale (ricordiamo che il tempo è legato allo spazio come l'energia all'impulso):

$$\Delta t \Delta E \geq 0$$

L'argomento di Einstein (raccontato nel problema della parte di Ottica Fisica) era: prendo una scatola di massa m , e faccio in modo che spari un fotone ad un certo tempo t , conosciuto con buona precisione Δt molto piccola. Nel qual caso, avrò ΔE grande. Se però la scatola è attaccata a una bilancia di qualche tipo all'interno in un campo gravitazionale, è possibile aspettare abbastanza tempo $\Delta t'$ affinché si abbia un'ottima misura dell'energia della scatola con un Δ' molto piccolo. Se faccio questa misura sia prima che dopo che la scatola emetta un fotone, allora per differenza posso ricavare l'energia del fotone.

Un dettaglio importante: poiché la scatola deve essere isolata dall'esterno, l'apertura del buco da cui uscirà il fotone è controllata da un orologio dentro la scatola.

Questo punto è cruciale. Infatti Bohr, dopo un giorno passato a ragionarci, comprese che l'argomento di Einstein era sbagliato perché non teneva in conto della relatività generale (molto ironicamente): infatti, se la scatola è immersa in un campo gravitazionale, l'incertezza sulla sua posizione verticale diventa incertezza sul modo in cui scorre il tempo! L'argomento di Bohr era il seguente. Innanzi tutto, quando si misura la massa di una scatola in un campo gravitazionale per un tempo t , si accumula un'incertezza sull'impulso della scatola pari a $tg\Delta m$, dove Δm è l'incertezza della misura della massa della scatola. Ho perciò

$$\Delta p < tg\Delta m$$

perché, se Δp fosse maggiore, potrei usarlo per stimare meglio Δm (se non vi convince del tutto, non siete i soli).

Ricordando $\Delta z \Delta p > h$, abbiamo:

$$tg\Delta m \Delta z > h$$

Ora entra in gioco la relatività generale. Poiché per un tempo t io ho un'incertezza Δz sull'altezza della scatola, ho un'incertezza su come scorre il tempo nella scatola. Poiché tra due sistemi di riferimento abbiamo:

$$t' = \left(1 - \frac{2gz}{c^2}\right) t$$

troviamo

$$\Delta\tau = \frac{gt}{c^2} \Delta z$$

Dove τ è il tempo proprio passato per la scatola, e dunque un'incertezza in τ significa un'incertezza tra l'orologio interno alla scatola e l'orologio esterno al momento in cui l'orologio interno farà uscire il fotone.

Si ricorda inoltre che stiamo trascurando i fattori 2.

Abbiamo perciò:

$$\Delta mc^2 \Delta\tau > h$$

che ovviamente è

$$\Delta E \Delta\tau > h$$

Si ricorda che $\Delta\tau$ è l'incertezza del momento in cui esce il fotone, e ΔE è l'incertezza della misura dell'energia della scatola sia all'inizio che alla fine, e dunque anche dell'energia del fotone.

Si noti come, col senno di poi, questo dibattito tra Bohr e Einstein non è tanto illuminante come sembra. Einstein ci avrebbe ragionato di nuovo e avrebbe notato il fenomeno di entanglement tra scatola e fotone, e avrebbe presentato un nuovo paradosso contro la Meccanica Quantistica. Oggi, inoltre, non si considera valido l'argomento di Bohr perché il suo uso del simbolo “ Δ ” per indicare sia incertezze di misura sperimentale, sia incertezze quantistiche, sembra confusivo.

Io non mi rassegnò all'idea che questo argomento, se raffinato, potrebbe mostrare come sia necessaria la Relatività Generale per rendere coerente il principio d'indeterminazione. Tuttavia, non saprei dirlo.

Riferimenti bibliografici

[ZC19] Fabio Zoratti and Marco Costa. Introduzione alla relatività speciale, 2019. Reperibile [qui](#).

2 Ringraziamenti

Ringrazio Massimo Bilancioni ed Elia Pizzati per *non* aver contribuito a scrivere queste dispense. Mi sono divertito molto a scriverle io, e ho potuto riesporre a me stesso, oltre che agli altri, alcune delle teorie fisiche più belle che ci siano.

Ringrazio Massimo Bilancioni per avermi chiarito un dubbio, in realtà infondato, nella parte di elettromagnetismo.

Devo ammettere di aver deciso di scrivere queste dispense affinché fossero completamente diverse rispetto a quelle degli anni passati da Fabio Zoratti e Marco Costa. Un po' per il gusto di cambiare. E un po' perché - oltre al fatto che volevo esporre la relatività generale a modo mio - volevo buttare via tutta la parte in cui si spiega procedura sperimentale di determinare gli orologi; e usare i diagrammi di Minkowski, che tutti dicono che sono inutili e invece poi hanno torto, perché anche all'esame qui all'università il problema di relatività speciale si risolveva disegnando un diagramma di Minkowski, che rendeva impossibile confondersi. E lo stesso vale nei problemi che troverete voi nelle gare.

Ho dunque riscritto tutte le dispense da zero. Spero che i cambiamenti che ho fatto siano proficui.

Confesso però di aver consultato le dispense dell'anno scorso per capire in che ordine logico enunciare i fatti nel capitolo sulla quadrivelocità e sul quadrimpulso. Inoltre, i loro problemi sono belli e quindi li ho riciclati. Perciò, ringrazio Fabio Zoratti e Marco Costa.

Mi scuso per gli errori che inevitabilmente avranno eluso le correzioni.

Spero che qualcosa del mio approccio sopravviva all'inesorabile mano della censura. Valuterete voi se sarà stato utile, e spero che lo sguardo gettato sulla teoria della relatività, speciale e generale, possa contribuire a tener vivo l'amore per la fisica.

Paolo Alessandro Xavier Tognini