Introduzione alla relatività ristretta

Fabio Zoratti*, Marco Costa†

8 febbraio 2019

Sommario

Lo scopo della lezione è di spiegare le basi teoriche della relatività ristretta. Si introducono i postulati e si mostrano le tre principali conseguenze della teoria (dilatazione tempi, contrazione lunghezze, perdita di simultaneità). Poi si introducono le trasformazioni di Lorentz e il concetto di intervallo invariante e quadrivettori. Successivamente si costruiscono in modo intuitivo altri quadrivettori e si mostra la dinamica relativistica. Infine si accenna a come la relatività giochi un ruolo particolare in elettromagnetismo, fornendo un esempio famoso della sua necessità. Durante la lezione non verrà trattato niente del capitolo sulla relatività generale, per motivi di tempo. Tale capitolo è comunque da ritenersi estremamente facoltativo.

1 Introduzione

Le equazioni di Maxwell, scoperte nella seconda metà del 1800, predicono la propagazione di onde elettromagnetiche con velocità pari a c, costante da determinare da esperimenti. Le equazioni dei campi nel vuoto infatti risolvono

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x_i^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x_i^2} = 0 \tag{2}$$

Agli inizi del 1900, le equazioni dell'elettrodinamica erano in accordo con tutte le verifiche sperimentali effettuate. Il pilastro della Fisica fino ad

*fabio.zoratti@sns.it

†marco.costa@sns.it

allora era la meccanica classica, che è supposta essere invariante sotto le trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}t \end{cases} \tag{3}$$

Queste consentono di cambiare le coordinate da un sistema di riferimento inerziale S ad uno inerziale S' che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}$ rispetto al sistema S.

La Fisica era supposta essere invariante sotto queste trasformazioni: le leggi fisiche sono le stesse nei vari sistemi di riferimento inerziali. Tuttavia le equazioni 2, non sono invarianti sotto queste trasformazioni: i campi elettrici e magnetici obbedirebbero ad equazioni diverse dalle 2.

In particolare, dato che le trasformazioni 3 implicano che le velocità debbano essere additive, ci aspettiamo che la velocità di propagazione della luce non sia sempre c nei vari sistemi di riferimento! Per cercare di spiegare il disaccordo fra le due teorie si possono intraprendere due strade.

- Si assume che le trasformazioni di Galileo e quindi la meccanica di Newton siano leggi valide in ogni sistema di riferimento, mentre la velocità della luce pari a c come un fatto valido sono nel sistema di riferimento dell'*etere*.

- Si suppone, come fatto da Einstein, che le equazioni di Maxwell siano le vere leggi della Fisica. Conseguentemente si deve assumere che la velocità c della luce sia la stessa in ogni sistema di riferimento.

Vari esperimenti (Michelson-Morley, Fizeau, tutti gli esperimenti di alte energie negli acceleratori di particelle) hanno sempre confermato la seconda ipotesi, che sta alla base della teoria della relatività ristretta. Nella sezione successiva studieremo sistematicamente i postulati di questa teoria.

2 Postulati della relatività

La relatività ristretta si basa su due postulati fondamentali:

Postulato 2.1. *Le leggi della Fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Postulato 2.2. *La velocità della luce c è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Inoltre si assume sempre che lo spazio sia omogeneo ed isotropo (ossia che non ci siano punti nè direzioni privilegiate).

Il primo postulato sostanzialmente afferma che una legge della natura, espressa nella coordinate di un sistema inerziale S è la stessa in forma se scritta in un altro sistema inerziale S' nelle coordinate di S'. Si osservi che questo postulato era valido pure in meccanica classica (il cosiddetto principio di relatività galileiano). Pertanto le principali differenze fra lo spaziotempo di Newton e quello descritto in relatività ristretta provengono dall'altro postulato.

Il secondo postulato è molto meno intuitivo, e consente subito di predire qualche caratteristica della nuova teoria. In particolare segue subito che le velocità non possono essere additive in relatività ristretta, altrimenti la velocità della luce non sarebbe la stessa in differenti sistemi inerziali.

Ad esempio, supponiamo di essere in un sistema inerziale S. Una macchina sta viaggiando alla velocità costante $\vec{v}$ rispetto a voi, e sul tettuccio ha legata una lampadina che irraggia luce nella direzione del moto. Allora sia nel sistema S sia nel sistema solidale alla macchina osserviamo la luce muoversi alla velocità c in tale direzione, e non $\vec{c} + \vec{v}$!

Si può mostrare a partire dai postulati che sistemi inerziali[1] si muovono a velocità relativa costante[2]. Nella trattazione che segue ad ogni modo assumeremo che questi siano tra loro in moto rettilineo uniforme e non ci soffermeremo su dettagli più tecnici.

3 Ritardo dell'informazione

Come vedremo, la velocità dei segnali non può propagarsi più velocemente della luce. Da questo segue che dobbiamo porre attenzione a come si misurano in pratica le distanze e gli intervalli temporali.

3.1 Definizioni operative

Dobbiamo adesso dare un modo operativo per poter misurare i tempi e le distanze in relatività ristretta.

3.1.1 Orologio luce e misura di tempo

Per misurare i tempi si utilizza un cosiddetto orologio luce.

Questo dispositivo è costituito da due superfici piane e parallele, separate da una distanza L. Su una poniamo un rilevatore di luce ed un dispositivo

[1] Ossia in cui un corpo libero si muove di moto rettilineo uniforme.

[2] Esistono anche approcci in cui si assume direttamente che sistemi inerziali si debbano muovere di moto rettilineo uniforme, in accordo con il caso classico.

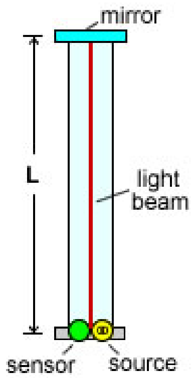

Figura 1: orologio luce.

laser puntato perpendicolarmente verso la seconda superficie, che sarà uno specchio riflettente. La sorgente emette luce che giunge allo specchio, viene riflessa e torna indietro sul rilevatore. Una volta che la luce è stata rilevata, il laser emette un nuovo raggio di luce, e così via. Così sappiamo che il tempo trascorso fra un'emissione di un raggio di luce e la successiva è $\frac{2L}{c}$.

In pratica misurare il tempo significa "contare" quante volte la luce torna sul rilevatore.

3.1.2 Regolo rigido e misura distanze

Cosa si intende per misura di distanza?

Se vogliamo misurare la distanza fra diversi punti dello spazio, l'idea è di costruire un reticolo cartesiano tridimensionale e poi usare il teorema di Pitagora per calcolare le distanze nel modo solito.

Un procedimento equivalente è quello di porre uno specchio nel punto di cui si vuole la distanza, spararci perpendicolarmente un raggio di luce dall'origine e misurare il tempo τ (stando con l'orologio fermi nell'origine) di andata e ritorno del raggio. E' naturale definire la distanza fra l'origine e il punto come $\frac{c\tau}{2}$. Si osservi che in questo modo si può facilmente costruire un sistema di coordinate cartesiane, ripetendo la procedura nelle tre direzioni ortogonali.

Inoltre con questo modo di assegnare distanze, si riesce a capire quanto un punto sia da noi lontano guardando il "ritardo" dell'orologio posto in quel punto. Ad esempio, supponiamo che sul sole (distante circa 8 minuti-luce da noi) ci sia un enorme orologio digitale, le cui cifre siano visibili fino sulla terra. Allora un osservatore sulla terra lo vedrebbe segnare il tempo con 8 minuti di ritardo rispetto al proprio orologio luce (supponendo che questi siano stati sincronizzati, vedi sezione successiva).

Una volta costruito il sistema cartesiano, si può calcolare ad esempio la lunghezza di sbarre ferme nel nostro sistema di riferimento semplicemente misurando la distanza ("cartesiana") fra gli estremi.

Cosa fare se invece il corpo è in moto relativo al sistema, ad esempio lungo l'asse x? Per semplicità consideriamo una sottile sbarra direzionata lungo l'asse x. Si definisce lunghezza la distanza euclidea degli estremi calcolata con le loro coordinate prese allo stesso tempo t. Ad una più attenta analisi questa prescrizione è utilizzata anche per misurare lunghezze in uno spaziotempo newtoniano, e non rappresenta davvero nulla di nuovo. Tuttavia, mentre non ci sono particolari problemi per misurare lunghezze di corpi a riposo, per corpi in movimento abbiamo bisogno di avere orologi agli estremi della lunghezza da misurare che siano sincronizzati fra loro per poter prendere le misure in modo corretto.

3.1.3 Sincronizzazione orologi

Supponiamo di essere in un sistema inerziale S. Supponiamo che ci siano due osservatori a riposo in S, A e B, che si trovano in punti spaziali distanti d. Entrambi sono dotati di orologi-luce. Entrambi possono utilizzare i loro orologi per misurare i tempi a cui avviene un qualche evento nel loro punto spaziale. Se tuttavia non c'è modo di sincronizzare gli orologi di A e B, ossia di porre una comune origine dei tempi, le misure fatte saranno inutili.

Per sincronizzare gli orologi, esiste la seguente procedura:

- Si inizia con entrambi gli orologi spenti; gli orologi sono costruiti in modo tale da essere attivati da un raggio di luce.

- Si setta l'origine temporale dell'orologio A a 0, e l'origine del secondo a $\frac{d}{c}$.

- Si sposta l'orologio B nel punto desiderato a distanza d, sempre senza accenderlo.

- L'osservatore A attiva il proprio orologio e contemporaneamente invia un segnale luminoso a B.

- Dopo un tempo $\frac{d}{c}$, B riceve il segnale e il suo orologio si attiva.

Si osservi che per questo metodo abbiamo solo bisogno di misurare una distanza fra punti fissi e non in moto relativo, e quindi non c'è bisogno di una sincronizzazione degli orologi per mettere in atto la procedura delineata.

In questo modo abbiamo che i due orologi sono sincronizzati. Si osservi che questa procedura può essere ripetuta per un qualsiasi numero di orologi che vogliamo utilizzare in vari punti dello spazio.

Un ulteriore metodo per sincronizzare gli orologi, è quello di azionarli nello stesso punto contemporaneamente,e poi di spostare l'orologio B nel punto desiderato molto lentamente, in modo da rendere piccole a piacere eventuali dilatazioni temporali.[3]

4 Tre conseguenze fondamentali

La relatività ristretta ha alcune conseguenze cinematiche fondamentali che la rendono diversa dal caso classico.

4.1 Dilatazione dei tempi

Consideriamo un osservatore A che si trova in una stazione dei treni con un orologio luce i cui raggi siano visibili anche ad altri osservatori (possiamo immaginare che l'orologio abbia una "custodia" esterna trasparente).

Un treno sta sfrecciando per la stazione a velocità uniforme v in direzione orizzontale $\hat{x}$ rispetto all'osservatore A. A bordo di questo, c'è un osservatore B che vuole misurare con il suo orologio luce il tempo $\Delta t'$ che intercorre fra gli eventi "emissione raggio di luce da orologio di A" e "rivelazione raggio di luce dell'orologio di A", visti dal suo sistema di riferimento S_B (in pratica vuole misurare il tempo che A usa per misurare i propri tempi).

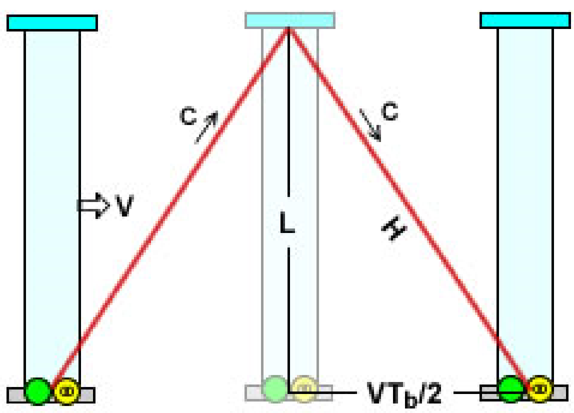

Figura 2: traiettoria dei raggi di luce dell'orologio di A visti da B.

Il percorso del raggio di luce dell'orologio di A visto nel sistema S_B è riportato in figura 2. Dato che il raggio di luce in A fa un solo "viaggio di

[3] Si veda la sezione successiva

andata e ritorno" dalla sorgente laser durante i due eventi considerati, $\Delta t'$ è per definizione il tempo impiegato in S_B dal raggio di luce dell'orologio di A per fare andata e ritorno. Utilizzando il teorema di Pitagora, è facile accorgersi che la distanza percorsa dalla luce in S_B è

$$d = 2\sqrt{L^2 + v^2 \frac{\Delta t'^2}{4}} = \sqrt{4L^2 + v^2 \Delta t'^2}$$

E' cruciale osservare che la velocità del raggio di luce dell'orologio di A visto in S_B è comunque c! Segue quindi che

$$\Delta t' = \frac{d}{c} = \sqrt{4\frac{L^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\Delta t'^2}$$

Ma $\Delta t = 2L/c$ per definizione![4] Segue quindi la relazione:

$$\Delta t'^2 = \Delta t^2 + \frac{v^2}{c^2}\Delta t'^2$$

da cui segue la formula:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot \Delta t \tag{4}$$

dove abbiamo definito le quantità

$$\begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

Il fatto che la velocità della luce sia uguale in tutti i sistemi di riferimento ha quindi l'importante conseguenza che la distanza temporale fra due eventi che si trovano sulla stessa coordinata x in S si dilata di un fattore $\gamma > 1$ per $v < c$. Si osservi anche che nel limite classico $v \ll c$, si ha che $\gamma \approx 1$, ossia $\Delta t \approx \Delta t'$, in accordo con le trasformazioni di Galileo.

Precisiamo una cosa: in tutto questa discussione abbiamo supposto che l'osservatore B tenesse in conto durante le misure del tempo di propagazione finito della luce che, emessa da A, si propaga fino a lui, sottraendo opportunamente i ritardi temporali. La cosa importante è appunto che questa trasformazione dei tempi avviene indipendentemente dal tempo di ritardo impiegato dalla luce per arrivare all'apparato sperimentale di B.

[4]Stiamo assumendo che le lunghezze in direzione ortogonale al moto relativo siano uguali nei due sistemi

Altra precisazione molto importante da fare è che questa semplice formula di dilatazione dei tempi vale perchè gli eventi "emissione luce" e "rilevazione luce" avvengono in punti con stessa coordinata x (direzione del moto relativo) in S[5]. Proprio per questo motivo non è lecito utilizzare la formula di dilatazione dei tempi "al contrario" invertendo i ruoli di S e S': gli eventi che abbiamo considerato non avvengono nella stessa x' in S'.

Il lettore più attento potrebbe contestare che in questa derivazione abbiamo assunto che la distanza che separa i due estremi dell'orologio luce di A sia lunga L in entrambi i sistemi di riferimento. In effetti si può mostrare che lunghezze ortogonali alla direzione del moto relativo dei due osservatori sono le stesse in entrambi i sistemi di riferimento. Un argomento che si può utilizzare per giustificare questo fatto è il seguente: consideriamo due osservatori C, D che si corrono incontro. Entrambi hanno in mano dei bastoni che tengono orizzontalmente e ortogonalmente alla direzione del moto. Le punte dei due bastoni sono colorate con vernice fresca. Se adesso ci fosse una contrazione delle lunghezze ortogonali al moto relativo, C dovrebbe vedere il bastone di D più corto del suo. Pertanto dopo l'urto fra C e D il bastone di C riporterebbe delle tacche di vernice sul manico causate dal bastone di D. Se ripetiamo il ragionamento dal punto di vista di D, essendo la situazione completamente simmetrica, è il bastone di D ad avere le tacche sul proprio manico. Quando però C e D si fermano e confrontano l'accaduto, devono ovviamente mettersi d'accordo su quanto successo. Quindi non può esserci stata alcuna contrazione delle lunghezze ortogonali poichè altrimenti C e D non potrebbero concordare sul risultato dello scontro. Ribadiamo che questa situazione, a differenza di quella studiata per spiegare la dilatazione dei tempi, è simmetrica nei due osservatori.

4.2 Contrazione delle lunghezze

Il fatto che l'intervallo temporale tra due eventi sia diverso per due osservatori in differenti sistemi si riflette sulle distanze spaziali.

Consideriamo un auto che si muove a velocità relativistica v su una pista rettilinea. Consideriamo due sistemi di riferimento

- S_1 Il sistema solidale alla pista
- S_2 Il sistema solidale all'auto

L'auto percorre un tratto di strada che secondo S_1 è lungo L_1 in un tempo Δt_1. Vogliamo trovare che cosa misura invece l'osservatore 2.

[5]Con il formalismo delle trasformazioni di Lorentz sarà più chiaro il perchè.

Facciamo chiarezza su cosa viene misurato e cosa sono le grandezze che abbiamo identificato. Denotiamo il tratto di strada mettendo due paletti nel terreno, il paletto A, il primo, e il paletto B, il secondo. Secondo S_1, la distanza fra i due paletti è L_1. Inoltre, sempre secondo S_1, l'auto impiega un tempo Δt_1 ad andare dal paletto A al paletto B.

Nel sistema S_2, invece, i due paletti disteranno L_2, a priori $L_2 \neq L_1$, e impiegherà un tempo Δt_2 da quando vede il paletto A sfrecciare accanto a lui a quando vede il paletto B.

Nel riferimento S_2 quindi gli eventi *passo davanti ad* A e *passo davanti a* B accadono nello stesso luogo. Di conseguenza si può usare la formula 4 e dire che

$$\Delta t_1 = \gamma \Delta t_2$$

Ovvero che secondo l'osservatore sulla pista l'auto ci mette più tempo. Dato che nel riferimento S_2 il palo B viaggia a velocità v verso l'auto, nel tempo Δt_2 il palo B percorre una distanza $L_2 = v\Delta t_2$. Usando la relazione di prima

$$L_2 = \frac{L_1}{\gamma} \tag{5}$$

Che è la formula di contrazione relativistica delle lunghezze. Come per la formula 4, ha senso utilizzarla da S_1 a S_2 e non al contrario in quanto la misurazione di S_1 ha qualcosa di più di quello che misura S_2 in quanto nel riferimento S_1 **l'oggetto misurato è fermo**.

Questa lunghezza caratteristica viene chiamata lunghezza a riposo ed è qualcosa di intrinseco nell'oggetto che non dipende dal riferimento[6].

Teniamo a precisare che la lunghezza misurata nel sistema del laboratorio è effettivamente minore della lunghezza della sbarra misurata nel sistema in cui questa è a riposo. La contrazione delle lunghezze **non** è un effetto dovuto ai ritardi della luce utilizzata per misurare.

E' anche importante osservare che le lunghezze in direzioni ortogonali alla velocità relativa dei sistemi di riferimento non subiscono variazioni.

4.3 Perdita della simultaneità

L'ultima conseguenza importante è la perdita di simultaneità fra eventi.

Supponiamo che un osservatore B (sistema S') si trovi su un treno che si muove a velocità v in una certa direzione rispetto ad un osservatore A (sistema S). Supponiamo che al centro della carrozza ci sia un laser che può emettere

[6] In quanto per misurarla si prende un riferimento in cui è fermo.

luce nella direzione del moto del treno e in entrambi i versi. Se B attiva il laser, le pareti della carrozza verranno colpite dalla luce simultaneamente in S_B.

Tuttavia l'osservatore A non vedrà le due pareti del treno colpite simultaneamente. Infatti, A vede luce partire dal centro del treno viaggiare in entrambi i sensi a velocità c.

Dato che la parete posteriore della carrozza si muove verso il raggio di luce, mentre quella anteriore se ne allontana, segue che la prima verrà colpita prima della seconda.

Pertanto eventi simultanei in un sistema di riferimento non è detto lo siano in un altro.

Per concludere, immaginiamo che le pareti della carrozza siano completamente riflettenti. Pertanto, una volta che i raggi luminosi raggiungono gli estremi della carrozza, vengono riflessi e tornano verso il punto di emissione. E' evidente che in S' i raggi di luce tornano al centro della carrozza simultaneamente. Ci chiediamo se anche l'osservatore A in S veda gli eventi "i raggi tornano al centro della carrozza" avvenire allo stesso tempo.

La risposta è affermativa: basta considerare che dopo essere stati riflessi la situazione diventa effettivamente simmetrica per i due raggi.

Un altro modo per giustificare la cosa è di notare che i raggi in S' tornano nello stesso punto spaziale allo stesso tempo. Pertanto, la situazione è analoga all'emissione: raggi emessi allo stesso tempo e nello stesso punto in S' lo erano pure in S![7])

5 Intervalli

In questa sezione si vuole dare una linea guida per poter ricavare le trasformazioni di Lorentz a partire dai postulati della teoria e dall'analisi del cosiddetto intervallo invariante. Non si approfondirà volutamente l'aspetto più matematico.

Le tre conseguenze studiate in precedenza ci costringono ad adottare un modello matematico per lo spazio-tempo diverso rispetto a quello utilizzato in meccanica classica.

Il modello matematico dello spazio-tempo usato in relatività è lo spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ (anche detto *spazio-tempo di Minkowski*).

Definiamo *evento* un punto dello spazio-tempo di Minkowski. In un dato sistema di riferimento, l'evento è caratterizzato da una quaterna di numeri (ct, x, y, z), ossia una coordinata temporale (riscalata per un fattore c) e

[7] Se la cosa non è chiara, lo sarà con le trasformazioni di Lorentz

tre spaziali. E' importante capire la differenza fra l'evento e le coordinate dell'evento in un dato sistema di riferimento. Si osservi che questa distinzione esisteva anche in meccanica classica, quindi non è niente di davvero nuovo.

Ci piacerebbe capire come le coordinate che descrivono un evento in un sistema di riferimento S cambiano in un altro sistema di riferimento inerziale S', tenendo in considerazione che abbiamo introdotto il postulato 2.

Come prima cosa cerchiamo di capire più o meno delle proprietà di base che devono avere queste trasformazioni.

Per la definizione che abbiamo dato di sistemi inerziali, un moto rettilineo uniforme in S lo deve essere pure in S'. Si può mostrare che questa richiesta (assieme a omogeneità ed isotropia dello spazio) equivale a richiedere che le trasformazioni di coordinate siano trasformazioni lineari.

Quindi già da questa assunzione Fisica abbiamo guadagnato la linearità dei cambi di coordinate; tuttavia questo non è ancora sufficiente, e per andare avanti nella nostra analisi è necessario studiare meglio le conseguenze del secondo postulato.

Consideriamo due sistemi inerziali S, S', in moto relativo fra loro. Per semplicità, S sarà il sistema che considereremo solidale al nostro laboratorio e S' come in moto relativo ad esso, ma è chiaro per il principio di relatività che le stesse conclusioni possono essere tratte se invertiamo i ruoli dei due sistemi.

Indicheremo con (ct, x, y, z) le coordinate di S, mentre quelle di S' saranno primate. Supponiamo anche per semplificare i calcoli che le origini del tempo e dello spazio dei due sistemi coincidano; questo significa che quando $t = t' = 0$, si ha che $(x, y, z) = (x', y', z')$, ossia le origini spaziali degli assi coincidono quando gli orologi di S e S' indicano 0.

Poniamo nell'origine di S una lampadina che emetta luce in maniera isotropa. All'istante $t = 0$, quando le origini spaziali dei due sistemi coincidono, accendiamo la lampadina per un tempo infinitesimo.

Ci chiediamo quale sia il luogo dei punti raggiunti dalla luce nei due sistemi.

Dato che la luce viaggia a c sia in S che in S', segue che tale luogo geometrico è descritto nelle coordinate dei due sistemi dalle equazioni:

$$\begin{aligned} S:&\ (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \\ S':&\ (ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0 \end{aligned}$$

ossia è una superficie sferica in entrambi i sistemi. Questo risultato è molto diverso da quanto avremmo avuto usando lo spazio-tempo di Newton.

Da questo possiamo dedurre una proprietà delle trasformazioni di coordinate: esse devono lasciare invariato il luogo dei punti dei raggi di luce generati dalla sorgente isotropa. Quindi la trasformazione di coordinate deve essere tale da mandare quaterne (ct, x, y, z) tali per cui $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ in quaterne (ct', x', y', z') con la stessa proprietà.

Tutta la notazione precedente può essere particolarmente snellita utilizzando un formalismo più compatto.

Definiamo il quadrivettore[8] coordinate $x^\mu = (ct, x, y, z)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Con $\mu = 0$ si indica la coordinata temporale del quadrivettore, mentre le restanti indicano le coordinate spaziali.

Definiamo adesso l'*intervallo invariante* s^2 come il "prodotto scalare" di un quadrivettore con se stesso.

$$x^\mu \cdot x_\mu = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = s^2$$

Piccola precisazione: il simbolo s^2 usato per l'intervallo invariante non significa che questo debba essere necessariamente una quantità positiva (ed in generale non lo è); il quadrato significa solo che operativamente si sta facendo una sorta di prodotto scalare di un vettore con se stesso e nient'altro.

Capita spesso di trovare scritta la stessa espressione nelle forme equivalenti

$$x^\mu \cdot x_\mu = x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

Non dovete preoccuparvi davvero del significato profondo di queste espressioni, sono assolutamente superflue per qualsiasi problema che si affronta alle Olimpiadi. Per ora potete pensarle come pura notazione. Se volete dare un minimo di significato in più, per esempio la scrittura $\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ è una *abbreviazione*[9] per la seguente espressione

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

Dove $\eta_{\mu\nu}$ si chiama *metrica piatta di Minkowski* e vale

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{Se } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{Se } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases} \tag{6}$$

[8]Il significato di questa espressione sarà approfondito in seguito

[9]In particolare si chiama *convenzione di Einstein sugli indici ripetuti.* Noi non la utilizzeremo, anche se è molto comoda, in quanto confonde le idee a chi è alle prime armi. La convenzione dice che in una espressione indiciale, gli indici ripetuti si intendono sommati. Potete dimenticarvi di questa affermazione e ripescarla quando inizierete geometria differenziale.

È possibile immaginare quella espressione come prodotto fra matrici, ma dato che non sapete cosa sono le matrici e che non aggiunge davvero niente all'argomento, dimenticatevene pure.

Si può dimostrare che, sotto assunzione di isotropia e omogeneità dello spazio-tempo, le trasformazioni lineari che lasciano invariato i vettori con $s^2 = 0$ lasciano invariato tutti gli s^2 (anche diversi da 0).

Detto in breve, se l'osservatore in S prende un quadrivettore e ne calcola l'intervallo invariante, ottiene lo stesso risultato dell'osservatore in S' che calcola l'intervallo invariante dello stesso quadrivettore espresso nelle coordinate di S'.

Si ha pertanto che è possibile classificare i quadrivettori a seconda del segno del loro s^2, essendo questa una cosa che non dipende dal sistema di riferimento scelto:

Definizione 5.1. Un quadrivettore è detto di tipo luce se $s^2 = 0$, di tipo tempo se $s^2 > 0$, di tipo spazio se $s^2 < 0$.

Come vedremo, le particelle fisiche, la cui velocità è sempre minore di c, hanno traiettorie i cui punti sono quadrivettori con $s^2 > 0$.

Tutte queste osservazioni possono sembrare inutili, tuttavia da queste si riesce a trovare l'espressione generale delle trasformazioni che ci consentono di esprimere le coordinate di un evento dello spazio-tempo in diversi sistemi di riferimento.

6 Trasformazioni di Lorentz

Come anticipato nella sezione precedente, le trasformazioni di coordinate fra sistemi di riferimento inerziali sono quelle lineari che lasciano invariato l'intervallo invariante. Queste sono le cosiddette *trasformazioni di Lorentz*. Ecco alcune proprietà:

- La composizione di due trasformazioni di Lorentz è ancora una trasformazione di Lorentz.
- Ogni trasformazione ammette una trasformazione inversa.
- La composizione di trasformazioni di Lorentz è associativa

Le trasformazioni di Lorentz si dividono in due classi[10]: le rotazioni attorno ai tre assi cartesiani e i boost lungo i tre assi.

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \\ y' = \cos(\alpha)y - \sin(\alpha)z \\ z' = \sin(\alpha)y + \cos(\alpha)z \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma\beta x \\ x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{8}$$

L'equazione 7 rappresenta un cambio di coordinate per passare da un sistema S ad uno S' ottenuto ruotando gli assi attorno all'asse x di un angolo α in senso orario.

In meccanica classica si aveva una formula del tutto uguale per passare da un sistema ad un altro tramite semplice rotazione.

L'equazione 8 rappresenta un cambio di coordinate per passare da un sistema S ad uno S' che si sta muovendo con velocità uniforme $v = \beta c$ lungo l'asse x rispetto ad S (per convincersene, basta vedere come si muove l'origine di S' in S). Si osservi che i boost galileiani (equazione 3) sono il limite dei boost di Lorentz per $\frac{v}{c} \ll 1$. Esplicitamente, le trasformazioni di Galileo si ottengono con il limite formale $\gamma \to 1$, $\beta \to 0$, ma tenendo fissa la quantità $\beta c = v$. In questo modo, le trasformazioni in 8 diventano

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = -vt + x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

che semplificando le c diventano semplicemente le note trasformazioni di Galileo.

Inoltre esistono ovviamente le rotazioni e boost lungo un qualsiasi asse: per semplicità è stato riportato solo quello lungo un asse particolare.

Esistono solo due cambi di riferimento Vogliamo adesso fare una riflessione sulle trasformazioni di Galileo e Lorentz.

[10]Stiamo volutamente escludendo dalla trattazione trasformazioni di parità e di inversione temporale. Ci limitiamo al cosiddetto sottogruppo proprio delle trasformazioni di Lorentz.

La grande differenza fra le due viene dal fatto che nelle prime non si ha una velocità limite di propagazione, mentre nelle seconde vi è un limite che non può essere superato tramite boost, il cui valore è rigorosamente finito e viene determinato da esperimenti.

In effetti, se richiediamo che nella nostra teoria esista una velocità limite finita, uguale in tutti i sistemi di riferimento (non serve neanche dire che sia la velocità della luce in particolare), otteniamo le trasformazioni di Lorentz. Se invece richiediamo che non ci sia una velocità limite, allora si ottengono le trasformazioni di Galileo.

Velocità relative Consideriamo un corpo A fermo nell'origine di un sistema inerziale S. Prendiamo in questo sistema un corpo B che si muove a velocità v lungo l'asse x.

Adesso ci poniamo nel sistema di riferimento inerziale S' solidale a B, con gli assi presi paralleli a quelli di S e orientati allo stesso modo. Ci chiediamo se la velocità relativa di A in S' sia la stessa in modulo (e opposta in verso).

Per dare una risposta basta convincersi che un boost di Lorentz con velocità $\vec{v}$ è la trasformazione inversa ad un boost con velocità $-\vec{v}$, e che quest'ultima è l'unica velocità che ci consente di passare da S' a S[11].

Per il calcolo, consideriamo per semplicità il caso 1D. Come prima cosa passiamo da S a S'.

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma\beta x \\ x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \end{cases}$$

Adesso che ci siamo messi nel sistema solidale a B, facciamo il cambio di coordinate che ci riporta a S. Se proviamo a fare il boost con velocità $-v$, allora in effetti otteniamo

$$\begin{cases} ct'' = \gamma ct' + \gamma\beta x' = \gamma(\gamma ct - \gamma\beta x) + \gamma\beta(-\gamma\beta ct + \gamma x) = \gamma^2(1-\beta^2)ct = ct \\ x'' = \gamma\beta ct' + \gamma x' = \gamma\beta(\gamma ct - \gamma\beta x) + \gamma(-\gamma\beta ct + \gamma x) = \gamma^2(1-\beta^2)x = x \end{cases}$$

Quindi in effetti il moto di A visto in S' è proprio rettilineo uniforme con velocità opposta a quella di B rispetto ad A.

7 Diagrammi di Minkowski

Spesso è utile visualizzare in modo intuitivo come appaiono le coordinate di eventi in sistemi di riferimento diversi.

[11] Ossia che la trasformazione inversa è unica!

Uno strumento per fare ciò sono i cosiddetti diagrammi di Minkowski.

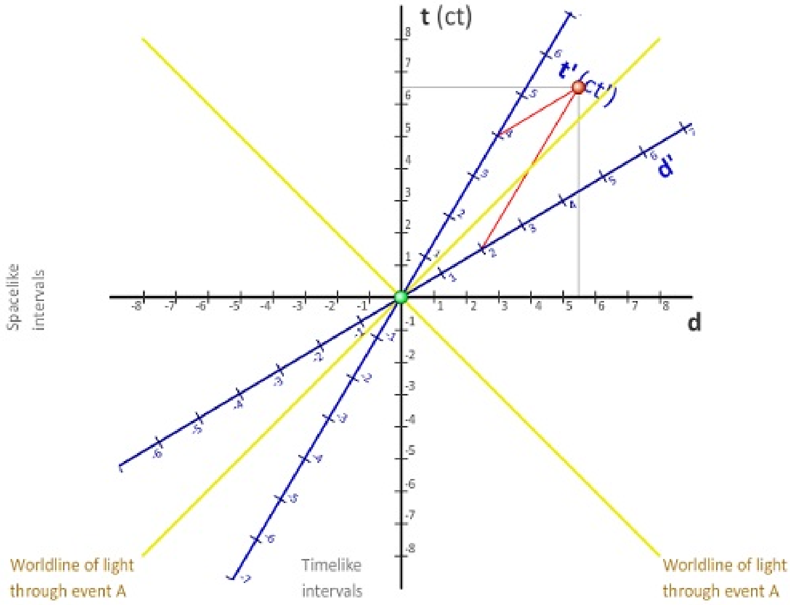

Figura 3: diagramma di Minkowski.

L'effetto di un boost di Lorentz sul diagramma è quello di "piegare" gli assi e dilatare le unità di misura di queste. Conseguentemente le coordinate nel sistema boostato vanno lette in modo diverso: si tracciano righe parallele ai nuovi assi passanti per il punto di cui si cercano le coordinate e si leggono i valori delle intersezioni con i nuovi assi.

In questo modo è facile vedere come eventi simultanei nel sistema a riposo, che quindi giacciono sulla retta orizzontale a t costante, non giacciono su una retta a t' costante. Questo significa che gli eventi non sono simultanei in S'! Analogo discorso si può fare per la contrazione delle lunghezze o dilatazione dei tempi fra due eventi.

Si osservi che comunque la retta che rappresenta la traiettoria di un raggio luminoso sparato dall'origine (il cosiddetto *cono luce*) resta la stessa in entrambi i sistemi: è sempre la bisettrice dell'angolo compreso fra gli assi.

Ci si convince facilmente che eventi all'interno del cono luce sono di tipo tempo (ossia con $s^2 > 0$), mentre punti all'esterno di questo sono di tipo spazio ($s^2 < 0$).

Sempre dal diagramma di Minkowski è semplice identificare tre regioni:

- Il futuro assoluto: è la regione all'interno del cono luce a tempi positivi. Questa è la regione di eventi su cui cose che accadono nell'origine spaziotemporale possono avere influenza causale. Per entrambi i sistemi di riferimento considerati questi eventi sono nel futuro (ossia t e t' positivi).

- Il passato assoluto: è la regione all'interno del cono luce a tempi negativi. Questi sono gli eventi che possono aver avuto influenza causale su un evento collocato nell'origine. Anche in questo caso, osservatori in diversi sistemi di riferimento sono comunque d'accordo sul fatto che un evento passato sia passato (ossia t e t' negativi).
- Altrove: è la regione esterna al cono luce. Per osservatori diversi questi eventi possono essere avvenuti a tempi positivi o negativi. Tuttavia questo non è problematico visto che questi eventi non possono avere avuto influenza causale su un evento collocato nell'origine.

Ad ogni modo, il fatto che gli assi "si pieghino" è solo un trucco grafico per vedere come un particolare punto dello spazio-tempo sia visto nel sistema boostato, e ci teniamo a precisare che gli assi non si piegano Fisicamente.

Perché non si va più veloci di c Se osserviamo bene la formula per un boost di Lorentz, ci accorgiamo che il valore della velocità con cui si può boostare un sistema di riferimento non può superare c. In tal caso infatti il fattore γ diventa immaginario, e conseguentemente si hanno coordinate non più in $\mathbb{R}$: non rappresentano nulla di fisico. Questo significa che partendo da corpi con velocità inferiori a c non si può mai raggiungere c tramite boost.

Questo non esclude ancora che possano esistere particelle che si muovono da sempre a velocità superluminale. Tuttavia, se queste esistessero, causerebbero un grosso problema con la causalità[12].

Supponiamo di avere una particella che si muove con velocità $w > c$ lungo l'asse x in un sistema inerziale S. Supponiamo che passi per l'origine del sistema di riferimento. Segue che dopo un tempo $t > 0$ la particella raggiunge un punto (ct, wt) esterno al cono luce, in cui può avere un effetto fisico, ad esempio fare un urto con qualcosa. Cosa vede un osservatore in un sistema inerziale S' boostato rispetto al primo con $v < c$ lungo l'asse x? Le coordinate del punto in cui avviene l'urto sono $((c - \beta w)\gamma t, (-\beta c + w)\gamma t)$. Si osservi che in S l'urto avviene per $t > 0$, ossia nel futuro: l'urto e i sui eventuali effetti non possono avere effetti sull'osservatore al tempo $t = 0$. Tuttavia in S' l'evento avviene per $t < 0$ per β opportuni.

Questo significa che avviene nel passato di S', e quindi può influenzare l'osservatore posto nell'origine dei due sistemi $(0, 0)$. Si ha quindi una violazione del principio di causa-effetto, e pertanto siamo costretti ad escludere l'esistenza di particelle che viaggiano con velocità superiori a c.

[12] Per una esposizione chiara dell'argomente si rimanda alle note [D'E18].

8 Introduzione alle trasformazioni di Lorentz

Abbiamo visto prima quali sono le trasformazioni di Lorentz più comuni. Vedremo ora alcune caratteristiche peculiari di queste trasformazioni che possono essere utili per fare i problemi.

8.1 Importanza della linearità

Ricordiamo che la trasformazione di Lorentz che indica un boost lungo l'asse x a velocità βc si scrive nel seguente modo:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{9}$$

Notiamo che queste trasformazioni sono lineari. Questo ha una grossa conseguenza su come si comporteranno queste equazioni. Per esempio, possiamo andare a considerare due eventi nel riferimento S, che indicheremo con le loro 4 coordinate (ct_1, x_1, y_1, z_1) e (ct_2, x_2, y_2, z_2). Questi due eventi verranno ovviamente visti entrambe da un riferimento S' con una trasformazione di Lorentz, ovvero avremo rispettivamente

$$\begin{cases} ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \\ y'_1 = y_1 \\ z'_1 = z_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) \\ y'_2 = y_2 \\ z'_2 = z_2 \end{cases}$$

Facendo le differenze equazione per equazione otteniamo, per esempio prendendo la componente temporale

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma(c(t_2 - t_1) - \beta(x_2 - x_1))$$

Ovvero

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta \Delta x)$$

Che scritto in forma completa vuol dire

$$\begin{cases} c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta \Delta x) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

Ovvero le differenze di eventi spaziotemporali trasformano esattamente come le quadriposizioni spaziotemporali. Questa affermazione può sembrare banale ma in realtà non lo è e la utilizzeremo spesso.

8.2 Boost generico

Noi abbiamo mostrato la forma della trasformazione di Lorentz per un boost lungo x, ma ovviamente niente ci vieta di fare un boost in una direzione arbitraria. Ora mostreremo come si può ricavare il boost in direzione arbitraria a partire da quello che conosciamo lungo l'asse x. Fissiamo quindi un sistema di riferimento S e consideriamo un sistema che si muove a velocità $\vec{\beta}c$ rispetto ad esso. Scomponiamo il problema nella direzione parallela a questo vettore e sul piano ortogonale a questo vettore. È evidente che ogni vettore dello spazio si potrà scrivere come una componente parallela a $\vec{\beta}$ e una componente perpendicolare a $\vec{\beta}$. Possiamo addirittura vedere esplicitamente come: sia $\vec{x}$ un generico vettore tridimensionale. Io affermo che la seguente scomposizione è quella che cerchiamo

$$\begin{cases} \vec{x}_\parallel = (\vec{x} \cdot \widehat{\beta})\widehat{\beta} \\ \vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_\parallel \end{cases}$$

È evidente che $\vec{x}_\perp + \vec{x}_\parallel = \vec{x}$, per cui abbiamo scomposto effettivamente il nostro vettore senza perdere niente. Inoltre $\vec{x}_\parallel$ è evidentemente parallelo a $\vec{\beta}$. Controlliamo per sfizio che sia davvero $\vec{\beta} \cdot \vec{x}_\perp = 0$

$$\vec{x}_\perp \cdot \vec{\beta} = \vec{x} \cdot \vec{\beta} - (\vec{x} \cdot \widehat{\beta})\widehat{\beta} \cdot \vec{\beta} = \vec{x} \cdot \vec{\beta} - \vec{x} \cdot \vec{\beta} = 0$$

A questo punto, dato che la direzione $\widehat{x}$ non ha niente di privilegiato rispetto alle altre, converrete con me che dovrà essere

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x_\parallel) \\ x'_\parallel = \gamma(x_\parallel - \beta ct) \\ \vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp \end{cases} \tag{10}$$

Che insieme alla definizione di $x_\parallel$ e $\vec{x}_\perp$ è la formula per un boost generico in una direzione qualsiasi.

8.3 Notazione

Introduciamo la seguente notazione che useremo più tardi. Prendiamo per esempio la componente temporale

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

Ora andrò a scrivere l'espressione precedente in modo diverso, semplicemente dando dei nomi diversi agli oggetti che vi compaiono. Iniziamo nel seguente modo.

$$ct' = \gamma \cdot ct + (-\beta) \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z$$

Evidentemente non è cambiato niente, abbiamo solo scritto in modo più largo la formula. Ora permettetemi di scrivere

$$ct' = \Lambda^0_0 ct + \Lambda^0_1 x + \Lambda^0_2 y + \Lambda^0_3 z$$

Dove i Λ^μ_ν sono dei semplici numeri. Per esempio, $\Lambda^0_0 = \gamma, \Lambda^0_2 = 0$. Evidentemente non è cambiato niente, ho solo dato un nome che *ammette una indicizzazione*. Questo è evidentemente utile solo per scrivere le formule in modo più compatto, non è niente di più. In particolare, se identifichiamo le coordinate spaziotemporali (ct, x, y, z) con un oggetto che chiamiamo (X^0, X^1, X^2, X^3), allora la relazione precedente si scrive ancora prima come

$$X'^0 = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^0_\nu X^\nu$$

Ed evidentemente le altre 3 equazioni si scriveranno in modo simile, per cui una trasformazione di Lorentz si potrà scrivere come

$$X'^\mu = \sum_{\nu=0} \Lambda^\mu_\nu X^\nu$$

8.4 Ritrovare i risultati precedenti

Dato che abbiamo affermato che le trasformazioni di Lorentz sono le trasformazioni più generali che ci possono capitare in relatività, dobbiamo poter ritrovare i risultati che abbiamo mostrato prima, ovvero dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze. Cominciamo dalla prima. Consideriamo una coppia di eventi A e B che nel sistema S avvengono nello stesso luogo, ovvero $\Delta\vec{x} = 0$. Consideriamo un sistema di riferimento S' e andiamo a calcolare che cosa vede un osservatore in questo sistema. In particolare, dato il tempo Δt che intercorre fra i due eventi in S, vorremmo sapere quanto vale $\Delta t'$ in S' in funzione di Δt e β. In questo caso è facile, in quanto basta scrivere

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \beta \Delta x/c) = \gamma \Delta t$$

Che è il risultato che ci aspettavamo sulla dilatazione dei tempi. La contrazione delle lunghezze è un po' meno banale. Consideriamo un oggetto che nel riferimento S è a riposo. La lunghezza di questo oggetto, ovvero la differenza spaziale fra i suoi estremi misurata nel riferimento S è costante e la chiameremo L_0, ed è ovviamente una cosa che si può indicare con Δx. Adesso andiamo a vedere lo stesso oggetto da un riferimento S' che si muove a velocità βc rispetto ad S. Quanto è lungo l'oggetto per un osservatore in S'?.

Per rispondere a questa domanda bisogna capire che cosa vuol dire misurare una lunghezza in un determinato sistema di riferimento. La definizione data precedentemente dice che per misurare una lunghezza in un certo sistema di riferimento, bisogna andare a misurare il Δx *nello stesso istante* ***in quel riferimento***. Il che vuol dire che gli eventi che dobbiamo andare a considerare non devono avere $\Delta t = 0$ come il principiante potrebbe pensare, ma devono avere $\Delta t' = 0$! A questo punto, possiamo svolgere il conto per trovare il risultato.

$$\begin{cases} 0 = c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta \Delta x) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \end{cases}$$

Questo è un semplice sistema 2×2 che ora risolviamo

$$\begin{cases} c\Delta t = \beta \Delta x \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta^2 \Delta x) = \gamma(1 - \beta^2)\Delta x = \frac{\gamma}{\gamma^2}\Delta x = \dfrac{\Delta x}{\gamma} \end{cases}$$

Come ci aspettavamo.

9 Quadrivettori

Abbiamo visto poco fa come trasformano le coordinate di un evento, ovvero come un osservatore in un sistema S' può conoscere le coordinate di un evento, ovvero i numeri (ct', x', y', z') a partire dalle coordinate in un altro riferimento S, ovvero (ct, x, y, z). Abbiamo abbastanza faticato per ottenere questo risultato, quindi ci piacerebbe trovare qualcos'altro che trasformi allo stesso modo e che trasporti delle informazioni utili.

Diamo quindi la seguente definizione operativa

Definizione 9.1 (Quadrivettore)**.** Si definisce quadrivettore (controvariante) una quaterna di numeri indicizzati da una lettera greca X^μ, che possono rappresentare qualsiasi quantità Fisica sensata, tale che X^μ trasformi come il quadrivettore posizione, ovvero che valga

$$X'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu X^\nu$$

Che scritto in forma estesa,[13]per una boost lungo x, vuol dire

$$\begin{cases} X'^0 = \gamma(X^0 - \beta X^1) \\ X'^1 = \gamma(X^1 - \beta X^0) \\ X'^2 = X^2 \\ X'^3 = X^3 \end{cases}$$

Osservazione (Prodotto invariante)**.** Abbiamo prima mostrato che se una cosa trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz, allora è vero che il suo prodotto invariante è un invariante relativistico. Per cui, a partire dalla notazione X^μ, dovrà essere vero che la quantità

$$X^\mu \cdot X_\mu := (X^0)^2 - ((X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2)$$

è una cosa conservata, ovvero non dipende dal sistema di riferimento e soprattutto non dipende da cosa è X^μ. Qualsiasi X^μ che trasformi secondo una trasformazione di Lorentz ha quella quantità invariante. In realtà, vale molto di più: se X^μ e Y^μ sono entrambe quadrivettori, allora il gruppo di trasformazioni di Lorentz conserva comunque il loro prodotto, ovvero anche

$$X^\mu Y_\mu = (X^0 Y^0) - (\vec{x} \cdot \vec{y})$$

è una quantità che non dipende dal sistema di riferimento in cui viene calcolata. Per esplicitare un po' meglio quello che ho scritto, dato che comprendo che la notazione possa essere difficile da capire al primo colpo, possiamo scrivere

$$X^\mu = \begin{pmatrix} X^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \qquad Y^\mu = \begin{pmatrix} Y^0 \\ \vec{y} \end{pmatrix}$$

Definizione 9.2 (Tempo proprio)**.** Consideriamo la traiettoria di un punto materiale in un particolare sistema di riferimento S. Possiamo dire che la quadriposizione è definita da una funzione $X^\mu(t)$ dove t è il tempo misurato

[13]Le prossime volte useremo solo la forma ridotta

nel sistema di riferimento S. Possiamo andare a considerare la traiettoria a due istanti di tempo molto vicini, t e $t + \mathrm{d}t$. Sarà

$$\mathrm{d}X^\mu = \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}\vec{s} \end{pmatrix}$$

Andiamo a considerare la quantità invariante $\mathrm{d}X^\mu\,\mathrm{d}X_\mu$

$$\mathrm{d}X^\mu\,\mathrm{d}X_\mu = c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}\vec{s})^2 := c^2(\mathrm{d}\tau)^2$$

La quantità $\mathrm{d}\tau$ è evidentemente un invariante di Lorentz e si chiama (intervallo di) *tempo proprio*[14] del punto materiale. La sua relazione con il tempo misurato nel riferimento S è la seguente

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{(\mathrm{d}t)^2 - \frac{1}{c^2}\,(\mathrm{d}\vec{s})^2} = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{c\,\mathrm{d}t}\right)^2} = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$$

Dove γ è chiaramente calcolato nel riferimento S.

9.1 A caccia di quadrivettori

Dato che queste trasformazioni di Lorentz in fondo sono facili, ci piacerebbe trovare dei quadrivettori che rappresentino qualcosa di utile. Per esempio, siamo partiti dalla posizione. Per fare la dinamica il minimo che possiamo fare è considerare la velocità. Il primo tentativo che possiamo fare è di definire una sorta di velocità quadridimensionale nel modo più intuitivo che possiamo

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x^\mu}{\Delta t} \tag{11}$$

Questa definizione tuttavia ha qualche problema in quanto pare difficile che trasformi come noi vogliamo. Consideriamo infatti un boost lungo x e vediamo come variano le componenti di v^μ

$$v'^\mu = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'^\mu}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \to 0} \begin{pmatrix} \gamma\frac{\Delta x^0 - \beta \Delta x^1}{\gamma(\Delta t - \beta\Delta x/c)} \\ \gamma\frac{\Delta x^1 - \beta \Delta x^0}{\gamma(\Delta t - \beta\Delta x/c)} \\ \frac{\Delta x^2}{\gamma(\Delta t - \beta\Delta x/c)} \\ \frac{\Delta x^3}{\gamma(\Delta t - \beta\Delta x/c)} \end{pmatrix}$$

Che evidentemente non sembra coincidere con la definizione precedente. Questa definizione di v^μ non va quindi d'accordo con l'obiettivo che ci siamo

[14] Chiaramente la definizione di tempo proprio sarebbe $\tau = \int \mathrm{d}\tau$, ma questa definizione è inutile perché il tempo proprio spesso non serve. Quello che serve è il $\mathrm{d}\tau$

posti, ovvero quello di scrivere qualcosa che trasformi come un quadrivettore. Possiamo provare questa definizione alternativa e convincerci che funziona

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{12}$$

Dove τ è il tempo proprio. Essendo il tempo proprio un invariante relativistico, in ogni riferimento si ha $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau$. Per questo motivo, quando andiamo a vedere come trasforma il nostro nuovo oggetto, troviamo

$$u'^\mu = \frac{\mathrm{d}x'^\mu}{\mathrm{d}\tau'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu x^\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu u^\nu$$

Che è esattamente quello che vogliamo, ovvero abbiamo trovato una definizione operativa di un nuovo oggetto, la quadrivelocità, che è effettivamente un quadrivettore, ovvero trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz. Ora dobbiamo fare molta attenzione a non confondere le idee. Quello che abbiamo in mente come velocità e questa quadrivelocità sono oggetti diversi e bisogna fare attenzione a sapere chi usare e in quale contesto usarli. Per esempio, nella matrice di Lorentz compaiono i fattori β e γ. Hanno qualcosa a che fare con la quadrivelocità? Sì e no, bisogna fare attenzione. Chiariamo le idee definendo la velocità di un punto

Definizione 9.3 (Velocità di un punto materiale)**.** La velocità di un punto materiale è un vettore tridimensionale che dipende dal sistema di riferimento e che è definita nel modo classico

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

le quantità $\vec{\beta}$ e γ sono definite a partire dalla *velocità* e non dalla *quadrivelocità*, rispettivamente come indicato sopra

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$$

Velocità e quadrivelocità non sono completamente scorrelate, come si può immaginare. Vediamo di scrivere le componenti di u^μ in termini di $\vec{v}$

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

E, come accennato prima, possiamo andare a fare il prodotto invariante

$$u^\mu \cdot u_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} u^\mu u_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = c^2$$

Che in effetti ha lo stesso valore in ogni riferimento. Ora la domanda da rifarsi è: perché abbiamo definito questa cosa? La risposta è semplice: perché dobbiamo costruire la dinamica o quantomeno la cinematica. Il bello di $\vec{F} = m\vec{a}$ è che è un'equazione fra vettori. Con le trasformazioni di Galileo, cambia la forma di $\vec{F}$, cambia la forma di $\vec{a}$, ma l'equazione che esprime la dinamica, rimane invariata. Per questo motivo, vorremmo cercare una generalizzazione relativistica di questa formula. Chiaramente noi non dimostreremo niente, ma daremo dei motivi intuitivi per cui deve essere vero.

Dato che vogliamo arrivare alla dinamica, il prossimo passo è definire una sorta di quantità di moto. Niente di più facile, in quanto possiamo partire dalla quadrivelocità e definire

$$p^\mu := m u^\mu \tag{13}$$

Al momento questa è solo una definizione, ora vediamo come si comporta. Per ora, teniamo a mente

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = m^2 c^2$$

e diamo la definizione del suo equivalente tridimensionale

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \tag{14}$$

Che in effetti si riconduce alla definizione classica per $v \ll c$, in quanto in tal caso $\gamma \to 1$

9.1.1 Massa relativistica

Spesso si trovano sui libri old-style delle affermazioni come "La massa di un oggetto diventa sempre più grande man mano che l'oggetto si avvicina a c", in quanto vedono nella Equazione 14 una sorta di *massa più grande* γm. Questa affermazione è fuorviante e non aiuta. La Fisica si fa con l'impulso e la massa è una proprietà scalare di un punto materiale. L'interpretazione dell'aumento di massa porta solo al rischio di commettere errori, quindi non usatela.

9.2 Dinamica relativistica

Ora che abbiamo una definizione di quantità di moto, possiamo sperare di inventare la dinamica. Ovviamente io non darò delle dimostrazioni, darò dei motivi intuitivi[15] per cui dovrebbe funzionare in questo modo.

Noi sappiamo che nel caso non relativistico vale

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Non è difficile in che modo si può generalizzare questa equazione. Le sostituzioni minimali per ottenere una legge che trasformi nel modo corretto sono

$$\vec{p} \to p^{\mu} \qquad \vec{F} \to F^{\mu} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$$

Per cui possiamo aspettarci che la legge di Newton relativistica sia

$$\frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = F^{\mu} \tag{15}$$

La domanda da un milione di dollari ora è: chi è F^{μ}? Questa è una domanda a cui risponderemo dopo. Per ora, possiamo concentrarci su tutti i sistemi in cui $F^{\mu} = 0$, ovvero i sistemi isolati. Tutto questo è restrittivo ma non eccessivo, infatti, per ora siamo in grado di studiare tutti gli urti: vediamo come.

Dobbiamo sforzarci leggermente di più in quanto l'equazione che abbiamo scritto vale per una particella sola. Tuttavia, essendo lineare, possiamo definire la quantità di moto totale del sistema

$$P^{\mu} = \sum_i p_i^{\mu}$$

E allo stesso modo possiamo scrivere la somma delle forze che agiscono su tutte le particelle

$$F^{\mu}_{\text{tot}} = \sum_i F_i^{\mu}$$

E dato che la derivata è lineare, otteniamo l'equazione di Newton per un sistema di particelle[16]

[15] Spero

[16] Il lettore attento si accorgerà che questa non è una vera dimostrazione e che ho fatto dei passaggi poco leciti. Non preoccupatevi di questo specifico passaggio logico. Per come è riportato qui, non sembra funzionare il ragionamento, ma ci sono metodi più generali per mostrare che è così, ma non è il luogo giusto per discuterne.

$$\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} = F^\mu_{\mathrm{tot}}$$

Se sul sistema non agiscono forze esterne, possiamo enunciare il seguente teorema, molto banale ma molto utile per fare i problemi

Proposizione 9.1. *In un sistema isolato si conserva il quadrimpulso totale P^μ.*

Poniamoci un po' di domande più fondamentali su quello che abbiamo detto. Intanto, quante equazioni abbiamo scritto? In meccanica classica, si dice che la quantità di moto totale si conserva, ovvero si hanno 3 equazioni indipendenti. In questo caso, invece, abbiamo un'equazione fra quadrivettori, ovvero abbiamo 4 equazioni! Ci sono due casi da esaminare

- Una delle equazioni è dipendente dalle altre e non aggiunge altra Fisica al problema
- Le equazioni sono tutte indipendenti e quindi stiamo assumendo qualcosa in più

Vi assicuro che le equazioni non sono dipendenti, quindi in effetti stiamo aggiungendo qualcosa al problema. A questo punto bisogna capire cosa. Per questo motivo, è opportuno andare guardare meglio l'equazione di Newton relativistica 15 e interpretarne i vari pezzi. Prima di farlo, facciamo un conto rapido che ci servirà

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} = \frac{\vec{\beta}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}}{\mathrm{d}t}}{(1-\vec{\beta}^2)^{\frac{3}{2}}} = \gamma^3\vec{\beta}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}}{\mathrm{d}t}$$

A questo punto possiamo andare a guardare la derivata di p^μ e cercare di interpretarne il risultato

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\gamma mc\\ \gamma m\vec{v}\end{pmatrix} = m\gamma\begin{pmatrix}\gamma^3\vec{\beta}\cdot\vec{a}\\ \gamma^3(\vec{\beta}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}ct})\vec{v}+\gamma\vec{a}\end{pmatrix}$$

La parte interessante a questo punto è in effetti la prima componente del vettore, ovvero $m\gamma(\gamma^3\vec{\beta}\cdot\vec{a})$. Ci aspettiamo che, a meno di fattori γ, per velocità basse si abbia $P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \propto \vec{v}\cdot\vec{F} \propto \vec{v}\cdot m\vec{a}$, per cui in questo pezzo sembra proprio esserci il lavoro per unità di tempo. Dato che abbiamo calcolato la derivata rispetto al tempo del quadrimpulso, a questo punto possiamo intepretare la sua componente temporale[17] come l'energia[18] della particella, ovvero

$$E = \gamma mc^2 \tag{16}$$

E non $E = mc^2$ come si legge per l'appunto sulle magliette. Ci piacerebbe molto se questa espressione fosse familiare e in qualche modo ritornasse al classico $E = mv^2/2$ per basse velocità. Questo è vero ma non del tutto, infatti si ha

$$\begin{aligned} E = \gamma mc^2 = mc^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mc^2\beta^2 + \frac{3}{8}mc^2\beta^4 + o(\beta^4) \\ = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2\frac{v^2}{c^2} + o(\beta^4) \end{aligned}$$

In effetti, nel limite $\beta \to 0$ la nostra espressione dell'energia si riconduce *quasi* a quella classica. La differenza fra il termine classico e quello relativistico è un fattore mc^2. Dato che di solito in Fisica si considerano solo differenze di energie, questo termine non sembra troppo rilevante. Tuttavia, i problemi di relatività spesso coinvolgono particelle che perdono la loro identità e si spezzano in particelle di massa diversa. L'evidenza sperimentale dice che la somma delle masse prodotte è praticamente sempre strettamente minore della massa di partenza. Questa evidenza dice subito che in realtà **la massa non è più una quantità conservata in relatività**. Ciò che si osserva è invece che la prima componente del quadrimpulso, quella con le energie, è sempre conservata. Questo risultato si può interpretare dicendo che la massa si può *convertire* in energia in alcuni casi, con costante di proporzionalità c^2.

Data la nuova interpretazione della componente temporale del quadrimpulso, possiamo riscriverlo nel seguente modo

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Dove $E = \gamma mc^2$ e $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$. Ricordiamo che il prodotto invariante $p^\mu \cdot p_\mu$, che abbiamo calcolato prima, vale m^2c^2. Usando la nuova interpretazione, possiamo scrivere questo risultato come

$$E^2 = |\vec{p}|^2c^2 + m^2c^4 \tag{17}$$

[17] Ovvero la prima

[18] Manca un fattore c

Che è l'importantissima relazione di dispersione massa-momento-energia, che è molto utile per fare i conti nei problemi. È diversa dal caso classico in cui si aveva

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Con questo, possiamo finalmente rispondere alla domanda che abbiamo fatto prima: quando impostiamo un urto imponendo la conservazione del quadrimpulso, l'equazione in più che cosa rappresenta? La risposta è semplice, si tratta della conservazione dell'energia. Il motivo è che quando si studiano oggetti relativistici, normalmente si va a considerare sistemi fondamentali, come particelle fondamentali o quasi, per cui in effetti, a differenza del caso classico, non c'è la possibilità di disperdere "in calore" dell'energia, semplicemente si conserva e basta.

9.3 Il sistema del centro di massa

Come in meccanica classica, anche qui è spesso utile fare i conti nel sistema del centro di massa. Questa definizione è leggermente meno banale che nel caso classico, in quanto la velocità e l'impulso non sono più in una relazione semplicissima. Diamo quindi la seguente definizione, intuitiva:

Definizione 9.4 (Sistema del centro di massa)**.** Sia dato un sistema di N punti materiali, ognuno con la sua massa m_i, non soggetto a forze esterne. Sappiamo quindi che la quantità $P^\mu_{\text{tot}} = \sum_i p^\mu_i$, calcolata in qualsiasi riferimento S, è una quantità costante nel tempo. È ragionevole credere che esista spesso un riferimento S' in cui la parte spaziale di questa quantità è 0, ovvero il vettore nullo. Questo riferimento, se esiste, si chiama sistema di riferimento del centro di massa.

Ci siamo andati con i piedi di piombo in questa definizione, in quanto purtroppo questo riferimento non sempre esiste e fra poco vedremo un esempio di come può succedere. Supponiamo adesso che questo riferimento esista e cerchiamo di capire come arrivarci a partire da un riferimento qualunque.

Consideriamo quindi la situazione in cui noi abbiamo i quadrimpulsi di un sistema di punti materiali in un riferimento S e vogliamo trovare a che velocità si muove S_{CM} rispetto ad S in modo da potercisi spostare con un boost, per magari semplificarsi i conti.

Per definizione, nel riferimento S_{CM} la componente spaziale del quadrimpulso totale è 0. Supponiamo per semplicità che nel riferimento S la parte spaziale del quadrimpulso totale sia P e che sia diretto lungo l'asse x. Sia inoltre E/c la componente temporale del quadrimpulso totale. Stiamo quindi cercando un certo β_{CM} tale che

$$0 = \gamma(E/c - \beta_{\text{CM}} P)$$

Ovvero semplicemente

$$\beta_{\text{CM}} = \frac{Pc}{E}$$

Facile, no? Dato che abbiamo dato l'espressione esplicita per la velocità del centro di massa, ha senso chiedersi come è possibile che esistano casi in cui il riferimento del CM non esista. Beh, dato che $E > 0$ e che $E = \sqrt{P^2c^2 + m^2c^4} \geq P$, l'unico caso che ci può disturbare è quando $E = Pc$, in quanto otterremmo $\beta_{\text{CM}} = 1$, che non è fisico. Concretamente, è il caso di un fotone solo, o di più fotoni che viaggiano tutti nella stessa direzione e verso.[19]

9.4 Quadrivettori notevoli

Facciamo un piccolo punto della situazione. Abbiamo visto che possiamo descrivere un evento come una quaterna di numeri, che abbiamo indicato con x^μ. Con questi numeri e delle considerazioni abbiamo seguito il percorso di una particella per costruire altri due quadrivettori, u^μ e p^μ, che sono quindi delle oneste quantità che trasformano esattamente come trasforma x^μ. Il gioco non è finito qui, ce ne sono molti altri utili e fra poco ne vedremo altri 3: k^μ, J^μ e A^μ. Mi limiterò per questo a definirne uno e rimandare a fra poco la presentazione di altri due quadrivettori notevoli.

9.5 Covariante e controvariante

Per ora ho sempre indicato le cose con un indice in alto e solo in opportuni casi con un indice in basso. Non è lasciato al caso ma è voluto, nonostante possa causare fraintendimenti di notazione con un semplice esponente. In generale X^μ e X_μ sono cose diverse, ma questo esula completamente dagli obiettivi della lezione. Ne riparleremo quando avrete studiato il teorema di rappresentazione di Riesz ad algebra lineare.

9.6 Traslazioni spaziotemporali

Ci sono delle trasformazioni che non abbiamo mai considerato in questa lezione che sono le semplici *traslazioni spaziotemporali*. È un nome pomposo

[19] Non ho ancora detto che cos'è un fotone, ma lo farò fra pochi paragrafi. Era solo per anticipare un risultato interessante.

per dire una cosa semplice: ogni sistema di riferimento ha bisogno di un origine, ovvero di un evento che ha coordinate $(0, 0, 0, 0)$. Due osservatori in quiete l'uno rispetto all'altro ovviamente devono osservare la stessa Fisica anche se utilizzano un istante diverso per l'inizio dei tempi o per l'origine spaziale del riferimento. Il cambio di coordinate più generale in relatività sarà quindi la composizione di una trasformazione di Lorentz con una traslazione spaziotemporale. Una trasfomazione del genere si dice far parte del gruppo di Poincaré[20].

Sto citando questo fatto molto banale per un semplice motivo: abbiamo sempre detto che $s^2 = X^\mu X_\mu$ è un invariante, ma basta pensarci un attimo per vedere che questo è vero solo se tutti i riferimenti in cui lo andiamo a considerare hanno la stessa origine spaziotemporale, ovvero tutti loro usano lo stesso evento come origine delle coordinate.

Questo problema non si pone per esempio per il quadrimpulso, che non dipende dal sistema di coordinate e nemmeno per la quadrivelocità. Il motivo è semplice: la quadrivelocità è definita in Equazione 12 e si può vedere come un numero $(\frac{1}{\mathrm{d}\tau})$ moltiplicato per una differenza spaziotemporale di eventi $(\mathrm{d}x^\mu)$. Il punto è che le *differenze* di eventi non dipendono dall'origine del sistema di riferimento e quindi questo ci salva.

10 Addizione delle velocità

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che la velocità non può essere additiva. Vediamo a questo punto allora qual è la vera legge di trasformazione[21]. Consideriamo un oggetto che si muove lungo l'asse x, con una velocità $\vec{v} = v\widehat{x} = \beta_v c\widehat{x}$ e andiamo a considerare $\vec{v}'$, in un riferimento che si muove a velocità $\vec{u} = u\widehat{x} = c\beta_u\widehat{x}$ rispetto al primo. Vediamo quanto vale $\vec{v}'$

$$\vec{v}' = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x - \beta c \Delta t}{\Delta t - \beta \Delta x / c} = c\frac{\beta_v - \beta_u}{1 - \beta_v \beta_u}$$

Notiamo che, dato che entrambe i β sono compresi fra -1 e 1, la nuova velocità non può mai essere maggiore di c. Infatti, il caso limite si ottiene proprio quando $\beta_v = 1$. In tal caso, si ottiene $\vec{v}' = c\widehat{n}$ in ogni sistema di riferimento, coerentemente con quanto ci si aspetta dai postulati.

A questo punto siamo pronti per vedere vedere come trasforma la velocità per una direzione generica e non solo per un boost parallelo. Innanzitutto notiamo che se abbiamo a disposizione solo due vettori, ovvero la velocità

[20] Questa informazione è irrilevante, ma è solo per darvi una referenza.

[21] Stiamo parlando della velocità, non della quadrivelocità, quella sappiamo che trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz.

iniziale $\vec{v} = \vec{\beta}_v c$ e il boost $\vec{u} = \vec{\beta}_u c$, allora siamo sicuri che queste due velocità stanno in un piano, per cui possiamo senza perdita di generalità mettere $\vec{u} = u\hat{x}$ e mettere $\vec{v}$ nel piano xy. Per semplicità indicheremo $\vec{v} = \vec{\beta} c = c(\beta_x \hat{x} + \beta_y \hat{y})$ e $\vec{u} = \beta_u c$

$$\begin{cases} \beta'_x = \dfrac{1}{c} \lim\limits_{\Delta t' \to 0} \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} = \dfrac{1}{c} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\gamma(\Delta x - \beta_u c \Delta t)}{\gamma(\Delta t - \beta_u \Delta x / c)} = \dfrac{\beta_x - \beta_u}{1 - \beta_u \beta_x} \\ \beta'_y = \dfrac{1}{c} \lim\limits_{\Delta t' \to 0} \dfrac{\Delta y'}{\Delta t'} = \dfrac{1}{c} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - \beta_u \Delta x / c)} = \dfrac{\beta_y}{\gamma(1 - \beta_u \beta_x)} \end{cases}$$

La cosa che bisogna notare è che mentre la *lunghezza* su un asse perpendicolare alla direzione del boost è inviarante, la velocità cambia e non di poco. È abbastanza semplice immaginare un andamento simile. Infatti, il modulo quadro della velocità deve comunque essere $\leq c^2$. Se cambiasse solo la componente x, potrebbe tendere asintoticamente a c per opportuni cambi di riferimento. Se non cambiasse la componente ortogonale, ad un certo punto la velocità sarebbe maggiore di c, cosa che abbiamo visto essere poco realistica.

11 Effetto doppler relativistico

11.1 Fotoni

Spesso nei problemi di relatività compare una nuova entità, il fotone, di cui si dice poco o niente e ci si aspetta che lo studente sia in grado di arrangiarsi. Cercheremo in pochi paragrafi di spiegare degli aspetti qualitativi e quantitativi del tutto per permettervi di fare i problemi. Per quello che serve alle Olimpiadi, un fotone è una pallina di massa 0, che nonostante questo *dettaglio*, trasporta energia e quantità di moto (impulso). Dalla relazione di dispersione massa-energia-impulso 17, si ottiene subito, per un fotone, facendo il limite $m \to 0$

$$E^2 = m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2 \Rightarrow E = |\vec{p}| c$$

Potreste farci notare che quando diciamo $E = |\vec{p}|c$, questa relazione è anche banalmente soddisfatta da $E = 0 = |\vec{p}|$, per cui potremmo aver semplicemente scritto qualcosa di banale. Come fa un oggetto di massa nulla a trasportare energia? Non voglio ovviamente entrare in discorsi complicati di Quantum Field Theory, ma possiamo pensare di fare la seguente procedura di limite, non estremamente intuitiva, ma che può dare una interpretazione naive della Fisica complicata che ci sta dietro. Supponiamo di fare il limite simultaneo $v \to c$ e $m \to 0$. Evidentemente, se $v \to c$, allora sarà $\gamma \to +\infty$. Ci sono un sacco di modi di fare il limite su una coppia di variabili che va a 0, ma noi ne faremo uno in particolare, perché fa saltare fuori il risultato interpretativo che ci interessa. In particolare, faremo il limite $\gamma \to \infty$, $m \to 0$, ma con la quantità $\gamma m = \text{costante} := h\nu/c^2$. In questo modo, impulso ed energia diventano

$$\begin{cases} E = \gamma mc^2 = h\nu \\ p = \gamma m\beta c = h\nu/c\beta \to h\nu/c \end{cases}$$

Quindi effettivamente è possibile fare una procedura di limite che spieghi, almeno qualitativamente, il come possiamo ottenere $E \neq 0$ anche con massa nulla. Il nome che abbiamo dato alla costante non è casuale e fra poco vedremo di che cosa si tratta.

Dato che si dice sempre che il fotone sia il quanto di luce, ovvero di onda elettromagnetica, possiamo considerare la più semplice fra le onde elettromagnetiche, ovvero un'onda piana che si propaga nel vuoto nel verso positivo dell'asse x. I campi elettrico e magnetico di questa onda si scrivono

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\widehat{y} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(kx - \omega t)\widehat{z} \end{cases}$$

Da questi possiamo scrivere il vettore di Poynting

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu_0 c} |E_0|^2 \cos^2(kx - \omega t)\widehat{x}$$

L'interpretazione che bisogna dare a livello intuitivo è che questo vettore di Poynting trasporti energia e che questa energia non sia portata in modo continuo ma da un numero grandissimo di palline, chiamati fotoni. In realtà, questa onda trasporta anche quantità di moto, ma il modo formale e generale di vederlo è di considerare il tensore degli stress di Maxwell, S_{ij}, cosa eccessiva. Nel nostro caso, che è semplicissimo, siamo fortunati in quanto non ne abbiamo bisogno e ci basta la relazione di dispersione massa-energia-impulso, che dovete sempre ricordare, in quanto vi risolve ogni problema. Voi sapete che

$$E = pc$$

Ma in questo caso le palline vanno tutte in una direzione. Se andiamo a fare una derivata rispetto al tempo e dividiamo per una generica area A

$$|\vec{S}| = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}c \Rightarrow \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{S}|}{c}$$

Ma la derivata rispetto al tempo della quantità di moto è la forza, se viene divisa per l'area si ottiene una pressione, che viene chiamata pressione di radiazione

$$p_{\text{ress}} = \frac{1}{c}|\vec{S}| \tag{18}$$

Fate attenzione all'utilizzo improprio di questa formula.[22]

La teoria quantistica ci dice inoltre che ognuna di queste palline trasporta un'energia e una quantità di moto **che incredibilmente non dipendono dall'intensità del campo $\vec{E}_0$** ma dipendono solo dalla frequenza dell'onda. In particolare, si ha $E = h\nu = \hbar\omega$, dove h è la costante di Planck[23]. Dato che per un'onda nel vuoto si ha $\lambda\nu = c$, possiamo legare il numero d'onda angolare $k = 2\pi/\lambda$ alla quantità di moto

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi h\nu}{ch} = \frac{2\pi}{ch}E = \frac{2\pi}{h}p = \frac{1}{\hbar}p \Rightarrow p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

Le cose fatte sono state dimostrate solo per un'onda piana, ma in realtà valgono in generale. Possiamo definire una quaterna di numeri k^μ nel seguente modo

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Per ora abbiamo solo definito una quaterna di numeri, ma dato che per un fotone si ha

$$p^\mu = \hbar k^\mu = \frac{\hbar}{c}\begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k}c \end{pmatrix}$$

I due vettori p^μ e k^μ sono direttamente proporzionali e la costante di proporzionalità è una costante fisica universale, che non dipende quindi dal sistema di riferimento, per cui anche k^μ è un quadrivettore.

[22] Per esempio se la luce incide su uno specchio, la pressione esercitata sullo specchio è 2 volte il valore trovato prima. Quello che io ho scritto è la quantità di moto trasportata per unità di tempo per unità di area per un'onda piana. Non usatela a sproposito.

[23] Mostrare davvero questa formula è una cosa che si fa al quarto anno di università. Non fatevi troppe domande e imparatela, dato che è semplice da ricordare e vi permette di farci i problemi.

11.1.1 Effetto Doppler

Dato che abbiamo a che fare con delle onde, ci aspettiamo di vedere dell'effetto Doppler. Il metodo più facile per ottenere le corrette relazioni che descrivono quantitativamente l'effetto Doppler relativistico è semplicemente quello di considerare la luce composta da palline, per l'appunto i fotoni, e sfruttare il fatto che il quadrimpulso è per l'appunto un quadrivettore. Ci sono due casi notevoli che vale la pena guardare. Il caso in cui ci stiamo muovendo parallelamente al fotone e il caso in cui ci stiamo muovendo perpendicolarmente allo stesso.

Formalizziamo la questione dicendo che in un certo sistema di riferimento S esiste una sorgente di luce monocromatica di frequenza ω che fa propagare la luce nel verso positivo dell'asse x. Il quadrivettore p^μ corrispondente sarà

$$p^\mu = \frac{\hbar\omega}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto possiamo fare un boost di β lungo x e vedere come cambia la frequenza della luce che stiamo vedendo.

$$p'^\mu = \frac{\hbar\omega}{c}\begin{pmatrix} \gamma(1-\beta) \\ \gamma(1-\beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p^\mu = \frac{\hbar\omega}{c}\gamma(1-\beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p^\mu = \frac{\hbar\omega}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per cui la nuova frequenza è semplicemente

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Oltre a questo semplice effetto quantitativo[24], la parte caratteristica dell'effetto Doppler relativistico è che esiste anche l'effetto Doppler trasverso. Per un'onda che si propaga in un mezzo *fermo*, se uno si muove perpendicolarmente alla direzione di propagazione non vede alcun effetto, mentre in relatività sì. Infatti, possiamo considerare ora un boost lungo y.

$$p'^\mu = \frac{\hbar\omega}{c}\begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \\ -\beta\gamma \\ 0 \end{pmatrix} = p'^\mu = \frac{\hbar\omega\gamma}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/\gamma \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

[24] Per $\beta \ll 1$ si riottiene la forma classica dell'effetto.

Per cui con la luce, anche in questo caso si ha un cambio di frequenza e stavolta la frequenza nuova è

$$\omega' = \gamma\omega$$

12 Cenni di relatività in elettrodinamica

12.1 La forza elettromagnetica

Esiste il modo formale di dire tutto quello che vi sto per dire, ma è assolutamente troppo per questa lezione. Se volete approfondire[25], potete cercare cose sulla formulazione covariante dell'elettromagnetismo su [LL80] e [Jac98]. Per ora, fidatevi della seguente nozione qualitativa: abbiamo cercato una nuova formulazione del cambio di sistema di riferimento proprio perché andasse d'accordo con le equazioni di Maxwell, che descrivono l'elettromagnetismo. Possiamo aspettarci che la *forza* elettromagnetica non vari davvero in questa formulazione. Tuttavia, se vogliamo scrivere una cosa fra quadrivettori, dovremmo scrivere una cosa tipo

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = qC(u^\nu)^\mu$$

Dove con questa notazione inumana intendo che C è un quadrivettore che dipende dalla quadrivelocità u^ν, dato che in effetti almeno la forza magnetica dipende dalla velocità, mentre q è la carica dell'oggetto che stiamo studiando, proprio perché ci aspettiamo una relazione lineare come nel caso classico[26]. Questa cosa si può fare, è quello che si fa di solito quando si fanno le cose bene. Si ottiene in effetti l'equazione che scrivo e basta

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = q\sum_{\nu=0}^{3} F^{\mu\nu}u_\nu \tag{19}$$

Dove $F^{\mu\nu}$ è una cosa che contiene tutte le informazioni sui campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$. In questa lezione noi non abbiamo intenzione di seguire questa strada e non faremo una formulazione covariante del tutto. Fissiamo quindi un sistema di riferimento inerziale, in cui conosciamo il valore di $\vec{E}(\vec{x},t)$ e $\vec{B}(\vec{x},t)$, eventualemente variabili nello spazio e nel tempo. Quello che io affermo senza

[25] Ve lo sconsiglio vivamente, al momento vi porta via solo tempo alla preparazione della gara, che assolutamente non richiede questi strumenti

[26] Potreste chiedervi se la carica è un invariante relativistico. La domanda è sensata, ma la risposta è affermativa. La carica *totale* non varia, quello che può cambiare è la densità di carica, proprio per la contrazione delle lunghezze.

dimostrare è che la *forza tridimensionale* e **non** la *quadriforza* non cambi rispetto alla formulazione classica, ovvero che valga

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

L'unico punto in cui la trattazione relativistica varia rispetto a quella classica è il seguente punto. In relatività infatti,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \neq m\vec{a}$$

Perché in relatività infatti si ha $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, e non $\vec{p} = m\vec{v}$, per cui scriveremo la vera legge di Newton classica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{20}$$

Notare che il tempo rispetto a cui si fa la derivata è il tempo misurato nel sistema di riferimento scelto e non il tempo proprio misurato dalla particella che si muove. Io non ho assolutamente dimostrato questa equazione, sto affermando che è vera perché facendo il conto covariante viene questo e io vi rassicuro solo sulla sua veridicità.

12.2 Le trasformazioni dei campi

A questo punto ho detto come i campi elettromagnetici agiscono sulle particelle in un dato sistema di riferimento. La domanda che una persona si deve fare è: i campi rimangono uguali in tutti i riferimenti oppure cambiano? E se cambiano, come cambiano?

Vediamo in modo semplicissimo il motivo fondamentale per cui devono per forza cambiare. Dopo averlo fatto vi darò la formula che permette di fare il calcolo esplicito, che a mio parere non utilizzerete mai alle Olimpiadi, ma saperla sicuramente non vi fa male.

Consideriamo il seguente sistema fisico molto banale: un filo rettilineo infinito percorso da una corrente costante ed uniforme di valore I, lungo l'asse z, e una carica puntiforme q posta ad una distanza d dal filo, ferma rispetto ad esso. In questo riferimento, evidentemente il campo elettrico è nullo ovunque e il campo magnetico è lungo il versore $\widehat{\phi}$ e vale

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\widehat{\phi}$$

Dato che la forza elettromagnetica è $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, dato che $\vec{E} = 0$, $\vec{v} = 0$, la forza è evidentemente 0.

Mettiamoci adesso a vedere lo stesso sistema fisico, ma in un riferimento in movimento rispetto al filo. In particolare, ci muoviamo lungo il filo ad una velcità $\vec{v}$, nello stesso verso della corrente I. In questo riferimento la carica q si muove all'indietro di velocità $\vec{v}' = -\vec{v}$. *Se* i campi fossero invariati, $\vec{E}$ sarebbe ancora 0, $\vec{B}$ sarebbe quello di prima e quindi la particella dovrebbe **accelerare**. Questo è contro ogni principio di relatività, in quanto una particella in moto rettilineo uniforme in un sistema di riferimento inerziale deve avere lo stesso stato di moto anche in un altro sistema dello stesso tipo. Evidentemente c'è qualcosa che non stiamo considerando. In particolare, la forza è radiale, per cui ci deve essere un campo elettrico che controbilanci l'effetto del campo magnetico.

Vi darò ora la legge di trasformazione dei campi, senza dimostrarla. Per vedere come si ricava, si può vedere [Jac98] o [LL80].

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}_{\perp} = \gamma(\vec{E} - \vec{\beta} \times \vec{B}c) \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma(\vec{B} + \vec{\beta} \times \vec{E}/c) \end{cases} \tag{21}$$

Dove $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ è la velocità relativa fra i due sistemi di riferimento. Queste formule sono oggettivamente brutte, nel sistema MKSA in particolare, in cui $\vec{E}$ e $\vec{B}$ non hanno nemmeno le stesse unità di misura. Il modo per ricordasele è di mettere un γ perché in relatività ci sta sempre bene e il segno, che è diverso per $\vec{E}$ e $\vec{B}$, si può ricordare considerando proprio il problema che vi ho appena esposto. Infatti, dal principio di relatività sappiamo che la forza totale agente sulla particella nel sistema S' deve essere 0. Andiamo a calcolarla calcolando i campi nel nuovo sistema.

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} = 0 \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0 \\ \vec{E}_{\perp} = \gamma(\vec{E} - \vec{\beta} \times \vec{B}c) = -\gamma\vec{\beta} \times \vec{B}c = -\gamma\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma(\vec{B} + \vec{\beta} \times \vec{E}/c) = \gamma\vec{B} \end{cases}$$

Per cui la forza è

$$\vec{F} = q(-\gamma\vec{v} \times \vec{B} + \vec{v} \times \gamma\vec{B}) = 0$$

Che in effetti torna. Diamo uno sguardo un po' più a fondo a quello che abbiamo fatto. Scriviamo esplicitamente l'espressione dei campi che abbiamo calcolato.

$$\begin{cases} \vec{E} = -\gamma \vec{v} \times \vec{B} = -\gamma \widehat{x} \times \widehat{\phi} \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi r} = \gamma \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi r} \widehat{r} \\ \vec{B} = \gamma \vec{B} = \gamma \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \widehat{\phi} \end{cases}$$

Tutto questo è abbstanza strano. Anche in questo riferimento devono valere le equazioni di Maxwell, ma per avere un campo elettrico radiale è necessario avere una carica netta sul filo, che nell'altro riferimento non c'era. È opportuno studiare la cosa più in dettaglio.

12.2.1 J^μ

Abbiamo cercato di costruire il formalismo dei quadrivettori proprio per andare d'accordo con l'elettromagnetismo. Sarà meglio andare a cercare dei quadrivettori che abbiano a che fare con la carica elettrica. Potrei fare una "dimostrazione" poco formale di come si ottiene questo risultato, ma dato che sarebbe molto fuffa e ci farebbe perdere del tempo, enuncerò solo il risultato. La quaterna J^μ, definita da

$$J^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

È un quadrivettore. È abbastanza intuitivo in effetti che in qualche modo ci debba essere un mixin di ρ e $\vec{J}$ per cambio di riferimento, in quanto se in un riferimento S abbiamo una densità di carica statica ρ, in un riferimento S' che si muove a $\vec{v}$ rispetto a S, si vedrà una corrente che andrà come[27] $-\rho \vec{v}$.

Possiamo sfruttare questo fatto per andare a vedere più in dettaglio il problema che abbiamo appena fatto per vedere la trasformazione dei campi. Abbiamo detto che in S' i campi erano

$$\begin{cases} \vec{E'} = \gamma \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi r} \widehat{r} \\ \vec{B'} = \gamma \vec{B} = \gamma \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \widehat{\phi} \end{cases}$$

Con questi dati, possiamo ricavarci la densità di carica ρ nel filo e la densità di corrente $\vec{J}$, sfruttando le equazioni di Maxwell. Chiamiamo A l'area del filo che trasporta la corrente[28]

[27] Non esattamente, c'è un γ di mezzo

[28] Che sarà la stessa in S e S', in quanto le dimensioni dell'area sono trasversali al moto

$$\begin{cases} \rho' = \gamma \dfrac{\epsilon_0 \mu_0}{A} I v = \gamma \dfrac{1}{Ac^2} I v = \gamma \beta \dfrac{I}{cA} \\ \vec{J}' = \gamma \dfrac{I}{A} \widehat{x} \end{cases}$$

Vediamo immediatamente che questo corrisponde alla legge di trasformazione di un quadrivettore, in quanto nel riferimento S si aveva

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = \dfrac{I}{A} \widehat{x} \end{cases}$$

12.3 A^μ

Vi ho parlato di carica, campi, quantità di moto. Sembra che abbia nominato molte cose ma ne manca una che viene utilizzata molto spesso, il potenziale elettrico ϕ[29]. Sarebbe incredibile se questo potenziale non riuscisse a inserirsi nella discussione che abbiamo fatto. In effetti, è possibile definire un quadrivettore a partire da ϕ e da un altro oggetto, che dovrà essere un vettore, per avere 4 componenti in tutto. Purtroppo, questo oggetto è il potenziale vettore $\vec{A}$, che alle Olimpiadi non serve proprio a niente, e che voi non credo conosciate, per cui ci limitiamo a nominare l'esistenza di questo oggetto, A^μ

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

13 Paradossi

A lezione sono stati nominati un paio di famosi paradossi della relatività ristretta. Durante la lezione sono stati spiegati a voce i seguenti. Li indichiamo, solo per completezza, non riteniamo possano essere davvero utili per la partecipazione ad una Olimpiade. Per ritrovare queste spiegazioni, si veda [Mor08, Capitolo 10].

13.1 Biscotto relativistico

Consideriamo una pasta per biscotti su un nastro trasportatore che si muove a velocità v (comparabile con quella della luce) in una data direzione. Sopra di questo c'è uno stampo di forma circolare (diametro L a riposo).

[29] Ci sono due notazioni per questa quantità. Alcuni preferiscono chiamarlo V.

Quando azionato, questo scende perpendicolarmente sul nastro e taglia nella pasta un biscotto. Quando poi il nastro si ferma, quale sarà nel sistema a riposo la forma del biscotto? Le risposte che si possono dare sono tre:

1. Il biscotto sarà circolare.

2. Il biscotto apparirà di forma ovale, con il semiasse maggiore parallelo alla direzione del moto.

3. Il biscotto apparirà di forma ovale, ma con il semiasse maggiore perpendicolare alla direzione del moto.

Per capire quale sia la risposta corretta, è utile analizzare cosa accade nel sistema di riferimento solidale alla pasta per biscotti, S'. Siano A, B i punti della pasta tagliata che sono collegati dal diametro parallelo alla direzione del moto (in pratica il punto più avanti e più indietro del biscotto rispetto al moto). Il punto fondamentale per capire la soluzione del problema è rendersi conto che in S gli eventi "lo stampo tocca A" e "lo stampo tocca B" sono simultanei, mentre non lo sono in S'!.

Per risolvere il problema si possono utilizzare le traformazioni di Lorentz, tuttavia si può anche usare un approccio più semplice: nel sistema S infatti la lunghezza del biscotto è contratta di un fattore γ (è legittimo utilizzare questa formula perchè moralmente lo stampo dei biscotti sta eseguendo una "misura" visto che colpisce i punti estremali nello stesso tempo in S). Pertanto nel sistema a riposo i biscotti sono allungati rispetto alla direzione del moto (opzione 2)

E' istruttivo soffermarsi a capire perchè la terza opzione è sbagliata. In effetti si potrebbe ragionare nel seguente modo: in S' lo stampo appare contratto nella direzione del moto, quindi i biscotti vengono tagliati con semiasse maggiore ortogonale alla direzione del moto. Tuttavia l'errore è considerare gli eventi di taglio simultanei in S'!

14 Cenni di relatività generale

Nota Quello che vi sto per dire è estremamente semplificato e manca di passaggi tecnici estremamente non banali. A differenza della relatività speciale, la relatività generale per essere capita bene ha bisogno di un po' di prerequisiti che al Liceo uno non possiede. Per questo quello che dirò sarà impreciso e dovrà essere solo una visione qualitativa di quello che succede. Perché ho inserito questo capitolo? Proprio perché non possono alle Olimpiadi farvi fare dei conti veri, ma qualche fenomeno qualitativo come il redshift gravitazionale va conosciuto in quanto ogni tanto qualche domanda simile viene fatta. Inoltre, nel Problema 16.5 si richiede di conoscere la formula per la dilatazione dei tempi gravitazionale, che uno può provare ad indovinare sbagliando di poco, ma è sempre meglio sapere ogni cosa che può capitare.

In sostanza, questo capitolo lo potete leggere una volta e poi dimenticare, ricordando solo l'Equazione 32.

Introduzione La relatività e l'elettromagnetismo vanno perfettamente d'accordo, nel senso che è possibile dare una descrizione dell'elettromagnetismo completamente covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz senza troppa fatica, mettendo insieme due teorie sotto un solo "ambiente di lavoro". Tuttavia, come ben sappiamo da qualsiasi conferenza divulgativa di Fisica delle alte energie[30], a livello fondamentale le forze sono solo 3:

- La forza elettrodebole, che è una generalizzazione della forza elettromagnetica che include una descrizione anche della forza nucleare debole.
- La forza nucleare forte, che è qualcosa di emergente dalla cromodinamica quantistica, di cui assolutamente non ci occuperemo.
- La forza di gravità, che è quella che ci interessa ora.

La teoria gravitazionale di Newton, che ci fornisce una formula per la forza attrattiva tra due oggetti dotati di massa, la cara

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\widehat{r}_{12} \tag{22}$$

ovviamente funziona molto bene nel limite di basse velocità, ma è facile capire come a velocità relativistiche questa formula racchiuda delle incompatibilità non indifferenti con la teoria della relatività ristretta. I motivi possono più o meno essere riassunti nei seguenti

[30]Qualsiasi conferenza su dei risultati del CERN sicuramente includerà quello che sto per dire.

- La formula prevede l'esistenza di un tempo assoluto, in quanto le formule includono la posizione di due oggetti separati spazialmente allo stesso tempo. Dopo la lezione di oggi, la prima cosa da fare sarebbe chiedersi "allo stesso tempo *in che sistema di riferimento?*".

- Questa formula sembra prevedere un'azione a distanza, ovvero non una interazione tipo oggetto $\rightarrow$ campo $\rightarrow$ altro oggetto, come accade in elettromagnetismo dove le cariche interagiscono con il campo elettromagnetico e lo creano, ma semplicemente qui si prevede l'esistenza di una forza istantanea fra due oggetti distanti, cosa che diventa poco plausibile per motivi di causalità.

I due problemi sono strettamente correlati, per cui sembra che il primo passo per procedere verso una descrizione relativisticamente covariante della gravità sia passare alla descrizione in termini di campi invece che di forza a distanza. Questo è un passaggio concettuale, per ora non è un passaggio che modifica minimamente la struttura delle equazioni, in quanto ovviamente, riprendendo l'esempio delle due masse m_1 ed m_2, la prima massa genererà un campo $\vec{g}_1$, il quale eserciterà una forza sulla massa m_2, portando alla situazione assolutamente equivalente

$$\vec{g}_1(\vec{r}) = -G\frac{m_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\widehat{r} \qquad \vec{F}_{12} = m_2\vec{g}_1 \tag{23}$$

14.1 Principio di equivalenza

C'è un fatto sperimentale in particolare, almeno secondo me, che lascia presagire che la forza di gravità sia in un certo senso più speciale delle altre forze. Il punto è che finora abbiamo sempre scritto che la forza gravitazionale è proporzionale alla massa dell'oggetto su cui viene esercitata. Sappiamo però che, classicamente, $m\vec{g} = \vec{F} = m\vec{a}$. Come potete ben vedere e come saprete da molto, la massa si semplifica e di conseguenza l'accelerazione che l'oggetto sente non dipende dalla sua massa.

Uno dei pochi posti in cui possiamo guardare se questo (il fatto che l'accelerazione non dipenda dalla massa) è vero *sempre*, è guardare un caso patologico, per esempio quando la massa di un oggetto è nulla. Cosa succederà ad un oggetto di massa nulla? Non sentirà la forza gravitazionale oppure sentirà la stessa accelerazione di un oggetto di massa m finita? Per rispondere a questa domanda, dobbiamo innanzitutto individuare un oggetto di massa nulla adatto all'esperimento. Il fotone, ovvero semplicemente la luce, sembra l'oggetto migliore per rispondere a questa domanda. L'esperimento ovviamente è stato effettuato, e come immagino sappiate, la luce curva sotto l'effetto del campo gravitazionale, ovvero in qualche modo il fotone, un oggetto a massa nulla, sente comunque un'attrazione gravitazionale. Tutto questo puzza molto ed è opportuno porsi un sacco di domande su quello che abbiamo immaginato di sapere fino ad adesso per capire dov'è l'ipotesi che fa cascare l'asino, in modo da capire cosa modificare per rendere compatibile con la relatività questa teoria classica.

Per chiarirci un po' le idee, innanzitutto dovremmo notare che la proprietà *massa*, viene utilizzata in due tipi di formule indistintamente, quando nessuno ci ha prescritto il fatto che siano la stessa cosa. La prima formula in cui compare è la famosa $\vec{F} = m\vec{a}$. Questa possiamo prenderla come una definizione di una quantità che si chiama *massa inerziale*, m_I, che è a tutti gli effetti un parametro scalare che ci dice quanto un oggetto si oppone alle variazioni della sua velocità. L'altra formula in cui compare è la massa gravitazionale, ovvero l'Equazione 23 in cui *a priori* compare un'altra massa, la massa gravitazionale m_G, che ci dice quanto il nostro oggetto interagisce con il campo gravitazionale.

$$\vec{F}_G = m_G\vec{g}$$

Il fatto sperimentale **assolutamente non banale** che queste due quantità siano direttamente proporzionali per ogni corpo, non discende da alcun principio primo ed è molto importante per l'universalità della forza di gravità. A priori, la massa gravitazionale può essere vista come una carica elettrica, per fare un paragone con qualcosa che conosciamo meglio. Il protone e il neutrone hanno (quasi) la stessa massa ma uno ha carica $+e$ mentre l'altro è neutro, per cui evidentemente il rapporto q/m non è lo stesso per tutto quello che ci circonda. Il fatto che siano direttamente proporzionali, ovvero che il rapporto m_G/m_I sia lo stesso per ogni oggetto ci permette di scegliere un sistema di unità di misura in cui il rapporto è 1, per cui di solito ci dimentichiamo di questa distinzione e facciamo tutto come se fossero proprio la stessa cosa, ma a priori questo non era assolutamente detto.

La conseguenza fondamentale di questo fatto a cui noi siamo abituati è che *tutti* gli oggetti immersi nello stesso campo gravitazionale, se non ci sono ulteriori forze esterne, seguono la stessa equazione del moto, ovvero per ogni corpo l'accelerazione vale $\vec{a} = \vec{g}$. Questo ci suggerisce che la gravità sia davvero speciale e in qualche modo si comporta come un sistema di riferimento non inerziale. Infatti, se considero un sistema S inerziale ed uno S' che ruota rispetto al primo con velocità angolare $\vec{\Omega}$, compariranno le forze apparenti centrifuga e di Coriolis, che sono direttamente proporzionali alla massa dell'oggetto che ci metto, quindi quando vado a calcolare l'accelerazione complessiva, questa si semplifica.

Alla luce di queste affermazioni, grazie al fatto che il rapporto m_I/m_G è costante e universale[31], enunciamo i seguenti due postulati.

Postulato 14.1 (Principio di equivalenza debole)**.** *È possibile annullare, almeno localmente, l'effetto di ogni campo gravitazionale cambiando sistema di riferimento.*

Questo postulato è abbastanza ragionevole per campi gravitazionali uniformi, in quanto se il campo gravitazionale è $\vec{g}$ in un sistema di riferimento S, allora basta mettersi nel sistema di riferimento S' che accelera di $\vec{g}$ rispetto ad S. Per campi gravitazionali disuniformi, per esempio un campo a simmetria sferica, questo è meno banale, ed è per questo che compare il *localmente* nel postulato. È evidente che ogni funzione continua è localmente costante, per cui esisterà sempre un volume abbastanza piccolo da rendere quasi uniforme il campo gravitazionale al suo interno, e a partire da questo possiamo ricadere nel caso precedente per la scelta del sistema di riferimento. Questo particolare sistema di riferimento, scelto per annullare localmente la gravità (dipende ovviamente dal punto) si chiama *riferimento di caduta libera.*

Postulato 14.2 (Principio di equivalenza forte o di Einstein)**.** *Le leggi della Fisica nel riferimento di caduta libera sono le stesse che in un sistema di riferimento inerziale.*

Questo è quello che permetterà di fare effettivamente la Fisica.

14.2 Metrica

L'idea di Einstein che ha portato allo sviluppo della relatività generale è che l'effetto di questa *non inerzialità* data dalla gravità sia esprimibile in termini puramente geometrici. Questo, per qualcuno che non ha fatto geometria differenziale[32], è un'affermazione piuttosto vaga e di poco significato, per cui cercherò di spiegarvi il succo del discorso senza perdere troppo tempo nei dettagli tecnici, che sono molti e anche molto importanti. Non sperate di imparare tutto dalle quattro baggianate che scriverò qui sotto, la relatività generale è difficile e spesso poco intuitiva.

Abbiamo visto che le trasfomazioni di Lorentz sono la trasformazione **lineare** che lascia invariato il prodotto invariante di un quadrivettore, ovvero

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{24}$$

[31] Ripeto, questo è un fatto sperimentale. Per formulare la teoria, lo assumeremo come principio.

[32] Non azzardatevi a studiarla prima del secondo/terzo anno di università, per le Olimpiadi della Fisica è completamente inutile sotto ogni punto di vista.

Ora la parte importante da notare è che questo prodotto invariante è anche uguale a $c^2\,\mathrm{d}\tau^2$, ovvero il tempo proprio, che sembra essere una proprietà che dipende solo dall'oggetto di cui viene calcolato. Il punto è che la gravità, essendo equivalente ad un sistema non inerziale, andrà a modificare il tempo proprio, per cui l'espressione precedente diventa incompleta. In particolare, i campi gravitazionali normalmente non sono costanti, per cui il tempo proprio dovrà dipendere anche dal punto in cui si trova l'oggetto e dovrà in qualche modo ricondursi al caso in Equazione 24 in caso di campo gravitazionale nullo. La generalizzazione diventa la seguente

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{25}$$

In cui stavolta $g_{\mu\nu}$ è un insieme di funzioni da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}$. In particolare, potrebbe essere una funzione diversa per ogni coppia di indici[33]. Questa definizione sembra bruttina e non troppo intuitiva, ma immagino sarete d'accordo che si riconduce al caso precedente se l'insieme di funzioni $g_{\mu\nu}$ non dipende dal punto e vale

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{se } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esattamente come in Equazione 6, come avevamo visto nel caso della relatività ristretta, in cui c'era solo $\eta_{\mu\nu}$. È possibile mostrare che $g_{\mu\nu}$ è la corretta generalizzazione che volevamo ottenere e nel caso di gravità zero, normalmente si indica con $\eta_{\mu\nu}$, esattamente come in relatività ristretta. Questo oggetto si chiama *metrica* ed è qualcosa di puramente geometrico, che suggerisce delle proprietà dello spazio. Moralmente, se guardiamo il caso tridimensionale, ci dice che punto per punto il prodotto scalare fra due vettori non è $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_i v_i w_i$ ma ci dice che ogni termine viene moltiplicato per un coefficiente, che potrebbe anche essere semplicemente 1, tornando al caso precedente. Ci dice anche di più, infatti nel caso tridimensionale, il nuovo *prodotto scalare* è $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i,j} g_{ij} v_i w_j$, quindi la somma non è nemmeno diagonale, ovvero si possono mischiare le componenti dei vettori.

Tutto questo sembra un po' strano ma in effetti se ci pensiamo bene non lo è così tanto. Infatti, la formula del prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_i v_i w_i$ vale solo per coordinate cartesiane. A nessuno verrebbe in mente di fare la stessa cosa in coordinate sferiche. Bisogna fare molta attenzione a come interpretare

[33] In realtà è fondamentale per motivi ora non troppo chiari che $g_{\mu\nu}$ sia simmetrica, ovvero che $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

la formula precedente, tuttavia, in quanto l'ho semplificata davvero troppo. Quella formula vale per i vettori sul fibrato tangente, cosa che andrebbe formalizzata bene in un corso di geometria differenziale, assolutamente inutile nel contesto delle Olimpiadi. Il succo del discorso è che quella formula "vale per i $\mathrm{d}\vec{x}$ e non per i $\vec{x}$". Più avanti nei vostri studi questo sarà chiaro, per ora non è davvero importante.

14.3 Equazione geodetica

Nota. Consideriamo il seguente problema, che ha un metodo di soluzione molto generale, che non è utile per le Olimpiadi ma potrebbe servirvi più avanti. Questa mini sezione avrà una prima parte di introduzione ad un problema apparentemente scorrelato con quello che stiamo facendo. La seconda parte sarà il modo per ricavare la soluzione nel caso semplice in modo esplicito fornirà la risposta generale al problema senza dimostrazione. Subito dopo fornirò un'interpretazione del come quello che sto facendo si applichi al nostro ragionamento sulla gravità. Tutta la parte tecnica che sta in mezzo è un modo elementare di vedere un metodo avanzato e ha milioni di insidie dietro ogni angolo, per cui non è davvero importante che lo capiate a fondo, serve solo a mostrarvi le idee che stanno dietro ad un problema che molti fisici non hanno capito come si affronta e si limitano a copiare quello che hanno visto nei corsi in università, senza sapere quello che stanno facendo.

Un problema di minimizzazione. Supponiamo di avere una particella, di massa m, vincolata a muoversi sul piano $z = 0$, che sappiamo partirà dal punto A e arriverà al punto B, ma può scegliere di andarci con un percorso qualsiasi. Ora ci domandiamo qual è il percorso che minimizza la distanza percorsa. La risposta in questo caso è elementare e si tratta della linea retta che congiunge i punti A e B e tutti siamo d'accordo sul fatto che la soluzione è proprio questa e ci sono milioni di modi per vederlo senza dover ricorrere a nessuna equazione.

Tuttavia, il problema si complica se ci sono dei vincoli: supponiamo che la nostra particella di massa m sia vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera e che su questa sfera ci siano due punti A e B. Ci domandiamo di nuovo quale sia il percorso più breve che congiunge questi due punti. La risposta è l'equatore che passa per questi due punti e il centro della sfera, ma dire che la soluzione è questa è molto meno semplice e anche molto meno facile da dimostrare. Per capire come si affronta questo tipo di problema, iniziamo dal caso classico, ovvero da quello sul piano.

Cosa sappiamo noi? Sappiamo il punto di partenza e il punto di arrivo della nostra pallina, quello che c'è in mezzo non lo conosciamo. Possiamo tuttavia scrivere una formula integrale che ci fornisce la lunghezza del percorso. Intuitivamente scriveremo

$$L = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int_0^\tau \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo semplicemente moltiplicato e diviso per $\mathrm{d}t$ ottenendo una cosa che in effetti sapevamo, ovvero

$$L = \int_0^\tau \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau v\,\mathrm{d}t$$

Tutto questo è molto ovvio e vi starete chiedendo perché vi annoio con delle definizioni banali. La domanda è legittima, il punto è che bisogna guardare le cose banali per capire dove sono le assunzioni e poterle modificare per generalizzare il ragionamento. Consideriamo ora la funzione "lunghezza": questa è una funzione che dato un percorso resituisce un numero. Il percorso è a tutti gli effetti una funzione $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, ovvero una funzione che dato l'istante di tempo mi resituisce il punto nello spazio bi o tridimensionale in cui si trova la pallina all'istante t. Di conseguenza, la funzione "lunghezza" prende una funzione e restituisce un numero, che in questo caso viene calcolato facendo un integrale. Un oggetto che prende una funzione e restituisce un numero viene chiamato funzionale e di solito si indica con $L[x(t)]$. Noi siamo interessati a trovare un minimo di questo funzionale, cosa che è molto più complicata che trovare il minimo di una funzione, perché dobbiamo trovare non un un numero reale ma un'intera funzione!

Come ci salviamo? In generale trovare il minimo o il massimo di un funzionale è tutt'altro che facile. La parte ancora più complicata è in realtà mostrare che la possibile soluzione che esibiamo è davvero un minimo[34], ma noi non ci occuperemo di questo perché nei casi che ci servono il problema è ben definito e la soluzione esiste ed è unica. Inoltre, vi sorprenderò dicendo che i metodi della nonna funzionano sempre. Supponiamo di avere una funzione semplice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita per esempio su tutta la retta reale e supponiamo che la funzione sia continua e derivabile, con derivata continua. Vi dico inoltre che esiste un solo massimo locale. Cosa fate voi concretamente per trovare il punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\bar{x})$ sia massimo? Ovviamente imponete che la derivata sia uguale a zero nel punto.

Questo metodo si può riciclare tale e quale per calcolare il minimo di questo funzionale. Supponiamo infatti di avere trovato il minimo del funzionale L,

[34]La branca della matematica che si occupa di questo è il calcolo delle variazioni.

ovvero abbiamo trovato una funzione $\vec{x}(t)$ tale che il valore di L sia minimo sul dominio, ovvero tutti i percorsi che partono da A e arrivano in B. Allora io dico che, comunque preso un percorso $\vec{x}_1(t)$[35], comunque preso un numero reale w, la quantità $\vec{z}(t,w) = \vec{x}(t) + w\vec{x}_1(t)$ è un onesto percorso e di conseguenza si potrà calcolare il funzionale L anche su $\vec{z}(t,w)$. Ora, $L[z(t,w)]$ è effettivamente un numero reale che dipende solo da w[36], per cui la funzione $h(w) = L[z(t,w)]$ è una onesta funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se questa funzione è derivabile, cosa che nel nostro caso è vera, e se $\vec{x}(t)$ **è effettivamente un punto stazionario**, allora dovrà valere per ogni $\vec{x}_1(t)$ che la derivata calcolata in $w = 0$ della funzione h si annulli. Tutto quello che ho detto è un po' di carne al fuoco in un colpo solo, per cui cercherò di chiarificarmi con un esempio. Facciamo effettivamente questo calcolo per il funzionale lunghezza appena definito

$$L[\vec{z}(t,w)] = \int_0^\tau \sqrt{\frac{\partial \vec{z}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{z}}{\partial t}}\, \mathrm{d}t = \int_0^\tau \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} + w\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} + w\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}\right)}\, \mathrm{d}t$$

A questo punto, calcoliamo la derivata in zero di L[37].

$$\left.\frac{\mathrm{d}L[\vec{z}(t,w)]}{\mathrm{d}w}\right|_{w=0} = \int_0^\tau \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}}}\, \mathrm{d}t$$

Ho saltato una marea di passaggi per arrivare a questo risultato, divertitevi a ricostruirli, il risultato è corretto. Ora si fa un altro trucco che capita spesso in questi problemi, ovvero integrare per parti. Riconosciamo che $\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}$ è la derivata di $\vec{x}_1$. Inoltre, indichiamo per brevità $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}L[z(t,w)]}{\mathrm{d}w}\right|_{w=0} = \cancelto{0}{(\hat{v} \cdot \vec{x}_1)\big|_A^B} - \int_0^\tau \vec{x}_1(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\vec{v}}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}}\, \mathrm{d}t$$

E questo deve accadere per ogni $\vec{x}_1(t)$! Sotto ipotesi abbastanza larghe, questo implica che sia l'integrando stesso a dover essere 0, per cui otteniamo l'equazione

[35] Attenzione, qui c'è un punto cruciale che serve poi: il percorso $\vec{x}_1$ deve iniziare e finire nell'origine delle coordinate. Il motivo è che noi stiamo cercando un percorso $\vec{x}$ che inizia in A e finisce in B, per cui se considero il percorso $\vec{z}(t,w)$ come definito dopo, l'unico modo che ho per fare in modo che $\vec{z}(0,w) = \vec{A}$ e simile per B è imporre che $\vec{x}_1(0) = \vec{x}_1(\tau) = 0$. Sembra un'assunzione banale ma la useremo in modo cruciale per semplificare un pezzo di un'equazione.

[36] Fissati $\vec{x}(t)$ e $\vec{x}_1(t)$ ovviamente.

[37] Calcolare la derivata in zero vuol dire prima calcolare la derivata e poi porre l'argomento uguale a zero. Questo è un dubbio che potrebbe venire in mente a qualcuno che si avvicina per la prima volta all'analisi.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{v}(t)}{\sqrt{\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)}} = 0 \Rightarrow \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \text{un vettore costante.}$$

Questa è esattamente la soluzione del problema che abbiamo posto all'inizio, in quanto il fatto che il versore velocità sia costante implica che la traiettoria sia una linea retta! Il punto è che il metodo che abbiamo utilizzato è abbastanza generale da poter essere facilmente utilizzato anche per casi più strani. Per esempio, se consideriamo lo stesso identico problema ma nello spazio della relatività generale, l'unica differenza quantitativa fra il conto che abbiamo fatto noi e quello che ci ritroveremmo è che ora il prodotto scalare della velocità con sé stessa non è quello solito ma dipende addirittura dal punto. Il funzionale che andrà minimizzato è ora

$$L[x(\lambda)] = \int \sqrt{\sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda$$

Il cambio che abbiamo fatto è solo tecnico, concettualmente non cambia niente se andiamo a considerare le sostiuzioni minimali $t \to \lambda$, $\vec{v}\cdot\vec{w} \to \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}$, dove in realtà λ è solo un nome per la parametrizzazione della curva. Di solito, in meccanica classica si usa il tempo, ma dato che in relatività il tempo assoluto si perde, si preferisce dare un altro nome al parametro della curva in modo da evitare fraintendimenti.

Allo stesso identico modo di prima, possiamo trovare un'equazione differenziale per $\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ che stavolta diventa[38]

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \sum_{\nu,\rho=0}^{3}\Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{26}$$

Dove i coefficienti Γ vengono chiamati simboli di Christoffel e valgono

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{3} g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\alpha}\right) \tag{27}$$

Questo vale in generale e a voi la formula precedente non serve a niente. Il motivo per cui l'ho mostrato lo discuteremo fra poche righe, per ora voglio soffermarmi sul fatto che questa equazione si riconduce al caso precedente nei casi in cui deve farlo. Infatti, quando siamo nello spazio euclideo, la metrica

[38] Questa equazione vale sotto l'ipotesi che valga $\displaystyle\sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = 1$, cosa che scoprirete non è molto restrittiva.

g non dipende dal punto e tutte le derivate nei simboli di Christoffel fanno quindi 0. Per lo spazio piatto, di conseguenza l'equazione geodetica assume la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = 0$$

che significa ovviamente velocità costante in modulo e direzione, come nel caso precedente[39].

Perché ho perso tempo a mostrarvi questo calcolo? È semplicemente per convincervi in modo quantitativo che una semplice modifica della geometria dello spazio possa creare una forza apparente: infatti, se riscriviamo l'Equazione 26 semplicemente portando un pezzo a destra dell'uguale e moltiplicando per la massa della particella, m

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = -m\sum_{\nu,\rho} \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda}$$

A sinistra c'è moralmente $m\vec{a}$ quadridimensionale, mentre a destra ci sono degli oggetti che dipendono dalla metrica e dalla velocità. Quando i Γ sono zero, otteniamo l'ovvio e beneamato moto rettilineo uniforme, mentre quando questi non sono zero, è come se avessimo una forza apparente che dipende dal punto! Cosa cambia davvero di concettuale fra quello che c'è a destra e il solito termine centrifugo apparente $\vec{F}_c = m\omega^2\vec{r}$?

14.4 Equazione di Einstein

Ora che abbiamo visto in che modo una proprietà che sembra così banale come il cambio di prodotto scalare locale possa modificare le equazioni del moto, sarà il caso di legare in qualche modo la metrica $g_{\mu\nu}$, che sembra essere il fulcro del cambiamento, con la sua sorgente. In sostanza, invece che calcolare $\vec{g}$ a partire da ρ_M, andremo in qualche modo a calcolare $g_{\mu\nu}$ a partire da qualche altro oggetto che contiene informazioni sulla densità di massa dello spazio. A partire dalla metrica si possono costruire degli oggetti, che nomino soltanto in quanto non vi serviranno ad un accidenti, che sono ingredienti cruciali nell'equazione di Einstein.

- $R^\rho_{\mu\lambda\nu}$ il tensore di Riemann.

[39] Il fatto che il modulo della velocità venga costante in effetti non compariva nel caso classico. Il motivo è che per trovare l'Equazione 26, ho imposto a priori che la velocità sia costante in modulo semplicemente perché altrimenti l'equazione viene molto più brutta. Non imponendo quel vincolo, tornerebbe fuori esattamente il caso precedente, al prezzo di avere un'equazione inguardabile.

- $R_{\mu\nu}$ il tensore di Ricci, che è in effetti un "caso particolare" del tensore di Riemann.

- R, la curvatura scalare, che è in effetti un "caso particolare" del tensore di Ricci.

Con il tensore di Ricci e la curvatura scalare, Einstein ha costruito la sua equazione, che ora commenteremo senza spenderci troppo tempo in quanto è veramente difficile farlo senza moltissimi prerequisiti.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{28}$$

Dirò ora sommariamente cosa c'è in ciascun pezzo. Iniziamo facendo un po' di analisi dimensionale per capire cosa sta succedendo.

- In Equazione 25 si desume subito che la metrica è un oggetto adimensionale[40].

- Λ è la costante cosmologica. Potete googlarla e scoprire che le sue dimensioni sono $[L]^{-2}$, ovvero l'inverso di un'area. Nella maggior parte dei casi si pone $\Lambda = 0$, tranne se le distanze in gioco sono paragonabili alla dimensione dell'universo osservabile. Non voglio discutere i dettagli del tutto, ma ha a che fare con l'espansione accelerata dell'universo.

- Di conseguenza, usando i due fatti precedenti si può desumere che sia $R_{\mu\nu}$, sia R abbiano le stesse dimensioni della costante cosmologica, ovvero $[L]^{-2}$. Ho affermato precedentemente che questi due oggetti sono costruiti solo a partire dalla metrica, per cui l'unico modo per ottenere oggetti con queste dimensioni è fare delle derivate spaziotemporali della metrica. In particolare, potranno comparire prodotti della metrica con le sue derivate prime e seconde[41], ovvero $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(g, \partial g, \partial^2 g)$.

- Conosciamo le unità di misura di c e G, da questo possiamo ricavare che $T_{\mu\nu}$ ha le dimensioni di un'energia per unità di volume. Questo è effettivamente il tensore energia-impulso e corrisponde alla sorgente del campo, ovvero quanta massa e quanta carica c'è nella zona di spazio considerata.

[40] Se prendiamo tutte le coordinate con dimensione di una lunghezza. Se consideriamo le coordinate sferiche, per esempio, questa assunzione è falsa, ma per il ragionamento che dobbiamo fare non è rilevante, per cui la assumeremo come vera.

[41] Ovviamente i termini con le derivate prime dovranno essere al quadrato per mantenere la coerenza delle dimensioni.

Non mi fermerò nel dettaglio su nessuno dei pezzi di questa equazione in quanto nella maggior parte dei casi non si sa risolvere e anche nei casi più semplici servono dei trucchi e si impiega un paio d'ore per semplicemente scrivere in modo sensato tutte le equazioni. Quello che si può capire in breve è che questo è moralmente un sistema di 16 (4×4) equazioni differenziali[42] che legano la geometria dello spazio (g e le sue derivate) alla sorgente del campo stesso, ovvero l'energia più che la massa, in particolare la densità e il trasporto di quadrimpulso. Nel caso non relativistico dobbiamo aspettarci di tornare alle equazioni di Newton, ma stavolta mostrare che questo è vero non è banale in quanto serve dare la definizione del tensore di Ricci, che è assolutamente non banale. In sostanza, quello che succede è che la sorgente del campo, $T_{\mu\nu}$ fa deviare la metrica dalla metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$ e di conseguenza subisce una forza, variando a sua volta. L'equazione di Einstein, nel caso in cui si usa di solito, permette di calcolare la metrica $g_{\mu\nu}$ data la distribuzione di massa ed energia $T_{\mu\nu}$.

Quello che posso suggerirvi è semplicemente che nel caso non relativistico conterà solo il termine T_{00} del tensore energia impulso, che è proporzionale a $\rho_M c^2$, come ci si deve aspettare.

14.5 La metrica di Schwarzschild

Esiste una particolarissima soluzione delle equazioni di Einstein[43] che vale la pena ricordare, solo per studiare in modo più quantitativo un paio di fenomeni. La situazione che dobbiamo immaginare è la seguente: abbiamo un corpo a simmetria sferica di massa M, che crea il suo campo gravitazionale. Questo oggetto non ruota ed è fisso in un certo sistema di riferimento, che useremo per descrivere quello che succede. La metrica creata da questo oggetto, fuori dal suo raggio $\bar{r}$ è la seguente *metrica di Schwarzschild.*

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1-\frac{r_\mathrm{s}}{r}}\,\mathrm{d}r^2 - r^2\,\mathrm{d}\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 \tag{29}$$

Dove tutto è espresso in coordinate sferiche. La quantità r_s è il famoso raggio di Schwarzschild e vale

$$r_\mathrm{s} = \frac{2GM}{c^2} \tag{30}$$

[42]Delle simmetrie particolari portano queste 16 equazioni a 6, quindi in realtà sono molte di meno.

[43]In questa soluzione si assume che la costante cosmologica sia $\Lambda = 0$. È un'assunzione ragionevole se $r_\mathrm{S} \ll \Lambda^{-1/2}$, cosa vera anche per buchi neri supermassicci.

Per completezza, scriviamo anche la metrica $g_{\mu\nu}$. Definiamo per comodità $h = 1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{31}$$

Notiamo che a partire da G e c, con una massa possiamo costruire solo una lunghezza, per cui la dipendenza di questo raggio dai parametri precedenti era prevedibile. L'unica cosa che non si poteva indovinare per analisi dimensionale è il fattore 2. Per puro caso, calcolando la velocità di fuga da un pianeta di massa M e raggio r_s viene esattamente questo risultato, ma è davvero un caso. Il conto della velocità di fuga è puramente classico e non tiene conto di un milione di effetti nuovi che sono comparsi nel frattempo, ma è effettivamente un buon modo per ricordare il risultato.

Si può mostrare che questa metrica genera un potenziale efficace che nel caso non relativistico si riconduce al caro vecchio $-GM/r$, ma per calcolare questo caso limite serve scrivere l'equazione geodetica, calcolando i simboli di Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, cosa che non farò in quanto è un tecnicismo inutile.

14.5.1 Dilatazione dei tempi gravitazionale e redshift

Consideriamo un osservatore fermo ad una certa distanza r dal centro della massa M che genera la metrica di Schwarzschild e consideriamo il tempo proprio $\mathrm{d}\tau = 1/c\,\mathrm{d}s$ che misura questo oggetto. Sarà $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}}\,\mathrm{d}t$, dato che essendo fermo avremo $\mathrm{d}r = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\phi = 0$. Due osservatori che si trovano fermi in questo campo gravitazionale, ma a distanze diverse, r_1 e r_2 dal centro attrattore, misureranno quindi dei tempi diversi!

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau_i &= \sqrt{1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r_i}}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \\ \frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}\tau_2} &= \frac{\sqrt{1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r_1}}}{\sqrt{1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r_2}}} \approx \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{2r_1}\right)\left(1 + \frac{r_\mathrm{s}}{2r_2}\right) \approx 1 + \frac{r_\mathrm{s}}{2}\left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \\ &= 1 + \frac{GM}{c^2}\left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = 1 - \frac{\Delta U_{12}}{c^2} \end{aligned} \tag{32}$$

In particolare, prendiamo per esempio il limite $r_2 \to +\infty$, che corrisponde al caso in cui l'osservatore si trova lontanissimo dalla massa grande e si trova quindi a tutti gli effetti in uno spazio piatto. Il tempo misurato dall'osservatore che si trova a r_1 è minore del tempo che è passato per l'osservatore 2. Nel Problema 16.5 verrà concretamente calcolato quanto la dilatazione dei tempi gravitazionale influisca sui satelliti GPS che ci volano sopra la testa. Incredibilmente, nonostante il raggio di Schwarzschild della Terra sia $r_s^T = 9 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$, che paragonato con il raggio della stessa, $r_T = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{m}$ sembra assolutamente irrilevante, fornisce un effetto non trascurabile.

14.5.2 Simmetria del potenziale gravitazionale e precessione dell'orbita di Mercurio

Siamo da sempre stati abituati a sentire che le orbite dei pianeti intorno al Sole sono delle ellissi e che è stato Keplero per primo a teorizzarlo, per poi avere la spiegazione matematica del perché succede grazie a Newton. Per capire cosa succederà alla forma delle orbite in relatività generale, è bene ripensare a quello che si fa quando si trova la forma delle orbite classiche. La prima osservazione che si fa di solito è che la forza gravitazionale è centrale, per cui si conserva il momento angolare totale $\vec{L}$. Da questo discendeva subito il fatto che le orbite stiano in un piano, proprio perché $\vec{L}$ si conserva come vettore.

Come si vede nell'Equazione 29, la simmetria sferica è conservata, per cui c'è da aspettarsi che anche le orbite in relatività generale rimangano sul piano[44]. Tuttavia la forza gravitazionale, come la forza elettromagnetica, gode di una simmetria nascosta particolare che, nel caso classico, fa chiudere le orbite[45]. Il fatto che la soluzione del problema di Keplero siano delle perfette ellissi, che si chiudono su se stesse è molto caratteristico e dipende in modo cruciale dal fatto che il potenziale gravitazionale sia proporzionale a $1/r$, esattamente la potenza -1. Per un potenziale generico non è affatto detto che il tempo per passare dalla distanza massima $r_{\max}$ alla distanza $r_{\min}$ sia un multiplo intero del tempo per andare nel piano da $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$.

Dato che la gravità newtoniana ha funzionato benissimo per 300 anni, c'è da chiedersi dove guardare per osservare le correzioni all'affermazione "le orbite sono chiuse e in particolare sono degli ellissi". Ricordiamoci inoltre che fino a pochi anni fa era estremamente difficile utilizzare un telescopio per guardare un pianeta fuori dal sistema solare[46] per cui negli anni '20, quando è stata confermata sperimentalmente per la prima volta la relatività generale, i posti in cui guardare non erano poi molti.

[44] In questo caso la dimostrazione è un po' meno banale ma le idee sono circa le stesse.

[45] È assolutamente fuori luogo che cerchiate ora di che cosa si tratta, ma se un giorno vorrete approfondire potete cercare articoli sulla simmetria $SO(4)$ del problema di Keplero.

[46] E nel 2019 è tutt'ora molto difficile.

In sostanza, nella metrica di Schwarzschild in Equazione 29 compare un solo parametro dimensionale, ovvero il raggio di Schwarzschild r_S. C'è da aspettarsi che gli effetti si facciano vedere quando le distanze in gioco sono di questo ordine di grandezza. È possibile calcolare quanto fa per esempio per il Sole, $r_S^{\odot} = 3 \times 10^3$ m, che se confrontato con il raggio del Sole $r_{\odot} = 7 \times 10^8$ m e con la distanza Terra-Sole 1 UA $= 1.5 \times 10^{11}$ m ci fa subito capire il perché questi effetti siano piccoli e di conseguenza difficili da vedere. La speranza è quindi di guardare cosa succede all'orbita del pianeta più vicino, ovvero Mercurio. Una discussione di tutto questo viene fatta in Ref [TBS19].

Concretamente, nella descrizione quantitativa del calcolo delle orbite che cosa cambia? Beh, non avremo più $\vec{F} = m\vec{a}$, ma semplicemente andremo a scrivere l'equazione di una geodetica, come in Equazione 26, dove i Γ sono calcolabili a partire dalla metrica in Equazione 29, secondo la formula in Equazione 27. Non la riporto qui in quanto poco utile, per due motivi:

- il calcolo dei Γ è laborioso e ci sono delle cose che non vi ho detto sul come calcolarli, per esempio in Equazione 29 compare la metrica con gli indici in alto. Purtroppo non è una mia dimenticanza, è proprio qualcosa di diverso ma che non ha senso introdurre in quanto è inutile per la seguente discussione.[47]

- Molto più importante, spesso per la discussione delle orbite non si guarda $\vec{F} = m\vec{a}$, bensì la conservazione dell'energia, scrivendo $E = K_{\text{radiale}}(v_r) + U_{\text{efficace}}(r)$. Tuttavia, questa equazione in relatività subisce delle modifiche dovute alla dilatazione dei tempi gravitazionale ed è meno intuitiva. Un problema completo in cui si discute il moto in queste orbite si può trovare nella lezione di meccanica celeste, Ref [TBS19]. Nello stesso problema c'è una discussione del moto di un fotone in orbita, caso altrettanto interessante.

14.6 La velocità della luce

Ricordate il Postulato 2.2? Bene, proviamo a riflettere ora cosa succede all'interno di una metrica non piatta, ovvero cosa succede quando la luce è immersa in un campo gravitazionale. In particolare, è importante sottolineare che la luce si muove a c in un sistema di riferimento *inerziale*. Se ci troviamo in un campo gravitazionale, può succedere che questa velocità vari. Innanzitutto ricordiamo che la *velocità* è definita in un sistema di riferimento e vale $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$,

[47] Alla fine della fiera è semplicemente la matrice inversa, ma fare conti senza sapere il perché è abbastanza inutile.

dove sia $\mathrm{d}\vec{x}$ che $\mathrm{d}t$ sono misurati nello stesso sistema di riferimento, che può anche non essere inerziale.

Come definiamo quindi un raggio di luce? Se ben ricordate, tutti i nostri discorsi cercano di basarsi su degli invarianti in modo da fare affermazioni che non dipendano da delle scelte arbitrarie. Per esempio, per un punto materiale che si muove, l'invariante più sensato che abbiamo trovato è $\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau$. Notiamo che questo oggetto è maggiore stretto di zero per ogni particella che viaggia a velocità minori di c, mentre fa esattamente zero per velocità uguale a c. Questo suggerisce una generalizzazione di raggio di luce, in quanto se consentiamo alla gravità di entrare nella metrica $g_{\mu\nu}$, la generalizzazione è semplicemente

$$0 = \mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$$

Questa generalizzazione può non sembrare così intuitiva senza ulteriori commenti. Perché semplicemente non dire che un raggio di luce è una cosa che ha velocità in modulo c? Il motivo è di causalità: moralmente con una metrica diversa da quella piatta di Minkowski abbiamo sempre le regioni di *passato assoluto*, *futuro assoluto* e *altrove*, esattamente come nel caso senza gravità. Per riuscire a mantenere la causalità, dobbiamo imporre che sia $\mathrm{d}s^2 \geq 0$. Mi direte voi: "Ma c'è un quadrato su quel $\mathrm{d}s^2$, è sempre positivo!". Falso, la notazione può essere fuorivante, come ho sottolineato a pagina 12. Dato che abbiamo un limite inferiore che viene saturato nel caso precedente solo dalla luce, questo è un suggerimento importante che quello che stiamo facendo ha senso.

Proviamo ora a vedere che cosa succede ad un raggio di luce nell'unica metrica non banale che conosciamo, ovvero la metrica di Schwarzschild.

$$\mathrm{d}s^2 = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}}\,\mathrm{d}r^2 - r^2\,\mathrm{d}\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 = 0$$

Per cui, se consideriamo il caso radiale di un raggio di luce che si allontana dal centro attrattore in moto radiale, possiamo porre $\mathrm{d}\theta = 0, \mathrm{d}\phi = 0$ per andare a ricavare la dipendenza temporale di r dal tempo nel sistema di riferimento in cui il centro attrattore è fermo, ovvero semplicemente t

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = c\left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)$$

E quindi la velocità del nostro raggio di luce, $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r}$ è in modulo inferiore a c in un campo gravitazionale! Non sono finite le sorprese, infatti possiamo andare a considerare quello che succede ad un raggio di luce che orbita di moto circolare uniforme intorno al centro attrattore. Possiamo porre per semplicità $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$, in quanto sappiamo che il moto si svolgerà nel piano. Dato che conosciamo questa conservazione, sarà meglio sfruttarla per avere delle coordinate sensate. In questo modo, $\sin^2\theta = 1$ e $\mathrm{d}\theta = 0$, per cui abbiamo di nuovo

$$r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = c\sqrt{1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}}$$

e stavolta la velocità del nostro raggio di luce sarà $\vec{v} = r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\widehat{\phi}$, non solo inferiore a c, ma diversa dalla velocità radiale! La luce si propaga quindi non solo più lenta di c in un campo gravitazionale, ma la sua velocità dipende pure dalla direzione in cui sta viaggiando. Questo è un semplice monito per ricordarvi che nei postulati della Fisica, tutte le assunzioni sono importanti. Se qualcuna non lo è, probabilmente avete fatto una scoperta.

14.7 E le altre forze?

Abbiamo più o meno intuito come funziona la traiettoria di una massa in orbita di un oggetto molto massivo e di come cambiano dal caso classico le traiettorie. Cosa succede se la forza di gravità non è l'unica forza in gioco?

Per derivare le equazioni che compaiono in questi casi, di solito ci si appoggia a delle formulazioni alternative della meccanica, che permettono di generalizzare facilmente il tutto. In questo caso, si tratta del principio di minima azione, che voi non conoscete ed è inutile che conosciate, ma lo spiegherò in pochissime parole per darvi un'idea. Si va a considerare un certo funzionale, il funzionale $\mathcal{S}[x(t)]$, chiamato *azione* definito da

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t)\,\mathrm{d}t \tag{33}$$

Dove è stata introdotta una nuova funzione, $\mathcal{L}$, la lagrangiana. Si scopre, che nel caso classico, se $\mathcal{L} = K - U$, ovvero energia cinetica meno potenziale[48], l'equazione che deriva dalla minimizzazione del funzionale azione è equivalente a $\vec{F} = m\vec{a}$. Il punto della questione è che, innanzitutto scrivere una lagrangiana è in un certo senso più facile, dal punto di vista teorico, in quanto ci sono diverse considerazioni fisiche che limitano tantissimo le possibilità di scelta. Inoltre, a partire da questa è possibile facilmente usare lo stesso formalismo per descrivere contemporaneamente tutto quello che c'è in gioco. Per esempio,

[48]Notare il segno meno, è fondamentale

considerando l'azione sullo spazio piatto, ovvero senza gravità, data dal seguente integrale

$$\mathcal{S}[A^\mu] = \int \left(-\frac{1}{16\pi c} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} J^\mu A_\mu \right) \mathrm{d}^4 x$$

Andando a calcolare le equazioni che derivano dalla minimizzazione di $\mathcal{S}$, si vede che queste sono assolutamente equivalenti alle equazioni di Maxwell, che sono equazioni che non ci si aspetterebbe di derivare dallo stesso principio con cui si giustifica $\vec{F} = m\vec{a}$. In particolare, quello che interessa a noi, per fare un esempio, è il caso della forza elettromagnetica agente su una carica che si muove in un campo gravitazionale. A partire dal principio di minima azione è facile vedere che la generalizzazione dell'Equazione 19 è la seguente

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = \sum_{\nu,\rho=0}^{3} \frac{q}{c} F^{\mu\nu} g_{\nu\rho} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} \tag{34}$$

15 Per approfondire

In fondo a questa dispensina sono indicate le fonti da cui abbiamo attinto per cercare di darvi una spiegazione che contenga il numero minimo di errori possibili, che purtoppo siamo consci essere strettamente maggiore di 0. Se volete approfondire l'argomento, il libro che può aiutare di più è sicuramente il Morin [Mor08], che contiene spiegazioni più approfondite e soprattutto un sacco di problemi. Un'altra fonte di problemi che possono essere utili si può trovare sul sito di Fabio Zoratti[49]: nella sezione Università, ho salvato i testi degli esami precedenti del corso di Meccanica Classica tenuta dai professori D'Elia e D'Emilio. Ogni testo d'esame contiene 4 tracce, le prime due di meccanica Lagrangiana e Hamiltoniana, che vi sconsiglio di affrontare ora, un problema di Meccanica Statistica e un problema di Relatività ristretta. A mio parere, dopo queste spiegazioni siete in grado di affrontare la maggior parte dei problemi di RR, per cui vi consiglio di darci un'occhiata. Chiaramente non affrontate gli altri, non hanno alcuna attinenza con il programma olimpico.

16 Problemi

Problema 16.1 (Effetto Compton)**.** Si consideri l'urto elastico di un fotone di frequenza ν contro un elettrone di massa m_e[50], inizialmente fermo nel sistema S. Il fotone viene emesso con un angolo ϕ rispetto alla direzione di volo iniziale. Si calcoli la differenza $\lambda' - \lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda del fotone prima dell'urto e quella primata è quella dopo.

Problema 16.2 (Decadimento del π^-)**.** Il π^- è un mesone carico con una massa di circa $m_\pi = 140\,\mathrm{MeV}/c^2$. Questa particella decade principalmente in un muone μ di massa $m_\mu = 100\,\mathrm{MeV}/c^2$ e in un antineutrino muonico $\overline{\nu_\mu}$, di massa talmente piccola da essere approssimabile a 0. Nel riferimento S il π^- si dirige lungo l'asse x con una certa velocità β. Viene rivelato il muone con un angolo θ rispetto alla direzione di volo. Si calcoli l'energia del muone in funzione di β e θ.

Problema 16.3 (Decadimento del π^0)**.** Consideriamo ora un π^0, parente stretto del π^- studiato nel problema 16.2. La massa del π^0 è la stessa del π^-, ma questa particella decade in due fotoni. Si assuma che nel riferimento

[49] https://uz.sns.it/~OrsoBruno96 se non si dovesse capire, quel simbolo orribile dentro l'URL si chiama *tilde*

[50] Nel problema non si richiedono calcoli numerici, ma il lettore può essere interessato a conoscerne il valore di $m_e = 511\,\mathrm{keV}$. Inoltre, può essere comodo ricordare che $\hbar c = 197\,\mathrm{MeV\,fm}$.

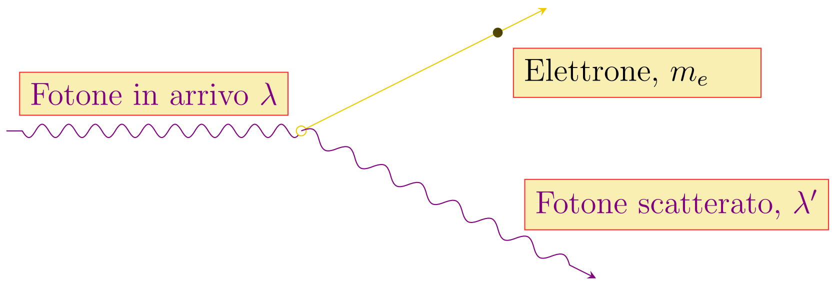

Figura 4: scattering Compton.

in cui il π^0 è a riposo, la probabilità di decadimento in una certa direzione sia uniforme, ovvero che sia ugualmente probabile decadere in una qualsiasi direzione. Nel riferimento del laboratorio il π^0 si muove con una velocità β lungo l'asse x.

- Si calcoli qual è l'angolo minimo possibile fra i due fotoni nel riferimento del laboratorio.
- Si ricavi la distribuzione in energia dei prodotti di decadimento nel sistema di riferimento del laboratorio, ovvero la distribuzione di probabilità che uno dei due fotoni abbia una certa energia.[51]
- Si calcoli la distribuzione di probabilità del numero di eventi in funzione dell'angolo α compreso fra i due fotoni nel riferimento del laboratorio.[52]

Problema 16.4 (Esperimento di Fizeau)**.** Consideriamo l'esperimento di interferenza in figura 5. Una sorgente di luce coerente emette luce di lunghezza d'onda λ che segue il percorso di specchi indicato in figura. Dentro al tubo vi è un liquido di indice di rifrazione n che si muove a velocità costante u rispetto al tubo. Si supponga che gli unici tratti che contribuiscono ad accumulare differenza di cammino ottico siano quelli verticali dentro al fluido. Si supponga che il lato del tubo verticale sia lungo L.

[51] Ovviamente l'energia del fotone può assumere solo un ristretto intervallo di valori. La domanda del testo è: se i valori che può assumemere l'energia sono compresi fra $E_{\max}$ ed $E_{\min}$, questi valori sono tutti uguali oppure c'è qualche valore particolare per cui si ha un massimo/minimo di probabilità?

[52] Vorrei far notare che nel riferimento del centro di massa questa distribuzione è una delta di Dirac, ovvero tutti gli eventi accadono con $\alpha = \pi$. Nel riferimento del laboratorio la cosa cambia e non di poco.

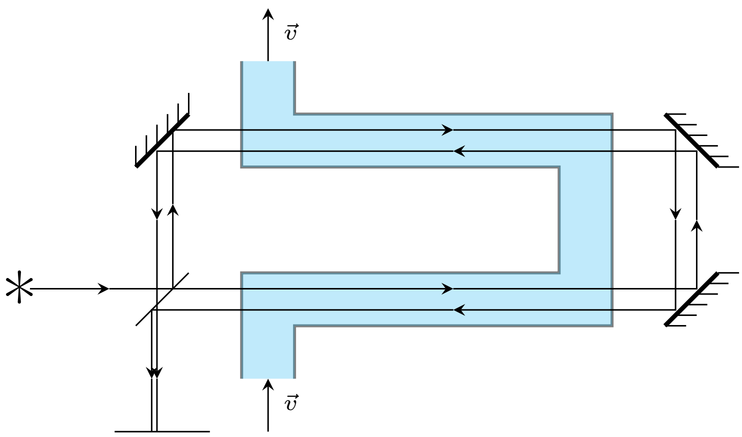

Figura 5: esperimento di Fizeau.

Si mostri che la differenza di fase $\Delta\phi$ fra i due raggi che seguono i due percorsi diversi vale

$$\Delta\phi = 8\pi \frac{L}{\lambda} c \frac{un^2}{c^2 - n^2u^2}$$

Problema 16.5 (APhO 2013)**.** Si consideri un punto materiale di massa m. Indichiamo con S il riferimento *a riposo*, ovvero quello del laboratorio. Indichiamo con S' una famiglia di sistemi di riferimento inerziali definiti nel seguente modo. Dato il tempo misurato nel laboratorio, t, il riferimento $S'(t)$ è il sistema di riferimento centrato nel punto materiale che si muove con velocità $\beta(t)$ uguale a quella della massa m nel riferimento S, ovvero una famiglia di sistemi di riferimento che "insegue" la pallina di massa m. Tale famiglia di sistemi viene usualmente chiamata *sistema tangente alla particella*.

Supponiamo che la pallina sia soggetta ad una forza esterna $\vec{F} = F\widehat{x}$, definita nel riferimento S, costante ed uniforme e supponiamo per semplicità che al tempo $t = 0$ la pallina sia al centro del riferimento. Si definisce la quantità $g = F/m$, da usare per brevità.

- Calcolare la velocità $v(t)$ della particella nel riferimento S all'istante di tempo t.
- Calcolare l'accelerazione propria della particella all'istante t, definita come l'accelerazione misurata nel sistema di riferimento tangente.
- Calcolare la velocità della particella v nel riferimento S, ma non in funzione del tempo t del sistema S, bensì in funzione di τ, il tempo proprio misurato dalla particella.

- Trovare un'equazione che esprima t in funzione di τ e di altri parametri rilevanti.

- Consideriamo ora il *ritardo dell'informazione*. Sia τ il tempo proprio della particella. Al tempo τ, la particella *legge* su un grande orologio situato nell'origine del riferimento S un tempo $t_0(\tau)$. Si trovi questa funzione e si studi in particolare il comportamento per $\tau \to \infty$.

Andiamo ora a considerare un sistema di 2 particelle di massa m, uguali, chiamate A e B. All'istante iniziale A è nell'origine di S, B è a $x = L$ e sono entrambe ferme. Nota bene: In questa parte del problema **non** si consideri il ritardo dell'informazione. Le due palline sono entrambe soggette alla stessa forza F definita prima.

- Ad un certo istante di tempo, un osservatore solidale al sistema S vede[53] che l'orologio di A segna un tempo τ_A. Che tempo τ_B segna l'orologio di B, sempre visto dall'osservatore in S?

- Consideriamo adesso un osservatore nel sistema tangente di A. In un certo momento questo osservatore vede che l'orologio di A segna un tempo τ_1, mentre l'orologio di B segna un tempo τ_2. Si mostri che vale la relazione
$$\sinh\left(\frac{F}{mc}(\tau_2 - \tau_1)\right) = C_1 \sinh \frac{F}{mc}\tau_1$$
Dove C_1 è una costante. Si calcoli inoltre C_1

- La prima particella vedrà allontanarsi la seconda. Si mostri che il tasso di cambio di distanza[54], visto dalla prima particella vale
$$\frac{\mathrm{d}L'}{\mathrm{d}\tau_1} = C_2 \frac{\sinh \frac{F\tau_2}{mc}}{\cosh \frac{F}{mc}(\tau_2 - \tau_1)}$$
Si calcoli la costante C_2

Si consideri una situazione simile a quella di prima, in cui le due particelle però sono soggette a forze diverse. In particolare, sia g_A l'accelerazione della prima particella, g_B quella della seconda.

- Nel riferimento S esiste un punto x_p tale che esso si trova *sempre alla stessa distanza* dalla pallina A, secondo la pallina A. Si trovi x_p.

[53] *Repetita juvant*: Non si consideri il ritardo dell'informazione

[54] Per gli amici, velocità.

- Data l'accelerazione g_A, si calcoli l'accelerazione g_B che permetta alla pallina A di vedere sempre la pallina B alla stessa distanza.

- Si calcoli il rapporto fra i tempi propri misurati dalle due palline

$$R = \frac{\mathrm{d}\tau_A}{\mathrm{d}\tau_B}$$

La sezione precedente serviva tutta per calcolare le correzioni relativistiche che servono per regolare gli orologi dei GPS.

- Si consideri un satellite in orbita GPS. Tali orbite sono tali da avere periodo di 12h. Sia $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$. Si calcoli la velocità rispetto al centro della Terra di un satellite e si calcoli anche l'accelerazione di gravità a quella quota. Si ricorda che il raggio della Terra vale $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$ e che un giorno dura 24 h.

- Ci sono due effetti in gioco che rendono diverso il tempo misurato da un osservatore sulla superficie terrestre e il satellite. Uno è di relatività ristretta, dovuto al fatto che entrambe gli osservatori sono in moto rispetto ad un riferimento inerziale, ma con velocità diverse. L'altro è dovuto all'accelerazione di gravità. Si usi il principio di equivalenza per tenere conto del secondo effetto. Si dica quale dei due effetti è più rilevante e si calcoli la differenza di tempo accumulata in un giorno fra i due orologi.

- Si stimi l'errore sulla posizione data dal GPS se gli orologi in orbita non tenessero conto di questo effetto.

Problema 16.6 (Razzo relativistico)**.** Si consideri un razzo di massa iniziale M. Poniamo il razzo nel vuoto per semplicità. Sia S un sistema di riferimento inerziale e si posizioni il razzo al centro del riferimento all'istante iniziale. Il razzo perde massa per unità di tempo ad un tasso costante Γ[55], sparandola indietro ad una velocità relativa costante $u = \beta_0 c$[56]. Si calcoli la velocità del razzo quando esso ha una massa m. Si assuma che il metodo di espulsione del carburante non aggiunga energia sotto forma di energia chimica al tutto[57].

[55] Attenzione: questo problema è volutamente poco guidato. Questa affermazione è *ambigua*, in quanto non ho detto tempo misurato da *chi*. Sta al lettore capire con il suo senso fisico qual è il tempo sensato rispetto a cui si deriva. Prima di immergersi in conti, consiglio di controllare se l'istinto ha funzionato bene o meno leggendo la prima riga della soluzione.

[56] Notare bene la parola relativa. Il lettore si renda conto dei problemi che derivano da questa frase.

[57] Si immagini per esempio che l'espulsione avvenga con un decadimento α

Problema 16.7 (Vela solare)**.** Consideriamo un satellite con un grosso specchio piano in grado di riflettere la luce solare, orientabile a piacimento. Lo specchio ha area A. Il satellite, specchio incluso, ha massa $m \ll M_\odot$ dove $M_\odot$ è la massa del Sole. Inizialmente il satellite si trova ad una distanza r_0 dal Sole, su un'orbita circolare. Trascurare la presenza degli altri pianeti. Ad un certo punto il satellite apre la vela solare, facendo in modo da tenere sempre lo specchio rivolto esattamente verso il Sole.

Parte 1

Il Sole ha un'intensità I_0, misurata alla distanza r_0, definita come potenza per unità di area.

- Trovare il valore minimo di A che permette al satellite di abbandonare il sistema solare.
- Se il satellite non rivolge più in modo esatto lo specchio verso il Sole ma fa in modo che la normale allo specchio formi un angolo α variabile a piacimento $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, dire come cambiano le forze e studiare il problema per piccoli α e tempi piccoli. Si assuma per questo punto che la forza di radiazione sia piccola rispetto a quella gravitazionale.

Parte 2

É facile mettere dei dati numerici per accorgersi che si possono rapidamente raggiungere relativistiche una volta abbandonato il sistema solare. Per questo motivo non è più possibile che la forza esercitata dalla pressione di radiazione dipenda solo dalla posizione del satellite e non dalla sua velocità.

Consideriamo quindi una sorgente monocromatica di luce che emette fotoni di frequenza fissa ν nel suo riferimento. La sorgente emette una quantità n di fotoni per unità di tempo nel suo riferimento. Consideriamo uno specchio di massa m, tale che $h\nu \ll mc^2$[58] rivolto verso la sorgente che si allontana dalla stessa ad una velocità v.

- Trovare l'accelerazione dello specchio nel riferimento della sorgente in funzione di β, n, ν, m (assumere il sole come sorgente monocromatica)
- Usare il risultato appena trovato per esprimere la forza di spinta dovuta ai fotoni agente sul satellite in funzione della sua distanza dal Sole r e della sua velocità v (e degli altri parametri rilevanti)

[58] Si diano tutti i risultati al primo ordine in $\frac{h\nu}{mc^2}$

17 Soluzione dei problemi

Soluzione 17.1 (Effetto Compton)**.** Questo problema è di riscaldamento. Al solito, dobbiamo imporre la conservazione del quadrimpulso. Indichiamo con E e p l'energia e il modulo del tri-impulso dell'elettrone dopo l'urto. Sappiamo che per un fotone si ha $E_\nu = h\nu$ e che la quantità di moto è $pc = E$. Notare che le due equazioni sotto sono state moltiplicate per c per rendere i conti un po' più semplici.

$$\begin{cases} mc^2 + h\nu = E + h\nu' \\ h\nu = pc\cos\psi + h\nu'\cos\theta \\ h\nu'\sin\theta = pc\sin\psi \end{cases}$$

Liberiamoci dell'angolo ψ, che non ci interessa, usando un classico $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$. Otteniamo una nuova coppia di equazioni

$$\begin{cases} mc^2 + h\nu = E + h\nu' \\ h^2(\nu - \nu'\cos\theta)^2 + h^2\nu'\sin^2\theta = p^2c^2 \end{cases}$$

E a questo punto sfruttiamo il fatto che $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, dove m è la massa dell'elettrone

$$(mc^2 + h(\nu - \nu'))^2 - h^2(\nu - \nu'\cos\theta)^2 + h^2\nu'\sin^2\theta = m^2c^4$$

Riordinando questa equazione si semplifica quasi tutto e rimane semplicemente

$$\nu\nu'(1 - \cos\theta) = \frac{mc^2}{h}(\nu - \nu')$$

Per ottenere la risposta richiesta dal testo, basta ricordarsi che $c = \lambda\nu$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

Soluzione 17.2 (Soluzione del problema Decadimento del π^-)**.** Questo era un problema di riscaldamento. Il problema si può risolvere imponendo la conservazione del quadrimpulso. Indichiamo con $p_0 = \gamma m_\pi c\beta$ e con $E_0 = \gamma m_\pi c^2$. Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} E_0 = E_\mu + E_\nu \\ p_0 = p_\mu\cos\theta + p_\nu\cos\phi \\ p_\mu\sin\theta = p_\nu\sin\phi \end{cases}$$

Il modo migliore di fare questi conti è di **non** tirare radici, ma di continuare a sfruttare in modo intelligente le relazioni $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$. Inoltre, dato che qui abbiamo l'angolo ϕ incognito, che non ci interessa più di tanto, sfruttare un $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ può essere utile. Per cui,

$$\begin{cases} E_0 = E_\mu + E_\nu \\ (p_\mu \sin\theta)^2 = (p_\nu \sin\phi)^2 \\ (p_0 - p_\mu \cos\theta)^2 = (p_\nu \cos\phi)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_0 = E_\mu + E_\nu \\ p_0^2 - 2p_0 p_\mu \cos\theta + p_\mu^2 = p_\nu^2 \end{cases}$$

A questo punto bisogna liberarsi del neutrino. Per farlo, possiamo sfruttare il fatto che $E_\nu^2 = p_\nu^2 c^2$, dato che il neutino ha massa quasi nulla.

$$\begin{cases} (E_0 - E_\mu)^2 = E_\nu^2 \\ p_0^2 - 2p_0 p_\mu \cos\theta + p_\mu^2 = p_\nu^2 \end{cases} \Rightarrow (E_0^2 - p_0^2c^2) + (E_\mu^2 - p_\mu^2 c^2) + 2p_0 p_\mu c^2 \cos\theta + -2E_0 E_\mu = 0$$

Siamo quasi arrivati in fondo, abbiamo una sola equazione in cui compaiono solo quantità che sappiamo e due incognite, E_μ e p_μ. Vediamo come concludere

$$(E_0^2 - p_0^2c^2) + (E_\mu^2 - p_\mu^2 c^2) + 2p_0 p_\mu c^2 \cos\theta + -2E_0 E_\mu = 0 \Rightarrow 2p_0 p_\mu c^2 \cos\theta = 2E_0 E_\mu - (m_\pi^2 + m_\mu^2)c^4$$

$$4p_0^2 p_\mu^2 c^4 \cos^2\theta = 4E_0^2 E_\mu^2 + (m_\pi^2 + m_\mu^2)^2 c^8 - 4E_0 E_\mu (m_\pi^2 + m_\mu^2)c^4$$

Soluzione 17.3 (Decadimento del π^0)**.** L'idea è al solito di imporre la conservazione del quadriimpulso e di sfruttare in modo intelligente le masse invarianti. In questa sezione supporremo che il π_0 si propaghi lungo l'asse z. Inoltre come conseguenza della conservazione della componente spaziale del quadriimpulso totale possiamo assumere che il moto dei prodotti di decadimento avvenga sul piano xz. I quadriimpulsi dei due fotoni quindi sono:

$$p_1^\mu = \frac{E_1}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta_1 \\ 0 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix} \qquad p_2^\mu = \frac{E_2}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta_2 \\ 0 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

Dove gli angoli sono stati presi con il segno sempre positivo! La massa invariante della somma dei quadriimpulsi dei due fotoni deve essere uguale alla massa invariante del π_0. Segue quindi, riarrangiando i termini e usando $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$:

$$m_\pi^2 c^4 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 E_2 (1 - \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

essendo la massa dei fotoni nulla,

$$m_\pi^2 c^4 = 2E_1 E_2 (1 - \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

Usando facili formule trigonometriche, si ottiene la relazione finale:

$$m_\pi^2 c^4 = 4E_1 E_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

con $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ l'angolo di apertura fra i fotoni. La cosa interessante è che tramite le masse invarianti non abbiamo dovuto imporre nessun conto di conservazione delle componenti del quadriimpulso! Possiamo a questo punto calcolare l'angolo minimo. Infatti, nel riferimento del laboratorio deve essere $E_1 + E_2 = E_\pi$, dove E_π è l'energia del π^0 nel riferimento del laboratorio. La parte importante è che è una quantità fissata, per cui possiamo scrivere

$$m_\pi^2 c^4 = 4E_1 (E_\pi - E_1) \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ovviamente, il $\sin^2$ sarà minimo quando la cosa che lo moltiplica sarà massima. La cosa che lo moltiplica è una parabola con concavità verso il basso in E_1, per cui il massimo si avrà in $E_1/2$, ovvero quando

$$m_\pi^2 c^4 = E_\pi^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Che è una ovvia equazione per l'angolo minimo. Studiamo adesso la distribuzione in energia. Come osservazione preliminare, ricordiamo che la trasformazione degli angoli in sistemi di riferimento diversi è presente, seppure in forma diversa, negli urti fra particelle classiche. Adottiamo la convenzione che gli angoli contrassegnati con * sono quelli visti nel sistema del π, mentre quelli senza sono gli angoli visti nel sistema del laboratorio. Sappiamo che nel sistema del π il decadimento è uniforme. Questo significa che il numero di conteggi è uniforme in $\cos\theta^*$è $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\cos\theta^*} = c$, con c costante da determinare. Per determinare la costante, basta imporre che l'integrale su tutto l'angolo solido sia 1.

$$\int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\cos\theta^*}\,\mathrm{d}\cos\theta^* = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Si osservi che una distribuzione uniforme in $\cos\theta^*$ non lo è in θ^*. Perchè quindi la condizione giusta da imporre è la prima dei due casi? La risposta sta nel fatto che gli integrali sugli angoli solidi vengono fatti proprio in $\mathrm{d}\cos\theta$, la misura dell'angolo solido. È il problema di utilizzare le coordinate sferiche invece di quelle cartesiane: sono più semplici per fare i conti, ma la misura dello spazio non è il semplice $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, bensì $r^2\,\mathrm{d}r \wedge \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi = r^2\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\cos\theta \wedge \mathrm{d}\phi$. Adesso la cosa importante da capire, prima di immergersi nei conti, è di capire bene che cosa vuol dire *distribuzione in energia degli eventi*, scritto con i differenziali, in modo da poi poter fare manipolazioni algebriche per calcolarlo. La distribuzione in eventi sarà evidentemente una cosa del tipo

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E_\gamma}$$

Per cui, ora possiamo fare il calcolo della distribuzione di eventi in funzione dell'energia dei fotoni del laboratorio

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E_\gamma} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\cos\theta^*}\frac{\mathrm{d}\cos\theta^*}{\mathrm{d}E_\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\cos\theta^*}{\mathrm{d}E_\gamma}$$

La quantità a destra è brutta: abbiamo un angolo misurato nel sistema del π in funzione di una energia misurata nel laboratorio. La cosa naturale da fare è cercare di capire come trasformare l'energia dal sistema del laboratorio a quello a riposo. E' evidente che nel sistema del π i quadriimpulsi dei fotoni debbano essere:

$$p_1^{\mu\,*} = \frac{cm_\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta_1 \\ 0 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix} \qquad p_2^{\mu\,*} = \frac{cm_\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\cos\theta_2 \\ 0 \\ -\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

Per trovare l'energia E_γ nel laboratorio ,basta sfruttare le traformazioni di Lorentz (i cui parametri dipendono dalla velocità del π v_π.

$$E_1 = \gamma E_1^* + \gamma\beta c p_{1,z}^* = \gamma\frac{m_\pi}{2}(1+\beta\cos\theta^*)c^2 \qquad E_2 = \gamma E_2^* + \gamma\beta c p_{2,z}^* = \gamma\frac{m_\pi}{2}(1-\beta\cos\theta^*)c^2$$

Invertendo si ottiene facilmente che

$$\frac{\mathrm{d}\cos\theta^*}{\mathrm{d}E_\gamma} = \frac{2}{cp_\pi}$$

con p_π il momento nel laboratorio lungo z del pione. Un altro metodo pe calcolare questa quantità è di calcolare $\frac{\mathrm{d}E_\gamma}{\mathrm{d}\cos\theta^*}$ e di usare il fatto che è l'inverso della quantità cercata. In questo caso il metodo è inutile, ma spesso ci evita di dover invertire la relazione, che potrebbe pure essere più brutta. Mettendo tutto assieme si ha che la distribuzione in energia dei decadimenti è:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E_\gamma} = \frac{1}{cp_\pi}$$

Si osservi come questa distribuzione sia piatta!

A questo punto dobbiamo farci del male per andare a calcolare anche la distribuzione angolare. Andiamo quindi a calcolare la quantità

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\cos\theta^*}\frac{\mathrm{d}\cos\theta^*}{\mathrm{d}\alpha}$$

Il modo migliore per farlo è di riscrivere l'equazione per $\sin^2\alpha/2$

$$\sin^2\alpha/2 = \frac{m_\pi^2 c^4}{4E_1E_2} = \frac{1}{\gamma^2(1-\beta^2\cos^2\theta^*)}$$

Che si può invertire facilmente per ricavare

$$\cos\theta^* = \frac{1}{\beta}\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2\sin^2\alpha/2}}$$

Facendo una facile derivata si ricava quindi

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{4\beta\gamma}\frac{\cos\alpha/2}{\sin^2\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{\gamma^2\sin^2\alpha/2-1}}$$

Soluzione 17.4 (Esperimento di Fizeau)**.** Il problema è abbastanza semplice, l'unica cosa a cui bisogna stare attenti è di usare la legge giusta di trasformazione delle velocità, ovvero quella relativistica.

Nel sistema del laboratorio, sappiamo che nei due tratti la luce continua ad avere frequenza ν: la frequenza non cambia se la luce attraversa mezzi stazionari.

La differenza di fase nel sistema del laboratorio si può calcolare in termini delle due lunghezze d'onda nei due tratti:

$$\Delta\phi = 2\pi L\left(\frac{1}{\lambda_-}-\frac{1}{\lambda_+}\right)$$

Tuttavia non sappiamo ancora la lunghezza d'onda in quanto non sappiamo la velocità di propagazione della luce nel laboratorio.

Dato che sappiamo bene le leggi di propagazione della luce in mezzi fermi, ci conviene passare al sistema in cui il fluido è fermo.

Nel sistema solidale al fluido, la velocità di propagazione della luce è $\frac{c}{n}$ per considerazioni di elettromagnetismo.

Per passare alla velocità di propagazione nel sistema del laboratorio, basta usare la formula di addizione delle velocità relativistica per ottenere le velocità nei due tratti

$$v_\pm = c\frac{1/n \pm \frac{u}{c}}{1\pm\frac{u}{nc}} = c\frac{c\pm un}{cn\pm u}$$

dove nei due casi abbiamo considerato una velocità del sistema di riferimento di $\pm u$.

Si ottengono quindi le rispettive lunghezze d'onda $\lambda_\pm = v_\pm/\nu$, che a loro volta portano ad una differenza di fase

$$\begin{aligned}\Delta\phi = 2\pi L\left(\frac{1}{\lambda_-}-\frac{1}{\lambda_+}\right) &= \frac{2\pi L\nu}{c}\left(\frac{cn-u}{c-un}-\frac{cn+u}{c+un}\right) \\ &= \frac{2\pi L\nu}{c}\frac{(cn-u)(c+un)-(cn+u)(c-un)}{c^2-u^2n^2} = \\ &= \frac{8\pi L}{\lambda}c\frac{un^2}{c^2-u^2n^2}\end{aligned}$$

che è il risultato richiesto.

Soluzione 17.5 (APhO 2013)**.** Affronteremo degli approcci leggermente diversi dalla soluzione ufficiale, per permettervi di vedere lo stesso problema sotto punti di vista diversi.

- Dato che la forza è *definita* nel riferimento S, possiamo semplicemente scrivere
$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$
E integrarla banalmente dato che F non dipende dal tempo.
$$p = Ft \Rightarrow \beta\gamma = \frac{Ft}{mc} \Rightarrow \beta(t) = \frac{\frac{Ft}{mc}}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}$$
Calcoliamoci subito anche γ e $x(t)$, che ci servirà fra poco.
$$\gamma = \sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}$$
$$x(t) = c\int_0^t \beta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{mc^2}{F}\left(\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}-1\right) \tag{35}$$
- Nel riferimento tangente si ha sempre $\beta = 0$. Possiamo sfruttare questa informazione per semplificare alcune cose che sappiamo. Indichiamo con gli apici tutte le quantità nel sistema tangente alla particella. In un generico riferimento S, possiamo andare a calcolare la

quadriaccelerazione

$$a^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\vec{\beta} \end{pmatrix}$$

Che, specializzati al sistema tangente, in cui si ha $\beta = 0$ e $\gamma = 1$, facendo la derivata molti termini si semplificano e rimane solo

$$a'^\mu = c \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mathrm{d}\vec{\beta}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

Per cui quello che ci interessa per calcolare l'accelerazione propria è la componente spaziale della quadriaccelerazione nel riferimento tangente. Calcolarla non è difficile, in quanto nel riferimento S conosciamo ogni cosa, quindi con delle semplici derivate e un boost siamo in grado di ricavarla.

$$a^\mu = \gamma c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix} = c\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{\frac{F^2 t}{m^2c^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}} \\ \frac{F}{mc} \end{pmatrix} = \frac{F}{m}\gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}\frac{Ft}{mc} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Andiamo a fare adesso un boost lungo x, proprio di β, per metterci nel riferimento tangente

$$a'^\mu = \frac{F}{m}\gamma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}\frac{Ft}{mc} - \beta \\ 1 - \frac{\beta}{\gamma}\frac{Ft}{mc} \end{pmatrix} = \frac{F}{m}\gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per cui l'accelerazione propria è costante e vale g.

- Per seguire un metodo alternativo alla soluzione ufficiale, calcolerà prima il tempo proprio in funzione del tempo nel riferimento S e poi calcolerò β.

$$\tau(t) = \int_0^\tau \mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}} = \frac{mc}{F}\sinh^{-1}\frac{Ft}{mc}$$

Scritta un pochino meglio,

$$\sinh\frac{g\tau}{c} = \frac{gt}{c}$$

Da questa possiamo facilmente andare a calcolare $\beta(\tau)$

$$\beta(\tau) = \frac{\sinh \frac{g\tau}{c}}{\sqrt{1+\sinh^2 \frac{g\tau}{c}}} = \tanh \frac{g\tau}{c}$$

- Qui bisogna fare molta attenzione a come fare le cose. Quello di cui si è sempre sicuri e fare le cose in un solo riferimento inerziale. Per esempio, consideriamo il riferimento del laboratorio. Ad un certo istante t_0 dall'origine parte il segnale luminoso su cui c'è scritta l'ora. Quand'è che questo raggio arriva alla particella? L'equazione per il tempo t è

$$c(t-t_0) = x(t)$$

Chiaramente questa equazione, se siamo in grado di risolverla, ci porta anche in fondo, in quanto possiamo esprimere direttamente t in funzione di τ per rispondere poi alla domanda.

$$c\left(\frac{c}{g}\sinh\frac{g\tau}{c} - t_0\right) = \frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{g\tau}{c} - 1\right)$$
$$\Rightarrow \frac{gt_0}{c} = 1 + \sinh\frac{g\tau}{c} - \cosh\frac{g\tau}{c} = 1 - e^{-\frac{g\tau}{c}}$$

Per cui effettivamente si ha un congelamento del tempo segnato sull'orologio ad un certo tempo limite.

- Si ha ovviamente $\tau_A = \tau_B$

- Affronterò in modo diverso dalla soluzione ufficiale questa domanda. Che cosa vuol dire che A vede l'orologio di B che segna un tempo τ_B? Vuol dire che nel riferimento tangente ad A, l'osservatore guarda *contemporaneamente*[59] i due orologi. I due eventi "A è in un certo punto e segna τ_A" e "B è in un certo punto e segna τ_B" sono contemporanei nel riferimento tangente S'. Si avrà quindi una situazione del genere

$$\Delta x'^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \tag{36}$$

Dove χ è un'opportuna lunghezza, che non vale L, ma varrà qualcosa. Nel riferimento S, la differenza spaziotemporale fra i due eventi, sarà,

[59] Secondo lui, ricordiamo che in relatività la contemporaneità è una cosa che dipende dal sistema di riferimento.

dalle trasformazioni di Lorentz

$$\Delta x = \gamma(t) \begin{pmatrix} \beta(t)\chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Dove t è il tempo che corrisponde a τ_A, ovvero

$$\frac{gt}{c} = \sinh \frac{g\tau_A}{c}$$

A questo punto bisogna letteralmente fare cose a caso cercando di trovare espressioni in cui si semplifichi tutto tranne quello che ci serve. Consideriamo per esempio

$$\beta(t) = \frac{\gamma\chi\beta}{\gamma\chi} = \frac{ct_A - ct_B}{x_A(t) - x_B(t)} \tag{37}$$

Per quanto riguarda $t_{A,B}$, l'espressione è quella con il seno iperbolico, mentre per $x(t)$ abbiamo l'altra espressione che ora vediamo più in dettaglio

$$x_A(\tau) = \frac{mc^2}{F}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft(\tau)}{mc}\right)^2} - 1\right) = \frac{mc^2}{F}\left(\cosh \frac{g\tau_A}{c} - 1\right)$$

E analoga per x_B, con l'aggiunta di L. Possiamo quindi riscrivere l'espressione 37

$$\tanh \frac{g\tau_A}{c} = \beta(t) = \frac{g}{c^2} \frac{\sinh \frac{g\tau_B}{c} - \sinh \frac{g\tau_A}{c}}{L + \frac{mc^2}{F}(\cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c})}$$

Per cui

$$\tanh \frac{g\tau_A}{c} = \frac{\sinh \frac{g\tau_B}{c} - \sinh \frac{g\tau_A}{c}}{\frac{gL}{c^2} + \cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c}}$$

Distribuendo,

$$\sinh \frac{g\tau_A}{c}\left(\frac{gL}{c^2} + \cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c}\right) = \left(\sinh \frac{g\tau_B}{c} - \sinh \frac{g\tau_A}{c}\right) \cosh \frac{g\tau_A}{c}$$

Semplificando e riconoscendo la formula di addizione del seno iperbolico,

$$\sinh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c} = \frac{gL}{c^2} \sinh \frac{g\tau_A}{c} \tag{38}$$

Che era la richiesta del testo.

- Utilizzando la definizione di χ usata nell'espressione 36, la richiesta del testo è l'esplicito calcolo di $\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau_A}$

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau_A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_A}\frac{x_B - x_A}{\gamma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_A}\frac{L + \frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{g\tau_B}{c} - \cosh\frac{g\tau_A}{c}\right)}{\cosh\frac{g\tau_A}{c}} =$$
$$= -\frac{gL}{c}\frac{1}{\cosh^2\frac{g\tau_A}{c}} + c\frac{\sinh\frac{g\tau_B}{c}}{\cosh\frac{g\tau_A}{c}}\frac{\mathrm{d}\tau_B}{\mathrm{d}\tau_A} - c\frac{\cosh\frac{g\tau_B}{c}}{\cosh^2\frac{g\tau_A}{c}}\sinh\frac{g\tau_A}{c}$$

A parte un sacco di fastidiosa algebra, bisogna calcolare il rapporto fra i tempi propri. Per farlo, possiamo differenziare l'espressione 38

$$\cosh\frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c}(\mathrm{d}\tau_B - \mathrm{d}\tau_A) = \frac{gL}{c^2}\cosh\frac{g\tau_A}{c}\,\mathrm{d}\tau_A \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\tau_B}{\mathrm{d}\tau_A} = 1 + \frac{gL}{c^2}\frac{\cosh\frac{g\tau_A}{c}}{\cosh\frac{g(\tau_B-\tau_A)}{c}}$$

Per cui

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau_A} = \frac{c}{\cosh^2\frac{g\tau_A}{c}}\left(\sinh\frac{g\tau_B}{c}\cosh\frac{g\tau_A}{c}\left(1 + \frac{gL}{c^2}\frac{\cosh\frac{g\tau_A}{c}}{\cosh\frac{g(\tau_B-\tau_A)}{c}}\right) - \right.$$
$$\left. - \cosh\frac{g\tau_B}{c}\sinh\frac{g\tau_A}{c} - \frac{gL}{c^2}\right) =$$
$$= \frac{c}{\cosh^2\frac{\tau_A}{c}}\left(\sinh\frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c} - \frac{gL}{c^2}\right) + \frac{gL}{c}\frac{\sinh\frac{g\tau_B}{c}}{\cosh\frac{g(\tau_B-\tau_A)}{c}}$$

- Tutti i punti alla destra dell'origine, prima o poi hanno distanza zero dalla nostra massa. Di conseguenza, se si vuole un punto a distanza fissa dalla massa, dovrà essere ad una coordinata x negativa. In particolare, dalla contrazione delle lunghezze si dovrà avere

$$\mathcal{C} = \frac{x_P + x(t)}{\gamma(t)} \quad \forall t \to \mathcal{C}\cosh\frac{g\tau}{c} = x_p + \frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{g\tau}{c} - 1\right)$$

Che è evidentemente soddisfatta dalla coppia

$$\begin{cases}\mathcal{C} = \frac{c^2}{g}\\ x_P = \frac{c^2}{g}\end{cases}$$

- Questo punto si può affrontare in due modi diversi, uno un po' a caso e uno più rigoroso. Noi faremo entrambe per completezza. Inziamo da quello più veloce. Abbiamo visto nel punto precedente che per la pallina A esiste un punto estremamente lontano e all'indietro rispetto al centro del riferimento S che rimane sempre alla stessa distanza per lei. Ovviamente esisterà un siffatto punto anche per B. Il fatto è che se i due punti speciali dovessero coincidere, allora A e B dovrebbero per forza vedersi sempre alla stessa distanza e il motivo è che le trasformazioni di Lorentz sono lineari, quindi non ci può essere un "addensamento" di punti da qualche parte, obbligando A e B a vedersi sempre alla stessa distanza.

Proviamo quindi ad imporre che i due punti coincidano e vediamo se troviamo un'equazione che leghi g_A e g_B.

$$\begin{cases} x_A = -\dfrac{c^2}{g_A} \\ x_B = L - \dfrac{c^2}{g_B} \end{cases} \Rightarrow -\frac{c^2}{g_A} = L - \frac{c^2}{g_B}$$

Per cui

$$g_B = \frac{c^2}{L + \frac{c^2}{g_A}} = \frac{g_A}{1 + \frac{g_A L}{c^2}}$$

Vediamo ora di fare le cose in modo un po' più sistematico usando le trasformazioni di Lorentz. Fissiamo due eventi: l'evento 1 è che la pallina A si trova in un certo punto ad un istante di tempo fissato. Il secondo evento è che la pallina B si trovi in un altro punto ad un altro istante di tempo, ma tale che nel riferimento tangente ad A sia allo stesso tempo del primo evento. Nel riferimento tangente ad A, questo evento si scrive come quadrivettore

$$\Delta x'^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}$$

E questo è perché vogliamo che la pallina A veda sempre la pallina B alla stessa distanza L. Trasformiamo ora questo evento nel riferimento S

$$\Delta x^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma\beta L \\ \gamma L \end{pmatrix}$$

Evidentemente nel riferimento S i due eventi non sono simultanei. Possiamo tuttavia andare a calcolare tutto senza troppi problemi nel seguente modo. Supponiamo che al primo evento l'orologio di A segni τ_A. Sappiamo quanto vale il tempo nel riferimento S corrispondente a questo evento dalla relazione

$$\frac{g_A t_1}{c} = \sinh \frac{g_A \tau_A}{c}$$

Per cui il secondo evento nel riferimento S avviene ad un tempo

$$t_2 = t_1 + \gamma\beta(\tau_A)\frac{L}{c} = \frac{c}{g_A}\sinh\frac{g_A\tau_A}{c} + \frac{L}{c}\sinh\frac{g_A\tau_A}{c} = \sinh\frac{g_A\tau_A}{c}\left(\frac{c}{g_A} + \frac{L}{c}\right)$$

A questo punto l'idea è che possiamo scrivere la differenza spaziale nel riferimento S in due modi diversi e possiamo imporli uguali, sperando di ottenere condizioni restrittive su g_A e g_B. Infatti, sappiamo che

$$\begin{cases} x_A(t_1) = \dfrac{c^2}{g_A}\left(\sqrt{1 + \left(\dfrac{g_A t_1}{c}\right)^2} - 1\right) \\ x_B(t_2) = L + \dfrac{c^2}{g_B}\left(\sqrt{1 + \left(\dfrac{g_B t_2}{c}\right)^2} - 1\right) \end{cases}$$

E a questo punto possiamo imporre $x_B(t_2) - x_A(t_1) = \gamma(\tau_A)L$

$$\begin{aligned} L + \frac{c^2}{g_B}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_B t_2}{c}\right)^2} - 1\right) - \frac{c^2}{g_A}\left(\cosh\frac{g_A\tau_A}{c} - 1\right) - L\cosh\frac{g_A\tau_A}{c} &= 0 \\ \frac{c^2}{g_B}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_B t_2}{c}\right)^2} - 1\right) - \left(\cosh\frac{g_A\tau_A}{c} - 1\right)\left(L + \frac{c^2}{g_A}\right) &= 0 \\ 1 + \left(\frac{g_B t_2}{c}\right)^2 - \left(1 + \left(\cosh\frac{g_A\tau_A}{c} - 1\right)\left(\frac{g_B L}{c} + \frac{g_B}{g_A}\right)\right)^2 &= 0 \\ \left(\frac{g_B L}{c^2} + \frac{g_B}{g_A}\right)^2\left(\left(\cosh\frac{g_A\tau_A}{c} - 1\right)^2 - \right. & \\ \left. - \sinh^2\frac{g_A\tau_A}{c}\right) + \left(\frac{g_B L}{c^2} + \frac{g_B}{g_A}\right)\left(\cosh\frac{g_A\tau_A}{c} - 1\right) &= 0 \\ \left(\frac{g_B L}{c^2} + \frac{g_B}{g_A} - 1\right)\left(\cosh\frac{g_A\tau_A}{c} - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

E questa equazione deve essere vera per ogni τ_A, quindi deve per forza essere nullo il coefficiente davanti al cosh, ovvero

$$g_B = \frac{1}{\frac{L}{c^2} + \frac{1}{g_A}} = \frac{g_A}{1 + \frac{g_A L}{c^2}}$$

Esattamente come prima.

- A questo punto bisogna calcolare il rapporto fra i tempi propri nei due sistemi di riferimento. La prima cosa che potrebbe fare una persona è di andare a scrivere la seguente equazione

  $$\frac{c}{g_A} \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} = t = \frac{c}{g_B} \sinh \frac{g_B \tau_B}{c}$$

  Questa equazione non è utilizzabile per ricavare l'informazione richiesta dal testo. Il motivo è abbastanza contorto ed è difficile da spiegare in questo modo, ma spero che il lettore ci rifletta e capisca il motivo. Ha a che fare con il fatto che fissare un certo tempo di riferimento t nel riferimento S non è la cosa giusta da fare. Il riferimento S non ha niente di privilegiato rispetto a tutti gli altri sistemi di riferimento. La perdita di simultaneità tipica della relatività ristretta purtroppo porta al fatto che fissare un tempo in questo riferimento non è la stessa cosa di andare a considerare il $\mathrm{d}\tau_A$ nel riferimento tangente[60] e calcolare quanto vale il corrispondente $\mathrm{d}\tau_B$ nel riferimento B fra gli stessi eventi.

  Mi rendo conto di non essere stato chiarissimo, ma mi è difficile esprimermi in modo più chiato, spero che il lettore riesca a riflettere e a capire il messaggio che voglio passare. Ad ogni modo, possiamo comunque passare per il riferimento S, a patto di non fissare l'istante di tempo nel riferimento S ma indicando effettivamente la giusta separazione temporale fra gli eventi che avvengono a distanza $\mathrm{d}\tau_A$ nel riferimento A. In effetti abbiamo fatto la stessa cosa poco fa, per calcolare il il rapporto fra le accelerazioni. Allo stesso modo, si ricava

[60] Che invece ha senso di essere *privilegiato* per A

$$t_2 = t_1 \left(1 + \frac{g_A L}{c^2}\right)$$
$$\frac{c^2}{g_B} \sinh \frac{g_B \tau_B}{c} = \frac{c^2}{g_A} \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} \left(1 + \frac{g_A L}{c^2}\right)$$
$$\sinh \frac{g_B \tau_B}{c} = \sinh \frac{g_A \tau_A}{c}$$
$$g_B \tau_B = g_A \tau_A$$
$$\frac{\mathrm{d}\tau_B}{\mathrm{d}\tau_A} = \frac{g_A}{g_B} = 1 + \frac{g_A L}{c^2}$$

- Tutti questi punti sarebbero identici alla soluzione ufficiale. Mi limito a copiare i risultati finali. L'effetto di relatività generale è $\Delta\tau_g = 4.55 \times 10^{-5}$ s. Quello di RR viene $\Delta\tau_s = -7.18 \times 10^{-6}$ s e l'effetto complessivo è quindi la somma dei due. Il $\Delta L = c\Delta\tau = 11.5$ km

Soluzione 17.6 (Razzo relativistico)**.** Il metodo migliore di affrontare il problema è di considerare il quadrimpulso del sistema all'istante t e all'istante $t + \mathrm{d}t$ e dire che deve essere conservato. Questa affermazione deriva dal fatto che l'espulsione del carburante avviene senza il rilascio di energia chimica. Definiamo v come la velocità del razzo rispetto ad un riferimento S inerziale che può essere per esempio la terra, v_1 come la velocità del carburante rispetto al riferimento S e u la velocità relativa fra razzo e carburante. Per semplicità, denotiamo con $\beta = \frac{v}{c}$, $\beta_u = \frac{u}{c}$ e con $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$. Innanzitutto utilizzeremo la formula di addizione relativistica delle velocità che ci porta a dire che

$$\beta_1 = \frac{\beta - \beta_u}{1 - \beta\beta_u}$$

La conservazione della quantità di moto, che va sviluppata al primo ordine in $\mathrm{d}\beta$ e $\mathrm{d}m$, $\mathrm{d}M$[61]

$$\frac{M\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(M + \mathrm{d}M)(\beta + \mathrm{d}\beta)}{\sqrt{1 - (\beta + \mathrm{d}\beta)^2}} + \frac{\mathrm{d}m\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$$
$$\Rightarrow \frac{M\,\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta\,\mathrm{d}M}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{M\beta^2\,\mathrm{d}\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}} + \frac{\mathrm{d}m}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\frac{\beta - \beta_u}{1 - \beta\beta_u} = 0$$

[61] Il motivo per cui va sviluppata al primo ordine è che stiamo cercando un'equazione differenziale che leghi β a M. Andando a fare il limite per $\mathrm{d}\beta \to 0$, gli unici termini che contano sono per l'appunto quelli al primo ordine.

Che è la prima delle due equazioni che useremo. La seconda è la conservazione dell'energia, sempre da sviluppare al primo ordine

$$\begin{aligned}\frac{M}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{M+\mathrm{d}M}{\sqrt{1-(\beta+\mathrm{d}\beta)^2}}+\frac{\mathrm{d}m}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\sqrt{1-\beta_1^2}} &= -\frac{\mathrm{d}M}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{M\beta\,\mathrm{d}\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}\end{aligned}$$

Vorrei far notare che abbiamo avuto bisogno di due equazioni e non di una sola in quanto classicamente è ovvio che $\mathrm{d}m = \mathrm{d}M$, in relatività la massa è leggermente più ostica da trattare. Sostituendo quest'ultima nella conservazione della quantità di moto, otteniamo, facendo i conti (magicamente scompare il termine $\gamma(\beta_1)$, fastidioso da calcolare)

$$M\,\mathrm{d}\beta+\beta_u\,\mathrm{d}M\left(1-\beta^2\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\beta}{1-\beta}+\frac{\mathrm{d}\beta}{1+\beta}=-2\beta_u\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

che quindi ci dà la soluzione

$$\frac{M}{M_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{c}{2u}}$$

Esprimiamo il risulatato in modo più carino prendiamo il logaritmo di entrambe i membri

$$\ln\frac{M}{M_0}=-\frac{1}{\beta_u}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dove ho anche girato la frazione portando un meno fuori dal logaritmo. Ho fatto questo giochetto in quanto la funzione a destra è esattamente $\tanh^{-1}(\beta)$, ovvero

$$\ln\frac{M}{M_0}=-\frac{1}{\beta_u}\tanh^{-1}\beta$$

Osserviamo che per $\beta \ll 1$ torna la soluzione classica $M = M_0 e^{\frac{v}{u}}$, in quanto $\tanh^{-1}(\mathrm{d}x) \approx \mathrm{d}x$. Inoltre,

$$\beta=\tanh\left(\beta_u\ln\frac{M_0}{M}\right) \tag{39}$$

Un risultato simile è abbastanza rassicurante riguardo la sua validità, in quanto la tangente iperbolica è sempre compresa fra -1 e 1. Inoltre torna il caso notevole $M \to 0 \Rightarrow \beta \to 1$. Non solo, torna anche il caso notevole

$\beta_u = 0 \Rightarrow \beta = 0$. Purtroppo, come potete ben capire, il fatto che ci sia la tangente iperbolica di un logaritmo non è altrettanto rassicurante riguardo la possibilità ingegneristica di avvicinarsi a c in questo modo.

Soluzione 17.7 (Vela solare)**.** 1. Come prima cosa calcoliamo la forza dovuta alla radiazione $\vec{F}_{rad}$. Se lo specchio riflette perfettamente, allora i fotoni incidenti perpendicolarmente sullo specchio mantengono la direzione e cambiano verso. Per calcolare la forza è quindi sufficiente calcolare la variazione di quantità di moto dei fotoni incidenti sulla superficie del satellite per unità di tempo.

L'intensità della radiazione è pari a:

$$I = Nh\bar{\nu}$$

con N numero di fotoni incidenti per unità di tempo e area e $\bar{\nu}$ frequenza media dei fotoni. L'impulso trasportato quindi nell'unità di tempo e superficie è

$$Nh\frac{\bar{\nu}}{c} = \frac{I(r)}{c}$$

Segue subito quindi che la variazione di impulso per unità di tempo dello specchio, essendo l'opposto della variazione di impulso dei fotoni è

$$F_{rad} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 2\frac{I(r)A}{c}$$

Consideriamo adesso solo il caso di forza radiale (normale alla superficie parallela al raggio satellite-sole). In questo caso la forza è solo radiale, e per comodità ometteremo il simbolo di vettore nelle formule.

Per calcolare F_{rad}, dobbiamo fare attenzione al fatto che l'intensità della radiazione incidente sulla vela diminuisce all'aumentare del raggio. In particolare, dato che la potenza emessa integrata su una superficie sferica non deve dipendere dal raggio di questa, deve valere la relazione

$$I_0 r_0^2 = I(r) r^2$$

che può anche essere interpretata come una conservazione del numero di fotoni.

Quindi si ha che la forza radiale è del tipo:

$$F_{rad} = 2\frac{I_0 r_0^2 A}{cr^2}$$

Si osservi quindi che la forza in gioco totale agente sul satellite è nella forma:

$$\frac{2I_0r_0^2A/c - GM_\odot m}{r^2}$$

Ossia è come se ci fosse una forza gravitazionale "efficace" diversa dalla solita! Pertanto il problema è riconducibile ad un problema di un corpo che orbita attorno ad un pianeta di massa diversa. Quindi, dopo l'apertura della vela, l'energia (contando anche quella dovuta all'interazione con i fotoni solari) si conserva!

Sempre come conseguenza del fatto che tutte le forze in gioco sono radiali, il momento angolare L del satellite rispetto al sole è conservato.

La condizione per riuscire a uscire dall'orbita solare è, in analogia con problemi gravitazionali standard:

$$E_{cin,in} + U'_{in} \geq 0$$

dove $U' = \frac{2I_0r_0^2A/c - GM_\odot m}{r}$ è il finto potenziale gravitazionale.

L'energia cinetica iniziale è, per continuità, la stessa subito prima dell'apertura della vela[62]:

$$\frac{GM_\odot m}{2r_0}$$

Segue quindi la condizione:

$$A \geq \frac{cGM_\odot m}{4I_0r_0^2}$$

Si osservi che per questo valore di A la forza efficace è ancora attrattiva: il satellite si muove di moto parabolico verso l'infinito.

2. La diversa angolazione della vela ha due effetti principali. Il primo è che l'area effettivamente investita dai fotoni sia:

$$A_{\text{eff}} = A\cos\alpha$$

Il secondo è che la forza radiale dovuta alla radiazione sia:

$$F_{rad,r} = 2\frac{I_0r_0^2A_{\text{eff}}\cos\alpha}{cr^2} = 2\frac{I_0r_0^2A\cos^2\alpha}{cr^2}$$

[62]Segue rapidamente dal teorema del viriale: $2\langle K\rangle = -\langle U\rangle$

Inoltre si ha che il momento angolare non si conserva, visto che si ha una componente angolare della forza, pari a

$$F_{rad,\theta} = 2\frac{I_0 r_0^2 A_{\text{eff}} \sin\alpha}{cr^2} = 2\frac{I_0 r_0^2 A \cos\alpha \sin\alpha}{cr^2}$$

Si osservi che il campo di forze non è più conservativo: basta vedere che integrando su un cammino a r fissato si ha un lavoro ovviamente non nullo.

Per studiare il problema per piccoli angoli, è utile fare la seguente approssimazione: dato che comunque la forza tangenziale non sarà troppo grande, è lecito supporre che il moto del satellite avvenga sempre su una circonferenza e che la velocità radiale sia trascurabile.

Scriviamo ora la legge di conservazione dell'energia per il satellite, considerando anche che la forza di spinta del sole sta compiendo lavoro su di esso. La parte radiale la riassorbiamo nel solito finto potenziale, mentre la parte tangenziale inietta energia.

Si ha quindi

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2\frac{I_0 r_0^2 A \cos\alpha \sin\alpha}{cr}\dot{\theta}$$

Adesso, se assumiamo che l'angolo sia piccolo e la vela non troppo grande, possiamo supporre che il satellite si muova su orbite circolari e che la velocità radiale sia molto minore delle altre velocità in gioco. A questo punto è legittimo assumere che l'energia in media sia circa quella che si ha su una orbita circolare di un dato r, ossia

$$E = -\frac{GmM_\odot - 2I_0 r_0^2 A \cos^2\alpha / c}{2r}$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{GmM_\odot - 2I_0 r_0^2 A \cos^2\alpha / c}{2r^2}\dot{r}$$

Dato che il moto è circolare, deve valere la seguente relazione fra $\dot{\theta}$ e r, che è una sorta di generalizzazione del momento angolare

$$r^3 = \frac{GmM_\odot - 2I_0 r_0^2 A \cos^2\alpha / c}{m}\dot{\theta}^2$$

Quindi, sostituendo r dentro $\dot{\theta}$, si ottiene una equazione del moto per r, che sarà valida per piccoli t.

$$\frac{GmM_\odot - 2I_0 r_0^2 A\cos^2\alpha/c}{2r^2} = \frac{2I_0 r_0^2 A\cos\alpha\sin\alpha/c}{r}\left(\frac{m}{GmM_\odot - 2I_0 r_0^2 A\cos^2\alpha/c}\right)^{1/2} r^{3/2}$$

che è nella forma

$$\dot{r} = Cr^{5/2}$$

che ha una soluzione del tipo "polinomiale" del tipo:

$$r = \frac{C_1}{(C_2 - t)^{2/3}}$$

Dato che è istruttivo vedere come si ricava questo risultato, facciamolo.

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = Cr^{5/2} \Rightarrow r^{-5/2}\,\mathrm{d}r = C\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{r_0}^{r(t)} r^{-5/2}\,\mathrm{d}r = C\int_0^t \mathrm{d}t$$

Fare questi due integrali è semplice, possiamo svolgerli esplicitamente

$$-\frac{2}{3}\left(r(t)^{-3/2} - r_0^{-3/2}\right) = Ct \Rightarrow r(t) = \frac{1}{\left(r_0^{-3/2} - \frac{3}{2}Ct\right)^{2/3}}$$

Che effettivamente è della forma indicata prima.

3. Analizziamo il problema nel sistema di riferimento tangente. Supponiamo che uno dei fotoni radiati si propaghi lungo x, direzione del moto dello specchio. Il quadriimpulso è quindi nella forma:

$$p_1'^{\mu} = \frac{h\nu'}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dopo rimbalza sullo specchio, e il quadriimpulso diventa:

$$p_2'^{\mu} = \frac{h\nu'}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto si può calcolare l'impulso trasferito allo specchio per unità di tempo sommando l'impulso di tutti i fotoni:

$$\frac{\Delta p'_x}{\Delta \tau} = 2\frac{n'_{\mathrm{colp}} h\nu'}{c}$$

dove n'_{colp} sono i fotoni incidenti per unità di tempo proprio. Ma questi, vista la relazione fra t e τ, sono pari a

$$n'_{\mathrm{colp}} = \gamma n_{\mathrm{colp}}$$

dove γ è calcolato con la velocità v dello specchio rispetto alla sorgente. E' lecito usare la formula di dilatazione temporale perchè i fotoni colpiscono punti con la stessa coordinata!

Adesso dobbiamo collegare n_{colp} a n. Non è difficile mostrare la relazione:

$$n_{\mathrm{colp}} = n(1-\beta)$$

Applicando la legge di Newton nel sistema tangente (la formula non relativistica va bene perchè siamo istantaneamente fermi), si ottiene l'accelerazione lungo l'asse x:

$$a' = 2\gamma n(1-\beta)\frac{h\nu'}{mc}$$

Se lo specchio si muove a velocità v rispetto al laser, allora intuitivamente nel sistema che inerziale che istantaneamente è solidale con lo specchio i fotoni hanno frequenza minore per effetto Doppler. Infatti, trasformando il quadriimpulso del fotone incidente, si ha che la sua frequenza $\nu\prime$ vista dallo specchio è:

$$\nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu < \nu$$

Dunque si ha:

$$a' = 2h\frac{n'h\nu'}{mc} = 2\frac{nh\nu}{mc}\gamma(1-\beta)\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = 2\frac{nh\nu}{mc}\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

Per trovare l'accelerazione nel sistema S, è conveniente trasformare la quadriaccelerazione. Nel sistema tangente la quadriaccelerazione è:

$$a'^{\,\mu} = \frac{\mathrm{d}v'^{\,\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2n\frac{h\nu}{mc}\frac{1-\beta}{1+\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per tornare in S dobbiamo applicare boost di Lorentz con velocità $-v$ lungo x. Segue quindi che in S la quadriaccelerazione è:

$$a^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \begin{pmatrix} 2\gamma\beta n\frac{h\nu}{mc}\frac{1-\beta}{1+\beta} \\ 2\gamma n\frac{h\nu}{mc}\frac{1-\beta}{1+\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare l'accelerazione $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, basta scrivere con cura la definizione di quadriaccelerazione e ricordarsi che è

$$a^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \begin{pmatrix} \gamma^4\beta\frac{\mathrm{d}v}{c\,\mathrm{d}t} \\ \gamma^4\frac{v^2}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \gamma^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato nelle derivate il fatto che per moti 1D la derivata del modulo di $\vec{v}$ è l'accelerazione. Segue eguagliando le due espressione per a_x (ossia la parte spaziale della quadriaccelerazione) che l'accelerazione $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ in S (che non è la componente spaziale della quadriaccelerazione) è:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2\frac{nh\nu}{\gamma^3 mc}\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

4. La distanza dal sole influisce sul numero di fotoni incidenti $N(r)$:

$$N(r) = \frac{I(r)A}{h\nu} = \frac{AI_0 r_0^2}{h\nu r^2}$$

Abbiamo supposto il sole come sorgente monocromatica: la cosa può essere sembrare resitrittiva ma in realtà non lo è perchè la distribuzione spettrale si comporta bene sotto boost.

Per definizione , nel sistema S la forza è

$$F = \frac{\mathrm{d}(m\gamma v)}{\mathrm{d}t} = m\gamma^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Da cui

$$F = \frac{n(r)h\nu}{c}\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

Adesso dobbiamo legare n (numero di fotoni emessi dal sole per unità di tempo che incidono sulla vela) a $N(r) = \frac{I(r)}{h\nu}$ (numero di fotoni emessi per unità di tempo e superficie a distanza r dal sole).

Il numero di fotoni emessi per unità di tempo destinati a colpire la vela sono proprio

$$n(r) = \frac{AI_0 r_0^2}{h\nu r^2}$$

Segue quindi che la forza è

$$F = \frac{I_0 r_0^2 A}{cr^2} \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

Riferimenti bibliografici

[D'E18] Massimo D'Elia. *Appunti di Meccanica Relativistica*. 2018. Reperibile qui.

[Jac98] John David Jackson. *Classical Electrodynamics Third Edition*. Wiley, 1998.

[LL80] Lev Davidovič Landau and Evgenij Michajlovič Lifšic. *The Classical Theory of Fields: Volume 2 (Course of Theoretical Physics Series)*. Butterworth-Heinemann, 1980.

[Mor08] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2008.

[TBS19] Giovanni Maria Tomaselli, Giuseppe Bogna, and Veronica Sacchi. Meccanica celeste, 2019. Reperibile qui.