

Introduzione alla relatività ristretta

Fabio Zoratti*, Marco Costa†

9 febbraio 2018

Sommario

Lo scopo della lezione è di spiegare le basi teoriche della relatività ristretta. Si introducono i postulati e si mostrano le tre principali conseguenze della teoria (dilatazione tempi, contrazione lunghezze, perdita di simultaneità). Poi si introducono le trasformazioni di Lorentz e il concetto di intervallo invariante e quadri-vettori. Successivamente si costruiscono in modo intuitivo altri quadri-vettori e si mostra la dinamica relativistica. Infine si accenna a come la relatività giochi un ruolo particolare in elettromagnetismo, fornendo un esempio famoso della sua necessità.

1 Introduzione

Le equazioni di Maxwell, scoperte nella seconda metà del 1800, predicono la propagazione di onde elettromagnetiche con velocità pari a c , costante da determinare da esperimenti. Le equazioni dei campi nel vuoto infatti risolvono

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x_i^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2)$$

Agli inizi del 1900, le equazioni dell'elettrodinamica erano in accordo con tutte le verifiche sperimentali effettuate. Il pilastro della fisica fino ad

*fabio.zoratti@sns.it

†marco.costa@sns.it

allora era la meccanica classica, che è supposta essere invariante sotto le trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \end{cases} \quad (3)$$

Queste consentono di cambiare le coordinate da un sistema di riferimento inerziale S ad uno inerziale S' che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}$ rispetto a questo.

La fisica era supposta essere invariante sotto queste trasformazioni: le leggi fisiche sono le stesse nei vari sistemi di riferimento inerziali. Tuttavia le equazioni 2, non sono invarianti sotto queste trasformazioni: i campi elettrici e magnetici obbedirebbero ad equazioni diverse dalle 2.

In particolare, dato che le trasformazioni 3 implicano che le velocità debbano essere additive, ci aspettiamo che la velocità di propagazione della luce non sia sempre c nei vari sistemi di riferimento! Per cercare di spiegare il disaccordo fra le due teorie si possono intraprendere due strade.

- Si assume che le trasformazioni di Galileo e quindi la meccanica di Newton siano leggi valide in ogni sistema di riferimento, mentre la velocità della luce pari a c come un fatto valido sono nel sistema di riferimento dell'*etere*.
- Si suppone, come fatto da Einstein, che le equazioni di Maxwell siano le vere leggi della fisica. Conseguentemente si deve assumere che la velocità c della luce sia la stessa in ogni sistema di riferimento.

Vari esperimenti (Michelson-Morley, Fizeau, tutti gli esperimenti di alte energie negli acceleratori di particelle) hanno sempre confermato la seconda ipotesi, che sta alla base della teoria della relatività ristretta. Nella sezione successiva studieremo sistematicamente i postulati di questa teoria.

2 Postulati della relatività

La relatività ristretta si basa su due postulati fondamentali:

Postulato 2.1. *Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Postulato 2.2. *La velocità della luce c è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Inoltre si assume sempre che lo spazio sia omogeneo ed isotropo (ossia che non ci siano punti nè direzioni privilegiate).

Il primo postulato sostanzialmente afferma che una legge della natura, espressa nella coordinate di un sistema inerziale S è la stessa in forma se scritta in un altro sistema inerziale S' nelle coordinate di S' . Si osservi che questo postulato era valido pure in meccanica classica (il cosiddetto principio di relatività galileiano). Pertanto le principali differenze fra lo spaziotempo di Newton e quello descritto in relatività ristretta provengono dall'altro postulato.

Il secondo postulato è molto meno intuitivo, e consente subito di predire qualche caratteristica della nuova teoria. In particolare segue subito che le velocità non possono essere additive in relatività ristretta, altrimenti la velocità della luce non sarebbe la stessa in differenti sistemi inerziali.

Ad esempio, supponiamo di essere in un sistema inerziale S . Una macchina sta viaggiando alla velocità costante $\vec{v}$ rispetto a voi, e sul tettuccio ha legata una lampadina che irraggia luce nella direzione del moto. Allora sia nel sistema S sia nel sistema solidale alla macchina osserviamo la luce muoversi alla velocità c in tale direzione, e non $\vec{c} + \vec{v}$!

Si può mostrare a partire dai postulati che sistemi inerziali¹ si muovono a velocità relativa costante². Nella trattazione che segue ad ogni modo assumeremo che questi siano tra loro in moto rettilineo uniforme e non ci soffermeremo su dettagli più tecnici.

3 Ritardo dell'informazione

Come vedremo, la velocità dei segnali non può propagarsi più velocemente della luce. Da questo segue che dobbiamo porre attenzione a come si misurano in pratica le distanze e gli intervalli temporali.

3.1 Definizioni operative

Dobbiamo adesso dare un modo operativo per poter misurare i tempi e le distanze in relatività ristretta.

3.1.1 Orologio luce e misura di tempo

Per misurare i tempi si utilizza un cosiddetto orologio luce.

Questo dispositivo è costituito da due superfici piane e parallele, separate da una distanza L . Su una poniamo un rivelatore di luce ed un dispositivo

¹Ossia in cui un corpo libero si muove di moto rettilineo uniforme.

²Esistono anche approcci in cui si assume direttamente che sistemi inerziali si debbano muovere di moto rettilineo uniforme, in accordo con il caso classico.

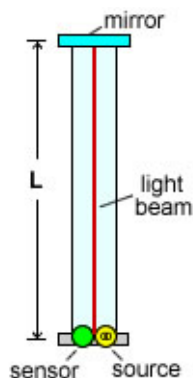


Figura 1: Orologio luce

laser puntato perpendicolarmente verso la seconda superficie, che sarà uno specchio riflettente. La sorgente emette luce che giunge allo specchio, viene riflessa e torna indietro sul rilevatore. Una volta che la luce è stata rilevata, il laser emette un nuovo impulso, e così via. Così sappiamo che il tempo trascorso fra un impulso e il successivo è $\frac{2L}{c}$.

In pratica misurare il tempo significa "contare" quante volte la luce torna sul rilevatore.

3.1.2 Regolo rigido e misura distanze

Cosa si intende per misura di distanza?

Se vogliamo misurare la distanza fra diversi punti dello spazio, l'idea è di costruire un reticolo cartesiano tridimensionale e poi usare il teorema di Pitagora per calcolare le distanze nel modo solito.

Un procedimento equivalente è quello di porre uno specchio nel punto di cui si vuole la distanza, spararci perpendicolarmente un raggio di luce dall'origine e misurare il tempo τ (stando con l'orologio fermi nell'origine) di andata e ritorno del raggio. E' naturale definire la distanza fra l'origine e il punto come $\frac{c\tau}{2}$. Si osservi che in questo modo si può facilmente costruire un sistema di coordinate cartesiane, ripetendo la procedura nelle tre direzioni ortogonali.

Inoltre con questo modo di assegnare distanze, si riesce a capire quanto un punto sia da noi lontano guardando il "ritardo" dell'orologio posto in quel punto. Ad esempio, supponiamo che sul sole (distante circa 8 minuti-luce da noi) ci sia un enorme orologio digitale, le cui cifre siano visibili fino sulla terra. Allora un osservatore sulla terra lo vedrebbe segnare il tempo con 8 minuti di ritardo rispetto al proprio orologio luce (supponendo che questi siano stati sincronizzati, vedi sezione successiva).

Una volta costruito il sistema cartesiano, si può calcolare ad esempio la lunghezza di sbarre ferme nel nostro sistema di riferimento semplicemente misurando la distanza ("cartesiana") fra gli estremi.

Cosa fare se invece il corpo è in moto relativo al sistema, ad esempio lungo l'asse x ? Per semplicità consideriamo una sottile sbarra direzionata lungo l'asse x . Si definisce lunghezza la distanza euclidea degli estremi calcolata con le loro coordinate prese allo stesso tempo t . Ad una più attenta analisi questa prescrizione è utilizzata anche per misurare lunghezze in uno spaziotempo newtoniano, e non rappresenta davvero nulla di nuovo. Tuttavia, mentre non ci sono particolari problemi per misurare lunghezze di corpi a riposo, per corpi in movimento abbiamo bisogno di avere orologi agli estremi della lunghezza da misurare che siano sincronizzati fra loro per poter prendere le misure in modo corretto.

3.1.3 Sincronizzazione orologi

Supponiamo di essere in un sistema inerziale S . Supponiamo che ci siano due osservatori a riposo in S , A e B , che si trovano in punti spaziali distanti d . Entrambi sono dotati di orologi-luce. Entrambi possono utilizzare i loro orologi per misurare i tempi a cui avviene un qualche evento nel loro punto spaziale. Se tuttavia non c'è modo di sincronizzare gli orologi di A e B , ossia di porre una comune origine dei tempi, le misure fatte saranno inutili.

Per sincronizzare gli orologi, esiste la seguente procedura:

- Si inizia con entrambi gli orologi spenti; gli orologi sono costruiti in modo tale da essere attivati da un raggio di luce.
- Si setta l'origine temporale dell'orologio A a 0, e l'origine del secondo a $\frac{d}{c}$.
- Si sposta l'orologio B nel punto desiderato a distanza d , sempre senza accenderlo.
- L'osservatore A attiva il proprio orologio e contemporaneamente invia un segnale luminoso a B .
- Dopo un tempo $\frac{d}{c}$, B riceve il segnale e il suo orologio si attiva.

Si osservi che per questo metodo abbiamo solo bisogno di misurare una distanza fra punti fissi e non in moto relativo, e quindi non c'è bisogno di una sincronizzazione degli orologi per mettere in atto la procedura delineata.

In questo modo abbiamo che i due orologi sono sincronizzati. Si osservi che questa procedura può essere ripetuta per un qualsiasi numero di orologi che vogliamo utilizzare in vari punti dello spazio.

Un ulteriore metodo per sincronizzare gli orologi, è quello di azionarli nello stesso punto contemporaneamente, e poi di spostare l'orologio B nel punto desiderato molto lentamente, in modo da rendere piccole a piacere eventuali dilatazioni temporali.³

4 Tre conseguenze fondamentali

La relatività ristretta ha alcune conseguenze cinematiche fondamentali che la rendono diversa dal caso classico.

4.1 Dilatazione dei tempi

Consideriamo un osservatore A che si trova in una stazione dei treni con un orologio luce i cui raggi siano visibili anche ad altri osservatori (possiamo immaginare che l'orologio abbia una "custodia" esterna trasparente).

Un treno sta sfrecciando per la stazione a velocità uniforme v in direzione orizzontale $\hat{x}$ rispetto all'osservatore A . A bordo di questo, c'è un osservatore B che vuole misurare con il suo orologio luce il tempo $\Delta t'$ che intercorre fra gli eventi "emissione raggio di luce da orologio di A " e "rivelazione raggio di luce dell'orologio di A ", visti dal suo sistema di riferimento S_B (in pratica vuole misurare il tempo che A usa per misurare i propri tempi).

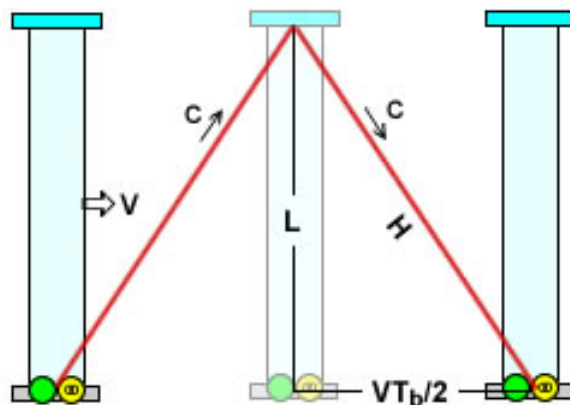


Figura 2: Traiettoria dei raggi di luce dell'orologio di A visti da B .

Il percorso del raggio di luce dell'orologio di A visto nel sistema S_B è riportato in figura 2. Dato che il raggio di luce in A fa un solo "viaggio di

³Si veda la sezione successiva

andata e ritorno” dalla sorgente laser durante i due eventi considerati, $\Delta t'$ è per definizione il tempo impiegato in S_B dal raggio di luce dell'orologio di A per fare andata e ritorno. Utilizzando il teorema di Pitagora, è facile accorgersi che la distanza percorsa dalla luce in S_B è

$$d = 2\sqrt{L^2 + v^2 \frac{\Delta t'^2}{4}} = \sqrt{4L^2 + v^2 \Delta t'^2}$$

E' cruciale osservare che la velocità del raggio di luce dell'orologio di A visto in S_B è comunque c ! Segue quindi che

$$\Delta t' = \frac{d}{c} = \sqrt{4 \frac{L^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \Delta t'^2}$$

Ma $\Delta t = 2L/c$ per definizione!⁴ Segue quindi la relazione:

$$\Delta t'^2 = \Delta t^2 + \frac{v^2}{c^2} \Delta t'^2$$

da cui segue la formula:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot \Delta t \quad (4)$$

dove abbiamo definito le quantità

$$\begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

Il fatto che la velocità della luce sia uguale in tutti i sistemi di riferimento ha quindi l'importante conseguenza che la distanza temporale fra due eventi che si trovano sulla stessa coordinata x in S si dilata di un fattore $\gamma > 1$ per $v < c$. Si osservi anche che nel limite classico $v \ll c$, si ha che $\gamma \approx 1$, ossia $\Delta t \approx \Delta t'$, in accordo con le trasformazioni di Galileo.

Precisiamo una cosa: in tutto questa discussione abbiamo supposto che l'osservatore B tenesse in conto durante le misure del tempo di propagazione finito della luce che, emessa da A , si propaga fino a lui, sottraendo opportunamente i ritardi temporali. La cosa importante è appunto che questa trasformazione dei tempi avviene indipendentemente dal tempo di ritardo impiegato dalla luce per arrivare all'apparato sperimentale di B .

⁴Stiamo assumendo che le lunghezze in direzione ortogonale al moto relativo siano uguali nei due sistemi

Altra precisazione molto importante da fare è che questa semplice formula di dilatazione dei tempi vale perchè gli eventi "emissione luce" e "rilevazione luce" avvengono in punti con stessa coordinata x (direzione del moto relativo) in S^5 . Proprio per questo motivo non è lecito utilizzare la formula di dilatazione dei tempi "al contrario" invertendo i ruoli di S e S' : gli eventi che abbiamo considerato non avvengono nella stessa x' in S' .

4.2 Contrazione delle lunghezze

Il fatto che l'intervallo temporale tra due eventi sia diverso per due osservatori in differenti sistemi si riflette sulle distanze spaziali.

Consideriamo un'auto che si muove a velocità relativistica v su una pista rettilinea. Consideriamo due sistemi di riferimento

- S_1 Il sistema solidale alla pista
- S_2 Il sistema solidale all'auto

L'auto percorre un tratto di strada che secondo S_1 è lungo L_1 in un tempo Δt_1 . Vogliamo trovare che cosa misura invece l'osservatore 2.

Facciamo chiarezza su cosa viene misurato e cosa sono le grandezze che abbiamo identificato. Denotiamo il tratto di strada mettendo due paletti nel terreno, il paletto A , il primo, e il paletto B , il secondo. Secondo S_1 , la distanza fra i due paletti è L_1 . Inoltre, sempre secondo S_1 , l'auto impiega un tempo Δt_1 ad andare dal paletto A al paletto B .

Nel sistema S_2 , invece, i due paletti distano L_2 , a priori $L_2 \neq L_1$, e impiegherà un tempo Δt_2 da quando vede il paletto A sfrecciare accanto a lui a quando vede il paletto B .

Nel riferimento S_2 quindi gli eventi *passo davanti ad A* e *passo davanti a B* accadono nello stesso luogo. Di conseguenza si può usare la formula 4 e dire che

$$\Delta t_1 = \gamma \Delta t_2$$

Ovvero che secondo l'osservatore sulla pista l'auto ci mette più tempo. Dato che nel riferimento S_2 il palo B viaggia a velocità v verso l'auto, nel tempo Δt_2 il palo B percorre una distanza $L_2 = v \Delta t_2$. Usando la relazione di prima

$$L_2 = \frac{L_1}{\gamma} \tag{5}$$

⁵Con il formalismo delle trasformazioni di Lorentz sarà più chiaro il perchè.

Che è la formula di contrazione relativistica delle lunghezze. Come per la formula 4, ha senso utilizzarla da S_1 a S_2 e non al contrario in quanto la misurazione di S_1 ha qualcosa di più di quello che misura S_2 in quanto nel riferimento S_1 **l'oggetto misurato è fermo**.

Questa lunghezza caratteristica viene chiamata lunghezza a riposo ed è qualcosa di intrinseco nell'oggetto che non dipende dal riferimento⁶.

Teniamo a precisare che la lunghezza misurata nel sistema del laboratorio è effettivamente minore della lunghezza della sbarra misurata nel sistema in cui questa è a riposo. La contrazione delle lunghezze **non** è un effetto dovuto ai ritardi della luce utilizzata per misurare.

E' anche importante osservare che le lunghezze in direzioni ortogonali alla velocità relativa dei sistemi di riferimento non subiscono variazioni.

4.3 Perdita della simultaneità

L'ultima conseguenza importante è la perdita di simultaneità fra eventi.

Supponiamo che un osservatore B (sistema S') si trovi su un treno che si muove a velocità v in una certa direzione rispetto ad un osservatore A (sistema S). Supponiamo che al centro della carrozza ci sia un laser che può emettere luce nella direzione del moto del treno e in entrambi i versi. Se B attiva il laser, le pareti della carrozza verranno colpite dalla luce simultaneamente in S_B .

Tuttavia l'osservatore A non vedrà le due pareti del treno colpite simultaneamente. Infatti, A vede luce partire dal centro del treno viaggiare in entrambi i sensi a velocità c .

Dato che la parete posteriore della carrozza si muove verso il raggio di luce, mentre quella anteriore se ne allontana, segue che la prima verrà colpita prima della seconda.

Pertanto eventi simultanei in un sistema di riferimento non è detto lo siano in un altro.

Per concludere, immaginiamo che le pareti della carrozza siano completamente riflettenti. Pertanto, una volta che i raggi luminosi raggiungono gli estremi della carrozza, vengono riflessi e tornano verso il punto di emissione. E' evidente che in S' i raggi di luce tornano al centro della carrozza simultaneamente. Ci chiediamo se anche l'osservatore A in S veda gli eventi "i raggi tornano al centro della carrozza" avvenire allo stesso tempo.

La risposta è affermativa: basta considerare che dopo essere stati riflessi la situazione diventa effettivamente simmetrica per i due raggi.

⁶In quanto per misurarla si prende un riferimento in cui è fermo.

Un altro modo per giustificare la cosa è di notare che i raggi in S' tornano nello stesso punto spaziale allo stesso tempo. Pertanto, la situazione è analoga all'emissione: raggi emessi allo stesso tempo e nello stesso punto in S' lo erano pure in S !⁷⁾

5 Intervalli

In questa sezione si vuole dare una linea guida per poter ricavare le trasformazioni di Lorentz a partire dai postulati della teoria e dall'analisi del cosiddetto intervallo invariante. Non si approfondirà volutamente l'aspetto più matematico.

Le tre conseguenze studiate in precedenza ci costringono ad adottare un modello matematico per lo spazio-tempo diverso rispetto a quello utilizzato in meccanica classica.

Il modello matematico dello spazio-tempo usato in relatività è lo spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ (anche detto *spazio-tempo di Minkowski*).

Definiamo *evento* un punto dello spazio-tempo di Minkowski. In un dato sistema di riferimento, l'evento è caratterizzato da una quaterna di numeri (ct, x, y, z) , ossia una coordinata temporale (riscalata per un fattore c) e tre spaziali. E' importante capire la differenza fra l'evento e le coordinate dell'evento in un dato sistema di riferimento. Si osservi che questa distinzione esisteva anche in meccanica classica, quindi non è niente di davvero nuovo.

Ci piacerebbe capire come le coordinate che descrivono un evento in un sistema di riferimento S cambiano in un altro sistema di riferimento inerziale S' , tenendo in considerazione che abbiamo introdotto il postulato 2.

Come prima cosa cerchiamo di capire più o meno delle proprietà di base che devono avere queste trasformazioni.

Per la definizione che abbiamo dato di sistemi inerziali, un moto rettilineo uniforme in S lo deve essere pure in S' . Si può mostrare che questa richiesta (assieme a omogeneità ed isotropia dello spazio) equivale a richiedere che le trasformazioni di coordinate siano trasformazioni lineari.

Quindi già da questa assunzione fisica abbiamo guadagnato la linearità dei cambi di coordinate; tuttavia questo non è ancora sufficiente, e per andare avanti nella nostra analisi è necessario studiare meglio le conseguenze del secondo postulato.

Consideriamo due sistemi inerziali S, S' , in moto relativo fra loro. Per semplicità, S sarà il sistema che considereremo solidale al nostro laboratorio e S' come in moto relativo ad esso, ma è chiaro per il principio di relatività

⁷Se la cosa non è chiara, lo sarà con le trasformazioni di Lorentz

che le stesse conclusioni possono essere tratte se invertiamo i ruoli dei due sistemi.

Indicheremo con (ct, x, y, z) le coordinate di S , mentre quelle di S' saranno primarie. Supponiamo anche per semplificare i calcoli che le origini del tempo e dello spazio dei due sistemi coincidano; questo significa che quando $t = t' = 0$, si ha che $(x, y, z) = (x', y', z')$, ossia le origini spaziali degli assi coincidono quando gli orologi di S e S' indicano 0.

Poniamo nell'origine di S una lampadina che emetta luce in maniera isotropa. All'istante $t = 0$, quando le origini spaziali dei due sistemi coincidono, accendiamo la lampadina per un tempo infinitesimo.

Ci chiediamo quale sia il luogo dei punti raggiunti dalla luce nei due sistemi.

Dato che la luce viaggia a c sia in S che in S' , segue che tale luogo geometrico è descritto nelle coordinate dei due sistemi dalle equazioni:

$$\begin{aligned} S : (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) &= 0 \\ S' : (ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) &= 0 \end{aligned}$$

ossia è una superficie sferica in entrambi i sistemi. Questo risultato è molto diverso da quanto avremmo avuto usando lo spazio-tempo di Newton.

Da questo possiamo dedurre una proprietà delle trasformazioni di coordinate: esse devono lasciare invariato il luogo dei punti dei raggi di luce generati dalla sorgente isotropa. Quindi la trasformazione di coordinate deve essere tale da mandare quaterne (ct, x, y, z) tali per cui $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ in quaterne (ct', x', y', z') con la stessa proprietà.

Tutta la notazione precedente può essere particolarmente snellita utilizzando un formalismo più compatto.

Definiamo il quadrivettore⁸ coordinate $x^\mu = (ct, x, y, z)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Con $\mu = 0$ si indica la coordinata temporale del quadrivettore, mentre le restanti indicano le coordinate spaziali.

Definiamo adesso l'*intervallo invariante* s^2 come il "prodotto scalare" di un quadrivettore con se stesso.

$$x^\mu \cdot x_\mu = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = s^2$$

Piccola precisazione: il simbolo s^2 usato per l'intervallo invariante non significa che questo debba essere necessariamente una quantità positiva (ed in generale non lo è); il quadrato significa solo che operativamente si sta facendo una sorta di prodotto scalare di un vettore con se stesso e nient'altro.

⁸Il significato di questa espressione sarà approfondito in seguito

Capita spesso di trovare scritta la stessa espressione nelle forme equivalenti

$$x^\mu \cdot x_\mu = x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

Non dovete preoccuparvi davvero del significato profondo di queste espressioni, sono assolutamente superflue per qualsiasi problema che si affronta alle Olimpiadi. Per ora potete pensarle come pura notazione. Se volete dare un minimo di significato in più, per esempio la scrittura $g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ è una *abbreviazione*⁹ per la seguente espressione

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

Dove $g_{\mu\nu}$ si chiama *metrica piatta di Minkowski* e vale

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{Se } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{Se } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

È possibile immaginare quella espressione come prodotto fra matrici, ma dato che non sapete cosa sono le matrici e che non aggiunge davvero niente all'argomento, dimenticatevene pure.

Si può dimostrare che, sotto assunzione di isotropia e omogeneità dello spazio-tempo, le trasformazioni lineari che lasciano invariato i vettori con $s^2 = 0$ lasciano invariato tutti gli s^2 (anche diversi da 0).

Detto in breve, se l'osservatore in S prende un quadrivettore e ne calcola l'intervallo invariante, ottiene lo stesso risultato dell'osservatore in S' che calcola l'intervallo invariante dello stesso quadrivettore espresso nelle coordinate di S' .

Si ha pertanto che è possibile classificare i quadrivettori a seconda del segno del loro s^2 , essendo questa una cosa che non dipende dal sistema di riferimento scelto:

Definizione 5.1. Un quadrivettore è detto di tipo luce se $s^2 = 0$, di tipo tempo se $s^2 > 0$, di tipo spazio se $s^2 < 0$.

Come vedremo, le particelle fisiche, la cui velocità è sempre minore di c , hanno traiettorie i cui punti sono quadrivettori con $s^2 > 0$.

⁹In particolare si chiama *convenzione di Einstein sugli indici ripetuti*. Noi non la utilizzeremo, anche se è molto comoda, in quanto confonde le idee a chi è alle prime armi. La convenzione dice che in una espressione indiciale, gli indici ripetuti si intendono sommati. Potete dimenticarvi di questa affermazione e ripescarla quando inizierete geometria differenziale.

Tutte queste osservazioni possono sembrare inutili, tuttavia da queste si riesce a trovare l'espressione generale delle trasformazioni che ci consentono di esprimere le coordinate di un evento dello spazio-tempo in diversi sistemi di riferimento.

6 Trasformazioni di Lorentz

Come anticipato nella sezione precedente, le trasformazioni di coordinate fra sistemi di riferimento inerziali sono quelle lineari che lasciano invariato l'intervallo invariante. Queste sono le cosiddette *trasformazioni di Lorentz*. Ecco alcune proprietà:

- La composizione di due trasformazioni di Lorentz è ancora una trasformazione di Lorentz.
- Ogni trasformazione ammette una trasformazione inversa.
- La composizione di trasformazioni di Lorentz è associativa

Le trasformazioni di Lorentz si dividono in due classi¹⁰: le rotazioni attorno ai tre assi cartesiani e i boost lungo i tre assi.

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \\ y' = \cos(\alpha)y - \sin(\alpha)z \\ z' = \sin(\alpha)y + \cos(\alpha)z \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma\beta x \\ x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (7)$$

L'equazione 6 rappresenta un cambio di coordinate per passare da un sistema S ad uno S' ottenuto ruotando gli assi attorno all'asse x di un angolo α in senso orario.

In meccanica classica si aveva una formula del tutto uguale per passare da un sistema ad un altro tramite semplice rotazione.

L'equazione 7 rappresenta un cambio di coordinate per passare da un sistema S ad uno S' che si sta muovendo con velocità uniforme $v = \beta c$ lungo

¹⁰Stiamo volutamente escludendo dalla trattazione trasformazioni di parità e di inversione temporale. Ci limitiamo al cosiddetto sottogruppo proprio delle trasformazioni di Lorentz.

l'asse x rispetto ad S (per convincersene, basta vedere come si muove l'origine di S' in S). Si osservi che i boost galileiani (equazione 3) sono il limite dei boost di Lorentz per $\frac{v}{c} \ll 1$. Esplicitamente, le trasformazioni di Galileo si ottengono con il limite formale $\gamma \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 0$, ma tenendo fissa la quantità $\beta c = v$. In questo modo, le trasformazioni in 7 diventano

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = -vt + x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

che semplificando le c diventano semplicemente le note trasformazioni di Galileo.

Inoltre esistono ovviamente le rotazioni e boost lungo un qualsiasi asse: per semplicità è stato riportato solo quello lungo un asse particolare.

Esistono solo due cambi di riferimento Vogliamo adesso fare una riflessione sulle trasformazioni di Galileo e Lorentz.

La grande differenza fra le due viene dal fatto che nelle prime non si ha una velocità limite di propagazione, mentre nelle seconde vi è un limite che non può essere superato tramite boost, il cui valore è rigorosamente finito e viene determinato da esperimenti.

In effetti, se richiediamo che nella nostra teoria esista una velocità limite finita, uguale in tutti i sistemi di riferimento (non serve neanche dire che sia la velocità della luce in particolare), otteniamo le trasformazioni di Lorentz. Se invece richiediamo che non ci sia una velocità limite, allora si ottengono le trasformazioni di Galileo.

Velocità relative Consideriamo un corpo A fermo nell'origine di un sistema inerziale S . Prendiamo in questo sistema un corpo B che si muove a velocità v lungo l'asse x .

Adesso ci poniamo nel sistema di riferimento inerziale S' solidale a B , con gli assi presi paralleli a quelli di S e orientati allo stesso modo. Ci chiediamo se la velocità relativa di A in S' sia la stessa in modulo (e opposta in verso).

Per dare una risposta basta convincersi che un boost di Lorentz con velocità $\vec{v}$ è la trasformazione inversa ad un boost con velocità $-\vec{v}$, e che quest'ultima è l'unica velocità che ci consente di passare da S' a S ¹¹.

Per il calcolo, consideriamo per semplicità il caso 1D. Come prima cosa passiamo da S a S' .

¹¹Ossia che la trasformazione inversa è unica!

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma\beta x \\ x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \end{cases}$$

Adesso che ci siamo messi nel sistema solidale a B , facciamo il cambio di coordinate che ci riporta a S . Se proviamo a fare il boost con velocità $-v$, allora in effetti otteniamo

$$\begin{cases} ct'' = \gamma ct' + \gamma\beta x' = \gamma(\gamma ct - \gamma\beta x) + \gamma\beta(-\gamma\beta ct + \gamma x) = \gamma^2(1 - \beta^2)ct = ct \\ x'' = \gamma\beta ct' + \gamma x' = \gamma\beta(\gamma ct - \gamma\beta x) + \gamma(-\gamma\beta ct + \gamma x) = \gamma^2(1 - \beta^2)x = x \end{cases}$$

Quindi in effetti il moto di A visto in S' è proprio rettilineo uniforme con velocità opposta a quella di B rispetto ad A .

7 Diagrammi di Minkowski

Spesso è utile visualizzare in modo intuitivo come appaiono le coordinate di eventi in sistemi di riferimento diversi.

Uno strumento per fare ciò sono i cosiddetti diagrammi di Minkowski.

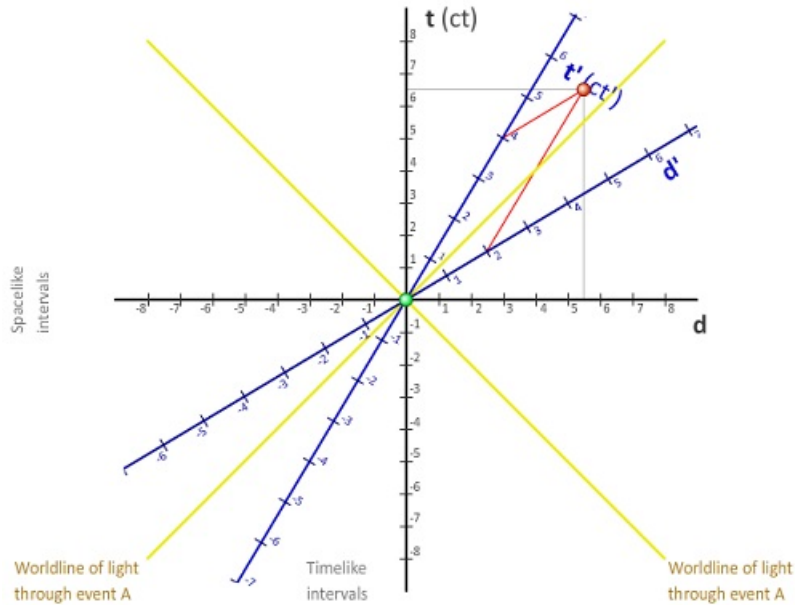


Figura 3: Diagramma di Minkowski

L'effetto di un boost di Lorentz sul diagramma è quello di "piegare" gli assi e dilatare le unità di misura di queste. Conseguentemente le coordinate

nel sistema boostato vanno lette in modo diverso: si tracciano righe parallele ai nuovi assi passanti per il punto di cui si cercano le coordinate e si leggono i valori delle intersezioni con i nuovi assi.

In questo modo è facile vedere come eventi simultanei nel sistema a riposo, che quindi giacciono sulla retta orizzontale a t costante, non giacciono su una retta a t' costante. Questo significa che gli eventi non sono simultanei in S' ! Analogo discorso si può fare per la contrazione delle lunghezze o dilatazione dei tempi fra due eventi.

Si osservi che comunque la retta che rappresenta la traiettoria di un raggio luminoso sparato dall'origine (il cosiddetto *cono luce*) resta la stessa in entrambi i sistemi: è sempre la bisettrice dell'angolo compreso fra gli assi.

Ci si convince facilmente che eventi all'interno del cono luce sono di tipo tempo (ossia con $s^2 > 0$), mentre punti all'esterno di questo sono di tipo spazio ($s^2 < 0$).

Sempre dal diagramma di Minkowski è semplice identificare tre regioni:

- Il futuro assoluto: è la regione all'interno del cono luce a tempi positivi. Questa è la regione di eventi su cui cose che accadono nell'origine spazio-temporale possono avere influenza causale. Per entrambi i sistemi di riferimento considerati questi eventi sono nel futuro (ossia t e t' positivi).
- Il passato assoluto: è la regione all'interno del cono luce a tempi negativi. Questi sono gli eventi che possono aver avuto influenza causale su un evento collocato nell'origine. Anche in questo caso, osservatori in diversi sistemi di riferimento sono comunque d'accordo sul fatto che un evento passato sia passato (ossia t e t' negativi).
- Altrove: è la regione esterna al cono luce. Per osservatori diversi questi eventi possono essere avvenuti a tempi positivi o negativi. Tuttavia questo non è problematico visto che questi eventi non possono avere avuto influenza causale su un evento collocato nell'origine.

Ad ogni modo, il fatto che gli assi "si pieghino" è solo un trucco grafico per vedere come un particolare punto dello spazio-tempo sia visto nel sistema boostato, e ci teniamo a precisare che gli assi non si piegano fisicamente.

Perché non si va più veloci di c Se osserviamo bene la formula per un boost di Lorentz, ci accorgiamo che il valore della velocità con cui si può boostare un sistema di riferimento non può superare c . In tal caso infatti il fattore γ diventa immaginario, e conseguentemente si hanno coordinate non più in $\mathbb{R}$: non rappresentano nulla di fisico. Questo significa che partendo da corpi con velocità inferiori a c non si può mai raggiungere c tramite boost.

Questo non esclude ancora che possano esistere particelle che si muovono da sempre a velocità superluminale. Tuttavia, se queste esistessero, causerebbero un grosso problema con la causalità¹².

Supponiamo di avere una particella che si muove con velocità $w > c$ lungo l'asse x in un sistema inerziale S . Supponiamo che passi per l'origine del sistema di riferimento. Segue che dopo un tempo $t > 0$ la particella raggiunge un punto (ct, wt) esterno al cono luce, in cui può avere un effetto fisico, ad esempio fare un urto con qualcosa. Cosa vede un osservatore in un sistema inerziale S' boostato rispetto al primo con $v > c$ lungo l'asse x ? Le coordinate del punto in cui avviene l'urto sono $((c - \beta w)\gamma t, (-\beta c + w)\gamma t)$. Si osservi che in S l'urto avviene per $t > 0$, ossia nel futuro: l'urto e i suoi eventuali effetti non possono avere effetti sull'osservatore al tempo $t = 0$. Tuttavia in S' l'evento avviene per $t < 0$ per β opportuni.

Questo significa che avviene nel passato di S' , e quindi può influenzare l'osservatore posto nell'origine dei due sistemi $(0, 0)$. Si ha quindi una violazione del principio di causa-effetto, e pertanto siamo costretti ad escludere l'esistenza di particelle che viaggiano con velocità superiori a c .

¹²Per una esposizione chiara dell'argomento si rimanda alle note [6].

8 Introduzione alle trasformazioni di Lorentz

Abbiamo visto prima quali sono le trasformazioni di Lorentz più comuni. Vedremo ora alcune caratteristiche peculiari di queste trasformazioni che possono essere utili per fare i problemi.

8.1 Importanza della linearità

Ricordiamo che la trasformazione di Lorentz che indica un boost lungo l'asse x a velocità βc si scrive nel seguente modo:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (8)$$

Notiamo che queste trasformazioni sono lineari. Questo ha una grossa conseguenza su come si comporteranno queste equazioni. Per esempio, possiamo andare a considerare due eventi nel riferimento S , che indicheremo con le loro 4 coordinate (ct_1, x_1, y_1, z_1) e (ct_2, x_2, y_2, z_2) . Questi due eventi verranno ovviamente visti entrambe da un riferimento S' con una trasformazione di Lorentz, ovvero avremo rispettivamente

$$\begin{cases} ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \\ y'_1 = y_1 \\ z'_1 = z_1 \end{cases} \quad \begin{cases} ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) \\ y'_2 = y_2 \\ z'_2 = z_2 \end{cases}$$

Facendo le differenze equazione per equazione otteniamo, per esempio prendendo la componente temporale

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma(c(t_2 - t_1) - \beta(x_2 - x_1))$$

Ovvero

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x)$$

Che scritto in forma completa vuol dire

$$\begin{cases} c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

Ovvero le differenze di eventi spaziotemporali trasformano esattamente come le quadriposizioni spaziotemporali. Questa affermazione può sembrare banale ma in realtà non lo è e la utilizzeremo spesso.

8.2 Boost generico

Noi abbiamo mostrato la forma della trasformazione di Lorentz per un boost lungo x , ma ovviamente niente ci vieta di fare un boost in una direzione arbitraria. Ora mostreremo come si può ricavare il boost in direzione arbitraria a partire da quello che conosciamo lungo l'asse x . Fissiamo quindi un sistema di riferimento S e consideriamo un sistema che si muove a velocità $\vec{\beta}c$ rispetto ad esso. Scomponiamo il problema nella direzione parallela a questo vettore e sul piano ortogonale a questo vettore. È evidente che ogni vettore dello spazio si potrà scrivere come una componente parallela a $\vec{\beta}$ e una componente perpendicolare a $\vec{\beta}$. Possiamo addirittura vedere esplicitamente come: sia $\vec{x}$ un generico vettore tridimensionale. Io affermo che la seguente scomposizione è quella che cerchiamo

$$\begin{cases} \vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \cdot \hat{\beta})\hat{\beta} \\ \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} \end{cases}$$

È evidente che $\vec{x}_{\perp} + \vec{x}_{\parallel} = \vec{x}$, per cui abbiamo scomposto effettivamente il nostro vettore senza perdere niente. Inoltre $\vec{x}_{\parallel}$ è evidentemente parallelo a $\vec{\beta}$. Controlliamo per sfizio che sia davvero $\vec{\beta} \cdot \vec{x}_{\perp} = 0$

$$\vec{x}_{\perp} \cdot \vec{\beta} = \vec{x} \cdot \vec{\beta} - (\vec{x} \cdot \hat{\beta})\hat{\beta} \cdot \vec{\beta} = \vec{x} \cdot \vec{\beta} - \vec{x} \cdot \vec{\beta} = 0$$

A questo punto, dato che la direzione $\hat{x}$ non ha niente di privilegiato rispetto alle altre, converrete con me che dovrà essere

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta ct) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases} \quad (9)$$

Che insieme alla definizione di $x_{\parallel}$ e $\vec{x}_{\perp}$ è la formula per un boost generico in una direzione qualsiasi.

8.3 Notazione

Introduciamo la seguente notazione che useremo più tardi. Prendiamo per esempio la componente temporale

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

Ora andrò a scrivere l'espressione precedente in modo diverso, semplicemente dando dei nomi diversi agli oggetti che vi compaiono. Iniziamo nel seguente modo.

$$ct' = \gamma \cdot ct + (-\beta) \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z$$

Evidentemente non è cambiato niente, abbiamo solo scritto in modo più largo la formula. Ora permettetemi di scrivere

$$ct' = \Lambda_0^0 ct + \Lambda_1^0 x + \Lambda_2^0 y + \Lambda_3^0 z$$

Dove i Λ_ν^μ sono dei semplici numeri. Per esempio, $\Lambda_0^0 = \gamma$, $\Lambda_2^0 = 0$. Evidentemente non è cambiato niente, ho solo dato un nome che *ammette una indicizzazione*. Questo è evidentemente utile solo per scrivere le formule in modo più compatto, non è niente di più. In particolare, se identifichiamo le coordinate spaziotemporali (ct, x, y, z) con un oggetto che chiamiamo (X^0, X^1, X^2, X^3) , allora la relazione precedente si scrive ancora prima come

$$X'^0 = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^0 X^\nu$$

Ed evidentemente le altre 3 equazioni si scriveranno in modo simile, per cui una trasformazione di Lorentz si potrà scrivere come

$$X'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu X^\nu$$

8.4 Ritrovare i risultati precedenti

Dato che abbiamo affermato che le trasformazioni di Lorentz sono le trasformazioni più generali che ci possono capitare in relatività, dobbiamo poter ritrovare i risultati che abbiamo mostrato prima, ovvero dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze. Cominciamo dalla prima. Consideriamo una coppia di eventi A e B che nel sistema S avvengono nello stesso luogo, ovvero $\Delta \vec{x} = 0$. Consideriamo un sistema di riferimento S' e andiamo a calcolare che cosa vede un osservatore in questo sistema. In particolare, dato il tempo Δt che intercorre fra i due eventi in S , vorremmo sapere quanto

vale $\Delta t'$ in S' in funzione di Δt e β . In questo caso è facile, in quanto basta scrivere

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \beta \Delta x / c) = \gamma \Delta t$$

Che è il risultato che ci aspettavamo sulla dilatazione dei tempi. La contrazione delle lunghezze è un po' meno banale. Consideriamo un oggetto che nel riferimento S è a riposo. La lunghezza di questo oggetto, ovvero la differenza spaziale fra i suoi estremi misurata nel riferimento S è costante e la chiameremo L_0 , ed è ovviamente una cosa che si può indicare con Δx . Adesso andiamo a vedere lo stesso oggetto da un riferimento S' che si muove a velocità βc rispetto ad S . Quanto è lungo l'oggetto per un osservatore in S' ?

Per rispondere a questa domanda bisogna capire che cosa vuol dire misurare una lunghezza in un determinato sistema di riferimento. La definizione data precedentemente dice che per misurare una lunghezza in un certo sistema di riferimento, bisogna andare a misurare il Δx *nello stesso istante **in quel riferimento***. Il che vuol dire che gli eventi che dobbiamo andare a considerare non devono avere $\Delta t = 0$ come il principiante potrebbe pensare, ma devono avere $\Delta t' = 0$! A questo punto, possiamo svolgere il conto per trovare il risultato.

$$\begin{cases} 0 = c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \end{cases}$$

Questo è un semplice sistema 2×2 che ora risolviamo

$$\begin{cases} c\Delta t = \beta\Delta x \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta^2\Delta x) = \gamma(1 - \beta^2)\Delta x = \frac{\gamma}{\gamma^2}\Delta x = \frac{\Delta x}{\gamma} \end{cases}$$

Come ci aspettavamo.

9 Quadri-vettori

Abbiamo visto poco fa come trasformano le coordinate di un evento, ovvero come un osservatore in un sistema S' può conoscere le coordinate di un evento, ovvero i numeri (ct', x', y', z') a partire dalle coordinate in un altro riferimento S , ovvero (ct, x, y, z) . Abbiamo abbastanza faticato per ottenere questo risultato, quindi ci piacerebbe trovare qualcos altro che trasformi allo stesso modo e che trasporti delle informazioni utili.

Diamo quindi la seguente definizione operativa

Definizione 9.1 (Quadrivettore). Si definisce quadrivettore (controvariante) una quaterna di numeri indicizzati da una lettera greca X^μ , che possono rappresentare qualsiasi quantità fisica sensata, tale che X^μ trasformi come il quadrivettore posizione, ovvero che valga

$$X'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu X^\nu$$

Che scritto in forma estesa,¹³ per una boost lungo x , vuol dire

$$\begin{cases} X'^0 = \gamma(X^0 - \beta X^1) \\ X'^1 = \gamma(X^1 - \beta X^0) \\ X'^2 = X^2 \\ X'^3 = X^3 \end{cases}$$

Osservazione (Prodotto invariante). Abbiamo prima mostrato che se una cosa trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz, allora è vero che il suo prodotto invariante è un invariante relativistico. Per cui, a partire dalla notazione X^μ , dovrà essere vero che la quantità

$$X^\mu \cdot X_\mu := (X^0)^2 - ((X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2)$$

è una cosa conservata, ovvero non dipende dal sistema di riferimento e soprattutto non dipende da cosa è X^μ . Qualsiasi X^μ che trasformi secondo una trasformazione di Lorentz ha quella quantità invariante. In realtà, vale molto di più: se X^μ e Y^μ sono entrambe quadrivettori, allora il gruppo di trasformazioni di Lorentz conserva comunque il loro prodotto, ovvero anche

$$X^\mu Y_\mu = (X^0 Y^0) - (\vec{x} \cdot \vec{y})$$

è una quantità che non dipende dal sistema di riferimento in cui viene calcolata. Per esplicitare un po' meglio quello che ho scritto, dato che comprendo che la notazione possa essere difficile da capire al primo colpo, possiamo scrivere

$$X^\mu = \begin{pmatrix} X^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad Y^\mu = \begin{pmatrix} Y^0 \\ \vec{y} \end{pmatrix}$$

Definizione 9.2 (Tempo proprio). Consideriamo la traiettoria di un punto materiale in un particolare sistema di riferimento S . Possiamo dire che la quadriposizione è definita da una funzione $X^\mu(t)$ dove t è il tempo misurato

¹³Le prossime volte useremo solo la forma ridotta

nel sistema di riferimento S . Possiamo andare a considerare la traiettoria a due istanti di tempo molto vicini, t e $t + dt$. Sarà

$$dX^\mu = \begin{pmatrix} cdt \\ d\vec{s} \end{pmatrix}$$

Andiamo a considerare la quantità invariante $dX^\mu dX_\mu$

$$dX^\mu dX_\mu = c^2(dt)^2 - (d\vec{s})^2 := c^2(d\tau)^2$$

La quantità $d\tau$ è evidentemente un invariante di Lorentz e si chiama (intervallo di) *tempo proprio*¹⁴ del punto materiale. La sua relazione con il tempo misurato nel riferimento S è la seguente

$$d\tau = \sqrt{(dt)^2 - \frac{1}{c^2} (d\vec{s})^2} = dt \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{s}}{cdt}\right)^2} = \frac{dt}{\gamma}$$

Dove γ è chiaramente calcolato nel riferimento S .

9.1 A caccia di quadrivettori

Dato che queste trasformazioni di Lorentz in fondo sono facili, ci piacerebbe trovare dei quadrivettori che rappresentino qualcosa di utile. Per esempio, siamo partiti dalla posizione. Per fare la dinamica il minimo che possiamo fare è considerare la velocità. Il primo tentativo che possiamo fare è di definire una sorta di velocità quadridimensionale nel modo più intuitivo che possiamo

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x^\mu}{\Delta t} \quad (10)$$

Questa definizione tuttavia ha qualche problema in quanto pare difficile che trasformi come noi vogliamo. Consideriamo infatti un boost lungo x e vediamo come variano le componenti di v^μ

$$v'^\mu = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'^\mu}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \gamma \frac{\Delta x^0 - \beta \Delta x^1}{\gamma(\Delta t - \beta \Delta x/c)} \\ \gamma \frac{\Delta x^1 - \beta \Delta x^0}{\gamma(\Delta t - \beta \Delta x/c)} \\ \frac{\Delta x^2}{\gamma(\Delta t - \beta \Delta x/c)} \\ \frac{\Delta x^3}{\gamma(\Delta t - \beta \Delta x/c)} \end{pmatrix}$$

Che evidentemente non sembra coincidere con la definizione precedente. Questa definizione di v^μ non va quindi d'accordo con l'obiettivo che ci siamo

¹⁴Chiaramente la definizione di tempo proprio sarebbe $\tau = \int d\tau$, ma questa definizione è inutile perché il tempo proprio spesso non serve. Quello che serve è il $d\tau$

posti, ovvero quello di scrivere qualcosa che trasformi come un quadrivettore. Possiamo provare questa definizione alternativa e convincerci che funziona

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (11)$$

Dove τ è il tempo proprio. Essendo il tempo proprio un invariante relativistico, in ogni riferimento si ha $d\tau' = d\tau$. Per questo motivo, quando andiamo a vedere come trasforma il nostro nuovo oggetto, troviamo

$$u'^\mu = \frac{dx'^\mu}{d\tau'} = \frac{d \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu}{d\tau} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu u^\nu$$

Che è esattamente quello che vogliamo, ovvero abbiamo trovato una definizione operativa di un nuovo oggetto, la quadrivelocità, che è effettivamente un quadrivettore, ovvero trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz. Ora dobbiamo fare molta attenzione a non confondere le idee. Quello che abbiamo in mente come velocità e questa quadrivelocità sono oggetti diversi e bisogna fare attenzione a sapere chi usare e in quale contesto usarli. Per esempio, nella matrice di Lorentz compaiono i fattori β e γ . Hanno qualcosa a che fare con la quadrivelocità? Sì e no, bisogna fare attenzione. Chiariamo le idee definendo la velocità di un punto

Definizione 9.3 (Velocità di un punto materiale). La velocità di un punto materiale è un vettore tridimensionale che dipende dal sistema di riferimento e che è definita nel modo classico

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

le quantità $\vec{\beta}$ e γ sono definite a partire dalla *velocità* e non dalla *quadrivelocità*, rispettivamente come indicato sopra

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$$

Velocità e quadrivelocità non sono completamente scorrelate, come si può immaginare. Vediamo di scrivere le componenti di u^μ in termini di $\vec{v}$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

E, come accennato prima, possiamo andare a fare il prodotto invariante

$$u^\mu \cdot u_\mu = \sum_{\mu=0}^3 u^\mu u_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = c^2$$

Che in effetti ha lo stesso valore in ogni riferimento. Ora la domanda da rifarsi è: perché abbiamo definito questa cosa? La risposta è semplice: perché dobbiamo costruire la dinamica o quantomeno la cinematica. Il bello di $\vec{F} = m\vec{a}$ è che è un'equazione fra vettori. Con le trasformazioni di Galileo, cambia la forma di $\vec{F}$, cambia la forma di $\vec{a}$, ma l'equazione che esprime la dinamica, rimane invariata. Per questo motivo, vorremmo cercare una generalizzazione relativistica di questa formula. Chiaramente noi non dimostreremo niente, ma daremo dei motivi intuitivi per cui deve essere vero.

Dato che vogliamo arrivare alla dinamica, il prossimo passo è definire una sorta di quantità di moto. Niente di più facile, in quanto possiamo partire dalla quadrivelocità e definire

$$p^\mu := m u^\mu \quad (12)$$

Al momento questa è solo una definizione, ora vediamo come si comporta. Per ora, teniamo a mente

$$\sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = m^2 c^2$$

e diamo la definizione del suo equivalente tridimensionale

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (13)$$

Che in effetti si riconduce alla definizione classica per $v \ll c$, in quanto in tal caso $\gamma \rightarrow 1$

9.1.1 Massa relativistica

Spesso si trova sui libri old-style delle affermazioni come "La massa di un oggetto diventa sempre più grande man mano che l'oggetto si avvicina a c ", in quanto vedono nella formula 13 una sorta di *massa più grande* γm . Questa affermazione è fuorviante e non aiuta. La Fisica si fa con l'impulso e la massa è una proprietà scalare di un punto materiale. L'interpretazione dell'aumento di massa porta solo al rischio di commettere errori, quindi non usatela.

9.2 Dinamica relativistica

Ora che abbiamo una definizione di quantità di moto, possiamo sperare di inventare la dinamica. Ovviamente io non darò delle dimostrazioni, darò dei motivi intuitivi¹⁵ per cui dovrebbe funzionare in questo modo.

Noi sappiamo che nel caso non relativistico vale

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Non è difficile in che modo si può generalizzare questa equazione. Le sostituzioni minimali per ottenere una legge che trasformi nel modo corretto sono

$$\vec{p} \rightarrow p^\mu \quad \vec{F} \rightarrow F^\mu \quad \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\tau}$$

Per cui possiamo aspettarci che la legge di Newton relativistica sia

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (14)$$

La domanda da un milione di dollari ora è: chi è F^μ ? Questa è una domanda a cui risponderemo dopo. Per ora, possiamo concentrarci su tutti i sistemi in cui $F^\mu = 0$, ovvero i sistemi isolati. Tutto questo è restrittivo ma non eccessivo, infatti, per ora siamo in grado di studiare tutti gli urti: vediamo come.

Dobbiamo sforzarci leggermente di più in quanto l'equazione che abbiamo scritto vale per una particella sola. Tuttavia, essendo lineare, possiamo definire la quantità di moto totale del sistema

$$P^\mu = \sum_i p_i^\mu$$

E allo stesso modo possiamo scrivere la somma delle forze che agiscono su tutte le particelle

$$F_{tot}^\mu = \sum_i F_i^\mu$$

E dato che la derivata è lineare, otteniamo l'equazione di Newton per un sistema di particelle¹⁶

¹⁵Spero

¹⁶Il lettore attento si accorgerà che questa non è una vera dimostrazione e che ho fatto dei passaggi poco leciti. Non preoccupatevi di questo specifico passaggio logico. Per come è riportato qui, non sembra funzionare il ragionamento, ma ci sono metodi più generali per mostrare che è così, ma non è il luogo giusto per discuterne.

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = F_{tot}^\mu$$

Se sul sistema non agiscono forze esterne, possiamo enunciare il seguente teorema, molto banale ma molto utile per fare i problemi

Proposizione 9.1. *In un sistema isolato si conserva il quadrimpulso totale P^μ .*

Poniamoci un po' di domande più fondamentali su quello che abbiamo detto. Intanto, quante equazioni abbiamo scritto? In meccanica classica, si dice che la quantità di moto totale si conserva, ovvero si hanno 3 equazioni indipendenti. In questo caso, invece, abbiamo un'equazione fra quadrivettori, ovvero abbiamo 4 equazioni! Ci sono due casi da esaminare

- Una delle equazioni è dipendente dalle altre e non aggiunge altra Fisica al problema
- Le equazioni sono tutte indipendenti e quindi stiamo assumendo qualcosa in più

Vi assicuro che le equazioni non sono dipendenti, quindi in effetti stiamo aggiungendo qualcosa al problema. A questo punto bisogna capire cosa. Per questo motivo, è opportuno andare guardare meglio l'equazione di Newton relativistica 14 e interpretarne i vari pezzi. Prima di farlo, facciamo un conto rapido che ci servirà

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}} = \frac{\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt}}{(1 - \vec{\beta}^2)^{\frac{3}{2}}} = \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt}$$

A questo punto possiamo andare a guardare la derivata di p^μ e cercare di interpretarne il risultato

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix} = m\gamma \begin{pmatrix} \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \vec{a} \\ \gamma^3 (\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}) \vec{v} + \gamma \vec{a} \end{pmatrix}$$

La parte interessante a questo punto è in effetti la prima componente del vettore, ovvero $m\gamma(\gamma^3 \vec{\beta} \cdot \vec{a})$. Ci aspettiamo che, a meno di fattori γ , per velocità basse si abbia $P = \frac{dE}{dt} \propto \vec{v} \cdot \vec{F} \propto \vec{v} \cdot m\vec{a}$, per cui in questo pezzo sembra proprio esserci il lavoro per unità di tempo. Dato che abbiamo calcolato la derivata rispetto al tempo del quadrimpulso, a questo punto possiamo

interpretare la sua componente temporale¹⁷ come l'energia¹⁸ della particella, ovvero

$$E = \gamma mc^2 \quad (15)$$

E non $E = mc^2$ come si legge per l'appunto sulle magliette. Ci piacerebbe molto se questa espressione fosse familiare e in qualche modo ritornasse al classico $E = mv^2/2$ per basse velocità. Questo è vero ma non del tutto, infatti si ha

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 = mc^2(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mc^2\beta^2 + \frac{3}{8}mc^2\beta^4 + o(\beta^4) \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2\frac{v^2}{c^2} + o(\beta^4) \end{aligned}$$

In effetti, nel limite $\beta \rightarrow 0$ la nostra espressione dell'energia si riconduce *quasi* a quella classica. La differenza fra il termine classico e quello relativistico è un fattore mc^2 . Dato che di solito in Fisica si considerano solo differenze di energie, questo termine non sembra troppo rilevante. Tuttavia, i problemi di relatività spesso coinvolgono particelle che perdono la loro identità e si spezzano in particelle di massa diversa. L'evidenza sperimentale dice che la somma delle masse prodotte è praticamente sempre strettamente minore della massa di partenza. Questa evidenza dice subito che in realtà **la massa non è più una quantità conservata in relatività**. Ciò che si osserva è invece che la prima componente del quadrimpulso, quella con le energie, è sempre conservata. Questo risultato si può interpretare dicendo che la massa si può *convertire* in energia in alcuni casi, con costante di proporzionalità c^2 .

Data la nuova interpretazione della componente temporale del quadrimpulso, possiamo riscriverlo nel seguente modo

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Dove $E = \gamma mc^2$ e $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$. Ricordiamo che il prodotto invariante $p^\mu \cdot p_\mu$, che abbiamo calcolato prima, vale mc^2 . Usando la nuova interpretazione, possiamo scrivere questo risultato come

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (16)$$

¹⁷Ovvero la prima

¹⁸Manca un fattore c

Che è l'importantissima relazione di dispersione massa-momento-energia, che è molto utile per fare i conti nei problemi. È diversa dal caso classico in cui si aveva

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Con questo, possiamo finalmente rispondere alla domanda che abbiamo fatto prima: quando impostiamo un urto imponendo la conservazione del quadrimpulso, l'equazione in più che cosa rappresenta? La risposta è semplice, si tratta della conservazione dell'energia. Il motivo è che quando si studiano oggetti relativistici, normalmente si va a considerare sistemi fondamentali, come particelle fondamentali o quasi, per cui in effetti, a differenza del caso classico, non c'è la possibilità di disperdere "in calore" dell'energia, semplicemente si conserva e basta.

9.3 Il sistema del centro di massa

Come in meccanica classica, anche qui è spesso utile fare i conti nel sistema del centro di massa. Questa definizione è leggermente meno banale che nel caso classico, in quanto la velocità e l'impulso non sono più in una relazione semplicissima. Diamo quindi la seguente definizione, intuitiva:

Definizione 9.4 (Sistema del centro di massa). Sia dato un sistema di N punti materiali, ognuno con la sua massa m_i , non soggetto a forze esterne. Sappiamo quindi che la quantità $P_{tot}^\mu = \sum_i p_i^\mu$, calcolata in qualsiasi riferimento S , è

una quantità costante nel tempo. È ragionevole credere che esista spesso un riferimento S' in cui la parte spaziale di questa quantità è 0, ovvero il vettore nullo. Questo riferimento, se esiste, si chiama sistema di riferimento del centro di massa.

Ci siamo andati con i piedi di piombo in questa definizione, in quanto purtroppo questo riferimento non sempre esiste e fra poco vedremo un esempio di come può succedere. Supponiamo adesso che questo riferimento esista e cerchiamo di capire come arrivarci a partire da un riferimento qualunque.

Consideriamo quindi la situazione in cui noi abbiamo i quadrimpulsi di un sistema di punti materiali in un riferimento S e vogliamo trovare a che velocità si muove S_{CM} rispetto ad S in modo da potercisi spostare con un boost, per magari semplificarci i conti.

Per definizione, nel riferimento S_{CM} la componente spaziale del quadrimpulso totale è 0. Supponiamo per semplicità che nel riferimento S la parte spaziale del quadrimpulso totale sia P e che sia diretto lungo l'asse x . Sia

inoltre E/c la componente temporale del quadrimpulso totale. Stiamo quindi cercando un certo β_{CM} tale che

$$0 = \gamma(E/c - \beta_{CM}P)$$

Ovvero semplicemente

$$\beta_{CM} = \frac{Pc}{E}$$

Facile, no? Dato che abbiamo dato l'espressione esplicita per la velocità del centro di massa, ha senso chiedersi come è possibile che esistano casi in cui il riferimento del CM non esista. Beh, dato che $E > 0$ e che $E = \sqrt{P^2c^2 + m^2c^4} \geq Pc$, l'unico caso che ci può disturbare è quando $E = Pc$, in quanto otterremmo $\beta_{CM} = 1$, che non è fisico. Concretamente, è il caso di un fotone solo, o di più fotoni che viaggiano tutti nella stessa direzione e verso.¹⁹

9.4 Quadrivettori notevoli

Facciamo un piccolo punto della situazione. Abbiamo visto che possiamo descrivere un evento come una quaterna di numeri, che abbiamo indicato con x^μ . Con questi numeri e delle considerazioni abbiamo seguito il percorso di una particella per costruire altri due quadrivettori, u^μ e p^μ , che sono quindi delle oneste quantità che trasformano esattamente come trasforma x^μ . Il gioco non è finito qui, ce ne sono molti altri utili e fra poco ne vedremo altri 3: k^μ , J^μ e A^μ . Mi limiterò per questo a definirne uno e rimandare a fra poco la presentazione di altri due quadrivettori notevoli.

9.5 Covariante e controvariante

Per ora ho sempre indicato le cose con un indice in alto e solo in opportuni casi con un indice in basso. Non è lasciato al caso ma è voluto, nonostante possa causare fraintendimenti di notazione con un semplice esponente. In generale X^μ e X_μ sono cose diverse, ma questo esula completamente dagli obiettivi della lezione. Ne ripareremo quando avrete studiato il teorema di rappresentazione di Riesz ad algebra lineare.

¹⁹Non ho ancora detto che cos'è un fotone, ma lo farò fra pochi paragrafi. Era solo per anticipare un risultato interessante.

10 Addizione delle velocità

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che la velocità non può essere additiva. Vediamo a questo punto allora qual è la vera legge di trasformazione²⁰. Consideriamo un oggetto che si muove lungo l'asse x , con una velocità $\vec{v} = v\hat{x} = \beta_v c\hat{x}$ e andiamo a considerare $\vec{v}'$, in un riferimento che si muove a velocità $\vec{u} = u\hat{x} = \beta_u c\hat{x}$ rispetto al primo. Vediamo quanto vale $\vec{v}'$

$$\vec{v}' = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x - \beta_u c \Delta t}{\Delta t - \beta_u \Delta x / c} = c \frac{\beta_v - \beta_u}{1 - \beta_v \beta_u}$$

Notiamo che, dato che entrambe i β sono compresi fra -1 e 1 , la nuova velocità non può mai essere maggiore di c . Infatti, il caso limite si ottiene proprio quando $\beta_v = 1$. In tal caso, si ottiene $\vec{v}' = c\hat{n}$ in ogni sistema di riferimento, coerentemente con quanto ci si aspetta dai postulati.

A questo punto siamo pronti per vedere come trasforma la velocità per una direzione generica e non solo per un boost parallelo. Innanzitutto notiamo che se abbiamo a disposizione solo due vettori, ovvero la velocità iniziale $\vec{v} = \vec{\beta}_v c$ e il boost $\vec{u} = \vec{\beta}_u c$, allora siamo sicuri che queste due velocità stanno in un piano, per cui possiamo senza perdita di generalità mettere $\vec{u} = u\hat{x}$ e mettere $\vec{v}$ nel piano xy . Per semplicità indicheremo $\vec{v} = \vec{\beta}c = c(\beta_x\hat{x} + \beta_y\hat{y})$ e $\vec{u} = \beta_u c$

$$\begin{cases} \beta'_x = \frac{1}{c} \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{1}{c} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(\Delta x - \beta_u c \Delta t)}{\gamma(\Delta t - \beta_u \Delta x / c)} = \frac{\beta_x - \beta_u}{1 - \beta_u \beta_x} \\ \beta'_y = \frac{1}{c} \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{1}{c} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - \beta_u \Delta x / c)} = \frac{\beta_y}{\gamma(1 - \beta_u \beta_x)} \end{cases}$$

La cosa che bisogna notare è che mentre la *lunghezza* su un asse perpendicolare alla direzione del boost è invariante, la velocità cambia e non di poco. È abbastanza semplice immaginare un andamento simile. Infatti, il modulo quadro della velocità deve comunque essere $\leq c^2$. Se cambiasse solo la componente x , potrebbe tendere asintoticamente a c per opportuni cambi di riferimento. Se non cambiasse la componente ortogonale, ad un certo punto la velocità sarebbe maggiore di c , cosa che abbiamo visto essere poco realistica.

²⁰Stiamo parlando della velocità, non della quadrivelocità, quella sappiamo che trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz.

11 Effetto doppler relativistico

11.1 Fotoni

Spesso nei problemi di relatività compare una nuova entità, il fotone, di cui si dice poco o niente e ci si aspetta che lo studente sia in grado di arrangiarsi. Cercheremo in pochi paragrafi di spiegare degli aspetti qualitativi e quantitativi del tutto per permettervi di fare i problemi. Per quello che serve alle Olimpiadi, un fotone è una pallina di massa 0, che nonostante questo *dettaglio*, trasporta energia e quantità di moto (impulso). Dalla relazione di dispersione massa-energia-impulso 16, si ottiene subito, per un fotone, facendo il limite $m \rightarrow 0$

$$E^2 = m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2 \Rightarrow E = |\vec{p}|c$$

Potreste farci notare che quando diciamo $E = |\vec{p}|c$, questa relazione è anche banalmente soddisfatta da $E = 0 = |\vec{p}|$, per cui potremmo aver semplicemente scritto qualcosa di banale. Come fa un oggetto di massa nulla a trasportare energia? Non voglio ovviamente entrare in discorsi complicati di Quantum Field Theory, ma possiamo pensare di fare la seguente procedura di limite, non estremamente intuitiva, ma che può dare una interpretazione naive della Fisica complicata che ci sta dietro. Supponiamo di fare il limite simultaneo $v \rightarrow c$ e $m \rightarrow 0$. Evidentemente, se $v \rightarrow c$, allora sarà $\gamma \rightarrow +\infty$. Ci sono un sacco di modi di fare il limite su una coppia di variabili che va a 0, ma noi ne faremo uno in particolare, perché fa saltare fuori il risultato interpretativo che ci interessa. In particolare, faremo il limite $\gamma \rightarrow \infty$, $m \rightarrow 0$, ma con la quantità $\gamma m = \text{costante} := h\nu/c^2$. In questo modo, impulso ed energia diventano

$$\begin{cases} E = \gamma m c^2 = h\nu \\ p = \gamma m \beta c = h\nu/c\beta \rightarrow h\nu/c \end{cases}$$

Quindi effettivamente è possibile fare una procedura di limite che spieghi, almeno qualitativamente, il come possiamo ottenere $E \neq 0$ anche con massa nulla. Il nome che abbiamo dato alla costante non è casuale e fra poco vedremo di che cosa si tratta.

Dato che si dice sempre che il fotone sia il quanto di luce, ovvero di onda elettromagnetica, possiamo considerare la più semplice fra le onde elettromagnetiche, ovvero un'onda piana che si propaga nel vuoto nel verso positivo dell'asse x . I campi elettrico e magnetico di questa onda si scrivono

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t) \hat{y} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0/c \cos(kx - \omega t) \hat{z} \end{cases}$$

Da questi possiamo scrivere il vettore di Poynting

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu_0 c} |\vec{E}_0|^2 \cos^2(kx - \omega t) \hat{x}$$

L'interpretazione che bisogna dare a livello intuitivo è che questo vettore di Poynting trasporti energia e che questa energia non sia portata in modo continuo ma da un numero grandissimo di palline, chiamati fotoni. In realtà, questa onda trasporta anche quantità di moto, ma il modo formale e generale di vederlo è di considerare il tensore degli stress di Maxwell, S_{ij} , cosa eccessiva. Nel nostro caso, che è semplicissimo, siamo fortunati in quanto non ne abbiamo bisogno e ci basta la relazione di dispersione massa-energia-impulso, che dovete sempre ricordare, in quanto vi risolve ogni problema. Voi sapete che

$$E = pc$$

Ma in questo caso le palline vanno tutte in una direzione. Se andiamo a fare una derivata rispetto al tempo e dividiamo per una generica area A

$$|\vec{S}| = \frac{1}{A} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} c \Rightarrow \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{|\vec{S}|}{c}$$

Ma la derivata rispetto al tempo della quantità di moto è la forza, se viene divisa per l'area si ottiene una pressione, che viene chiamata pressione di radiazione

$$p_{ress} = \frac{1}{c} |\vec{S}| \quad (17)$$

Fate attenzione all'utilizzo improprio di questa formula.²¹

La teoria quantistica ci dice inoltre che ognuna di queste palline trasporta un'energia e una quantità di moto **che incredibilmente non dipendono dall'intensità del campo** $\vec{E}_0$ ma dipendono solo dalla frequenza dell'onda. In particolare, si ha $E = h\nu = \hbar\omega$, dove h è la costante di Planck²². Dato

²¹Per esempio se la luce incide su uno specchio, la pressione esercitata sullo specchio è 2 volte il valore trovato prima. Quello che io ho scritto è la quantità di moto trasportata per unità di tempo per unità di area per un'onda piana. Non usatela a sproposito.

²²Mostrare davvero questa formula è una cosa che si fa al quarto anno di università. Non fatevi troppe domande e imparatela, dato che è semplice da ricordare e vi permette di farci i problemi.

che per un'onda nel vuoto si ha $\lambda\nu = c$, possiamo legare il numero d'onda angolare $k = 2\pi/\lambda$ alla quantità di moto

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi h\nu}{ch} = \frac{2\pi}{ch} E = \frac{2\pi}{h} p = \frac{1}{\hbar} p \Rightarrow p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

Le cose fatte sono state dimostrate solo per un'onda piana, ma in realtà valgono in generale. Possiamo definire una quaterna di numeri k^μ nel seguente modo

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Per ora abbiamo solo definito una quaterna di numeri, ma dato che per un fotone si ha

$$p^\mu = \hbar k^\mu = \frac{\hbar}{c} \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k}c \end{pmatrix}$$

I due vettori p^μ e k^μ sono direttamente proporzionali, per cui anche k^μ è un quadrivettore.

11.1.1 Effetto Doppler

Dato che abbiamo a che fare con delle onde, ci aspettiamo di vedere dell'effetto Doppler. Il metodo più facile per ottenere le corrette relazioni che descrivono quantitativamente l'effetto Doppler relativistico è semplicemente quello di considerare la luce composta da palline, per l'appunto i fotoni, e sfruttare il fatto che il quadrimpulso è per l'appunto un quadrivettore. Ci sono due casi notevoli che vale la pena guardare. Il caso in cui ci stiamo muovendo parallelamente al fotone e il caso in cui ci stiamo muovendo perpendicolarmente allo stesso.

Formalizziamo la questione dicendo che in un certo sistema di riferimento S esiste una sorgente di luce monocromatica di frequenza ω che fa propagare la luce nel verso positivo dell'asse x . Il quadrivettore p^μ corrispondente sarà

$$p^\mu = \frac{\hbar\omega}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto possiamo fare un boost di β lungo x e vedere come cambia la frequenza della luce che stiamo vedendo.

$$p'^\mu = \frac{\hbar\omega}{c} \begin{pmatrix} \gamma(1-\beta) \\ \gamma(1-\beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p^\mu = \frac{\hbar\omega}{c} \gamma(1-\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p^\mu = \frac{\hbar\omega}{c} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per cui la nuova frequenza è semplicemente

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Oltre a questo semplice effetto quantitativo²³, la parte caratteristica dell'effetto Doppler relativistico è che esiste anche l'effetto Doppler trasverso. Per un'onda che si propaga in un mezzo *fermo*, se uno si muove perpendicolarmente alla direzione di propagazione non vede alcun effetto, mentre in relatività sì. Infatti, possiamo considerare ora un boost lungo y .

$$p'^\mu = \frac{\hbar\omega}{c} \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \\ -\beta\gamma \\ 0 \end{pmatrix} = p'^\mu = \frac{\hbar\omega\gamma}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\gamma \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per cui con la luce, anche in questo caso si ha un cambio di frequenza e stavolta la frequenza nuova è

$$\omega' = \gamma\omega$$

12 Cenni di relatività in elettrodinamica

12.1 La forza elettromagnetica

Esiste il modo formale di dire tutto quello che vi sto per dire, ma è assolutamente troppo per questa lezione. Se volete approfondire²⁴, potete cercare cose sulla formulazione covariante dell'elettromagnetismo su [4] e [2]. Per ora, fidatevi della seguente nozione qualitativa: abbiamo cercato una nuova formulazione del cambio di sistema di riferimento proprio perché andasse d'accordo con le equazioni di Maxwell, che descrivono l'elettromagnetismo. Possiamo aspettarci che la *forza* elettromagnetica non vari davvero in questa

²³Per $\beta \ll 1$ si riottiene la forma classica dell'effetto.

²⁴Ve lo sconsiglio vivamente, al momento vi porta via solo tempo alla preparazione della gara, che assolutamente non richiede questi strumenti

formulazione. Tuttavia, se vogliamo scrivere una cosa fra quadrivettori, dovremmo scrivere una cosa tipo

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qC(u^\nu)^\mu$$

Dove con questa notazione inumana intendo che C è un quadrivettore che dipende dalla quadrivelocità u^ν , dato che in effetti almeno la forza magnetica dipende dalla velocità. Questa cosa si può fare, è quello che si fa di solito quando si fanno le cose bene. Si ottiene in effetti l'equazione che scrivo e basta

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu} u_\nu \quad (18)$$

Dove $F^{\mu\nu}$ è una cosa che contiene tutte le informazioni sui campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$. In questa lezione noi non abbiamo intenzione di seguire questa strada e non faremo una formulazione covariante del tutto. Fissiamo quindi un sistema di riferimento inerziale, in cui conosciamo il valore di $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e $\vec{B}(\vec{x}, t)$, eventualmente variabili nello spazio e nel tempo. Quello che io affermo senza dimostrare è che la *forza tridimensionale* e **non** la *quadriforza* non cambi rispetto alla formulazione classica, ovvero che valga

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

L'unico punto in cui la trattazione relativistica varia rispetto a quella classica è il seguente punto. In relatività infatti,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \neq m\vec{a}$$

Perché in relatività infatti si ha $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, e non $\vec{p} = m\vec{v}$, per cui scriveremo la vera legge di Newton classica

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (19)$$

Notare che il tempo rispetto a cui si fa la derivata è il tempo misurato nel sistema di riferimento scelto e non il tempo proprio misurato dalla particella che si muove. Io non ho assolutamente dimostrato questa equazione, sto affermando che è vera perché facendo il conto covariante viene questo e io vi rassicuro solo sulla sua veridicità.

12.2 Le trasformazioni dei campi

A questo punto ho detto come i campi elettromagnetici agiscono sulle particelle in un dato sistema di riferimento. La domanda che una persona si deve fare è: i campi rimangono uguali in tutti i riferimenti oppure cambiano? E se cambiano, come cambiano?

Vediamo in modo semplicissimo il motivo fondamentale per cui devono per forza cambiare. Dopo averlo fatto vi darò la formula che permette di fare il calcolo esplicito, che a mio parere non utilizzerete mai alle Olimpiadi, ma saperla sicuramente non vi fa male.

Consideriamo il seguente sistema fisico molto banale: un filo rettilineo infinito percorso da una corrente costante ed uniforme di valore I , lungo l'asse z , e una carica puntiforme q posta ad una distanza d dal filo, ferma rispetto ad esso. In questo riferimento, evidentemente il campo elettrico è nullo ovunque e il campo magnetico è lungo il versore $\hat{\phi}$ e vale

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

Dato che la forza elettromagnetica è $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, dato che $\vec{E} = 0$, $\vec{v} = 0$, la forza è evidentemente 0.

Mettiamoci adesso a vedere lo stesso sistema fisico, ma in un riferimento in movimento rispetto al filo. In particolare, ci muoviamo lungo il filo ad una velocità $\vec{v}$, nello stesso verso della corrente I . In questo riferimento la carica q si muove all'indietro di velocità $\vec{v}' = -\vec{v}$. Se i campi fossero invariati, $\vec{E}$ sarebbe ancora 0, $\vec{B}$ sarebbe quello di prima e quindi la particella dovrebbe **accelerare**. Questo è contro ogni principio di relatività, in quanto una particella in moto rettilineo uniforme in un sistema di riferimento inerziale deve avere lo stesso stato di moto anche in un altro sistema dello stesso tipo. Evidentemente c'è qualcosa che non stiamo considerando. In particolare, la forza è radiale, per cui ci deve essere un campo elettrico che controbilanci l'effetto del campo magnetico.

Vi darò ora la legge di trasformazione dei campi, senza dimostrarla. Per vedere come si ricava, si può vedere [2] o [4].

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{B}_{\perp} c) \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp} / c) \end{cases} \quad (20)$$

Dove $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ è la velocità relativa fra i due sistemi di riferimento. Queste formule sono oggettivamente brutte, nel sistema MKSA in particolare, in cui

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ non hanno nemmeno le stesse unità di misura. Il modo per ricordarselo è di mettere un γ perché in relatività ci sta sempre bene e il segno, che è diverso per $\vec{E}$ e $\vec{B}$, si può ricordare considerando proprio il problema che vi ho appena esposto. Infatti, dal principio di relatività sappiamo che la forza totale agente sulla particella nel sistema S' deve essere 0. Andiamo a calcolarla calcolando i campi nel nuovo sistema.

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} = 0 \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0 \\ \vec{E}_{\perp} = \gamma(\vec{E} - \vec{\beta} \times \vec{B}c) = -\gamma\vec{\beta} \times \vec{B}c = -\gamma\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma(\vec{B} + \vec{\beta} \times \vec{E}/c) = \gamma\vec{B} \end{cases}$$

Per cui la forza è

$$\vec{F} = q(-\gamma\vec{v} \times \vec{B} + \vec{v} \times \gamma\vec{B}) = 0$$

Che in effetti torna. Diamo uno sguardo un po' più a fondo a quello che abbiamo fatto. Scriviamo esplicitamente l'espressione dei campi che abbiamo calcolato.

$$\begin{cases} \vec{E} = -\gamma\vec{v} \times \vec{B} = -\gamma\hat{x} \times \hat{\phi} \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} = \gamma \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} \hat{r} \\ \vec{B} = \gamma\vec{B} = \gamma \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \end{cases}$$

Tutto questo è abbastanza strano. Anche in questo riferimento devono valere le equazioni di Maxwell, ma per avere un campo elettrico radiale è necessario avere una carica netta sul filo, che nell'altro riferimento non c'era. È opportuno studiare la cosa più in dettaglio.

12.2.1 J^{μ}

Abbiamo cercato di costruire il formalismo dei quadrivettori proprio per andare d'accordo con l'elettromagnetismo. Sarà meglio andare a cercare dei quadrivettori che abbiano a che fare con la carica elettrica. Potrei fare una "dimostrazione" poco formale di come si ottiene questo risultato, ma dato che sarebbe molto fuffa e ci farebbe perdere del tempo, enuncerò solo il risultato. La quaterna J^{μ} , definita da

$$J^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

È un quadrivettore. È abbastanza intuitivo in effetti che in qualche modo ci debba essere un mix di ρ e $\vec{J}$ per cambio di riferimento, in quanto se in

un riferimento S abbiamo una densità di carica statica ρ , in un riferimento S' che si muove a $\vec{v}$ rispetto a S , si vedrà una corrente che andrà come²⁵ $-\rho\vec{v}$.

Possiamo sfruttare questo fatto per andare a vedere più in dettaglio il problema che abbiamo appena fatto per vedere la trasformazione dei campi. Abbiamo detto ricavato che in S' i campi erano

$$\begin{cases} \vec{E}' = \gamma \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} \hat{r} \\ \vec{B}' = \gamma \vec{B} = \gamma \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \end{cases}$$

Con questi dati, possiamo ricavarci la densità di carica ρ nel filo e la densità di corrente $\vec{J}$, sfruttando le equazioni di Maxwell. Chiamiamo A l'area del filo che trasporta la corrente²⁶

$$\begin{cases} \rho' = \gamma \frac{\epsilon_0 \mu_0}{A} I v = \gamma \frac{1}{Ac^2} I v = \gamma \beta \frac{I}{cA} \\ \vec{J}' = \gamma \frac{I}{A} \hat{x} \end{cases}$$

Vediamo immediatamente che questo corrisponde alla legge di trasformazione di un quadrivettore, in quanto nel riferimento S si aveva

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = \frac{I}{A} \hat{x} \end{cases}$$

12.3 A^μ

Vi ho parlato di carica, campi, quantità di moto. Sembra che abbia nominato molte cose ma ne manca una che viene utilizzata molto spesso, il potenziale elettrico ϕ ²⁷. Sarebbe incredibile se questo potenziale non riuscisse a inserirsi nella discussione che abbiamo fatto. In effetti, è possibile definire un quadrivettore a partire da ϕ e da un altro oggetto, che dovrà essere un vettore, per avere 4 componenti in tutto. Purtroppo, questo oggetto è il potenziale vettore $\vec{A}$, che alle Olimpiadi non serve proprio a niente, e che voi non credo conosciate, per cui ci limitiamo a nominare l'esistenza di questo oggetto, A^μ

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

²⁵Non esattamente, c'è un γ di mezzo

²⁶Che sarà la stessa in S e S' , in quanto le dimensioni dell'area sono trasversali al moto

²⁷Ci sono due notazioni per questa quantità. Alcuni preferiscono chiamarlo V .

13 Paradossi

A lezione sono stati nominati un paio di famosi paradossi della relatività ristretta. Durante la lezione sono stati spiegati a voce i seguenti. Li indichiamo, solo per completezza, non riteniamo possano essere davvero utili per la partecipazione ad una Olimpiade. Per ritrovare queste spiegazioni, si veda [1]§10.

13.1 Biscotto relativistico

Consideriamo una pasta per biscotti su un nastro trasportatore che si muove a velocità v (comparabile con quella della luce) in una data direzione. Sopra di questo c'è uno stampo di forma circolare (diametro L a riposo). Quando azionato, questo scende perpendicolarmente sul nastro e taglia nella pasta un biscotto. Quando poi il nastro si ferma, quale sarà nel sistema a riposo la forma del biscotto? Le risposte che si possono dare sono tre:

1. Il biscotto sarà circolare.
2. Il biscotto apparirà di forma ovale, con il semiasse maggiore parallelo alla direzione del moto.
3. Il biscotto apparirà di forma ovale, ma con il semiasse maggiore perpendicolare alla direzione del moto.

Per capire quale sia la risposta corretta, è utile analizzare cosa accade nel sistema di riferimento solidale alla pasta per biscotti, S' . Siano A , B i punti della pasta tagliata che sono collegati dal diametro parallelo alla direzione del moto (in pratica il punto più avanti e più indietro del biscotto rispetto al moto). Il punto fondamentale per capire la soluzione del problema è rendersi conto che in S gli eventi "lo stampo tocca A " e "lo stampo tocca B " sono simultanei, mentre non lo sono in S' !.

Per risolvere il problema si possono utilizzare le trasformazioni di Lorentz, tuttavia si può anche usare un approccio più semplice: nel sistema S infatti la lunghezza del biscotto è contratta di un fattore γ (è legittimo utilizzare questa formula perchè moralmente lo stampo dei biscotti sta eseguendo una "misura" visto che colpisce i punti estremali nello stesso tempo in S). Pertanto nel sistema a riposo i biscotti sono allungati rispetto alla direzione del moto (opzione 2)

E' istruttivo soffermarsi a capire perchè la terza opzione è sbagliata. In effetti si potrebbe ragionare nel seguente modo: in S' lo stampo appare contratto nella direzione del moto, quindi i biscotti vengono tagliati con

semiasse maggiore ortogonale alla direzione del moto. Tuttavia l'errore è considerare gli eventi di taglio simultanei in S' !

14 Per approfondire

In fondo a questa dispensina sono indicate le fonti da cui abbiamo attinto per cercare di darvi una spiegazione che contenga il numero minimo di errori possibili, che purtroppo siamo consci essere strettamente maggiore di 0. Se volete approfondire l'argomento, il libro che può aiutare di più è sicuramente il Morin [1], che contiene spiegazioni più approfondite e soprattutto un sacco di problemi. Un'altra fonte di problemi che possono essere utili si può trovare sul sito di Fabio Zoratti²⁸: nella sezione Università, ho salvato i testi degli esami precedenti del corso di Meccanica Classica tenuta dai professori D'Elia e D'Emilio. Ogni testo d'esame contiene 4 tracce, le prime due di meccanica Lagrangiana e Hamiltoniana, che vi sconsiglio di affrontare ora, un problema di Meccanica Statistica e un problema di Relatività ristretta. A mio parere, dopo queste spiegazioni siete in grado di affrontare la maggior parte dei problemi di RR, per cui vi consiglio di darci un'occhiata. Chiaramente non affrontate gli altri, non hanno alcuna attinenza con il programma olimpico.

²⁸<https://uz.sns.it/~OrsoBruno96> se non si dovesse capire, quel simbolo orribile dentro l'URL si chiama *tilde*

15 Problemi

Problema 15.1 (Effetto Compton). Si consideri l'urto elastico di un fotone di frequenza ν contro un elettrone di massa m_e ²⁹, inizialmente fermo nel sistema S . Il fotone viene emesso con un angolo ϕ rispetto alla direzione di volo iniziale. Si calcoli la differenza $\lambda' - \lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda del fotone prima dell'urto e quella primata è quella dopo.

Problema 15.2 (Decadimento del π^-). Il π^- è un mesone carico con una massa di circa $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$. Questa particella decade principalmente in un muone μ di massa $m_\mu = 100 \text{ MeV}/c^2$ e in un antineutrino muonico $\bar{\nu}_\mu$, di massa talmente piccola da essere approssimabile a 0. Nel riferimento S il π^- si dirige lungo l'asse x con una certa velocità β . Viene rivelato il muone con un angolo θ rispetto alla direzione di volo. Si calcoli l'energia del muone in funzione di β e θ .

Problema 15.3 (Decadimento del π^0). Consideriamo ora un π^0 , parente stretto del π^- studiato nel problema 15.2. La massa del π^0 è la stessa del π^- , ma questa particella decade in due fotoni. Si assuma che nel riferimento in cui il π^0 è a riposo, la probabilità di decadimento in una certa direzione sia uniforme, ovvero che sia ugualmente probabile decadere in una qualsiasi direzione. Nel riferimento del laboratorio il π^0 si muove con una velocità β lungo l'asse x .

- Si calcoli qual è l'angolo minimo possibile fra i due fotoni nel riferimento del laboratorio.
- Si ricavi la distribuzione in energia dei prodotti di decadimento nel sistema di riferimento del laboratorio, ovvero la distribuzione di probabilità che uno dei due fotoni abbia una certa energia.³⁰
- Si calcoli la distribuzione di probabilità del numero di eventi in funzione dell'angolo α compreso fra i due fotoni nel riferimento del laboratorio.³¹

²⁹Nel problema non si richiedono calcoli numerici, ma il lettore può essere interessato a conoscere il valore di $m_e = 511 \text{ keV}$

³⁰Ovviamente l'energia del fotone può assumere solo un ristretto intervallo di valori. La domanda del testo è: se i valori che può assumere l'energia sono compresi fra E_{max} ed E_{min} , questi valori sono tutti uguali oppure c'è qualche valore particolare per cui si ha un massimo/minimo di probabilità?

³¹Vorrei far notare che nel riferimento del centro di massa questa distribuzione è una delta di Dirac, ovvero tutti gli eventi accadono con $\alpha = \pi$. Nel riferimento del laboratorio la cosa cambia e non di poco.

Problema 15.4 (Esperimento di Fizeau). Consideriamo l'esperimento di interferenza in figura 4. Una sorgente di luce coerente emette luce di lunghezza d'onda λ che segue il percorso di specchi indicato in figura. Dentro al tubo vi è un liquido di indice di rifrazione n che si muove a velocità costante u rispetto al tubo. Si supponga che gli unici tratti che contribuiscono ad accumulare differenza di cammino ottico siano quelli orizzontali dentro al fluido. Si supponga che il lato del tubo orizzontale sia lungo L .

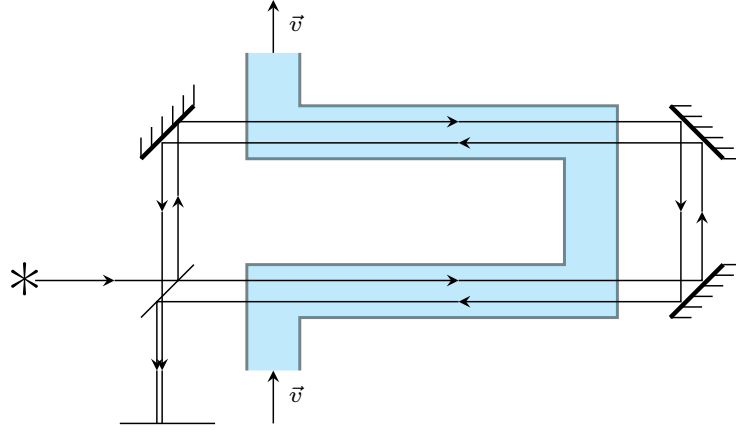


Figura 4: esperimento di Fizeau.

Si mostri che la differenza di fase $\Delta\phi$ fra i due raggi che seguono i due percorsi diversi vale

$$\Delta\phi = 8\pi \frac{L}{\lambda} c \frac{u(n^2 - 1)}{c^2 - n^2 u^2}$$

Problema 15.5 (APhO 2013). Si consideri un punto materiale di massa m . Indichiamo con S il riferimento *a riposo*, ovvero quello del laboratorio. Indichiamo con S' una famiglia di sistemi di riferimento inerziali definiti nel seguente modo. Dato il tempo misurato nel laboratorio, t , il riferimento $S'(t)$ è il sistema di riferimento centrato nel punto materiale che si muove con velocità $\beta(t)$ uguale a quella della massa m nel riferimento S , ovvero una famiglia di sistemi di riferimento che "insegue" la pallina di massa m . Tale famiglia di sistemi viene usualmente chiamata *sistema tangente alla particella*.

Supponiamo che la pallina sia soggetta ad una forza esterna $\vec{F} = F\hat{x}$, definita nel riferimento S , costante ed uniforme e supponiamo per semplicità che al tempo $t = 0$ la pallina sia al centro del riferimento. Si definisce la quantità $g = F/m$, da usare per brevità.

- Calcolare la velocità $v(t)$ della particella nel riferimento S all'istante di tempo t .

- Calcolare l'accelerazione propria della particella all'istante t , definita come l'accelerazione misurata nel sistema di riferimento tangente.
- Calcolare la velocità della particella v nel riferimento S , ma non in funzione del tempo t del sistema S , bensì in funzione di τ , il tempo proprio misurato dalla particella.
- Trovare un'equazione che esprima t in funzione di τ e di altri parametri rilevanti.
- Consideriamo ora il *ritardo dell'informazione*. Sia τ il tempo proprio della particella. Al tempo τ , la particella *legge* su un grande orologio situato nell'origine del riferimento S un tempo $t_0(\tau)$. Si trovi questa funzione e si studi in particolare il comportamento per $\tau \rightarrow \infty$.

Andiamo ora a considerare un sistema di 2 particelle di massa m , uguali, chiamate A e B . All'istante iniziale A è nell'origine di S , B è a $x = L$ e sono entrambe ferme. Nota bene: In questa parte del problema **non** si consideri il ritardo dell'informazione. Le due palline sono entrambe soggette alla stessa forza F definita prima.

- Ad un certo istante di tempo, un osservatore solidale al sistema S vede³² che l'orologio di A segna un tempo τ_A . Che tempo τ_B segna l'orologio di B , sempre visto dall'osservatore in S ?
- Consideriamo adesso un osservatore nel sistema tangente di A . In un certo momento questo osservatore vede che l'orologio di A segna un tempo τ_1 , mentre l'orologio di B segna un tempo τ_2 . Si mostri che vale la relazione

$$\sinh\left(\frac{F}{mc}(\tau_2 - \tau_1)\right) = C_1 \sinh\frac{F}{mc}\tau_1$$

Dove C_1 è una costante. Si calcoli inoltre C_1

- La prima particella vedrà allontanarsi la seconda. Si mostri che il tasso di cambio di distanza³³, visto dalla prima particella vale

$$\frac{dL'}{d\tau_1} = C_2 \frac{\sinh\frac{F\tau_2}{mc}}{\cosh\frac{F}{mc}(\tau_2 - \tau_1)}$$

Si calcoli la costante C_2

³²*Repetita juvant*: Non si consideri il ritardo dell'informazione

³³Per gli amici, velocità.

Si consideri una situazione simile a quella di prima, in cui le due particelle però sono soggette a forze diverse. In particolare, sia g_A l'accelerazione della prima particella, g_B quella della seconda.

- Nel riferimento S esiste un punto x_p tale che esso si trova *sempre alla stessa distanza* dalla pallina A , secondo la pallina A . Si trovi x_p .
- Data l'accelerazione g_A , si calcoli l'accelerazione g_B che permetta alla pallina A di vedere sempre la pallina B alla stessa distanza.
- Si calcoli il rapporto fra i tempi propri misurati dalle due palline

$$R = \frac{d\tau_A}{d\tau_B}$$

La sezione precedente serviva tutta per calcolare le correzioni relativistiche che servono per regolare gli orologi dei GPS.

- Si consideri un satellite in orbita GPS. Tali orbite sono tali da avere periodo di 12h. Sia $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$. Si calcoli la velocità rispetto al centro della Terra di un satellite e si calcoli anche l'accelerazione di gravità a quella quota. Si ricorda che il raggio della Terra vale $R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ e che un giorno dura 24h.
- Ci sono due effetti in gioco che rendono diverso il tempo misurato da un osservatore sulla superficie terrestre e il satellite. Uno è di relatività ristretta, dovuto al fatto che entrambe gli osservatori sono in moto rispetto ad un riferimento inerziale, ma con velocità diverse. L'altro è dovuto all'accelerazione di gravità. Si usi il principio di equivalenza per tenere conto del secondo effetto. Si dica quale dei due effetti è più rilevante e si calcoli la differenza di tempo accumulata in un giorno fra i due orologi.
- Si stimi l'errore sulla posizione data dal GPS se gli orologi in orbita non tenessero conto di questo effetto.

Problema 15.6 (Razzo relativistico). Si consideri un razzo di massa iniziale M . Poniamo il razzo nel vuoto per semplicità. Sia S un sistema di riferimento inerziale e si posizioni il razzo al centro del riferimento all'istante iniziale. Il razzo perde massa per unità di tempo ad un tasso costante Γ^{34} , sparandola

³⁴Attenzione: questo problema è volutamente poco guidato. Questa affermazione è *ambigua*, in quanto non ho detto tempo misurato da *chi*. Sta al lettore capire con il suo senso fisico qual è il tempo sensato rispetto a cui si deriva. Prima di immergersi in conti, consiglio di controllare se l'istinto ha funzionato bene o meno leggendo la prima riga della soluzione.

indietro ad una velocità relativa costante $u = \beta_0 c$ ³⁵. Si calcoli la velocità del razzo quando esso ha una massa m . Si assuma che il metodo di espulsione del carburante non aggiunga energia sotto forma di energia chimica al tutto³⁶.

Problema 15.7 (Vela solare). Consideriamo un satellite con un grosso specchio piano in grado di riflettere la luce solare, orientabile a piacimento. Lo specchio ha area A . Il satellite, specchio incluso, ha massa $m \ll M_\odot$ dove $M_\odot$ è la massa del Sole. Inizialmente il satellite si trova ad una distanza r_0 dal Sole, su un'orbita circolare. Trascurare la presenza degli altri pianeti. Ad un certo punto il satellite apre la vela solare, facendo in modo da tenere sempre lo specchio rivolto esattamente verso il Sole.

PARTE 1

Il Sole ha un'intensità I_0 , misurata alla distanza r_0 , definita come potenza per unità di area.

- Trovare il valore minimo di A che permette al satellite di abbandonare il sistema solare.
- Se il satellite non rivolge più in modo esatto lo specchio verso il Sole ma fa in modo che la normale allo specchio formi un angolo α variabile a piacimento $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, dire come cambiano le forze e studiare il problema per piccoli α e tempi piccoli. Si assuma per questo punto che la forza di radiazione sia piccola rispetto a quella gravitazionale.

PARTE 2

È facile mettere dei dati numerici per accorgersi che si possono rapidamente raggiungere velocità relativistiche una volta abbandonato il sistema solare. Per questo motivo non è più possibile che la forza esercitata dalla pressione di radiazione dipenda solo dalla posizione del satellite e non dalla sua velocità.

Consideriamo quindi una sorgente monocromatica di luce che emette fotoni di frequenza fissa ν nel suo riferimento. La sorgente emette una quantità n di fotoni per unità di tempo nel suo riferimento. Consideriamo uno specchio di massa m , tale che $h\nu \ll mc$ ³⁷ rivolto verso la sorgente che si allontana dalla stessa ad una velocità v .

- Trovare l'accelerazione dello specchio nel riferimento della sorgente in funzione di β, n, ν, m (assumere il sole come sorgente monocromatica).

³⁵Notare bene la parola relativa. Il lettore si renda conto dei problemi che derivano da questa frase.

³⁶Si immagini per esempio che l'espulsione avvenga con un decadimento α

³⁷Si diano tutti i risultati al primo ordine in $\frac{h\nu}{mc^2}$

- Usare il risultato appena trovato per esprimere la forza di spinta dovuta ai fotoni agente sul satellite in funzione della sua distanza dal Sole r e della sua velocità v (e degli altri parametri rilevanti)

16 Soluzione dei problemi

Soluzione 16.1 (Effetto Compton). Questo problema è di riscaldamento. Al solito, dobbiamo imporre la conservazione del quadrimpulso. Indichiamo con E e p l'energia e il modulo del tri-impulso dell'elettrone dopo l'urto. Sappiamo che per un fotone si ha $E_\nu = h\nu$ e che la quantità di moto è $pc = E$. Notare che le due equazioni sotto sono state moltiplicate per c per rendere i conti un po' più semplici.

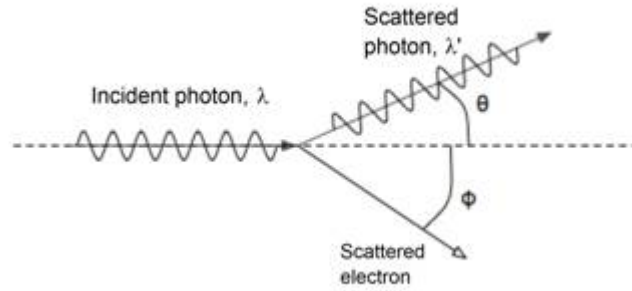


Figura 5: Illustrazione dello scattering Compton

$$\begin{cases} mc^2 + h\nu = E + h\nu' \\ h\nu = pc \cos \psi + h\nu' \cos \theta \\ h\nu' \sin \theta = pc \sin \psi \end{cases}$$

Liberiamoci dell'angolo ψ , che non ci interessa, usando un classico $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$. Otteniamo una nuova coppia di equazioni

$$\begin{cases} mc^2 + h\nu = E + h\nu' \\ h^2(\nu - \nu' \cos \theta)^2 + h^2\nu' \sin^2 \theta = p^2 c^2 \end{cases}$$

E a questo punto sfruttiamo il fatto che $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$, dove m è la massa dell'elettrone

$$(mc^2 + h(\nu - \nu'))^2 - h^2(\nu - \nu' \cos \theta)^2 + h^2\nu' \sin^2 \theta = m^2 c^4$$

Riordinando questa equazione si semplifica quasi tutto e rimane semplicemente

$$\nu\nu'(1 - \cos \theta) = \frac{mc^2}{h}(\nu - \nu')$$

Per ottenere la risposta richiesta dal testo, basta ricordarsi che $c = \lambda\nu$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)$$

Soluzione 16.2 (Soluzione del problema Decadimento del π^-). Questo era un problema di riscaldamento. Il problema si può risolvere imponendo la conservazione del quadrimpulso. Indichiamo con $p_0 = \gamma m_\pi c\beta$ e con $E_0 = \gamma m_\pi c^2$. Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} E_0 = E_\mu + E_\nu \\ p_0 = p_\mu \cos \theta + p_\nu \cos \phi \\ p_\mu \sin \theta = p_\nu \sin \phi \end{cases}$$

Il modo migliore di fare questi conti è di **non** tirare radici, ma di continuare a sfruttare in modo intelligente le relazioni $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$. Inoltre, dato che qui abbiamo l'angolo ϕ incognito, che non ci interessa più di tanto, sfruttare un $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ può essere utile. Per cui,

$$\begin{cases} E_0 = E_\mu + E_\nu \\ (p_\mu \sin \theta)^2 = (p_\nu \sin \phi)^2 \\ (p_0 - p_\mu \cos \theta)^2 = (p_\nu \cos \phi)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_0 = E_\mu + E_\nu \\ p_0^2 - 2p_0 p_\mu \cos \theta + p_\mu^2 = p_\nu^2 \end{cases}$$

A questo punto bisogna liberarsi del neutrino. Per farlo, possiamo sfruttare il fatto che $E_\nu^2 = p_\nu^2 c^2$, dato che il neutrino ha massa quasi nulla.

$$\begin{cases} (E_0 - E_\mu)^2 = E_\nu^2 \\ p_0^2 - 2p_0 p_\mu \cos \theta + p_\mu^2 = p_\nu^2 \end{cases} \Rightarrow (E_0^2 - p_0^2 c^2) + (E_\mu^2 - p_\mu^2 c^2) + 2p_0 p_\mu c^2 \cos \theta - 2E_0 E_\mu = 0$$

Siamo quasi arrivati in fondo, abbiamo una sola equazione in cui compaiono solo quantità che sappiamo e due incognite, E_μ e p_μ . Vediamo come concludere

$$(E_0^2 - p_0^2 c^2) + (E_\mu^2 - p_\mu^2 c^2) + 2p_0 p_\mu c^2 \cos \theta - 2E_0 E_\mu = 0 \Rightarrow 2p_0 p_\mu c^2 \cos \theta = 2E_0 E_\mu - (m_\pi^2 + m_\mu^2) c^4$$

$$4p_0^2 p_\mu^2 c^4 \cos^2 \theta = 4E_0^2 E_\mu^2 + (m_\pi^2 + m_\mu^2)^2 c^8 - 4E_0 E_\mu (m_\pi^2 + m_\mu^2) c^4$$

Soluzione 16.3 (Decadimento del π^0). L'idea è al solito di imporre la conservazione del quadriimpulso e di sfruttare in modo intelligente le masse invarianti. In questa sezione supporremo che il π_0 si propaghi lungo l'asse z . Inoltre come conseguenza della conservazione della componente spaziale

del quadriimpulso totale possiamo assumere che il moto dei prodotti di decadimento avvenga sul piano xz . I quadriimpulsi dei due fotoni quindi sono:

$$p_1^\mu = \frac{E_1}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad p_2^\mu = \frac{E_2}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \theta_2 \\ 0 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

Dove gli angoli sono stati presi con il segno sempre positivo! La massa invariante della somma dei quadriimpulsi dei due fotoni deve essere uguale alla massa invariante del π_0 . Segue quindi, riarrangiando i termini e usando $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$:

$$m_\pi^2 c^4 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 E_2 (1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

essendo la massa dei fotoni nulla,

$$m_\pi^2 c^4 = 2E_1 E_2 (1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

Usando facili formule trigonometriche, si ottiene la relazione finale:

$$m_\pi^2 c^4 = 4E_1 E_2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

con $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ l'angolo di apertura fra i fotoni. La cosa interessante è che tramite le masse invarianti non abbiamo dovuto imporre nessun conto di conservazione delle componenti del quadriimpulso! Possiamo a questo punto calcolare l'angolo minimo. Infatti, nel riferimento del laboratorio deve essere $E_1 + E_2 = E_\pi$, dove E_π è l'energia del π^0 nel riferimento del laboratorio. La parte importante è che è una quantità fissata, per cui possiamo scrivere

$$m_\pi^2 c^4 = 4E_1 (E_\pi - E_1) \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

Ovviamente, il $\sin^2$ sarà minimo quando la cosa che lo moltiplica sarà massima. La cosa che lo moltiplica è una parabola con concavità verso il basso in E_1 , per cui il massimo si avrà in $E_1/2$, ovvero quando

$$m_\pi^2 c^4 = E_\pi^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

Che è una ovvia equazione per l'angolo minimo. Studiamo adesso la distribuzione in energia. Come osservazione preliminare, ricordiamo che la trasformazione degli angoli in sistemi di riferimento diversi è presente, seppure in forma diversa, negli urti fra particelle classiche. Adottiamo la convenzione che gli angoli contrassegnati con * sono quelli visti nel sistema del π , mentre

quelli senza sono gli angoli visti nel sistema del laboratorio. Sappiamo che nel sistema del π il decadimento è uniforme. Questo significa che il numero di conteggi è uniforme in $\cos \theta^*$ è $\frac{dN}{d \cos \theta^*} = c$, con c costante da determinare. . Per determinare la costante, basta imporre che l'integrale su tutto l'angolo solido sia 1.

$$\int_1^{-1} \frac{dN}{d \cos \theta^*} d \cos \theta^* = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Si osservi che una distribuzione uniforme in $\cos \theta^*$ non lo è in θ^* . Perchè quindi la condizione giusta da imporre è la prima dei due casi? La risposta sta nel fatto che gli integrali sugli angoli solidi vengono fatti proprio in $d \cos \theta$, la misura dell'angolo solido. È il problema di utilizzare le coordinate sferiche invece di quelle cartesiane: sono più semplici per fare i conti, ma la misura dello spazio non è il semplice $dx \wedge dy \wedge dz$, bensì $r^2 dr \wedge \sin \theta d\theta \wedge d\phi = r^2 dr \wedge d \cos \theta \wedge d\phi$. Adesso la cosa importante da capire, prima di immergersi nei conti, è di capire bene che cosa vuol dire *distribuzione in energia degli eventi*, scritto con i differenziali, in modo da poi poter fare manipolazioni algebriche per calcolarlo. La distribuzione in eventi sarà evidentemente una cosa del tipo

$$\frac{dN}{dE_\gamma}$$

Per cui, ora possiamo fare il calcolo della distribuzione di eventi in funzione dell'energia dei fotoni del laboratorio

$$\frac{dN}{dE_\gamma} = \frac{dN}{d \cos \theta^*} \frac{d \cos \theta^*}{dE_\gamma} = \frac{1}{2} \frac{d \cos \theta^*}{dE_\gamma}$$

La quantità a destra è brutta: abbiamo un angolo misurato nel sistema del π in funzione di una energia misurata nel laboratorio. La cosa naturale da fare è cercare di capire come trasformare l'energia dal sistema del laboratorio a quello a riposo. E' evidente che nel sistema del π i quadriimpulsi dei fotoni debbano essere:

$$p_1^{\mu *} = \frac{cm_\pi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad p_2^{\mu *} = \frac{cm_\pi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos \theta_2 \\ 0 \\ -\sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

Per trovare l'energia E_γ nel laboratorio ,basta sfruttare le trasformazioni di Lorentz (i cui parametri dipendono dalla velocità del π v_π).

$$E_1 = \gamma E_1^* + \gamma \beta c p_{1,z}^* = \gamma \frac{m_\pi}{2} (1 + \beta \cos \theta^*) c^2 \quad E_2 = \gamma E_2^* + \gamma \beta c p_{2,z}^* = \gamma \frac{m_\pi}{2} (1 - \beta \cos \theta^*) c^2$$

Invertendo si ottiene facilmente che

$$\frac{d \cos \theta^*}{dE_\gamma} = \frac{2}{cp_\pi}$$

con p_π il momento nel laboratorio lungo z del pione. Un altro metodo per calcolare questa quantità è di calcolare $\frac{dE_\gamma}{d \cos \theta^*}$ e di usare il fatto che è l'inverso della quantità cercata. In questo caso il metodo è inutile, ma spesso ci evita di dover invertire la relazione, che potrebbe pure essere più brutta. mettendo tutto assieme si ha che la distribuzione in energia dei decadimenti è:

$$\frac{dN}{dE_\gamma} = \frac{1}{cp_\pi}$$

Si osservi come questa distribuzione sia piatta!

A questo punto dobbiamo farci del male per andare a calcolare anche la distribuzione angolare. Andiamo quindi a calcolare la quantità

$$\frac{dN}{d\alpha} = \frac{dN}{d \cos \theta^*} \frac{d \cos \theta^*}{d\alpha}$$

Il modo migliore per farlo è di riscrivere l'equazione per $\sin^2 \alpha/2$

$$\sin^2 \alpha/2 = \frac{m_\pi^2 c^4}{4E_1 E_2} = \frac{1}{\gamma^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta^*)}$$

Che si può invertire facilmente per ricavare

$$\cos \theta^* = \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2 \sin^2 \alpha/2}}$$

Facendo una facile derivata si ricava quindi

$$\frac{dN}{d\alpha} = \frac{1}{4\beta\gamma} \frac{\cos \alpha/2}{\sin^2 \alpha/2} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 \sin^2 \alpha/2 - 1}}$$

Soluzione 16.4 (Esperimento di Fizeau). Il problema è abbastanza semplice, l'unica cosa a cui bisogna stare attenti è di usare la legge giusta di trasformazione delle velocità, ovvero quella relativistica.

Nel sistema del laboratorio, sappiamo che nei due tratti la luce continua ad avere frequenza ν : la frequenza non cambia se la luce attraversa mezzi stazionari.

La differenza di fase nel sistema del laboratorio si può calcolare in termini delle due lunghezze d'onda nei due tratti:

$$\Delta\phi = 2\pi L \left(\frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+} \right)$$

Tuttavia non sappiamo ancora la lunghezza d'onda in quanto non sappiamo la velocità di propagazione della luce nel laboratorio.

Dato che sappiamo bene le leggi di propagazione della luce in mezzi fermi, ci conviene passare al sistema in cui il fluido è fermo.

Nel sistema solidale al fluido, la velocità di propagazione della luce è $\frac{c}{n}$ per considerazioni di elettromagnetismo.

Per passare alla velocità di propagazione nel sistema del laboratorio, basta usare la formula di addizione delle velocità relativistica per ottenere le velocità nei due tratti

$$v_{\pm} = c \frac{1/n \pm \frac{u}{c}}{1 \pm \frac{u}{nc}} = c \frac{c \pm un}{cn \pm u}$$

dove nei due casi abbiamo considerato una velocità del sistema di riferimento di $\pm u$.

Si ottengono quindi le rispettive lunghezze d'onda $\lambda_{\pm} = v_{\pm}/\nu$, che a loro volta portano ad una differenza di fase

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2\pi L \left(\frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+} \right) = \frac{2\pi L\nu}{c} \left(\frac{cn - u}{c - un} - \frac{cn + u}{c + un} \right) \\ &= \frac{2\pi L\nu}{c} \frac{(cn - u)(c + un) - (cn + u)(c - un)}{c^2 - u^2n^2} = \\ &= \frac{8\pi L}{\lambda} c \frac{un^2}{c^2 - u^2n^2} \end{aligned}$$

che è il risultato richiesto.

Soluzione 16.5 (APhO 2013). Affronteremo degli approcci leggermente diversi dalla soluzione ufficiale, per permettervi di vedere lo stesso problema sotto punti di vista diversi.

- Dato che la forza è *definita* nel riferimento S , possiamo semplicemente scrivere

$$F = \frac{dp}{dt}$$

E integrarla banalmente dato che F non dipende dal tempo.

$$p = Ft \Rightarrow \beta\gamma = \frac{Ft}{mc} \Rightarrow \beta(t) = \frac{\frac{Ft}{mc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}$$

Calcoliamoci subito anche γ e $x(t)$, che ci servirà fra poco.

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}$$

$$x(t) = c \int_0^t \beta(t) dt = \frac{mc^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1 \right) \quad (21)$$

- Nel riferimento tangente si ha sempre $\beta = 0$. Possiamo sfruttare questa informazione per semplificare alcune cose che sappiamo. Indichiamo con gli apici tutte le quantità nel sistema tangente alla particella. In un generico riferimento S , possiamo andare a calcolare la quadriaccelerazione

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma c \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \vec{\beta} \end{pmatrix}$$

Che, specializzati al sistema tangente, in cui si ha $\beta = 0$ e $\gamma = 1$, facendo la derivata molti termini si semplificano e rimane solo

$$a'^\mu = c \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{\beta}}{dt} \end{pmatrix}$$

Per cui quello che ci interessa per calcolare l'accelerazione propria è la componente spaziale della quadriaccelerazione nel riferimento tangente. Calcolarla non è difficile, in quanto nel riferimento S conosciamo ogni cosa, quindi con delle semplici derivate e un boost siamo in grado di ricavarla.

$$a^\mu = \gamma c \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \beta \end{pmatrix} = c \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{\frac{F^2 t}{m^2 c^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}} \\ \frac{F}{mc} \end{pmatrix} = \frac{F}{m} \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} \frac{Ft}{mc} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Andiamo a fare adesso un boost lungo x , proprio di β , per metterci nel riferimento tangente

$$a'^\mu = \frac{F}{m} \gamma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} \frac{Ft}{mc} - \beta \\ 1 - \frac{\beta}{\gamma} \frac{Ft}{mc} \end{pmatrix} = \frac{F}{m} \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per cui l'accelerazione propria è costante e vale g .

- Per seguire un metodo alternativo alla soluzione ufficiale, calcolerà prima il tempo proprio in funzione del tempo nel riferimento S e poi calcolerà β .

$$\tau(t) = \int_0^\tau d\tau = \int_0^t \frac{dt}{\gamma} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}} = \frac{mc}{F} \sinh^{-1} \frac{Ft}{mc}$$

Scritta un pochino meglio,

$$\sinh \frac{g\tau}{c} = \frac{gt}{c}$$

Da questa possiamo facilmente andare a calcolare $\beta(\tau)$

$$\beta(\tau) = \frac{\sinh \frac{g\tau}{c}}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{g\tau}{c}}} = \tanh \frac{g\tau}{c}$$

- Qui bisogna fare molta attenzione a come fare le cose. Quello di cui si è sempre sicuri è fare le cose in un solo riferimento inerziale. Per esempio, consideriamo il riferimento del laboratorio. Ad un certo istante t_0 dall'origine parte il segnale luminoso su cui c'è scritta l'ora. Quand'è che questo raggio arriva alla particella? L'equazione per il tempo t è

$$c(t - t_0) = x(t)$$

Chiaramente questa equazione, se siamo in grado di risolverla, ci porta anche in fondo, in quanto possiamo esprimere direttamente t in funzione di τ per rispondere poi alla domanda.

$$c \left(\frac{c}{g} \sinh \frac{g\tau}{c} - t_0 \right) = \frac{c^2}{g} \left(\cosh \frac{g\tau}{c} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{gt_0}{c} = 1 + \sinh \frac{g\tau}{c} - \cosh \frac{g\tau}{c} = 1 - e^{-\frac{g\tau}{c}}$$

Per cui effettivamente si ha un congelamento del tempo segnato sull'orologio ad un certo tempo limite.

- Si ha ovviamente $\tau_A = \tau_B$
- Affronterò in modo diverso dalla soluzione ufficiale questa domanda. Che cosa vuol dire che A vede l'orologio di B che segna un tempo τ_B ? Vuol dire che nel riferimento tangente ad A , l'osservatore guarda

*contemporaneamente*³⁸ i due orologi. I due eventi "A è in un certo punto e segna τ_A " e "B è in un certo punto e segna τ_B " sono contemporanei nel riferimento tangente S' . Si avrà quindi una situazione del genere

$$\Delta x'^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (22)$$

Dove χ è un'opportuna lunghezza, che non vale L , ma varrà qualcosa. Nel riferimento S , la differenza spaziotemporale fra i due eventi, sarà, dalle trasformazioni di Lorentz

$$\Delta x = \gamma(t) \begin{pmatrix} \beta(t)\chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Dove t è il tempo che corrisponde a τ_A , ovvero

$$\frac{gt}{c} = \sinh \frac{g\tau_A}{c}$$

A questo punto bisogna letteralmente fare cose a caso cercando di trovare espressioni in cui si semplifichi tutto tranne quello che ci serve. Consideriamo per esempio

$$\beta(t) = \frac{\gamma\chi\beta}{\gamma\chi} = \frac{ct_A - ct_B}{x_A(t) - x_B(t)} \quad (23)$$

Per quanto riguarda $t_{A,B}$, l'espressione è quella con il seno iperbolico, mentre per $x(t)$ abbiamo l'altra espressione che ora vediamo più in dettaglio

$$x_A(\tau) = \frac{mc^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft(\tau)}{mc} \right)^2} - 1 \right) = \frac{mc^2}{F} \left(\cosh \frac{g\tau_A}{c} - 1 \right)$$

E analoga per x_B , con l'aggiunta di L . Possiamo quindi riscrivere l'espressione 23

$$\tanh \frac{g\tau_A}{c} = \beta(t) = \frac{g}{c^2} \frac{\sinh \frac{g\tau_B}{c} - \sinh \frac{g\tau_A}{c}}{L + \frac{mc^2}{F} (\cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c})}$$

³⁸Secondo lui, ricordiamo che in relatività la contemporaneità è una cosa che dipende dal sistema di riferimento.

Per cui

$$\tanh \frac{g\tau_A}{c} = \frac{\sinh \frac{g\tau_B}{c} - \sinh \frac{g\tau_A}{c}}{\frac{gL}{c^2} + \cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c}}$$

Distribuendo,

$$\sinh \frac{g\tau_A}{c} \left(\frac{gL}{c^2} + \cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c} \right) = \left(\sinh \frac{g\tau_B}{c} - \sinh \frac{g\tau_A}{c} \right) \cosh \frac{g\tau_A}{c}$$

Semplificando e riconoscendo la formula di addizione del seno iperbolico,

$$\sinh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c} = \frac{gL}{c^2} \sinh \frac{g\tau_A}{c} \quad (24)$$

Che era la richiesta del testo.

- Utilizzando la definizione di χ usata nell'espressione 22, la richiesta del testo è l'esplicito calcolo di $\frac{d\chi}{d\tau_A}$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{d\tau_A} &= \frac{d}{d\tau_A} \frac{x_B - x_A}{\gamma} = \frac{d}{d\tau_A} \frac{L + \frac{c^2}{g} (\cosh \frac{g\tau_B}{c} - \cosh \frac{g\tau_A}{c})}{\cosh \frac{g\tau_A}{c}} = \\ &= -\frac{gL}{c} \frac{1}{\cosh^2 \frac{g\tau_A}{c}} + c \frac{\sinh \frac{g\tau_B}{c}}{\cosh \frac{g\tau_A}{c}} \frac{d\tau_B}{d\tau_A} - c \frac{\cosh \frac{g\tau_B}{c}}{\cosh^2 \frac{g\tau_A}{c}} \sinh \frac{g\tau_A}{c} \end{aligned}$$

A parte un sacco di fastidiosa algebra, bisogna calcolare il rapporto fra i tempi propri. Per farlo, possiamo differenziare l'espressione 24

$$\cosh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c} (d\tau_B - d\tau_A) = \frac{gL}{c^2} \cosh \frac{g\tau_A}{c} d\tau_A \Rightarrow \frac{d\tau_B}{d\tau_A} = 1 + \frac{gL}{c^2} \frac{\cosh \frac{g\tau_A}{c}}{\cosh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c}}$$

Per cui

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{d\tau_A} &= \frac{c}{\cosh^2 \frac{g\tau_A}{c}} \left(\sinh \frac{g\tau_B}{c} \cosh \frac{g\tau_A}{c} \left(1 + \frac{gL}{c^2} \frac{\cosh \frac{g\tau_A}{c}}{\cosh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \cosh \frac{g\tau_B}{c} \sinh \frac{g\tau_A}{c} - \frac{gL}{c^2} \right) = \\ &= \frac{c}{\cosh^2 \frac{g\tau_A}{c}} \left(\sinh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c} - \frac{gL}{c^2} \right) + \frac{gL}{c} \frac{\sinh \frac{g\tau_B}{c}}{\cosh \frac{g(\tau_B - \tau_A)}{c}} \end{aligned}$$

- Tutti i punti alla destra dell'origine, prima o poi hanno distanza zero dalla nostra massa. Di conseguenza, se si vuole un punto a distanza fissa

dalla massa, dovrà essere ad una coordinata x negativa. In particolare, dalla contrazione delle lunghezze si dovrà avere

$$\mathcal{C} = \frac{x_P + x(t)}{\gamma(t)} \quad \forall t \rightarrow \mathcal{C} \cosh \frac{g\tau}{c} = x_p + \frac{c^2}{g} \left(\cosh \frac{g\tau}{c} - 1 \right)$$

Che è evidentemente soddisfatta dalla coppia

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \frac{c^2}{g} \\ x_P = \frac{c^2}{g} \end{cases}$$

- Questo punto si può affrontare in due modi diversi, uno un po' a caso e uno più rigoroso. Noi faremo entrambe per completezza. Iniziamo da quello più veloce. Abbiamo visto nel punto precedente che per la pallina A esiste un punto estremamente lontano e all'indietro rispetto al centro del riferimento S che rimane sempre alla stessa distanza per lei. Ovviamente esisterà un siffatto punto anche per B . Il fatto è che se i due punti speciali dovessero coincidere, allora A e B dovrebbero per forza vedersi sempre alla stessa distanza e il motivo è che le trasformazioni di Lorentz sono lineari, quindi non ci può essere un "addensamento" di punti da qualche parte, obbligando A e B a vedersi sempre alla stessa distanza.

Proviamo quindi ad imporre che i due punti coincidano e vediamo se troviamo un'equazione che legghi g_A e g_B .

$$\begin{cases} x_A = -\frac{c^2}{g_A} \\ x_B = L - \frac{c^2}{g_B} \end{cases} \Rightarrow -\frac{c^2}{g_A} = L - \frac{c^2}{g_B}$$

Per cui

$$g_B = \frac{c^2}{L + \frac{c^2}{g_A}} = \frac{g_A}{1 + \frac{g_A L}{c^2}}$$

Vediamo ora di fare le cose in modo un po' più sistematico usando le trasformazioni di Lorentz. Fissiamo due eventi: l'evento 1 è che la pallina A si trova in un certo punto ad un istante di tempo fissato. Il secondo evento è che la pallina B si trovi in un altro punto ad un altro istante di tempo, ma tale che nel riferimento tangente ad A sia allo

stesso tempo del primo evento. Nel riferimento tangente ad A , questo evento si scrive come quadrivettore

$$\Delta x'^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}$$

E questo è perché vogliamo che la pallina A veda sempre la pallina B alla stessa distanza L . Trasformiamo ora questo evento nel riferimento S

$$\Delta x^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma\beta L \\ \gamma L \end{pmatrix}$$

Evidentemente nel riferimento S i due eventi non sono simultanei. Possiamo tuttavia andare a calcolare tutto senza troppi problemi nel seguente modo. Supponiamo che al primo evento l'orologio di A segni τ_A . Sappiamo quanto vale il tempo nel riferimento S corrispondente a questo evento dalla relazione

$$\frac{g_A t_1}{c} = \sinh \frac{g_A \tau_A}{c}$$

Per cui il secondo evento nel riferimento S avviene ad un tempo

$$t_2 = t_1 + \gamma\beta(\tau_A) \frac{L}{c} = \frac{c}{g_A} \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} + \frac{L}{c} \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} = \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} \left(\frac{c}{g_A} + \frac{L}{c} \right)$$

A questo punto l'idea è che possiamo scrivere la differenza spaziale nel riferimento S in due modi diversi e possiamo imporli uguali, sperando di ottenere condizioni restrittive su g_A e g_B . Infatti, sappiamo che

$$\begin{cases} x_A(t_1) = \frac{c^2}{g_A} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_A t_1}{c} \right)^2} - 1 \right) \\ x_B(t_2) = L + \frac{c^2}{g_B} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_B t_2}{c} \right)^2} - 1 \right) \end{cases}$$

E a questo punto possiamo imporre $x_B(t_2) - x_A(t_1) = \gamma(\tau_A)L$

$$\begin{aligned}
L + \frac{c^2}{g_B} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_B t_2}{c} \right)^2} - 1 \right) - \frac{c^2}{g_A} \left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right) - L \cosh \frac{g_A \tau_A}{c} &= 0 \\
\frac{c^2}{g_B} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{g_B t_2}{c} \right)^2} - 1 \right) - \left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right) \left(L + \frac{c^2}{g_A} \right) &= 0 \\
1 + \left(\frac{g_B t_2}{c} \right)^2 - \left(1 + \left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right) \left(\frac{g_B L}{c} + \frac{g_B}{g_A} \right) \right)^2 &= 0 \\
\left(\frac{g_B L}{c^2} + \frac{g_B}{g_A} \right)^2 \left(\left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right)^2 - \right. & \\
\left. - \sinh^2 \frac{g_A \tau_A}{c} \right) + \left(\frac{g_B L}{c^2} + \frac{g_B}{g_A} \right) \left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right) &= 0 \\
\left(\frac{g_B L}{c^2} + \frac{g_B}{g_A} - 1 \right) \left(\cosh \frac{g_A \tau_A}{c} - 1 \right) &= 0
\end{aligned}$$

E questa equazione deve essere vera per ogni τ_A , quindi deve per forza essere nullo il coefficiente davanti al $\cosh$, ovvero

$$g_B = \frac{1}{\frac{L}{c^2} + \frac{1}{g_A}} = \frac{g_A}{1 + \frac{g_A L}{c^2}}$$

Esattamente come prima.

- A questo punto bisogna calcolare il rapporto fra i tempi propri nei due sistemi di riferimento. La prima cosa che potrebbe fare una persona è di andare a scrivere la seguente equazione

$$\frac{c}{g_A} \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} = t = \frac{c}{g_B} \sinh \frac{g_B \tau_B}{c}$$

Questa equazione non è utilizzabile per ricavare l'informazione richiesta dal testo. Il motivo è abbastanza contorto ed è difficile da spiegare in questo modo, ma spero che il lettore ci rifletta e capisca il motivo. Ha a che fare con il fatto che fissare un certo tempo di riferimento t nel riferimento S non è la cosa giusta da fare. Il riferimento S non ha niente di privilegiato rispetto a tutti gli altri sistemi di riferimento. La perdita di simultaneità tipica della relatività ristretta purtroppo porta al fatto che fissare un tempo in questo riferimento non è la stessa cosa di andare

a considerare il $d\tau_A$ nel riferimento tangente³⁹ e calcolare quanto vale il corrispondente $d\tau_B$ nel riferimento B fra gli stessi eventi.

Mi rendo conto di non essere stato chiarissimo, ma mi è difficile esprimermi in modo più chiato, spero che il lettore riesca a riflettere e a capire il messaggio che voglio passare. Ad ogni modo, possiamo comunque passare per il riferimento S , a patto di non fissare l'istante di tempo nel riferimento S ma indicando effettivamente la giusta separazione temporale fra gli eventi che avvengono a distanza $d\tau_A$ nel riferimento A . In effetti abbiamo fatto la stessa cosa poco fa, per calcolare il rapporto fra le accelerazioni. Allo stesso modo, si ricava

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 \left(1 + \frac{g_A L}{c^2} \right) \\ \frac{c^2}{g_B} \sinh \frac{g_B \tau_B}{c} &= \frac{c^2}{g_A} \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} \left(1 + \frac{g_A L}{c^2} \right) \\ \sinh \frac{g_B \tau_B}{c} &= \sinh \frac{g_A \tau_A}{c} \\ g_B \tau_B &= g_A \tau_A \\ \frac{d\tau_B}{d\tau_A} &= \frac{g_A}{g_B} = 1 + \frac{g_A L}{c^2} \end{aligned}$$

- Tutti questi punti sarebbero identici alla soluzione ufficiale. Mi limito a copiare i risultati finali. L'effetto di relatività generale è $\Delta\tau_g = 4.55 \times 10^{-5}$ s. Quello di RR viene $\Delta\tau_s = -7.18 \times 10^{-6}$ s e l'effetto complessivo è quindi la somma dei due. Il $\Delta L = c\Delta\tau = 11.5$ km

Soluzione 16.6 (Razzo relativistico). Il metodo migliore di affrontare il problema è di considerare il quadrimpulso del sistema all'istante t e all'istante $t + dt$ e dire che deve essere conservato. Questa affermazione deriva dal fatto che l'espulsione del carburante avviene senza il rilascio di energia chimica. Per semplicità, denotiamo con $\beta = \frac{v}{c}$, $\beta_u = \frac{u}{c}$ e con $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$. Innanzitutto utilizzeremo la formula di addizione relativistica delle velocità che ci porta a dire che

$$\beta_1 = \frac{\beta - \beta_u}{1 - \beta\beta_u}$$

La conservazione della quantità di moto, che va sviluppata al primo ordine in $d\beta$ e dm , dM ⁴⁰

³⁹Che invece ha senso di essere *privilegiato* per A

⁴⁰Il motivo per cui va sviluppata al primo ordine è che stiamo cercando un'equazione differenziale che legghi β a M . Andando a fare il limite per $d\beta \rightarrow 0$, gli unici termini che contano sono per l'appunto quelli al primo ordine.

$$\begin{aligned}\frac{M\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{(M+dM)(\beta+d\beta)}{\sqrt{1-(\beta+d\beta)^2}} + \frac{dm\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \\ \Rightarrow \frac{Md\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta dM}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{M\beta^2 d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}} + \frac{dm}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \frac{\beta - \beta_u}{1 - \beta\beta_u} &= 0\end{aligned}$$

Che è la prima delle due equazioni che useremo. La seconda è la conservazione dell'energia, sempre da sviluppare al primo ordine

$$\begin{aligned}\frac{M}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{M+dM}{\sqrt{1-(\beta+d\beta)^2}} + \frac{dm}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \\ \Rightarrow \frac{dm}{\sqrt{1-\beta_1^2}} &= -\frac{dM}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{M\beta d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}\end{aligned}$$

Vorrei far notare che abbiamo avuto bisogno di due equazioni e non di una sola in quanto classicamente è ovvio che $dm = dM$, in relatività la massa è leggermente più ostica da trattare. Sostituendo quest'ultima nella conservazione della quantità di moto, otteniamo, facendo i conti (magicamente scompare il termine $\gamma(\beta_1)$, fastidioso da calcolare)

$$Md\beta + \beta_u dM (1 - \beta^2) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\beta}{1 - \beta} + \frac{d\beta}{1 + \beta} = -2\beta_u \frac{dM}{M}$$

che quindi ci dà la soluzione

$$\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{\frac{c}{2u}}$$

Esprimiamo il risultato in modo più carino prendiamo il logaritmo di entrambe i membri

$$\ln \frac{M}{M_0} = -\frac{1}{\beta_u} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dove ho anche girato la frazione portando un meno fuori dal logaritmo. Ho fatto questo giochetto in quanto la funzione a destra è esattamente $\tanh^{-1}(\beta)$, ovvero

$$\ln \frac{M}{M_0} = -\frac{1}{\beta_u} \tanh^{-1} \beta$$

Osserviamo che per $\beta \ll 1$ torna la soluzione classica $M = M_0 e^{\frac{v}{u}}$, in quanto $\tanh^{-1}(dx) \approx dx$. Inoltre,

$$\beta = \tanh \left(\beta_u \ln \frac{M_0}{M} \right) \quad (25)$$

Un risultato simile è abbastanza rassicurante riguardo la sua validità, in quanto la tangente iperbolica è sempre compresa fra -1 e 1 . Inoltre torna il caso notevole $M \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow 1$. Non solo, torna anche il caso notevole $\beta_u = 0 \Rightarrow \beta = 0$. Purtroppo, come potete ben capire, il fatto che ci sia la tangente iperbolica di un logaritmo non è altrettanto rassicurante riguardo la possibilità ingegneristica di avvicinarsi a c in questo modo.

Soluzione 16.7 (Vela solare). 1. Come prima cosa calcoliamo la forza dovuta alla radiazione $\vec{F}_{rad}$. Se lo specchio riflette perfettamente, allora i fotoni incidenti perpendicolarmente sullo specchio mantengono la direzione e cambiano verso. Per calcolare la forza è quindi sufficiente calcolare la variazione di quantità di moto dei fotoni incidenti sulla superficie del satellite per unità di tempo.

L'intensità della radiazione è pari a:

$$I = Nh\bar{\nu}$$

con N numero di fotoni incidenti per unità di tempo e area e $\bar{\nu}$ frequenza media dei fotoni. L'impulso trasportato quindi nell'unità di tempo e superficie è

$$Nh\frac{\bar{\nu}}{c} = \frac{I(r)}{c}$$

Segue subito quindi che la variazione di impulso per unità di tempo dello specchio, essendo l'opposto della variazione di impulso dei fotoni è

$$F_{rad} = \frac{dP}{dt} = 2\frac{I(r)A}{c}$$

Consideriamo adesso solo il caso di forza radiale (normale alla superficie parallela al raggio satellite-sole). In questo caso la forza è solo radiale, e per comodità ometteremo il simbolo di vettore nelle formule.

Per calcolare F_{rad} , dobbiamo fare attenzione al fatto che l'intensità della radiazione incidente sulla vela diminuisce all'aumentare del raggio. In particolare, dato che la potenza emessa integrata su una superficie sferica non deve dipendere dal raggio di questa, deve valere la relazione

$$I_0 r_0^2 = I(r) r^2$$

che può anche essere interpretata come una conservazione del numero di fotoni.

Quindi si ha che la forza radiale è del tipo:

$$F_{rad} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A}{c r^2}$$

Si osservi quindi che la forza in gioco totale agente sul satellite è nella forma:

$$\frac{2I_0 r_0^2 A/c - GM_\odot m}{r^2}$$

Ossia è come se ci fosse una forza gravitazionale "efficace" diversa dalla solita! Pertanto il problema è riconducibile ad un problema di un corpo che orbita attorno ad un pianeta di massa diversa. Quindi, dopo l'apertura della vela, l'energia (contando anche quella dovuta all'interazione con i fotoni solari) si conserva!

Sempre come conseguenza del fatto che tutte le forze in gioco sono radiali, il momento angolare L del satellite rispetto al sole è conservato.

La condizione per riuscire a uscire dall'orbita solare è, in analogia con problemi gravitazionali standard:

$$E_{cin,in} + U'_{in} \geq 0$$

dove $U' = \frac{2I_0 r_0^2 A/c - GM_\odot m}{r}$ è il finto potenziale gravitazionale.

L'energia cinetica iniziale è, per continuità, la stessa subito prima dell'apertura della vela⁴¹:

$$\frac{GM_\odot m}{2r_0}$$

Segue quindi la condizione:

$$A \geq \frac{cGM_\odot m}{4I_0 r_0^2}$$

Si osservi che per questo valore di A la forza efficace è ancora attrattiva: il satellite si muove di moto parabolico verso l'infinito.

⁴¹Segue rapidamente dal teorema del viriale: $2\langle K \rangle = -\langle U \rangle$

2. La diversa angolazione della vela ha due effetti principali. Il primo è che l'area effettivamente investita dai fotoni sia:

$$A_{eff} = A \cos \alpha$$

Il secondo è che la forza radiale dovuta alla radiazione sia:

$$F_{rad,r} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A_{eff} \cos \alpha}{cr^2} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A \cos^2 \alpha}{cr^2}$$

Inoltre si ha che il momento angolare non si conserva, visto che si ha una componente angolare della forza, pari a

$$F_{rad,\theta} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A_{eff} \sin \alpha}{cr^2} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A \cos \alpha \sin \alpha}{cr^2}$$

Si osservi che il campo di forze non è più conservativo: basta vedere che integrando su un cammino a r fissato si ha un lavoro ovviamente non nullo.

Per studiare il problema per piccoli angoli, è utile fare la seguente approssimazione: dato che comunque la forza tangenziale non sarà troppo grande, è lecito supporre che il moto del satellite avvenga sempre su una circonferenza e che la velocità radiale sia trascurabile.

Scriviamo ora la legge di conservazione dell'energia per il satellite, considerando anche che la forza di spinta del sole sta compiendo lavoro su di esso. La parte radiale la riassorbiamo nel solito finto potenziale, mentre la parte tangenziale inietta energia.

Si ha quindi

$$\frac{dE}{dt} = 2 \frac{I_0 r_0^2 A \cos \alpha \sin \alpha}{cr} \dot{\theta}$$

Adesso, se assumiamo che l'angolo sia piccolo e la vela non troppo grande, possiamo supporre che il satellite si muova su orbite circolari e che la velocità radiale sia molto minore delle altre velocità in gioco. A questo punto è legittimo assumere che l'energia in media sia circa quella che si ha su una orbita circolare di un dato r , ossia

$$E = - \frac{GmM_\odot - 2I_0 r_0^2 A \cos^2 \alpha / c}{2r}$$

da cui

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GmM_\odot - 2I_0 r_0^2 A \cos^2 \alpha / c}{2r^2} \dot{r}$$

Dato che il moto è circolare, deve valere la seguente relazione fra $\dot{\theta}$ e r , che è una sorta di generalizzazione del momento angolare

$$r^3 = \frac{GmM_{\odot} - 2I_0r_0^2A \cos^2 \alpha/c}{m} \dot{\theta}^2$$

Quindi, sostituendo r dentro $\dot{\theta}$, si ottiene una equazione del moto per r , che sarà valida per piccoli t .

$$\frac{GmM_{\odot} - 2I_0r_0^2A \cos^2 \alpha/c}{2r^2} \dot{r} = \frac{2I_0r_0^2A \cos \alpha \sin \alpha/c}{r} \left(\frac{m}{GmM_{\odot} - 2I_0r_0^2A \cos^2 \alpha/c} \right)^{1/2} r^{3/2}$$

che è nella forma

$$\dot{r} = Cr^{5/2}$$

che ha una soluzione "polinomiale" del tipo:

$$r = \frac{C_1}{(C_2 - t)^{2/3}}$$

Dato che è istruttivo vedere come si ricava questo risultato, facciamo.

$$\frac{dr}{dt} = Cr^{5/2} \Rightarrow r^{-5/2} dr = C dt \Rightarrow \int_{r_0}^{r(t)} r^{-5/2} dr = C \int_0^t dt$$

Fare questi due integrali è semplice, possiamo svolgerli esplicitamente

$$-\frac{2}{3} \left(r(t)^{-3/2} - r_0^{-3/2} \right) = Ct \Rightarrow r(t) = \frac{1}{\left(r_0^{-3/2} - \frac{3}{2} Ct \right)^{2/3}}$$

Che effettivamente è della forma indicata prima.

3. Analizziamo il problema nel sistema di riferimento tangente. Supponiamo che uno dei fotoni radiati si propaghi lungo x , direzione del moto dello specchio. Il quadriimpulso è quindi nella forma:

$$p_1'^{\mu} = \frac{h\nu'}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dopo rimbalza sullo specchio, e il quadriimpulso diventa:

$$p_2'^{\mu} = \frac{h\nu'}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto si può calcolare l'impulso trasferito allo specchio per unità di tempo sommando l'impulso di tutti i fotoni:

$$\frac{\Delta p'_x}{\Delta \tau} = 2 \frac{n'_{colp} h\nu'}{c}$$

dove n'_{colp} sono i fotoni incidenti per unità di tempo proprio. Ma questi, vista la relazione fra t e τ , sono pari a

$$n'_{colp} = \gamma n_{colp}$$

dove γ è calcolato con la velocità v dello specchio rispetto alla sorgente. E' lecito usare la formula di dilatazione temporale perchè i fotoni colpiscono punti con la stessa coordinata!

Adesso dobbiamo collegare n_{colp} a n . Non è difficile mostrare la relazione:

$$n_{colp} = n(1 - \beta)$$

Applicando la legge di Newton nel sistema tangente (la formula non relativistica va bene perchè siamo istantaneamente fermi), si ottiene l'accelerazione lungo l'asse x:

$$a' = 2\gamma n(1 - \beta) \frac{h\nu'}{mc}$$

Se lo specchio si muove a velocità v rispetto al laser, allora intuitivamente nel sistema inerziale che istantaneamente è solidale con lo specchio i fotoni hanno frequenza minore per effetto Doppler. Infatti, trasformando il quadriimpulso del fotone incidente, si ha che la sua frequenza ν' vista dallo specchio è:

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \nu < \nu$$

Dunque si ha:

$$a' = 2h \frac{n' h\nu'}{mc} = 2 \frac{nh\nu}{mc} \gamma(1 - \beta) \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = 2 \frac{nh\nu}{mc} \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

Per trovare l'accelerazione nel sistema S , è conveniente trasformare la quadriaccelerazione. Nel sistema tangente la quadriaccelerazione è:

$$a'^{\mu} = \frac{dv'^{\mu}}{d\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2n \frac{h\nu}{mc} \frac{1-\beta}{1+\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per tornare in S dobbiamo applicare boost di Lorentz con velocità $-v$ lungo x . Segue quindi che in S la quadriaccelerazione è:

$$a^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \begin{pmatrix} 2\gamma\beta n \frac{h\nu}{mc} \frac{1-\beta}{1+\beta} \\ 2\gamma n \frac{h\nu}{mc} \frac{1-\beta}{1+\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare l'accelerazione $a = \frac{dv}{dt}$, basta scrivere con cura la definizione di quadriaccelerazione e ricordarsi che è

$$a^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma^4 \beta \frac{dv}{cdt} \\ \gamma^4 \frac{v^2}{c^2} \frac{dv}{dt} + \gamma^2 \frac{dv}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato nelle derivate il fatto che per moti 1D la derivata del modulo di $\vec{v}$ è l'accelerazione. Segue eguagliando le due espressioni per a_x (ossia la parte spaziale della quadriaccelerazione) che l'accelerazione $\frac{dv}{dt}$ in S (che non è la componente spaziale della quadriaccelerazione) è:

$$\frac{dv}{dt} = 2 \frac{n h \nu}{\gamma^3 m c} \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

4. La distanza dal sole influisce sul numero di fotoni incidenti $N(r)$:

$$N(r) = \frac{I(r)A}{h\nu} = \frac{A I_0 r_0^2}{h\nu r^2}$$

Per definizione, nel sistema S la forza è

$$F = \frac{d(m\gamma v)}{dt} = m\gamma^3 \frac{dv}{dt}$$

Da cui

$$F = \frac{n(r) h \nu}{c} \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

Adesso dobbiamo legare n (numero di fotoni emessi dal sole per unità di tempo che incidono sulla vela) a $N(r) = \frac{I(r)}{h\nu}$ (numero di fotoni emessi per unità di tempo e superficie a distanza r dal sole).

Il numero di fotoni emessi per unità di tempo destinati a colpire la vela sono proprio

$$n(r) = \frac{AI_0r_0^2}{h\nu r^2}$$

Segue quindi che la forza è

$$F = \frac{I_0r_0^2A}{cr^2} \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

Abbiamo supposto nel problema che la sorgente fosse monocromatica. Tuttavia questa non è una condizione restrittiva: possiamo infatti assumere che l'intensità del sole per un intervallino di frequenze $d\nu$ sia una certa dI infinitesima.

Possiamo ripetere il ragionamento fatto nel caso di sorgente monocromatica e ottenere la forza per unità di frequenza dF .

Dato che questa dipende solo da dI , integrando entrambi i membri si ottiene la stessa relazione riportata sopra, in quanto l'integrale delle intensità spettrali è proprio l'intensità totale I_0 .

Riferimenti bibliografici

- [1] David Morin, *There once was a Classical Theory*
- [2] David Jackson, *Classical Electrodynamics*
- [3] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fisica Teorica. Volume 1: Meccanica*
- [4] L.D Landau, E.M. Lifshitz, *Fisica Teorica. Volume 2: Teoria dei campi*
- [5] Giuseppe Carlo La Rocca *Note del corso di Elettrodinamica Classica, corso del II anno SNS*
- [6] Massimo D'Elia, *Appunti di Meccanica Relativistica*, reperibile sul sito di Fabio Zoratti.