

Dinamica del Corpo Rigido

Alessandro Foligno*, Luca Arnaboldi†

4 febbraio 2020

Sommario

Definizione centro di massa e momento angolare, Leggi di conservazione dell'impulso e del momento angolare, Teoremi di Konig, sistemi di riferimento, accelerati e non, potenziale centrifugo, corpo rigido e teorema di Charles, momento d'inerzia e tecniche di calcolo (teorema di Steiner e metodo dei frattali), asse istantaneo di rotazione.

1 Momento angolare

Consideriamo un sistema di riferimento “fisso” con origine O . Sia S un sistema di punti materiali con centro di massa G^1 , sia P un polo generico. Chiamiamo con \vec{r}_G e \vec{r}_P le posizioni di G e di P e con \vec{r}_i la posizione della massa m_i (rispetto ad O).

Il momento angolare del sistema rispetto al polo P è definito come:

$$\vec{L}_P = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i \quad (1)$$

È importante sottolineare che nella definizione appena data, \vec{v}_i è la velocità misurata nel particolare sistema di riferimento adottato (che può anche eventualmente non essere inerziale) e **non** nel sistema di riferimento dove il polo è fermo; questo implica che il momento angolare calcolato rispetto a sistemi di riferimento diversi, di uno stesso corpo rispetto ad uno stesso

*alessandro.foligno@sns.it

†luca.arnaboldi@sns.it

¹Il centro di massa si definisce come “media pesata” rispetto alle masse delle posizioni delle stesse.

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i}$$

polo può variare, ovvero *il momento angolare dipende, oltre che dal polo, dal sistema di riferimento nel quale lo si calcola.*

Per esercizio si mostri che se \vec{L} è il momento angolare associato ad un corpo in un certo sistema di riferimento, lo stesso momento angolare, misurato (rispetto allo stesso polo P) in un nuovo sistema O' (non rotante) che trasla con velocità \vec{v}_0 rispetto ad esso (quindi le velocità misurate in O' saranno $\vec{v}' = -\vec{v}_0 + \vec{v}$) vale:

$$\vec{L}' = \vec{L} - M(\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times \vec{v}_0 \quad ^2$$

Notare che *se scegliamo come polo il centro di massa ($P=G$)* questo termine addizionale è sempre nullo, ovvero in qualunque sistema di riferimento accelerato a piacere, non rotante rispetto a quello adottato, il momento angolare rispetto al centro di massa è sempre lo stesso.

È interessante scoprire che relazione lega \vec{L}_G , momento angolare calcolato scegliendo come polo G, a \vec{L}_P , dove P è un polo qualsiasi.

$$\begin{aligned} \vec{L}_P &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_G + \vec{r}_G - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_G) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i (\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_G) \times m_i \vec{v}_i + (\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times M_{\text{tot}} \vec{V}_G \end{aligned}$$

M_{tot} indica la massa totale del sistema in questione e \vec{V}_G la velocità del centro di massa.

Riconosciamo \vec{L}_G nel primo addendo e con $\vec{L}_{G/P}$ indichiamo il secondo, abbiamo allora un importante risultato.

$$\vec{L}_P = \vec{L}_G + \vec{L}_{G/P} \quad (2)$$

Questa formula ci piace perché il momento angolare rispetto al centro di massa, per come già detto, lo si può calcolare in un qualunque sistema di

²Se O' è non inerziale (ma sempre non rotante) rispetto ad O la formula di conversione per il momento angolare è :

$$\vec{L}'(t) = \vec{L}(t) - M(\vec{r}_G(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{v}_0(t)$$

e varia nel tempo dato che \vec{v}_0 ora dipende da t .

riferimento non rotante rispetto al sistema fisso, ad esempio uno molto spesso utile, è quello dove il centro di massa è fermo. $\vec{L}_{G/P}$ è interpretabile come il momento angolare, rispetto al polo P, di un punto materiale di massa uguale alla massa totale del sistema, posizionato nel centro di massa, con la velocità del centro di massa.

Nel caso di una distribuzione di massa continua invece che discreta, basta sostituire tutte le sommatorie con integrali e le m_i con dm , massettine infinitesime.

Guardiamo ora come varia il momento angolare nel tempo, usando la regola di Leibniz per derivare il prodotto vettoriale come fosse un prodotto normale (la cosa discende sostanzialmente dal fatto che è distributivo)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_P}{dt} &= \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_P) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{a}_i \\ &= -\vec{v}_P \times \sum_i m_i \vec{v}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i \\ &= -\vec{v}_P \times M_{\text{tot}} \vec{v}_G + \vec{\tau}_P \end{aligned}$$

- \vec{F}_i è la forza agente sulla particella i -esima nel sistema fisso.
- $\vec{\tau}_P$ è il momento torcente rispetto al polo P .
- $M_{\text{tot}} \vec{v}_G \times \vec{v}_P$ è il termine di polo mobile, per capire il motivo della sua esistenza si pensi a questo semplice esempio:

Una particella di massa m parte dall'origine e si muove con velocità costante $\vec{v} = v_0 \hat{y}$, il polo P inizialmente anch'esso nell'origine si muove con velocità costante $\vec{v}_P = v \hat{x}$.

Non ci sono momenti che agiscono sulla massa eppure \vec{L}_P varia nel tempo, e di questa variazione ne tiene conto proprio il termine di polo mobile. Per esercizio si calcoli quanto vale il momento angolare all'istante t .

In alcuni casi pratici si cerca un polo in cui questo termine sia assente; ciò può essere fatto imponendo una qualunque delle seguenti condizioni:

1. $\vec{v}_P = 0$, il polo è fermo.
2. $\vec{v}_G = 0$, il centro di massa è fisso rispetto al nostro sistema di coordinate

3. \vec{v}_p e \vec{v}_G sono paralleli, condizione soddisfatta, ad esempio, imponendo $\vec{r}_P = \vec{r}_G$

Quando si tratta di scegliere il polo per fare un problema la scelta può essere dettata da varie cose, in particolare i poli scelti in genere sono tali per cui il momento torcente rispetto questi è sempre nullo (anche se potrebbero saltar fuori termini di polo mobile), oppure poli rispetto cui il termine di polo mobile (che è abbastanza fastidioso) si annulla, ad esempio il centro di massa, oppure il cosiddetto *asse istantaneo di rotazione*, che vedremo più avanti.

Un'ultima osservazione sul centro di massa è che, dato che il momento angolare usando G come polo non dipende dal sistema di riferimento (ma solo dalle velocità relative fra le particelle), anche la sua derivata non dipenderà dal sistema di riferimento, e pertanto neanche $\vec{\tau}_G$, ovvero *il momento torcente rispetto al centro di massa non dipende dal sistema di riferimento rispetto al quale lo si calcola*. Questa ed altre proprietà fanno sì che il centro di massa sia un punto "privilegiato" rispetto al quale i conti vengono meglio. Un'ultima proprietà di cui gode il centro di massa, analoga a quella che permette di scomporre il momento angolare, riguarda l'energia cinetica di un corpo, che si scompone in due parti:

$$K_{\text{tot}} = K_0 + K_G$$

1. K_0 indica l'energia cinetica delle masse in un sistema di riferimento che trasla insieme al centro di massa, che quindi è visto fermo.
2. K_{tot} indica l'energia cinetica totale del sistema di corpi nel sistema di riferimento scelto
3. K_G indica l'energia cinetica del centro di massa visto come un punto materiale con velocità \vec{V}_G e massa M nel sistema di riferimento scelto.

La dimostrazione è semplice, praticamente basta scrivere i due membri dell'equazione e svolgere i conti:

$$K_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_G)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i^2 + V_G^2 - 2\vec{v}_i \cdot \vec{V}_G) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} M V_G^2 = K_{\text{tot}} - K_G$$

Nel caso di urti anelastici all'interno del sistema, K_0 rappresenta la massima energia cinetica che può andare persa.

Esempio 1.1. Consideriamo un disco omogeneo con centro nell'origine, che ruota con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ (i.e. la velocità di ogni punto del disco

si scrive come $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ³); se P è un polo fisso come varia \vec{L}_P (momento angolare al tempo $t = 0$) al variare di \vec{r}_P ? E se il centro del disco si muove con velocità \vec{v}_G ?

Anzitutto notiamo che, con la formula (2), $L_P = L_G$, dato che il centro di massa è fermo. Pertanto ci basta calcolare il momento angolare rispetto al centro di massa che vale $L_G = \frac{1}{2}MR^2\omega$ (lungo z). Nel caso in cui il centro si muova con velocità costante, sempre con la formula (2), abbiamo, se il polo è in posizione (x_P, y_P) e il centro del disco è inizialmente nell'origine, con velocità (\dot{x}_G, \dot{y}_G) , che il momento angolare totale è $L_P = \frac{1}{2}MR^2\omega + M(\dot{x}_G y_P - \dot{y}_G x_P)$ (sempre lungo z).

Esempio 1.2. Consideriamo sul piano x - y un anello omogeneo di massa m_1 con centro nell'origine e raggio r_1 che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_1$, sul bordo di questo anello è fissato il centro di un secondo anello di massa m_2 e raggio r_2 che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_2$. Determinare il momento angolare del sistema, rispetto all'origine, dicendo se esso è costante, e nel caso particolare in cui $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$ descrivere le traiettorie dei punti sul secondo anello. Le velocità angolari sono da intendere come dirette lungo z .

Il momento del primo anello è: $L_1 = \omega_1 r_1^2 m_1$. Per quanto riguarda il secondo usiamo la formula per scomporre il momento in due parti: $L_2 = \omega_1 r_1^2 m_2 + \omega_2 r_2^2 m_2$. Il momento totale è $L = \omega_1 r_1^2 (m_1 + m_2) + \omega_2 r_2^2 m_2$, che torna nel caso in cui $r_2 = 0$. Nel caso $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ il sistema di anelli si comporterà come un corpo rigido che ruota stando fisso, ovvero sarà come se i due anelli fossero "saldati" l'uno sull'altro. Questo perché riesco a descrivere le velocità di tutti i punti (sia del primo che del secondo anello) con un'unica ω (vedi teoria del corpo rigido seguente). Un conto più esplicito mostra che le velocità dei punti del secondo anello valgono, detto \vec{r}_2 il centro del secondo anello e \vec{v}_2 la sua velocità: $\vec{v} = \vec{v}_2 + \omega \times (\vec{r} - \vec{r}_2) = \vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \omega \times (\vec{r} - \vec{r}_2) = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Esempio 1.3. Un sistema di spire di forma arbitraria in cui scorre corrente è immerso in un campo magnetico uniforme \vec{B} . Sapendo che rispetto a un qualunque polo fermo, il momento torcente è $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ (\vec{m} rappresenta il momento magnetico e non dipende dalla posizione del polo), cosa si può dire sulla forza magnetica totale che agisce sulle correnti?

³Se \vec{r} è la posizione di un punto che ruota con velocità angolare ω attorno a un asse passante per l'origine, la velocità del punto in quel dato istante si scrive vettorialmente come :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

dove $\vec{\omega}$ ha modulo ω , è diretto lungo l'asse di rotazione e il verso decide se la rotazione avviene in senso orario o antiorario. Per convincersi della validità della formula, verificare che modulo e direzione di \vec{v} siano quelli attesi.

Notiamo che il momento torcente non dipende dalla posizione del polo, questo ci fa pensare che la forza totale debba essere nulla, altrimenti potremmo scegliere dei poli per cui questa forza da origine a momenti differenti.

Dimostriamolo in formule:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_P &= \int (\vec{r} - \vec{r}_P) \times d\vec{F} \\ \vec{\tau}_P &= \int (\vec{r} - \vec{r}_Q + \vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times d\vec{F} \\ \vec{\tau}_P &= \int (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times d\vec{F} + \int (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times d\vec{F} \\ \vec{\tau}_P &= \vec{\tau}_Q + (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times \vec{F}_{\text{tot}} \\ (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times \vec{F}_{\text{tot}} &= 0\end{aligned}$$

Questo vale per ogni scelta di P e Q, concludiamo che $\vec{F}_{\text{tot}} = 0$.

2 Corpo rigido

Si definisce corpo rigido un oggetto, le cui distanze relative tra diversi punti dello stesso non variano durante il moto. Nonostante possa apparire come un argomento semplice, una trattazione completa ed esaustiva dell'argomento richiederebbe strumenti matematici che vanno ben oltre quelle possedute da un liceale (e forse anche da uno studente di laurea triennale), quindi in questo paragrafo ci si limiterà ad alcuni casi semplici, concentrandosi particolarmente su argomenti olimpionici, e si accenterà soltanto ai casi più generali.

Per semplificare la notazione supporremo che il corpo rigido considerato sia costituito da N masse puntiformi m_1, m_2, \dots, m_N . Analizzeremo il moto del corpo in un sistema inerziale, e indicheremo con $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ le posizioni delle masse, che ovviamente sono variabili nel tempo. La condizione di corpo rigido si traduce in

$$\frac{d|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{dt} = 0,$$

per ogni i, j tra 1 ed N . A fianco delle formule ricavate in questa situazione semplificata verranno fornite anche le analoghe in versione continua (cioè dove il corpo rigido è definito da una distribuzione di densità ρ), che possono essere facilmente ottenute da quelle dimostrate nel limite in cui il corpo è costituito da tante masse infinitesime puntiformi.

Un primo importante risultato (molto intuitivo per la verità) che si ottiene nella trattazione dei corpi rigidi è il Teorema di Chasles, che permette di

separare completamente il moto in una traslazione e una rotazione. Il teorema è fornito senza dimostrazione, che può essere trovata su [Mor08].

Teorema 2.1 (Teorema di Chasles). *Si consideri un corpo rigido che si muove di un moto arbitrariamente complicato. Sia P un punto del corpo. Ad ogni istante temporale il moto del corpo può essere scritto come somma di un moto di traslazione rispetto a P , e una rotazione intorno ad un qualche asse (che in generale può cambiare nel tempo) passante per P .*

2.1 Rotazioni con asse fisso

In questa sezione ci limiteremo a considerare corpi rigidi che ruotano intorno ad un asse costante nel tempo, ovvero esso passa dagli stessi punti del corpo stesso.

Rotazioni di oggetti planari vincolati

Supponiamo inizialmente che le masse sono vincolate a muoversi su un piano, che per comodità sarà il piano xy del nostro riferimento, e che un punto del corpo rigido sia vincolato all'origine. L'unico movimento possibile per questo oggetto è una rotazione attorno all'asse z . Fissando un punto come riferimento sul corpo rigido (diverso dall'origine) e chiamandolo P è possibile identificare univocamente la posizione del corpo rigido con l'angolo orientato in senso antiorario formato tra l'asse x e il segmento OP , che chiameremo θ ⁴. È dunque sensato definire in analogia alla velocità la quantità *velocità angolare*

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (3)$$

Intuitivamente questa quantità misura quanto sta girando velocemente il corpo rigido. Si noti che per ora essa è una quantità *scalare* e non vettoriale; la velocità angolare come vettore verrà trattata successivamente. Si prenda ora in considerazione un generico punto del corpo rigido: esso si muove su una circonferenza, il cui raggio sarà indicato con r , e la sua velocità è proporzionale a ω e r stesso

$$v = \omega r.$$

Calcoliamo ora il momento angolare del sistema, scegliendo come polo l'origine. Il momento angolare di una singola massa è

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i).$$

⁴Affinché la trattazione successiva sia coerente l'angolo θ non è da intendersi nell'intervallo $[0, 2\pi)$, ma *capace* di misurare giri completi, ed eventualmente angoli negativi.

Abbiamo osservato che che ognuna di esse si muove su una circonferenza centrata nell'origine, quindi il vettore \vec{r}_i è perpendicolare al vettore \vec{v}_i , che unito al fatto che entrambi i vettori appartengono al piano xy , porta a

$$\vec{L}_i = m_i |\vec{r}_i| |\vec{v}_i| \hat{z} = m_i r_i v_i \hat{z}.$$

Il momento angolare totale è la somma di quelli sulle singole masse, e utilizzando la relazione (3) si trova

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i v_i \right) \hat{z} = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i (r_i \omega) \right) \hat{z} = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \omega \hat{z}. \quad (4)$$

Si può notare che la quantità tra parentesi nell'ultimo membro dell'equazione (4) non dipende dal moto del corpo rigido, ma solamente da sue caratteristiche fisiche: le distanze r_i infatti sono costanti nel tempo per definizione di corpo rigido, e ovviamente anche le masse non cambiano durante il moto. Si definisce quindi il *momento d'inerzia rispetto all'asse z*

$$I_z \equiv \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (5)$$

In seguito a quanto detto l'equazione (4) diventa

$$\vec{L} = I_z \omega \hat{z}, \quad (6)$$

dove volendo si potrebbero omettere i simboli di vettore dato che risulta evidente che \vec{L} è sempre diretto lungo l'asse z .

Consideriamo ora la seconda equazione cardinale della meccanica: sostituendo l'espressione del momento angolare trovata ora si trova

$$\vec{\tau} = I_z \alpha \hat{z}, \quad (7)$$

dove α è l'*accelerazione angolare* del corpo rigido.

Per concludere calcoliamo ora l'energia cinetica del sistema

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2.$$

Esempio 2.1 (Freno). *Un anello di massa m e raggio a ruota su se stesso a una velocità iniziale ω_0 rispetto all'asse passante per il suo centro. Un freno (difettoso!) applica un momento torcente $\vec{\tau}$ di modulo $K\omega$, dove ω è la velocità*

angolare in un dato istante, in modo da frenarne il moto. Dopo quanto tempo il disco sarà fermo?

Scegliamo come sistema di riferimento quello centrato nel disco. Il disco è un corpo rigido vincolato nell'origine: possiamo usare quindi applicare le equazioni trovate in precedenza. Per prima cosa calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse z . Dalla definizione di momento di inerzia vediamo che dobbiamo pesare la massa in base alla distanza dall'asse di rotazione, ma essendo un anello essa si trova tutta a distanza a dal centro, segue che

$$I = mr^2.$$

Usiamo ora l'equazione (7) insieme all'espressione di τ per scrivere (abbiamo omissso i segni di vettore dato che sono tutti diretti lungo l'asse z)

$$-K\omega = \tau = I\alpha = ma^2 \frac{d\omega}{dt},$$

dove il segno $-$ nel primo membra deriva dal fatto che il momento torcente tende a frenare il moto. Da questa relazione segue

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{K}{ma^2}\omega$$

Questa è un equazione lineare del primo ordine in ω , che ha come soluzione generale

$$\omega(t) = A \exp\left(-\frac{K}{ma^2}t\right),$$

dove A è un'opportuna costante da determinare con le condizioni iniziali. Dal fatto che $\omega(0) = \omega_0$ segue che $A = \omega_0$. Se chiamiamo \bar{t} il tempo che impiega a fermarsi, deve essere $\omega(\bar{t}) = 0$, ma l'equazione

$$\omega_0 \exp\left(-\frac{K}{ma^2}\bar{t}\right) = 0$$

non ha soluzione, quindi il disco non si fermerà mai⁵.

Moto di oggetti planari nel piano

Si rimuova ora il vincolo di un punto fissato nell'origine. Si scelga un punto Q che si muove solidale con il corpo rigido: per il Teorema 2.1 il moto può

⁵In realtà dopo un tempo abbastanza grande il disco risulterà praticamente fermo. Si possono fare stime del tempo in realtà impiegato a partire dal *tempo caratteristico* T del sistema ($= \sqrt{ma^2/K}$).

essere scomposto in una traslazione rispetto a Q e ad una rotazione intorno a Q stesso, che nel caso particolare in cui ci troviamo di moto vincolato al piano xy , non può che essere la retta parallela all'asse z passante per Q . Appare evidente che mettendosi nel sistema di riferimento centrato in Q e solidale con esso il moto del corpo ricade nel caso precedente, ovvero con un punto vincolato nell'origine. Si può quindi studiare la rotazione in questo riferimento utilizzando le leggi viste al paragrafo precedente ad eccezione della (7)⁶ e la traslazione nel riferimento originario e inerziale.

La scelta del punto P è totalmente arbitraria e in genere dipende dal problema specifico. Nella maggior parte dei casi una scelta di P molto sensata è il *centro di massa*, cosa che non dovrebbe sorprendere per quanto visto in precedenza. Per il primo teorema di König il momento angolare \vec{L}_O rispetto all'origine del sistema di riferimento O si scrive come

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times (M\vec{v}_{CM}),$$

dove \vec{L}_{CM} è il momento angolare misurato nel sistema di riferimento del centro di massa. Per l'equazione (6) possiamo scrivere

$$\vec{L}_O = I_{z,CM}\omega_{CM}\hat{z} + \vec{r}_{CM} \times (M\vec{v}_{CM}),$$

dove $I_{z,CM}$ e ω_{CM} sono rispettivamente il momento d'inerzia e la velocità angolare calcolati rispetto all'asse perpendicolare a xy passante per il centro di massa. Si noti che il vettore \vec{L}_O è in realtà sempre diretto lungo l'asse z , dato che \vec{r}_{CM} e \vec{v}_{CM} appartengono entrambi al piano xy . Si noti inoltre che \vec{L}_O è calcolato in un sistema di riferimento inerziale e di conseguenza è possibile applicare la seconda equazione cardinale della meccanica, cosa che invece in generale *non* è possibile fare su \vec{L}_{CM} .

Infine troviamo un'espressione dell'energia in termini delle quantità da cui dipende il momento angolare. Applicando il secondo teorema di König allo stesso modo del primo si ottiene l'equazione

$$K = \frac{1}{2}I_{z,CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2.$$

Corpi tridimensionali

Abbiamo per ora trattato solamente oggetti bidimensionali in moto in due dimensioni soltanto per semplicità di trattazione. Supponiamo ora di avere

⁶Si presti molta attenzione perché questo sistema di riferimento in generale è *non inerziale* siccome il moto di Q è arbitrario e non necessariamente rettilineo uniforme, e quindi la seconda equazione cardinale non vale.

un corpo rigido che si estende in 3 dimensioni in moto e che esista un sistema di riferimento inerziale dove

$$\vec{v}_i \cdot \hat{z} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

cioè dove nessuna delle masse che costituisce il corpo rigido si muove lungo l'asse z . Questa situazione può essere ricondotta facilmente al caso analizzato in precedenza: le masse si trovano a posizioni differenti sull'asse z , ma nella rotazione ciò che importa è solamente la distanza dall'asse, quindi la fisica del problema non cambia se si immagina di spostare tutte le masse lungo rette parallele all'asse z fino a metterle sullo stesso piano. Indicando con x_i, y_i, z_i le coordinate della masse m_i il momento d'inerzia in questa situazione si scrive come

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Conoscendo questa formula si possono trattare tutti i problemi di corpo rigido generico, a patto che l'asse di rotazione sia fisso.

Calcolo del momento d'inerzia

Passiamo ora a vedere alcune tecniche per calcolare il momento d'inerzia dei corpi rigidi. Innanzitutto vediamo come la formula 5 si estende anche a corpi continui di densità $\rho(x, y, z)$: supponiamo di suddividere il corpo in tante masse puntiformi infinitesime $dm = \rho(x, y, z) dV$, dove dV è un volumetto infinitesimo. Facendo tendere il dV a zero la sommatoria diventa un'integrale

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Ovviamente nel calcolo pratico di un momento d'inerzia l'oggetto in esame presenterà delle simmetrie che permettono di ridurre l'integrale triplo a un integrale in una sola dimensione.

Spesso viene richiesto il calcolo di momenti d'inerzia di oggetti simmetrici rispetto ad assi che invece non rispettano la simmetria. Per evitare di dover calcolare integrali complicati è molto utile conoscere il seguente teorema.

Teorema 2.2 (Teorema di Huygens-Steiner). *Si consideri un corpo rigido e sia I_{CM} il momento d'inerzia rispetto ad un asse a passante dal centro di massa. Sia a' un asse parallelo ad a che si trova a distanza d da quest'ultimo. Il momento d'inerzia calcolato rispetto ad a è*

$$I = I_{CM} + Md^2.$$

Dimostrazione. Si fissi un sistema di coordinate con asse z passante per a' , e asse x passante per a . Sia d la distanza tra i due assi: le posizioni delle masse rispetto ad a' si indicano con x' e y' , mentre quelle rispetto a a con x ed y . Per le scelte di coordinate che sono state fatte

$$x = x' - d,$$

$$y = y'$$

Il momento d'inerzia rispetto ad a' è

$$I_{a'} = \sum_{i=1}^N m_i(x_i'^2 + y_i'^2) = \sum_{i=1}^N m_i((x_i + d)^2 + y_i^2) = \quad (8)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i(x_i^2 + y_i^2) + \sum_{i=1}^N m_i d^2 + 2d \sum_{i=1}^N m_i x_i = \quad (9)$$

$$= I_C M + M d^2, \quad (10)$$

dove si è usato il fatto che l'ultima sommatoria della terza riga fa 0 per definizione di centro di massa. \square

Esempio 2.2 (Momento d'inerzia di un disco). *Si calcoli il momento d'inerzia di un disco di raggio R , spessore h e massa M rispetto ad un asse perpendicolare allo stesso nei due casi in cui è passante per il centro o passante per il bordo.*

Notiamo che lo spessore h non influenza il calcolo. Definiamo $\sigma = M/(\pi R^2)$ come la massa per unità di area di base (ha le dimensione di un'area superficiale). Per calcolare il momento d'inerzia del disco immaginiamo di suddividerlo in tanti anelli infinitesimi, di cui conosciamo il momento d'inerzia, e integrare per sommare tutti i contributi. Per quanto detto si trova

$$dI = r^2 dm = r^2(2\pi r \sigma dr) = 2\pi \sigma r^3 dr$$

da cui integrando

$$I = \int_0^R 2\pi \sigma r^3 dr = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \sigma \frac{R^4}{4},$$

e infine sostituendo σ si trova

$$I = \frac{1}{2} M R^2.$$

Per trovare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il bordo si può utilizzare il teorema di Huygens-Steiner: il centro di massa si trova nel centro del disco e ogni punto sul bordo si trova a distanza R dal bordo

$$I' = M R^2 + \frac{1}{2} M R^2 = \frac{3}{2} M R^2.$$

Metodo dei frattali Il calcolo del momento di inerzia di alcuni oggetti particolarmente regolari può essere effettuato senza utilizzare il calcolo integrale, ma sfruttando particolari simmetrie del sistema. Supponiamo di avere un oggetto *omogeneo* di massa totale M , dotato di qualche simmetria particolare⁷. Il suo momento di inerzia può essere supposto della forma

$$I = \beta M L_A L_B,$$

dove β è un fattore numerico incognito, L_A e L_B sono due lunghezze caratteristiche dell'oggetto (non necessariamente distinte) che lo caratterizzano. Per esempio in cubo l'unica possibilità è quella dove entrambe sono uguali al lato, oppure in un parallelepipedo esse sono le lunghezze dei 2 lati non paralleli all'asse. L'idea del metodo è quella di determinare β sfruttando la proprietà dell'oggetto di essere decomposto in copie di se stesso più piccole (quindi con lunghezza caratteristica ridotta di un qualche fattore), i cui momento di inerzia possono essere sommati con il teorema di Huygens-Steiner. Per rendere tutto più chiaro vediamo un esempio.

Esempio 2.3. *Calcolare il momento di inerzia di un triangolo equilatero di lato L e massa M rispetto al baricentro.*

La grandezza caratteristica del triangolo equilatero è ovviamente il lato, e si decompone in altri triangoli equilateri facilmente come in Figura 1. Il

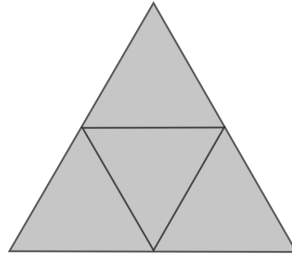


Figura 1: decomposizione di un triangolo equilatero in triangoli equilateri.

momento di inerzia di un triangolo equilatero rispetto al centro si scrive come

$$I = \beta M L^2.$$

⁷Le parole *particolare simmetria* non sono una definizione matematica rigorosa, e al momento non risulta chiaro cosa si intende. Si invita a continuare a leggere e una volta capito il metodo dovrebbe risultare chiaro come utilizzare il metodo, sarà anche evidente quali momenti di inerzia possono essere calcolati con questo metodo.

Ognuno dei 4 triangoli ha massa $M/4$ e lato $L/2$, quindi rispetto al rispettivo centro il momento di inerzia è

$$I = \beta \left(\frac{M}{4} \right) \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{\beta}{16} ML^2.$$

Uno di questi triangoli ha il centro che coincide con il centro del triangolo di partenza, mentre i centri degli altri 3 si trovano a distanza $\frac{\sqrt{3}}{6}L$ da esso. Per il Teorema di Huygens-Steiner si può scrivere

$$I = I' + 3 \left(I' + \left(\frac{M}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{6}L \right)^2 \right),$$

che si traduce in un'equazione in β

$$\beta = \frac{1}{16}\beta + 3 \left(\frac{1}{16}\beta + \frac{1}{48} \right)$$

la cui soluzione è $\beta = 1/12$.

Esercizi

Problema 2.1 (Momenti di inerzia). Calcolare il momento di inerzia dei seguenti oggetti, tutti di massa M :

- sfera di raggio R , sia cava che piena;
- cilindro di altezza h e raggio R rispetto all'asse e rispetto una retta perpendicolare ad esso;
- asta di lunghezza L ;
- prisma a base triangolare con lati a , b e c e altezza h , rispetto ad un asse passante per i baricentri delle facce;
- cubo di lato L ;
- sfera di raggio R con cavità sferica di raggio r a distanza d dal centro;

Problema 2.2. ★ Tre piccole sfere identiche (indicate come A, B e C) di massa m sono collegate con due barre senza massa di lunghezza l , in modo che una delle aste collega le sfere A e B, e l'altra asta collega le sfere B e C. Le aste sono incernierate alla sfera B, cioè l'angolo tra le aste può cambiare senza sforzo. Il sistema riposa in assenza di gravità in modo tale che le sfere si trovino su una retta. Alla palla A viene data istantaneamente una velocità v_0 perpendicolare alle aste. Trovare la distanza minima d tra le sfere A e C durante il successivo movimento del sistema. Trascurare l'attrito.

Problema 2.3. Una sfera A di massa m_A e raggio R è a riposo sul piano. Una seconda sfera (B) di massa m_B e raggio R colpisce la sfera A con velocità prima dell'urto v_0 e parametro d'impatto $b < 2R$. In questo caso il parametro di impatto b è definito come la distanza perpendicolare tra la traiettoria della sfera A e il centro della sfera B. Trovare le velocità finali di entrambe le sfere. Trascurare l'attrito.

Problema 2.4. Un'asta omogenea lunga l e di massa m inizialmente a riposo in assenza di gravità, viene colpita da una massa puntiforme di massa m' a una distanza a dell'estremo superiore dell'asta, con $0 < a < l/2$; con velocità prima dell'urto v_0 perpendicolare all'asta. Trovare la relazione fra le m , m' , a , l e v_0 per cui c'è un unico urto fra l'asta e la massa. Trascurare l'attrito.

Problema 2.5. Sia data un'asta omogenea lunga l appoggiata ad una parete, che forma un certo angolo $\theta < \pi/2$ rispetto al pavimento. Improvvisamente sparisce l'attrito sul pavimento e sulla parete che teneva l'asta in posizione.

Descrivere la caduta dell'asta (per esempio tramite la legge oraria degli estremi).⁸

Problema 2.6. Una matita, modellizzabile come asta rigida omogenea di massa m e lunghezza l , è tenuta in equilibrio sulla punta. Viene ora una piccola spinta iniziale. Nel caso in cui il tavolo in cui poggia sia privo d'attrito, si dimostri che la punta resta sempre in contatto con il tavolo e trovi la velocità angolare con cui la matita impatta il tavolo. Cosa cambia se invece il tavolo ha attrito infinito?

Problema 2.7. ★ È risaputo che la Luna mostra sempre, più o meno, la stessa faccia alla Terra. Questa curiosità non è una coincidenza, ma una semplice conseguenza delle forze di marea che agiscono tra la Terra e la Luna. Nel corso del tempo, le forze di marea hanno continuamente rallentato la rotazione della Luna asse fino a quando il periodo di quella rotazione è diventato uguale al periodo orbitale della Luna intorno alla Terra. È per la stessa ragione per cui la rotazione della Terra attorno al suo asse rallenta continuamente e la velocità orbitale della Luna sta ancora decrescendo.

1. Stimare il rapporto tra la diminuzione di energia cinetica della Terra e della Luna per unità di tempo.
2. Durante il programma Apollo (voli 11, 14 e 15), dei catadiottri (serie di specchi laser ad angolo cubo) sono stati posizionati sulla Luna. Secondo le misurazioni laser estremamente accurate rese possibili dalla presenza dei catadiottri, la distanza lineare della Luna dalla Terra è attualmente in aumento a una velocità di 3,8 cm per anno. Utilizzando questo dato, stimare la variazione della lunghezza di un giorno terrestre durante un anno.
3. Se il sistema Terra-Luna continuasse il suo moto indisturbato, come a risultato dell'effetto frenante delle forze di marea, dopo un tempo sufficientemente lungo, la Terra mostrerebbe sempre la stessa faccia alla Luna, cioè le rotazioni e i movimenti orbitali di questi due corpi sarebbero sincronizzati⁹. Quante volte più lungo di oggi sarebbe un giorno della Terra e quanto più grande di oggi sarebbe la distanza Terra-Luna?

Si supponga che l'orbita della Luna rimanga circolare e si trascuri l'effetto di marea del Sole.

⁸Può essere utile fare il problema prendendo come polo il centro di massa, l'intersezione fra la parete e il pavimento, il punto (mobile) in cui la scala tocca il muro o il pavimento, o ancora un polo più furbo (quello per cui i momenti delle forze di contatto sono nulli).

⁹In realtà, prima che questo possa accedere, il Sole esploderà in una gigante rossa

Problema 2.8. ★ Un disco piatto omogeneo (come un disco da hockey su ghiaccio) scivola e rotola su una superficie ghiacciata. A causa dell'attrito, entrambi i tipi di movimento decelerano e infine fermarsi. Quale dei due movimenti si ferma prima, la rotazione o lo scivolamento? Supponiamo che il disco preme uniformemente sul ghiaccio, che la forza di attrito tra due superfici non dipenda dalla loro velocità relativa e che resistenza dell'aria sia trascurabile.

Problema 2.9. Un disco orizzontale con superficie ruvida è tenuto in rotazione attorno il suo asse di simmetria con velocità angolare Ω . Una sfera ruvida di raggio R rotola senza strisciare e il suo centro si muove su una circonferenza di raggio r_0 , concentrica al disco. Trovare la velocità lineare iniziale e la velocità angolare iniziale che la palla deve avere per compiere questo moto. Qual è il moto del centro della sfera se inizialmente ha velocità e velocità angolare uguali in modulo rispetto a quello trovate nella domanda precedente, ma opposte?

Problema 2.10. ★ Si modellizzi una matita lunga l come un prisma che ha per base un esagono regolare di lato $a \ll l$, e ha una massa M distribuita omogeneamente. Si pone ora la matita su un piano inclinato di un angolo θ con attrito infinito, con il lato lungo sempre alla stessa altezza. Viene quindi data una spinta alla matita che comincia a rotolare. Si assuma che le facce del prisma siano leggermente concave in modo che solo gli spigoli siano in contatto con il piano, ma che la concavità non abbia effetto sul momento d'inerzia.

1. Si dimostri che il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse centrale del prisma vale $I = \frac{5}{12}Ma^2$.
2. Si trovi la relazione fra la velocità angolare della matita appena prima che uno spigolo colpisca il tavolo e la velocità angolare immediatamente dopo l'urto. Domanda analoga per l'energia cinetica. Trovare ora l'energia cinetica minima appena dopo un impatto affinché possa avvenire l'impatto successivo. Trovare la velocità limite della matita. Si assuma che la matita tocchi il piano in ogni istante.
3. Qual è il minimo valore di θ per cui esiste una velocità limite non nulla? Qual è il valore massimo di θ per cui la matita rimane sempre in contatto con il piano?

Problema 2.11. Una disco piatto omogeneo di massa m e raggio r può ruotare sul piano senza attrito. Un bambino di massa m' sale sul disco dove c'è un segno S e fa un giro completo lungo il bordo del disco tornando in S.

Dove si trova il bambino rispetto al punto dove è salito? Di quale angolo ha ruotato il disco rispetto al suo centro?

Problema 2.12. ★ Possiamo schematizzare un dipolo elettrico come una sbarretta rigida di lunghezza \vec{l} ai cui capi sono attaccate due cariche, una $+q$ e l'altra $-q$. Il verso di \vec{l} è fatto in modo che il vettore vada dalla carica negativa a quella positiva. Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$.

1. Leggi di conservazione

- Calcolare la forza totale agente sul dipolo, e il momento torcente rispetto al centro di massa. Scrivere le equazioni del moto per il centro di massa del dipolo e per la rotazione attorno al centro di massa.
- Dalle equazioni del moto trovare la quantità di moto modificata che si conserva. Denotarla con \vec{P} . Scrivere la conservazione dell'energia meccanica totale E .
- Mostrare che la quantità definita come :

$$J = (\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \vec{B}$$

è una costante del moto (I è il momento di inerzia rispetto al centro di massa).

2. Moto nel piano perpendicolare a \vec{B}

- Supponiamo che all'istante iniziale il centro di massa del dipolo sia fermo nell'origine, \vec{l} punti nella direzione x e la velocità angolare iniziale sia $\omega_0 \hat{z}$. Se ω_0 è minore di un certo valore critico ω_c , il dipolo non compie un giro completo rispetto al centro di massa. Trovare ω_c .
- Per un generico $\omega_0 > 0$ qual è la massima distanza d_{max} nella direzione x , che il centro di massa può raggiungere?
- Qual è la tensione sulla sbarretta in funzione di ω ?

Problema 2.13. Una manichetta antincendio di massa M e lunghezza L è avvolta in un rotolo di raggio $R \ll L$. Il tubo viene srotolato, lanciandolo su un terreno pianeggiante con una velocità iniziale v_0 (e velocità angolare v_0/R), mentre l'estremità libera del tubo è tenuta fissa per terra. Il tubo flessibile si srotola e diventa dritto.

Alice e Bob (due studenti di fisica) stanno discutendo su cosa succede durante lo svolgimento. Entrambi sono d'accordo che si può semplificare il problema: l'energia cinetica iniziale del rotolo è molto maggiore della sua energia potenziale ($v_0 \ll \sqrt{gR}$), quindi l'effetto della gravità può essere trascurato; il tubo flessibile può essere considerato arbitrariamente flessibile; e il lavoro necessario per deformare il tubo, e per superare la resistenza dell'aria e l'attrito volvente, può essere trascurato. Tuttavia, pensano che sia importante studiare il movimento verticale del rotolo in aggiunta al più ovvio movimento orizzontale.

La velocità del rullo aumenta continuamente e la sua accelerazione a è chiaramente un vettore che punta nella stessa direzione della sua velocità. Dall'altro canto, il vettore risultante delle forze esterne orizzontali che agiscono sul rotolo (la forza di attrito e la forza per tenere il tubo in posizione all'estremità fissa del tubo) punta nella direzione opposta. Questo strano fatto può essere compreso riconoscendo che il momento totale del rullo mobile (e quindi dell'intero sistema) è

$$p(x) = m(x)v(x) = M(1 - (x/L)) \frac{v_0}{\sqrt{1 - (x/L)}} = Mv_0 \sqrt{1 - (x/L)},$$

dove $m(x) = M(1 - (x/L))$ è la massa della parte mobile del tubo flessibile dopo che ha percorso una distanza x . La sua velocità $v(x)$ è stata determinata utilizzando la conservazione di energia meccanica (ma ignorando gli effetti gravitazionali), ed è data da $v(x) = \frac{v_0}{\sqrt{1 - (x/L)}}$.

Chiaramente, con l'aumentare di x , $p(x)$ diminuisce - dato che la massa del pezzo in movimento diminuisce più velocemente di quanto aumenti la sua velocità. La direzione della forza risultante $F(x)$ che agisce sul sistema è quindi opposta a quello del movimento, con

$$F(x) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dp(x)}{dx} v(x) = -\frac{Mv_0^2}{L} \frac{1}{2(1 - (x/L))}.$$

Bob (usando la conservazione dell'energia meccanica e della massa) ha determinato non solo la massa $m(x)$ del rotolo, il suo raggio $r(x)$ e la sua velocità angolare $\omega(x)$, ma anche il suo momento di inerzia $I(x)$. Ha anche trovato l'orizzontale e il verticale velocità, v_x e v_y , del centro di massa del rotolo (vedi Fig.2). Tutte queste quantità sono funzioni di x , e quindi anche di tempo t .

Bob dice:

Ho trovato v_x e v_y , e moltiplicandoli per la massa istantanea $m(x)$, ho hanno calcolato i componenti p_x e p_y del momento lineare del

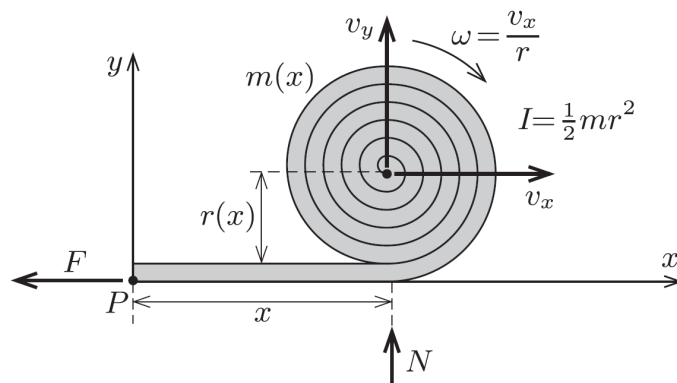


Figura 2: situazione descritta nel testo.

rotolo, e dai tassi di variazione di quest'ultimo, si possono trovare le forze esterne, F e N .

Ha deciso di calcolare il momento angolare J di questo strano sistema, e anche il suo tasso di cambio, e quindi controllare se i momenti torcenti dovuti o esterni le forze produrrebbero questa velocità di cambiamento, cioè se $\tau_{net} = \frac{dJ}{dt}$. Poiché sia il centro del rotolo che il centro di massa dell'intero sistema stanno accelerando, ha espresso le formule per il momento angolare e le coppie, non su questi punti, ma rispetto al punto fisso P , la fine stazionaria del tubo.

Con sua grande sorpresa, ha scoperto che - sebbene la coppia netta dell'esterno le forze sono zero - il momento angolare del sistema non rimane costante, ma cambia con il tempo! Dopo aver controllato i suoi calcoli per l'ennesima volta, era vicino a dichiarare:

In questo sistema, il teorema del momento angolare, una legge fondamentale nella meccanica classica, non è valida.

Alice, tuttavia, la pensa diversamente! Afferma che c'è un errore nel metodo usato da Bob, nel senso che aveva applicato una formula standard ben nota a un situazione a cui non si applicava. Chi ha ragione?

Problema 2.14. Tre cilindri identici di massa m e raggio R , sono a contatto; con due dei cilindri poggiati sul tavolo mentre il terzo è in equilibrio sopra gli altri due. In quale dei due seguenti casi l'accelerazione verticale del cilindro in cima è maggiore?

- C'è attrito infinito fra il tavolo e i cilindri, ma non c'è attrito fra i cilindri stessi.

- Non c'è attrito fra il tavolo e i cilindri, ma c'è attrito infinito fra i cilindri.

Figura 3

Si trascuri ora sia l'attrito fra tavolo e cilindri che fra i cilindri stessi. Si mette in moto il sistema applicando al cilindro di sinistra una forza orizzontale \vec{F} come in figura. Qual è l'intervallo di valori che può assumere la forza che accelera il sistema affinché la struttura non collassi?

Problema 2.15. Una super-palla¹⁰ di raggio R , massa m e momento di inerzia $I = \beta m R^2$ viene lanciata verso il pavimento e ruota intorno ad un asse perpendicolare al piano (verticale) del moto $x - y$. La palla rimbalza rotolando senza strisciare. Assumendo che la collisione con il pavimento sia elastica e che il modulo della velocità verticale v_y sia la stessa prima e dopo l'urto mostrare che

$$v'_x = \frac{(1 - \beta)v_x - 2\beta R\omega}{1 + \beta}$$

$$R\omega' = \frac{-2v_x - (1 - \beta)R\omega}{1 + \beta}$$

dove v_x positivo è verso destra, mentre ω positivo è antiorario. Commentare in particolare il caso in cui $\beta = 1$.

Problema 2.16. Lanciando la super-palla del problema precedente in modo che rimbalzi inizialmente sul pavimento, poi sotto un tavolo e infine nuovamente sul pavimento, quale dev'essere la relazione fra v_x e $R\omega$ in modo che la palla torni in mano al lanciatore con lo stesso percorso?

Problema 2.17. ★ Considerare l'esercizio precedente, in cui la palla ha momento di inerzia $I = \beta m R^2$.

1. Mostrare che la traiettoria per cui palla torna in mano al lanciatore è necessariamente quella in cui la palla compie lo stesso percorso in andata e al ritorno per $\beta \leq \frac{1}{3}$, che significato fisico ha tale β ?
2. Far vedere che per $\beta = 1$, la traiettoria di andata è sempre uguale a quella di ritorno, a meno che il tempo di volo t_1 fra la mano e il pavimento sia esattamente lo stesso che fra il pavimento e il tavolo t_2 , e in tal caso la palla torna alla mano del lanciatore qualunque sia la relazione fra v_x e $R\omega$.

¹⁰Il nome super palla deriva dal fatto che se un palla ruota senza strisciare difficile che conservi l'energia. Ma in questa assunzione la pallina si comporta nel modo descritto dal testo.

3. Trovare la relazione fra β e il rapporto fra i tempi t_1 e t_2 in modo che la palla torni in mano al lanciatore indipendentemente da come sia stata lanciata.

Soluzioni

Soluzione 2.1. • L'unico modo è fare l'integrale in coordinate sferiche, ricordando che l'elemento infinitesimo di volume è $dV = \sin \theta r^2 dr d\phi d\theta$.

- Anche in questo caso non si può usare il metodo dei frattali. Bisogna procedere all'integrazione in coordinate cilindriche.
- Metodo dei frattali: spezzo l'asta in due parti.
- Tracciamo tutte le possibili congiungenti dei punti medi di una faccia triangolare: essi dividono il triangolo in 4 triangoli simili all'originale (esattamente come nel triangolo equilatero). A questo punto basta applicare il metodo dei frattali.
- Metodo dei frattali: dividere il cubo in 8 cubetti più piccoli.
- Il momento di inerzia di una sfera piena, che è noto dal punto 1, può essere visto come somma di quello di una sfera cava come descritta nel testo + una sferetta piccola che riempie la cavità, di cui è facile calcolare il momento di inerzia con il Teorema di Huygens-Steiner. A questo punto per ottenere quella della sfera cava basta fare una differenza.

Soluzione 2.2. Il problema è tratto dalle EuPhO 2018. La soluzione si trova <http://eupho2018.mipt.ru/pdf/eupho18-th-solution.pdf>, Problema 1.

Soluzione 2.3. Le forze impulsive durante l'urto agiscono solamente lungo la congiungente dei due centri siccome non c'è attrito tra le sfere. Scompongo quindi il problema in due componenti: parallelo e ortogonale la direzione dell'urto. Non agendo forze in quella direzione le quantità di moto parallele delle due sfere si conservano, viceversa la direzione perpendicolare può essere trattata come un urto in una dimensione tra due masse m_A e m_B , con le velocità che sono le proiezioni lungo questa direzione.

Soluzione 2.4. Il problema può essere risolto con la conservazione di 3 quantità: energia, quantità di moto e momento angolare rispetto al punto

dove avviene l'urto ¹¹. Utilizzando queste tre relazioni il moto dopo l'urto può essere risolto completamente, ottenendo la velocità finale della massa, la velocità del centro di massa dell'asta e la velocità di angolare dell'asta; note quest'ultime la condizione che non avvenga un nuovo urto è banale cinematica.

Soluzione 2.5. Chiamiamo $\theta(t)$ l'angolo che la sbarretta forma con il pavimento in funzione del tempo, e θ_0 quello iniziale. Prima di tutto scriviamo la conservazione dell'energia, usando il Teorema di König; chiamando v la velocità di traslazione del centro di massa e osservando che $\dot{\theta}$ è anche la velocità di rotazione intorno al centro di massa (e più in generale sarebbe la velocità di rotazione rispetto a un qualsiasi punto dell'asta) si trova

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mg\frac{l}{2}\sin\theta = mg\frac{l}{2}\sin\theta_0.$$

Ora osserviamo che il momento di inerzia della sbarra è dato da

$$I = \frac{1}{12}ml^2,$$

e che

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

. Imponiamo ora le condizioni geometriche del problema¹²: l'estremo appoggiato al muro dell'asta deve muoversi solo verticalmente, mentre quello appoggiato al pavimento può muoversi solo orizzontalmente. Imponiamo quindi che la velocità lungo x del primo sia nulla e che la velocità del secondo lungo y sia anch'essa nulla. Si trova quindi:

$$\dot{x} = \dot{\theta}l \sin\theta$$

$$\dot{y} = \dot{\theta}l \cos\theta$$

Sostituendo tutte queste relazioni nell'equazione di conservazione dell'energia ed esplicitando $\dot{\theta}$ si trova

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{12g}{13l}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}$$

¹¹Attenzione: con punto dove avviene l'urto si deve intendere la proiezione sul piano del punto di contatto tra asta e massa, che quindi non si muove, ma resta nella stessa posizione anche dopo l'urto.

¹²Agli stessi risultati si giungerebbe scrivendo x e y in funzione di θ e poi derivando rispetto al tempo.

Questa è un'equazione differenziale che descrive il moto dell'asta. Risolvendola (cosa in realtà non fattibile...) si otterrebbe la legge oraria richiesta. Si presti molta attenzione però perchè questa relazione non è valida sempre, ma solo fino a quando l'estremo appoggiato al muro dell'asta è effettivamente in contatto con il muro. Si calcoli per esercizio a che angolo avviene il distacco (Hint: scrivere $\vec{F} = m\vec{a}$ per la sbarretta lungo l'asse x . La condizione da richiedere è che la forza vincolare della parte sia sempre diretta verso l'esterno del muro.)

Soluzione 2.6. Durante la caduta dell'asta l'estremo rimane sempre in contatto col piano; è sufficiente mostrarlo per l'asta in quanto il quadrato si può vedere come un'asta che urta prima del dovuto. Se A è l'estremo in contatto col piano mostrate che la forza agente su A è diretta verso l'alto, per fare questo dovete scrivere la seconda legge di Newton lungo y e usare l'equazione del moto, dell'energia e l'espressione di \ddot{y}_G in funzione di $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$. Alla fine comparirà una disuguaglianza che coinvolge θ e α , verificate che è soddisfatta se l'asta parte da ferma.

Soluzione 2.7. Se trascuriamo gli effetti del momento angolare dovuti al Sole, il sistema Terra-Luna può essere considerato come un sistema chiuso in cui il momento angolare totale è conservato. Il momento angolare totale consiste nelle rotazioni dei corpi celesti ruotanti intorno ai propri assi e il momento angolare orbitale associato ai loro movimenti attorno al loro centro comune di massa. È utile stimare quali di questi contribuiscono in modo significativo al momento angolare totale e quali sono trascurabili. Ai fini di questa stima, possiamo usare l'approssimazione che l'Equatore della Terra, l'equatore della Luna e l'orbita della Luna si trovano tutti nello stesso piano. Supponiamo che la Luna sia una sfera omogenea. Oltre alla conservazione del momento angolare, è necessaria un'altra equazione - una che dia una connessione tra la velocità angolare orbitale della Luna e la distanza Terra-Luna. Per ottenere ciò, considera l'accelerazione centripeta della Luna mentre orbita attorno a un cerchio approssimativo.

Soluzione 2.8. Il rapporto $\frac{\tau}{F}$ è funzione di del rapporto $\frac{\omega}{v}$ quindi possiamo scrivere

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\dot{\omega}}{\dot{v}} = F\left(\frac{\omega}{v}\right),$$

con F tale che $F(0) = 0$ ovviamente. Fisicamente mi aspetto che la funzione F sia continua e in particolare deve valere $F \rightarrow 0$ se $\frac{\omega}{v} \rightarrow 0$.

Mostriamo che la rotazione non può finire prima della traslazione. Se succedesse da un certo istante in poi t_0 dovrebbe succedere

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega_0} > \frac{\dot{v}}{v_0},$$

dove ω_0 e v_0 sono la velocità angolare e di traslazione al tempo t_0 . La condizione ci dice che la diminuzione percentuale della rotazione è più grande della diminuzione percentuale della traslazione. Se fosse vero però si avrebbe

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega_0} = \frac{v_0}{\omega_0} F\left(\frac{\omega}{v}\right) > 1,$$

ma questo non è verificato quando $\frac{\omega}{v} \rightarrow 0$. Analogamente a quanto detto ora si può ripetere il ragionamento per mostrare che la traslazione non può finire prima della rotazione, quindi l'unica possibilità è che terminino insieme.

Soluzione 2.9. Il Problema è il numero 55 di *200 More Puzzling Physics Problems*¹³, per una soluzione più dettagliata consultare il libro.

Scegliamo un sistema di coordinate tale che l'asse \hat{z} sia l'asse di rotazione del disco ruvido, quindi $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$. Sia \vec{F} la forza di attrito che il disco esercita sulla sfera, $\vec{\omega}$ la velocità angolare della sfera e \vec{v} la velocità del suo centro di massa. Scriviamo le equazioni cardinali della meccanica, ricordandoci che la forza peso è perfettamente bilanciata dalla reazione vincolare del piano e che quest'ultime non esercitano momento dato che sono entrambi radiali:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\dot{\vec{v}} \\ \vec{R} \times \vec{F} &= \frac{2}{5}mR^2\dot{\vec{\omega}},\end{aligned}$$

dove \vec{R} è il vettore che punta dal centro della sfera al punto di contatto (quindi in coordinate $\vec{R} = -R\hat{z}$). L'ultimo ingrediente che ci manca è la condizione di non-strisciamento:

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{v},$$

dove \vec{r} è la posizione del centro di massa della sfera. Deriviamo rispetto al tempo quest'ultima

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \dot{\vec{v}}$$

e a questo punto sostituiamo la prima cardinale nella seconda, ricaviamo $\dot{\vec{\omega}}$ e sostituiamo nuovamente in quest'ultima, ottenendo

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = \left(\frac{5}{2mR^2}\vec{R} \times m\dot{\vec{v}}\right) \times \vec{R} + \dot{\vec{v}}.$$

¹³In realtà è anche un problema del Morin, quindi una soluzione si trova anche lì

che riscritta una pochino meglio (usando l'espressione in coordinate di \vec{R}) è

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = \frac{5}{2} \hat{z} \times \dot{\vec{v}} \times \hat{z} + \dot{\vec{v}}.$$

Utilizziamo ora una nota identità vettoriale $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ per scrivere

$$\hat{z} \times \dot{\vec{v}} \times \hat{z} = \dot{\vec{v}}(\hat{z} \cdot \hat{z}) - \hat{z}(\hat{z} \cdot \dot{\vec{v}}) = \dot{\vec{v}},$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che la pallina si muove sul piano del disco e quindi la sua accelerazione è ortogonale all'asse \hat{z} . Si trova quindi

$$\dot{\vec{v}} = \frac{2}{7} \vec{\Omega} \times \vec{v},$$

che implica che l'accelerazione è sempre ortogonale alla velocità e proporzionale in modulo ad essa. L'unico moto planare che ha questa proprietà è il moto circolare uniforme¹⁴. Abbiamo dunque mostrato che la pallina si muove sempre di moto circolare, indipendentemente dalle condizioni iniziali. Per rispondere alla domanda del testo non resta che integrare l'ultima equazione e imporre le condizioni giuste.

Soluzione 2.10. 1. Dividiamo il prisma esagonale in 6 piccoli prismi a base di triangolo equilatero con un vertice in comune al centro. Il momento d'inerzia di ciascun prisma triangolare di massa $m = M/6$ rispetto all'asse passante per il centro è $I_{\text{triang}} = \frac{1}{12} m a^2$ (vedi esempio 5.3), pertanto il momento di ciascun prisma rispetto ad un vertice è $I_{\text{triang/vert}} = (\frac{1}{12} a^2 + \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} a^2) m$. Moltiplicando per 6 si ottiene il momento richiesto: $I = 6 \frac{5}{12} m a^2 = \frac{5}{12} M a^2$.

2. Sia A è l'asse istantaneo prima dell'urto mentre B è quello dopo l'urto. La velocità angolare del prisma subito prima che lo spigolo urti nel punto B è ω_i . Durante l'urto che avviene in un lasso di tempo molto breve ci interessano solo le forze impulsive. Notiamo che tutte le forze impulsive sono applicate nel punto B, quindi L_B si conserva durante l'urto:

$$(M a^2 + I) \omega_f = L_B = I \omega_i + \frac{1}{2} M a^2 \omega_i$$

$$\omega_f = \frac{I + M a^2 / 2}{I + M a^2} \omega_i = \frac{11}{17} \omega_i$$

L'energia cinetica prima e dopo l'urto si scrive:

$$K_i = \frac{1}{2} (I + M a^2) \omega_i^2$$

¹⁴Il fatto è abbastanza intuitivo, per una dimostrazione matematica si veda il Morin.

$$K_f = \frac{1}{2}(I + Ma^2)\omega_f^2$$

$$\rightarrow K_f = \frac{\omega_f^2}{\omega_i^2}K_i = \frac{121}{289}K_i$$

Per garantire che ci possa essere un urto successivo, K_f deve essere sufficiente a sollevare il centro di massa G del prisma fino al punto più alto della sua traiettoria. Il centro di massa G si muove su una circonferenza centrata in B e il punto più alto raggiunto da G è quando BG è diretto lungo la verticale.

Si vede che se $\theta \geq \frac{\pi}{6}$, $K_{i,min} = 0$.

Se invece $\theta \leq \frac{\pi}{6}$, l'altezza massima a cui G deve arrivare, rispetto a dov'era dopo l'urto vale $a(1 - \cos(\pi/6 - \theta))$ e pertanto deve essere, chiamato $q = \frac{121}{289}$:

$$K_f = qK_i \geq Mga \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right]$$

$$\rightarrow K_{i,min} = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \right] \frac{Mga}{q}$$

Il centro del cilindro fra un urto e il successivo si abbassa di $a \sin(\pi/3 + \theta) - a \sin(\pi/3 - \theta) = a \sin(\theta)$ Se $K_{i,n}$ è l'energia cinetica subito prima dell'n-esimo urto, allora posto che sia $K_{i,n} \geq K_{i,min}$ si ha che:

$$K_{i,n+1} = qK_{i,n} + Mga \sin \theta.$$

Quindi se il limite esiste e vale $K_{i,0} \geq K_{i,min}$ deve soddisfare la relazione appena trovata, e cioè:

$$K_{i,0} = qK_{i,0} + Mga \sin \theta \rightarrow K_{i,0} = \frac{Mga \sin \theta}{1 - q}$$

Pertanto la velocità limite, ricordando che all'energia cinetica contribuisce anche la rotazione, se esiste è

$$v_0 = \sqrt{(17/7)ga \sin(\theta)}$$

- Affinché la condizione di sopra sia soddisfatta, si deve superare il punto più alto della traiettoria, cioè si deve imporre

$$K_{i,n} \geq K_{i,min}$$

e sostituendo l'energia cinetica limite otteniamo quindi

$$\frac{Mga \sin \theta}{1 - q} \geq \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right] \frac{Mga}{q}$$

risolvendo per θ , otteniamo il θ_{min} .

Per stimare l'angolo massimo per cui la matita sta sempre in contatto con il piano, notiamo che l'asse della matita si muove in moto circolare intorno al punto di contatto e che la forza gravitazionale deve essere sempre sufficiente a garantire la forza centripeta necessaria. La massima accelerazione centripeta avviene appena prima che cambi il punto di contatto, ed è uguale a mv_0^2/a . La minima proiezione della forza gravitazionale lungo l'asse avviene pure appena prima che cambi il punto di contatto, ed è uguale a $mg \cos(\theta + \pi/6)$. Usando v_0 trovato al punto precedente è possibile risolvere $mv_0^2/r \leq mg \cos(\theta - \pi/6)$.

Alcune osservazioni:

- $K_{i,0}$ non diverge mai, infatti per come è stato modellizzato il problema la frazione di energia persa ad ogni urto è proporzionale all'energia cinetica stessa e questo impedisce a $K_{i,0}$ di crescere indefinitamente.
- $K_{i,0}$ per essere considerato un risultato valido deve essere maggiore di $K_{i,min}$. Come ci dice l'intuito questa condizione non può essere soddisfatta per $\theta \rightarrow 0$ (verificatelo).

Soluzione 2.11. Tutte le forze sono interne, il centro di massa G rimane immobile durante il moto.

$$r = \frac{mR}{m + M}$$

Si conserva inoltre il momento angolare rispetto a G.

Chiamiamo con θ l'angolo tra OG e l'asse x . Invece ϕ è l'angolo di cui ha ruotato la corona circolare rispetto all'asse x .

Per rispondere alla richiesta del problema è sufficiente calcolare $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$, una volta che il bambino ha raggiunto di nuovo S.

$$L_G = L_O + L_{O/G} + m(R - r)\dot{\theta} = MR^2\dot{\phi} + Mr^2\dot{\theta} + m(R - r)^2\dot{\theta} = 0$$

$$\rightarrow \dot{\phi} = -\frac{m}{m + M}\dot{\theta} \rightarrow \Delta\phi = -\frac{m}{m + M}\Delta\theta$$

dato che il bambino visto dalla corona ha fatto un giro completo, abbiamo anche la relazione:

$$\Delta\theta - \Delta\phi = 2\pi$$

da queste due si ottiene:

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{m+M}{2m+M}$$

$$\Delta\phi = -2\pi \frac{m}{2m+M}$$

Controllare i casi limite

Soluzione 2.12. 1.

(a) Scriviamo per prima cosa le velocità della carica $+q$ e $-q$ a partire dalla velocità del centro di massa.

$$\vec{v}_+ = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (\vec{l}/2)$$

$$\vec{v}_- = \vec{v}_G - \vec{\omega} \times (\vec{l}/2)$$

la forza totale agente sul dipolo è :

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{v}_+ - \vec{v}_-) \times \vec{B} = -q\vec{B} \times (\vec{\omega} \times \vec{l})$$

il momento torcente calcolato rispetto al centro di massa è:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = q\vec{l} \times (\vec{v}_G \times \vec{B})$$

ora possiamo scrivere le due equazioni del moto.

$$2m\dot{\vec{v}}_G = -q\vec{B} \times (\vec{\omega} \times \vec{l})$$

$$I_G\dot{\vec{\omega}} = q\vec{l} \times (\vec{v}_G \times \vec{B})$$

con $I_G = \frac{1}{2}ml^2$.

(b) L'equazione per il centro di massa si può riscrivere come:

$$\frac{d}{dt}(2m\vec{v}_G) = -q\vec{B} \times (\vec{\omega} \times \vec{l}) = -q\vec{B} \times \frac{d\vec{l}}{dt} = -\frac{d}{dt}(q\vec{B} \times \vec{l})$$

$$\implies \frac{d}{dt}(2m\vec{v}_G + q\vec{B} \times \vec{l}) = 0$$

$$\implies \vec{P} = 2m\vec{v}_G + q\vec{B} \times \vec{l}$$

scriviamo l'energia del dipolo, che è tutta cinetica.

$$E = K_0 + K_G = \frac{1}{2}I_G\omega^2 + mv_G^2$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= \left(\vec{v}_G \times \vec{P} + \vec{r}_G \times \dot{\vec{P}} + \frac{d\vec{L}}{dt} \right) \cdot \vec{B} = (\vec{v}_G \times (2m\vec{v}_G + q\vec{B} \times \vec{l}) + q\vec{l} \times (\vec{v}_G \times \vec{B})) \cdot \vec{B} \\ &= q(\vec{v}_G \times (\vec{B} \times \vec{l}) + \vec{l} \times (\vec{v}_G \times \vec{B})) \cdot \vec{B}\end{aligned}$$

conoscendo l'identità vettoriale $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$, si riduce a:

$$-q[\vec{B} \times (\vec{l} \times \vec{v}_G)] \cdot \vec{B} = 0$$

che è nullo perché è il prodotto scalare di due vettori ortogonali tra loro.

2.

(a) Sappiamo che \vec{P} si conserva, in particolare il suo valore è quello assunto all'istante $t = 0$.

$$\vec{P} = 2m\vec{v}_G + q\vec{B} \times \vec{l} = qBl\hat{y}$$

ho assunto $\vec{B} = B\hat{z}$; dall'equazione sopra ricavo mv_G^2 che poi andrò a sostituire nell'energia. Detto θ l'angolo tra \vec{l} e l'asse x si ha :

$$mv_G^2 = \frac{q^2 B^2 l^2 (1 - \cos \theta)}{2m}$$

quindi

$$E = \frac{1}{2}I_G\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{q^2 B^2 l^2 (1 - \cos \theta)}{2m}$$

se il dipolo compie un giro completo, allora per ogni θ deve valere la disuguaglianza:

$$\frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}I_G\omega_0^2 - \frac{q^2 B^2 l^2 (1 - \cos \theta)}{2m} \geq 0$$

per il valore critico ω_c deve essere

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}I_G\omega_c^2 &= \max \left[\frac{q^2 B^2 l^2 (1 - \cos \theta)}{2m} \right] = \frac{q^2 B^2 l^2}{m} \\ \implies \omega_c &= 2\frac{qBl}{m}\end{aligned}$$

(b) Per questo punto sfruttiamo la conservazione di J

$$\begin{aligned}J &= I_G\omega_0 B = (\vec{r}_G \times \vec{P} + \vec{L}) \cdot \vec{B} = (x_G qBl\hat{z} + I_G\omega\hat{z}) \cdot \vec{B} \\ \implies x_G &= \frac{I_G(\omega_0 - \omega)}{qBl}\end{aligned}$$

il valore massimo di x_G si ha quando ω è minimo, in particolare:

- se è $\omega_0 < \omega_c$ allora $\omega_{min} = -\omega_0$
- se è $\omega_0 > \omega_c$ allora $\omega_{min} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2}$
- se è $\omega_0 = \omega_c$ si può mostrare, provateci per esercizio, che il dipolo per raggiungere l'angolo di π impiega un tempo infinito e quindi $\omega_{min} = 0$.

(c) Definisco positiva se la tensione sulla sbarretta genera una compressione. Allora la tensione sarà :

$$T = - \left(\frac{\vec{F}_{-,tot} - \vec{F}_{+,tot}}{2} \right) \cdot \hat{l} = -\hat{l} \cdot (\vec{F}_{+,m} + \vec{F}_{+,c} + \vec{F}_{+,e})$$

$\vec{F}_{+,m}, \vec{F}_{+,c}, \vec{F}_{+,e}$ sono rispettivamente la forza magnetica, centrifuga e elettrica sulla carica positiva.

- $-\hat{l} \cdot \vec{F}_{+,e} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2}$ positiva perchè tende a comprimere la sbarretta.
- $-\hat{l} \cdot \vec{F}_{+,c} = -\frac{1}{2}ml\omega^2$
- $-\hat{l} \cdot \vec{F}_{+,m} = -\hat{l} \cdot (q\vec{v}_G \times \vec{B})$, questa espressione cerchiamo ora di scriverla in funzione di ω .

$$-\hat{l} \cdot (q\vec{v}_G \times \vec{B}) = -\frac{q}{l}\vec{l} \cdot (\vec{v}_G \times \vec{B}) = -\frac{q}{l}\vec{v}_G \cdot (\vec{B} \times \vec{l}) = \frac{q}{l}\vec{v}_G \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

sappiamo che

$$\vec{l} = l(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})$$

$$\vec{l} \times \vec{B} = Bl(-\cos\theta\hat{y} + \sin\theta\hat{x})$$

$$\vec{v}_G = \frac{\vec{P} + q\vec{l} \times \vec{B}}{2m} = q\frac{Bl\hat{y} + \vec{l} \times \vec{B}}{2m} = \frac{qlB}{2m}[(1 - \cos\theta)\hat{y} + \sin\theta\hat{x}]$$

$$\frac{q}{l}\vec{v}_G \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) = \frac{q^2 B^2 l}{2m}[(1 - \cos\theta)\hat{y} + \sin\theta\hat{x}] \cdot [-\cos\theta\hat{y} + \sin\theta\hat{x}]$$

$$= \frac{1}{l} \left[(1 - \cos\theta) \frac{q^2 B^2 l^2}{2m} \right] = \frac{1}{l} \left[\frac{1}{2} I_G (\omega_0^2 - \omega^2) \right] = \frac{1}{4} ml (\omega_0^2 - \omega^2)$$

In conclusione

$$T = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} - \frac{1}{2}ml\omega^2 + \frac{1}{4}ml(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Soluzione 2.13. Seguiamo i calcoli di Bob. La massa del rotolo (che cambia continuamente) espressa in funzione della distanza già percorsa è

$$m(x) = M(1 - x/L),$$

il suo raggio (dalla proporzionalità della massa e dell'area della sezione trasversale) è

$$r(x) = R\sqrt{1 - x/L},$$

e la componente orizzontale della sua velocità (dalla conservazione dell'energia) è

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (x/L)}}.$$

Il calcolo di v_x ha usato il fatto che, poiché $R \ll L$, la componente verticale della velocità è molto più piccola di quella orizzontale, e quindi verticale il termine dell'energia cinetica potrebbe essere trascurato. La componente verticale della velocità del centro del rotolo è

$$v_y = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dx} v_x = -\frac{Rv_0}{2L} \frac{1}{1 - (x/L)},$$

il segno negativo appare perché, man mano che x aumenta, il centro del rotolo si muove ad una posizione progressivamente più bassa. Da questo, la componente verticale del lineare lo slancio può essere trovato:

$$p_y = m(x)v_y(x) = -MRv_0/(2L).$$

Poiché questa quantità è costante nel tempo, abbiamo raggiunto il, forse sorprendente, conclusione che la componente verticale della forza netta che agisce sul rotolo deve essere zero, cioè $N - m(x)g = 0$. Ciò significa che il terreno non esercita alcun extra forza verticale sul rotolo oltre il peso (corrente) della manichetta antincendio.

Ne consegue che, secondo l'analisi di Bob, la coppia netta prodotta dalle forze esterne attorno a P sono zero; la linea di azione di F attraversa P, e il la forza normale N e il peso del rotolo si annullano a vicenda. Che dire il momento angolare del rotolo? Se il calcolo di Bob è corretto, allora il totale il momento angolare deve essere costante nel tempo. Il momento angolare sul punto P ha due termini: lo spin interno J_1 del rotolare, e il momento angolare orbitale J_2 a causa del movimento lineare del centro di massa. Prendendo la direzione della rotazione del rotolo come positiva, notiamo che, da non c'è slittamento, $\omega = v_x/r$. Lo spin interno J_1 può essere espresso come segue:

$$J_1 = I\omega = \frac{1}{2}mr^2\omega = \frac{1}{2}mrv_x = \frac{1}{2}MRv_0 \frac{1-x}{L}.$$

Questa quantità cambia col tempo, dal momento che x lo fa. Il momento angolare orbitale è

$$J_2 = p_x r - p_y x = mrv_x - xmv_y = MRv_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + MRv_0 \frac{x}{2L},$$

e così il momento angolare totale del sistema è

$$J_1 + J_2 = MRv_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \neq \text{costante}.$$

Quindi, il teorema del momento angolare non è rispettato per la manichetta antincendio! - afferma Bob! Ma Alice aveva altre idee! Secondo lei, la componente verticale del lineare la quantità di moto del rotolo (e il sistema nel suo complesso) dovrebbe essere calcolata in a modo diverso, perché, sosteneva, $p_y \neq m(x)v_y$. E aveva ragione! Il momento lineare dovrebbe essere trovato calcolando il componente verticale della velocità del centro di massa del tubo completo, e moltiplicando questo per M. Questa prescrizione dà $p_y^{\text{corretto}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m(x)r(x)}{M} \right] M = MRv_x \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{3/2} = -\frac{3}{2} \frac{MRv_0}{L}$. Questo è *tre volte* più grande del valore del mv_y della quantità calcolata ingenuamente! Usando questo momento lineare - calcolato correttamente - il momento angolare orbitale è $J_2^{(\text{corretta})} = MRv_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + MRv_0 \frac{3x}{2L}$, e il momento angolare totale dell'intero sistema è $J_1 + J_2^{(\text{corretta})} = \frac{3}{2}MRv_0 = \text{costante}$. Tutto ora è OK, perché il teorema del momento angolare è ancora valido, anche per un corpo con massa variabile, a condizione del momento lineare e dell'orbitale il momento angolare venga calcolato correttamente (anche se apparentemente in maniera insolita).

Note:

1. Il momento lineare verticale, calcolato correttamente, è anche una costante il tempo, e quindi la conclusione di Bob, che $N - m(x)g = 0$, aveva ragione.
2. Bob e Alice hanno entrambi usato la stessa formula ($p_x = m(x)v_x(x)$) per il calcolo del momento orizzontale del tiro e - come abbiamo appena fatto visto - per sistemi con massa variabile, questo non è certo di dare la risposta giusta. Fortunatamente, questo particolare risultato è corretto; questo può essere provato usando Alice metodo (determinando la derivata temporale della posizione orizzontale del sistema centro di massa nel suo insieme).
3. Quando $x \rightarrow L$, alcune delle quantità calcolate, vale a dire v_x , v_y e $F(x)$, avvicinarsi all'infinito, ma è ovvio che questo non può accadere

fisicamente. La nostra descrizione e le nostre approssimazioni non possono essere valide alla fine del movimento.

Soluzione 2.14. Sia N la forza normale fra i cilindri e F la forza di attrito fra il pavimento e i cilindri. Sia a_x l'accelerazione orizzontale iniziale del cilindro in basso a destra (quindi $\alpha = a_x/R$ è la sua accelerazione angolare) e a_y l'accelerazione verticale del cilindro in alto, dove il verso positivo è verso il basso.

Se consideriamo il momento torcente rispetto al centro di uno dei cilindri in basso, l'unica forza rilevante è F , poiché le altre sono dirette verso il centro del cilindro stesso (hanno braccio nullo). Le equazioni $F_x = ma_x$ del cilindro in basso a destra, $F_y = ma_y$ sul cilindro in alto e $\tau = I\alpha$ sul cilindro in basso a destra sono rispettivamente:

$$N \cos(\pi/3) - F = ma_x$$

$$mg - 2N \sin(\pi/3) = ma_y$$

$$FR = (\beta m R^2)(a_x/R)$$

Abbiamo quattro incognite, N , F , a_x e a_y , quindi ci serve una quarta equazione. Fortunatamente a_x e a_y sono legate. La superficie di contatto fra il cilindro superiore e quello inferiore è inizialmente ad un angolo di $\pi/3$ rispetto all'orizzontale. Pertanto se il cilindro inferiore si sposta di una distanza d lateralmente, il cilindro superiore si sposta in verticale di una distanza pari a $d \tan(\pi/3)$. Pertanto

$$a_x = \sqrt{3}a_y.$$

Abbiamo ora quattro equazioni e quattro incognite. Risolvendo per a_y otteniamo:

$$a_y = \frac{g}{7 + 6\beta}$$

Sia N la forza normale fra i cilindri e F la forza di attrito fra i cilindri. Sia a_x l'accelerazione orizzontale iniziale del cilindro in basso a destra e a_y l'accelerazione verticale del cilindro in alto, dove il verso positivo è verso il basso. Sia inoltre α l'accelerazione angolare del cilindro in basso a destra prendendo positivo il senso antiorario. Nota che α non è uguale a a_x/R , perché il cilindro in basso scivola sul terreno.

Se consideriamo il momento torcente rispetto al centro di uno dei cilindri in basso, l'unica forza rilevante è F , per un ragionamento analogo a quello fatto in precedenza. Come nel caso precedente possiamo scrivere le seguenti equazioni:

$$N \cos(\pi/3) - F \sin(\pi/3) = ma_x$$

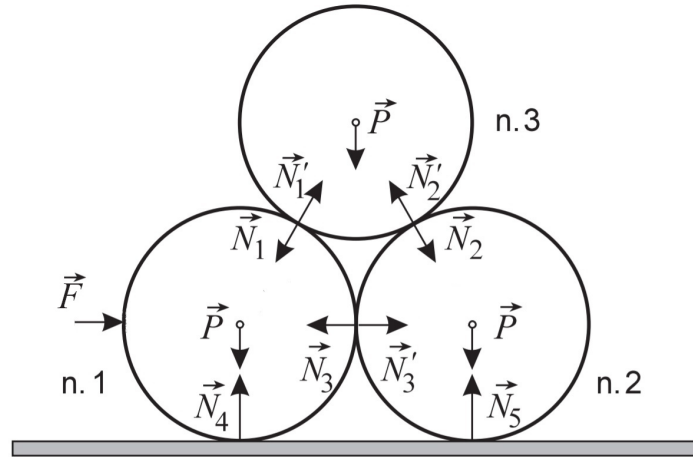


Figura 4

$$mg - 2N \sin(\pi/3) - 2F \cos(\pi/3) = ma_y$$

$$FR = (\beta m R^2) \alpha$$

$$a_x = \sqrt{3} a_y$$

Ancora abbiamo cinque incognite e quattro equazioni. Per trovare la quinta relazione, dobbiamo legare α e a_x . Un modo per farlo è ignorare il moto lungo y del cilindro superiore e immaginare che il cilindro in basso a destra stia ruotando in alto, intorno al cilindro superiore, che è tenuto fisso. In questa situazione il centro del cilindro inferiore si muove (inizialmente) ad un angolo di $\pi/3$ rispetto all'orizzontale. Quindi se si muove di una distanza infinitesima d verso destra, allora il centro si sposta di $d/\cos(\pi/3)$ in alto e verso destra. Quindi l'angolo di cui ruota il cilindro inferiore è $\theta = (d/\cos(\pi/3))/R = (2/\sqrt{3})(d/R)$. Considerare il moto del cilindro superiore non cambia questo risultato. Quindi prendendo la derivata seconda:

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{a_x}{R}$$

Abbiamo dunque cinque equazioni e cinque incognite e risolvendo per a_y otteniamo:

$$a_y = \frac{g}{7 + 8\beta}$$

In assenza di attrito, poiché le rette d'azione di tutte le forze presenti tra i cilindri e tra il piano e cilindri intersecano gli assi di ciascun cilindro, tutti i momenti assiali sono nulli; se dunque inizialmente i cilindri sono in quiete, non si avrà nessun moto rotatorio: i tre cilindri traslano senza

rotolare. Poiché si assume che il sistema accelerato non collassi, esso si muove rigidamente e dunque, per il secondo principio, l'accelerazione a può essere subito determinata essendo $F = 3ma$. Si considerano poi le equazioni di moto, separatamente per ciascun cilindro (per i simboli fare riferimento ai relativi diagrammi di corpo libero), come segue. Rispetto al caso stato o studiato prima, il sistema di forze non è più simmetrico: adesso le reazioni vincolari non hanno lo stesso modulo, mentre, per il principio di azione e reazione, resta vero che $N_1 = N'_1$, $N_2 = N'_2$ e $N_3 = N'_3$.

Per il cilindro n.1:

$$F - N_3 - \frac{1}{2}N_1 = ma$$

$$N_4 - P - \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 = 0$$

Per il cilindro n.2:

$$N'_3 + \frac{1}{2}N_2 = ma$$

$$N_5 - P - \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 = 0$$

Per il cilindro n.3:

$$\frac{1}{2}N'_1 - \frac{1}{2}N'_2 = ma$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}N'_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}N'_1 - P = 0$$

L'insieme delle 6 equazioni costituiscono un sistema nelle incognite $N_{1,\dots,5}$ ed a . Quest'ultima, anche senza la considerazione fatta sopra, si sarebbe potuta trovare sommando membro a membro le tre equazioni relative alle componenti orizzontali del moto (le prime di ogni coppia), per cui si può sostituire $ma = F/3$.

Il sistema di forze sul cilindro n.3 consente di ricavare N_1 e N_2 . Risolvendo il sistema, infatti, si trova

$$N_1 = \frac{P}{\sqrt{3}} + \frac{F}{3} \quad N_2 = \frac{P}{\sqrt{3}} - \frac{F}{3}$$

Una prima condizione su F si ottiene dalle equazioni del moto di uno degli altri cilindri. In particolare, dall'equazione della componente orizzontale del moto del cilindro n.2, si ricava

$$N_3 = \frac{F}{3} - \frac{N_2}{2} = \frac{F}{2} - \frac{P}{2\sqrt{3}}$$

Anche in questo caso deve essere $N_3 > 0$. Da qui si ricava $F > \frac{P}{\sqrt{3}}$. In conclusione, il sistema non collassa se viene accelerato nel modo descritto da una forza F tale che

$$\frac{mg}{\sqrt{3}} < F < \sqrt{3}mg.$$

Soluzione 2.15. Dal momento che v_y è lasciato invariato dal rimbalzo possiamo ignorarlo quando conserviamo l'energia, e dal momento che l'impulso verticale dal pavimento non ha braccio, possiamo ignorare il moto verticale nel problema. Dalla conservazione del momento angolare rispetto al punto di contatto, abbiamo

$$I(\omega' - \omega) = Rm(v'_x - v_x)$$

La conservazione dell'energia invece ci da

$$I(\omega'^2 - \omega^2) = m(v_x'^2 - v_x^2)$$

Dividendo ora la seconda equazione per la prima otteniamo

$$R(\omega' + \omega) = -(v'_x + v_x)$$

che combinata alla prima equazione riscritta sostituendo il momento di inerzia

$$\beta R(\omega' - \omega) = v'_x - v_x$$

ci fornisce le equazioni richieste dal testo.

Soluzione 2.16. Il rimbalzo sotto il tavolo ha la seguente trasformazione:

$$v'_x = \frac{(1 - \beta)v_x + 2\beta R\omega}{1 + \beta}$$

$$R\omega' = \frac{2v_x - (1 - \beta)R\omega}{1 + \beta}$$

Per ottenerla a partire dal problema precedente si può fare la sostituzione $\omega \rightarrow -\omega$. (Immaginate di riflettere il problema rispetto al piano orizzontale. Questo non cambia v_x , ma cambia il moto orario con quello antiorario.) Vogliamo che v_x e ω cambino segno durante il rimbalzo sotto il tavolo, cioè:

$$-v_x = \frac{(1 - \beta)v_x + 2\beta R\omega}{1 + \beta}$$

$$-R\omega = \frac{2v_x - (1 - \beta)R\omega}{1 + \beta}$$

Entrambe le equazioni danno la stessa informazione, cioè $(v_x, R\omega) \propto (-\beta, 1)$. Per il secondo rimbalzo sul pavimento, usiamo la trasformazione originaria per ottenere:

$$v'_x = k \frac{(1-\beta)[- \beta] - 2\beta[1]}{1+\beta} = \frac{\beta^2 - 3\beta}{1+\beta}$$

$$R\omega' = k \frac{-2[-\beta] - (1-\beta)[1]}{1+\beta} = \frac{3\beta - 1}{1+\beta}$$

con k una certa costante di proporzionalità. Le quantità iniziali sono quelle negative perciò vogliamo lanciare la palla con $(v_x, R\omega) \propto (\beta(3-\beta), 1-3\beta)$. Nota che per $\beta > \frac{1}{3}$ dal momento che ω è negativo, bisogna lanciare la palla con spin in avanti (perché definiamo ω antiorario come positivo), mentre per $\beta < \frac{1}{3}$ bisogna lanciare la pallina con backspin. Infine per $\beta = \frac{1}{3}$ bisogna lanciarla senza spin.

Soluzione 2.17. Ricordiamo che per la trasformazione sul pavimento:

$$v'_x = \frac{(1-\beta)v_x - 2\beta R\omega}{1+\beta}$$

$$R\omega' = \frac{-2v_x - (1-\beta)R\omega}{1+\beta}$$

e sotto il tavolo:

$$v'_x = \frac{(1-\beta)v_x + 2\beta R\omega}{1+\beta}$$

$$R\omega' = \frac{2v_x - (1-\beta)R\omega}{1+\beta}$$

Pertanto lo spostamento orizzontale totale è pari a $v_x t_1 + v'_x t_2 + v''_x t_2 + v'''_x t_1$, dove t_1 è il tempo che la pallina trascorre fra la mano del lanciatore e il pavimento, e t_2 il tempo fra il pavimento e il tavolo. Quindi ponendo che lo spostamento orizzontale totale sia zero, si ottiene:

$$0 = \frac{2}{(1+\beta)^3} [(3\beta - 1)t_1 - (\beta + 1)t_2] [(3\beta - 1)v_x + (3 - \beta)\beta R\omega].$$

Quest'identità è rispettata se una delle due parentesi si annulla. Se si annulla la seconda, abbiamo la relazione trovata nel problema precedente per cui la pallina torna in mano al lanciatore con lo stesso percorso dell'andata.

1. Se $\beta < \frac{1}{3}$, i coefficienti davanti a t_1 e t_2 hanno lo stesso segno, quindi affinché il primo termine si annulli t_1 e t_2 devono essere discordi, assurdo. Quindi se per $\beta < \frac{1}{3}$ la particella torna in mano al lanciatore, necessariamente lo fa ritraendosi nello stesso percorso dell'andata.

2. Per $\beta = 1$ otteniamo $(t_1 - t_2)(v_x + R\omega) = 0$, da cui segue immediatamente la risposta.
3. In generale per $\frac{t_2}{t_1} = \frac{3\beta - 1}{\beta + 1}$, la pallina torna in mano al lanciatore indipendentemente dal rapporto fra v_x e $R\omega$.

Riferimenti bibliografici

- [Mor08] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2008.