

Meccanica Celeste

Veronica Sacchi* Marco Malandrone†

Daniele Battesimo Provenzano‡

Stage di fisica, 4 Febbraio 2020, Pisa

1. Moto in campo centrale

1.1. Coordinate polari

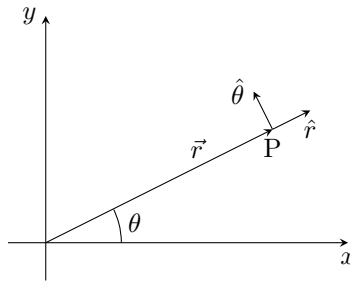


Figura 1: in coordinate polari ogni punto è univocamente determinato dai parametri r e θ .

Conosciamo tutti come individuare univocamente punti sul piano attraverso le coordinate cartesiane: per molti sistemi fisici tuttavia risulta più comodo e significativo utilizzare un altro sistema di coordinate, normalmente chiamate *coordinate polari*, in cui ogni punto è identificato da due parametri (siamo sempre su un piano, quindi avremo sempre due gradi di libertà!), di solito indicati con r (la distanza del punto in questione dall'origine) e θ (l'angolo orientato tra la congiungente punto-origine e l'asse x), come indicato in Figura 1. Risulta immediato verificare che è sempre possibile passare da coordinate polari a cartesiane mediante le relazioni:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

*veronica.sacchi@sns.it

†marco.malandrone@sns.it

‡daniele.provenzano@sns.it

così come, viceversa, passare dalle cartesiane alle polari:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)^1$$

Osserviamo che questa operazione non è altro che un cambio della base, ossia del sistema di versori, che utilizziamo per rappresentare i nostri vettori nel piano: se prima i nostri versori erano \hat{x} ed \hat{y} (vettori di modulo 1 diretti rispettivamente lungo l'asse x ed y), ora abbiamo scelto di considerare \hat{r} (il versore radiale, un vettore di modulo 1 e diretto lungo la congiungente punto-origine) ed $\hat{\theta}$ (sempre di modulo 1 che possiamo considerare perpendicolare a \hat{r} e diretto in modo che il verso positivo sia quello antiorario). In quest'ottica facciamo attenzione a non confonderci tra le *componenti* e i *versori*: questi ultimi, caratterizzati da una notazione con il “cappellino” (come \hat{x} , \hat{y} , \hat{r} , $\hat{\theta}$), sono vettori e ci dicono “in che direzione ci muoviamo” per trovare il punto, mentre le prime (indicate come x , y , r , θ associate ai rispettivi versori) sono degli scalari che ci dicono “di quanto ci muoviamo” in ciascuna direzione.

1.2. Vettori in coordinate polari

Ora che sappiamo cosa sono le coordinate polari e come usarle per descrivere i vettori vogliamo scoprire come operare su di essi: l'operatore più importante che non risulta di immediata formalizzazione in questo sistema è probabilmente quello di derivata temporale, che passiamo quindi ad illustrare (nel seguito utilizzeremo la notazione “puntata” per indicare la derivata rispetto al tempo dell'oggetto, ad esempio dx/dt sarà indicato con \dot{x}). Ricordando il formalismo di prima, un punto può essere individuato come:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

dove r è lo scalare che ci indica di quanto ci siamo allontanati dall'origine e \hat{r} ci dice in che direzione. Ora, per effettuare la derivata temporale di \vec{r} in realtà dobbiamo calcolare due derivate temporali diverse, che tengano conto delle due diverse quantità che possono cambiare nel tempo, ossia r ed \hat{r} , per poi combinarle tra loro (utilizzando la normale regola del prodotto):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

Il primo termine è la derivata di una normalissima funzione scalare che moltiplica un vettore, mentre il secondo termine ci preoccupa un po' di più: come può cambiare un versore nel tempo?

Riflettiamo: il suo modulo non può cambiare (è fisso a 1 per definizione) e non risente di traslazioni del sistema poiché l'unica informazione che porta è

¹Questa relazione in realtà vale solo per $x > 0$; possiamo dare una definizione leggermente diversa che dia sempre $\theta \in [-\pi, \pi]$ ed è $\theta = \text{sign}(y) \cdot \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

una direzione; l'unico modo in cui si modifica l'informazione di cui si fa carico è una rotazione (l'unico modo di cambiare direzione, in un certo senso), che può essere rappresentata da un vettore $\vec{\Omega}$ di modulo Ω (la velocità angolare con cui ruota il vettore) e perpendicolare al piano del moto (quindi parallelo all'asse di rotazione).

Ruotando il versore di un angolo infinitesimo Ωdt , è facile convincersi che esso varia di un vettore infinitesimo di modulo Ωdt e perpendicolare a \hat{r} . Ciò può essere scritto compattamente con la formula

$$\dot{\hat{r}} = \vec{\Omega} \times \hat{r}$$

che prenderemo d'ora in poi per buona².

Dato che in questo caso stiamo assumendo che \vec{r} sia sempre sul piano xy , il sistema di coordinate polari ci permette di scrivere:

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \hat{z}$$

che con le dovute sostituzioni ci porta a:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{z} \times \hat{r}$$

Ossia, sviluppando $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \quad (1)$$

Derivando la velocità si ottiene l'accelerazione, e dunque, riapplicando l'operazione di derivata a $\dot{\vec{r}}$ si ottiene l'accelerazione espressa in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{z} \times \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\theta}^2 \hat{z} \times \hat{\theta} = \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta} \end{aligned}$$

Vediamo ora un rapido esempio in cui utilizzeremo questo nuovo formalismo. Consideriamo una molla vincolata nell'origine, con costante elastica k , alla cui estremità è agganciata una massa m libera di ruotare nel piano xy , come in Figura 2. La prima equazione della dinamica si scrive dunque, scomposta nelle due componenti radiale e tangenziale:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) &= -kr \\ m(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

Per trovare il raggio di equilibrio (quello per cui si ha un moto circolare) basterà imporre $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ che riduce le equazioni di prima a:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \frac{k}{m} \\ \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

²Una dimostrazione rigorosa di questo fatto è riportata nell'Appendice A.

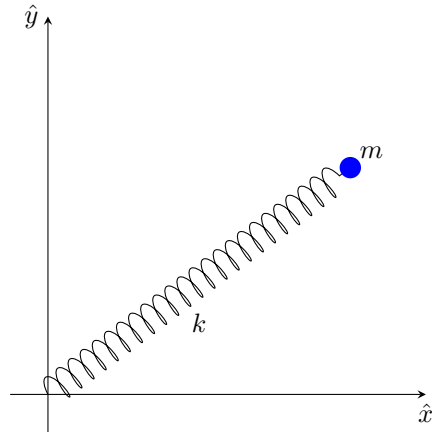


Figura 2: massa collegata a una molla.

A questo punto, fissato un punto di riferimento O , definiamo *campo radiale* un campo vettoriale i cui vettori puntano sempre in direzione del centro O , mentre un *campo centrale* è un campo radiale in cui vale la condizione aggiuntiva che il modulo di ciascun vettore dipende solo dalla sua distanza dal centro.

Con il formalismo appena introdotto si inferisce immediatamente che in un campo di forze centrali il momento angolare (calcolato rispetto all'origine) si conserva; infatti dalla prima equazione della dinamica si ha che la componente tangenziale della forza è nulla, dunque

$$m(2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

Moltiplicando per r si ottiene:

$$m(2r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0$$

in cui riconosciamo una derivata temporale:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

da cui la quantità $L = mr^2\dot{\theta}$ risulta costante.

2. Potenziale coulombiano

Viene indicato come potenziale coulombiano (o gaussiano) un potenziale della forma

$$V(r) = \frac{k}{r}$$

dove k è una costante indipendente da r . L'aggettivo “gaussiano” è dovuto a una notevole proprietà: ogni campo associato a un potenziale di questo tipo rispetta un analogo della legge di Gauss valida per il campo elettrico (quindi anche la forza di gravità). Una dimostrazione rigorosa di questo fatto richiede strumenti troppo avanzati per poterla riproporre qui, tuttavia possiamo convincercene intuitivamente osservando che la forma “matematica” del potenziale è sempre la stessa, dunque se per il campo elettrico vale tale legge (che deriva proprio dalla sua struttura matematica), allora vale anche per qualunque altro campo che possieda questa struttura.

3. Come descrivere un'orbita

3.1. Premessa sui gradi di libertà

Un sistema fisico classico tridimensionale con N punti materiali ha in generale $6N$ gradi di libertà. Ad esempio, per determinare l'evoluzione temporale del sistema è sufficiente fissare tutte le velocità ($3N$) e le posizioni iniziali ($3N$) dei punti materiali.

Più formalmente, consideriamo per un singolo corpo i vettori posizione \vec{x} e velocità \vec{v} . Sia X lo spazio cui appartengono i vettori \vec{x} , e V lo spazio cui appartengono le velocità \vec{v} (tale spazio V prende anche il nome di “spazio tangente” di X). Nel nostro caso gli spazi X e V coincidono entrambi con \mathbb{R}^3 , ovvero i vettori $\vec{x} \in X$ e $\vec{v} \in V$ possono essere espressi nella forma (a, b, c) , con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Risolvere la dinamica e trovare la legge oraria del sistema a N corpi in funzione dei parametri iniziali significa quindi trovare la funzione:

$$f : (X^N, V^N, t) \rightarrow (X^N, V^N)$$

ovvero quella funzione f tale che assegnato al tempo iniziale t_0 il vettore $(\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_N(t_0), \vec{v}_1(t_0), \dots, \vec{v}_N(t_0))$ consenta di trovare per un qualunque tempo t il vettore $(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), \vec{v}_1(t), \dots, \vec{v}_N(t))$.

Spesso però risolvere la dinamica del sistema non è necessario, ed è sufficiente limitarsi a descrivere il luogo geometrico dei punti “raggiungibili” con condizioni iniziali fissate, ovvero quello individuato dai punti

$$(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), \vec{v}_1(t), \dots, \vec{v}_N(t)) = f(\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_N(t_0), \vec{v}_1(t_0), \dots, \vec{v}_N(t_0), t)$$

al variare di t .

Il fatto di non fissare il tempo t fa sì che il sistema da noi considerato sia univoco, a meno di un “grado di libertà” temporale. In altre parole, il nostro luogo geometrico dei punti raggiungibili al variare di t è proprio una curva di “dimensione” 1. Dato che il nostro spazio è (X^N, V^N) , con dimensione $6N$, possiamo intuitivamente affermare che la nostra curva è identificata dal porre $6N - 1$ vincoli sul nostro spazio di dimensione $6N$. Speriamo quindi di poter scrivere $6N - 1$ vincoli sul luogo geometrico dei punti raggiungibili con condizioni iniziali fissate:

$$\begin{aligned} g_1(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), \vec{v}_1(t), \dots, \vec{v}_N(t)) &= C_1 \\ &\dots \\ g_{6N-1}(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), \vec{v}_1(t), \dots, \vec{v}_N(t)) &= C_{6N-1} \end{aligned} \tag{2}$$

3.2. Applicazione al caso di un'orbita

Veniamo ora al caso di un corpo massivo centrale intorno al quale orbita un secondo corpo di massa molto minore. In questo caso, se ci collochiamo in un sistema di riferimento solidale con il corpo centrale, il nostro sistema ha 6 gradi

di libertà: la posizione iniziale $\vec{x}(t_0)$ e la velocità iniziale $\vec{v}(t_0)$ del corpo orbitante. Considerando un'orbita chiusa, abbiamo orbite ellittiche. Ci aspettiamo quindi di poter descrivere il nostro moto con 5 condizioni, sperabilmente non dipendenti dal tempo, e una variabile dipendente dal tempo. È proprio questo il caso:

- la variabile dipendente dal tempo può essere, ad esempio, l'angolo formato dal pianeta, la stella e un punto fissato dell'orbita;
- le cinque condizioni non dipendenti dal tempo sono quelle che determinano la forma e l'orientazione dell'ellisse: tre gradi di libertà sono associati alla sua rotazione e due alla forma.

Osserviamo una scelta comune per le 5 condizioni non dipendenti dal tempo: fissare il semiasse maggiore dell'ellisse \vec{a} nello spazio (3 condizioni) e fissare il semiasse minore \vec{b} (2 condizioni). Fissare il semiasse minore in questo caso non corrisponde a togliere 3 gradi di libertà ma 2, in quanto in tutti gli ellissi il semiasse minore e quello maggiore sono perpendicolari: una volta fissato uno, l'altro può essere scelto solo su un piano perpendicolare al primo, per cui fissarlo vuol dire fissare 2 gradi di libertà.

3.3. Quantità conservate

Vogliamo ora mostrare un altro modo di scrivere le 5 condizioni non dipendenti dal tempo. Questa scrittura consente di esplicitare agilmente il sistema di equazioni 2. D'ora in avanti poniamo il sistema di riferimento solidale con il corpo massivo centrale, non in rotazione, e avente origine coincidente con il corpo massivo centrale.

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v} \quad (3)$$

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{GMm}{|\vec{r}|} \quad (4)$$

$$\vec{A} = m\vec{v} \wedge \vec{L} - GMm^2\hat{r} \quad (5)$$

Dove \vec{A} è noto come vettore di Lenz. Questo, come è chiaro dalla sua espressione, è necessariamente collocato sul piano dell'orbita. Il grado di libertà che esprime riguarda l'orientazione dell'ellisse: la sua direzione e il suo verso puntano verso il periapside. Del resto, fissato il momento angolare e l'energia, tale grado di libertà è ancora libero. Ricordiamo poi l'espressione del modulo del momento angolare e dell'energia in funzione dei semiassi:

$$E = -\frac{GM}{2a} \quad (6)$$

$$L = mb\sqrt{\frac{GM}{a}} \quad (7)$$

4. Teorema del viriale

Vogliamo ora dimostrare una particolare formulazione del teorema del viriale, che nasconde in sé diverse idee di teoria ergodica. Il precedente anno, alla lezione di meccanica celeste, si è presentata la derivazione del consueto teorema del viriale, per un generico potenziale della forma $U = \alpha r^\nu$, $\nu \neq 0$:

$$2\langle T \rangle = \nu \langle U \rangle \quad (8)$$

dove $\langle T \rangle$ è la media temporale su un periodo dell'energia cinetica e $\langle U \rangle$ è la media temporale su un periodo dell'energia potenziale. Nel caso gravitazionale in 3 dimensioni $\nu = -1$:

$$2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0$$

Diamo per buono questo risultato e mostriamo che per una massa di gas in equilibrio vale che:

$$2E_T + E_G = 0 \quad (9)$$

dove E_T è l'energia termica e E_G è l'energia potenziale gravitazionale.

Assumiamo simmetria sferica, così che la pressione del gas nello strato a raggio r sia incrementata rispetto a quella a $r + dr$ a causa della massa dello strato:

$$\begin{aligned} -dp(r) &= \frac{GM(r)}{r^2} \frac{4\pi r^2 \rho(r) dr}{4\pi r^2} \\ \Rightarrow \frac{dp(r)}{dr} &= -\frac{GM(r)}{r^2} \frac{4\pi r^2 \rho(r)}{4\pi r^2} \end{aligned}$$

dove $M(r) = \int_0^r 4\pi s^2 \rho(s) ds$ è la massa "sottostante" la sfera di raggio r . Moltiplicando ambo i membri per $4\pi r^3$ e integrando in dr da 0 fino al bordo della massa di gas, situato a raggio R :

$$\int_0^R \frac{dp(r)}{dr} 4\pi r^3 dr = \int_0^R \left(-\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \right) 4\pi r^3 dr$$

Integrando per parti il LHS, sfruttando il fatto che la pressione è nulla fuori dalla massa di gas:

$$-\int_0^R 3p \times 4\pi r^2 dr = \int_0^R \left(-\frac{GM(r)}{r} \right) 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (10)$$

Chiaramente il RHS è proprio E_G . Calcoliamo poi E_T :

$$E_T = \int_0^R \frac{3}{2} n k_B T \times 4\pi r^2 dr = \int_0^R \frac{3}{2} p \times 4\pi r^2 dr$$

Si ha quindi che il LHS della 10 è pari a $-2E_T$, pertanto abbiamo proprio mostrato:

$$-2E_T = E_G \Rightarrow 2E_T + E_G = 0$$

5. Punti Lagrangiani e zone di influenza

Supponiamo che vi siano due corpi, ad esempio una stella e un pianeta di masse rispettivamente M ed m posti ad una certa distanza d ed in rotazione uno attorno all'altro. Dove possiamo mettere una terza massa μ in modo che la sua posizione rispetto alle prime due rimanga invariata nel tempo? Limitiamoci al caso in cui $\mu \ll M$ e $\mu \ll m$ (condizione necessaria affinché la massa μ non alteri in modo sensibile il centro di massa dei due corpi più grandi). La posizione che stiamo cercando deve per forza stare nel piano su cui avviene la rotazione delle due masse grandi: spuntano fuori 5 possibili punti.

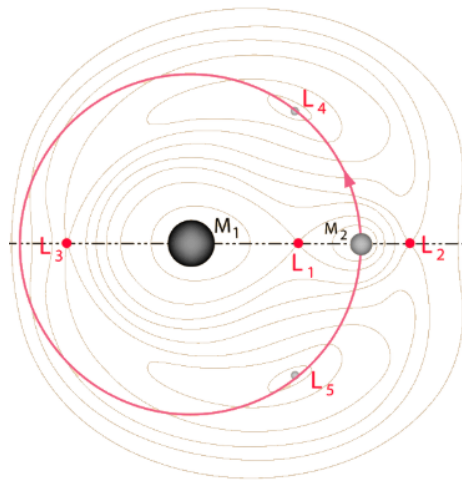


Figura 3: Disposizione dei punti di equilibrio nel sistema Sole-Pianeta e linee equipotenziali. L'orbita del pianeta è segnata in Rosso.

I punti L_i , detti punti di Lagrange, sono di equilibrio: il gradiente del potenziale si annulla in essi. Questo però non ci dice nulla circa la stabilità, e non ci si può neppure basare sul consueto criterio del minimo, in quanto anche la forza di Coriolis, che non entra nel calcolo dell'energia, ha un ruolo importante nelle modalità del moto. Infatti si può avere stabilità addirittura dove l'energia potenziale ha un massimo! La posizione dei punti L_1 , L_2 , L_3 (che stanno lungo la congiungente tra le due masse grandi) dipende dal rapporto $\frac{M}{m}$, come vedremo tra poco; risulta inoltre che essi sono *sempre* di equilibrio instabile. L_4 e L_5 hanno invece posizioni fisse, che formano due triangoli equilateri con M e m : la cosa notevole è che, sebbene essi siano punti di massimo del potenziale, se un corpo si sposta da quella posizione la forza di Coriolis tende a riportarcelo, per cui risultano di equilibrio stabile (almeno se il rapporto $\frac{M}{m}$ è abbastanza grande. Una deduzione molto elegante della posizione dei punti L_4 e L_5 è riportata nelle dispense della lezione di Meccanica Celeste dello Stage 2019, a cui ci si può rivolgere anche per il calcolo della posizione di L_3 , che non tratteremo. Andiamo a calcolare le posizioni di L_1 e L_2 , che delimitano la zona di influenza

del pianeta, ovvero la porzione di piano in cui predomina la sua attrazione. Per cultura, la zona di influenza della stella viene denominata “Lobo di Roche”. Supponiamo che la massa del pianeta sia molto più piccola di quella della stella (cosa verissima per il sistema Sole-Terra). Nell’ipotesi in cui $m \ll M$, la velocità angolare del sistema è

$$\omega^2 = \frac{GM}{d^3}$$

Per definizione, sia il L_1 che in L_2 ci deve essere equilibrio tra le forze. Consideriamo una massa di prova μ posta in L_1 (distante l_1 dal centro del pianeta) e imponiamo l’equilibrio delle forze agenti su di essa.

$$\frac{GM\mu}{(d-l_1)^2} = \frac{Gm\mu}{l_1^2} + \mu\omega^2(d-l_1)$$

Sviluppiamo il denominatore della frazione al primo membro, supponendo che $l_1 \ll d$.

$$\frac{GM}{d^2} \left(1 + \frac{2l_1}{d} + o\left(\left(\frac{l_1}{d}\right)^2\right) \right) = \frac{Gm}{l_1^2} + \frac{GM}{d^3}(d-l_1)$$

Trascuriamo le quantità dal secondo ordine in poi. Semplificando si ottiene

$$l_1 = d \left(\frac{m}{3M} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Ripetiamo il calcolo per il punto L_2 , distante l_2 dal centro del pianeta:

$$\frac{GM\mu}{(d+l_2)^2} + \frac{Gm\mu}{l_2} = \mu\omega^2(d+l_2)$$

Sviluppando analogamente a quanto fatto nel caso precedente si ottiene

$$\frac{GM}{d^2} \left(1 - \frac{2l_2}{d} + o\left(\left(\frac{l_2}{d}\right)^2\right) \right) + \frac{Gm}{l_2^2} = \frac{GM}{d^3}(d+l_2)$$

Semplificando si giunge a

$$l_2 = d \left(\frac{m}{3M} \right)^{\frac{1}{3}} = l_1$$

Quindi, al primo ordine in $\frac{l}{d}$, i due punti Lagrangiani sono equidistanti dal centro del pianeta. Abbiamo così identificato il raggio della sfera di Hill

$$r_{Hill} \equiv d \left(\frac{m}{3M} \right)^{\frac{1}{3}}$$

All’interno della sfera di Hill (zona di influenza del pianeta), domina l’attrazione del pianeta. Il pianeta può dunque avere dei satelliti che gli orbitano attorno solo all’interno della sfera di Hill, come per il sistema Sole-Terra-Luna, illustrato in Figura 4.

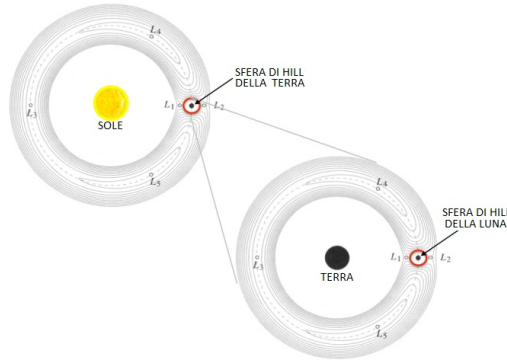


Figura 4: Schematizzazione del sistema Sole-Terra-Luna

6. Limite di Roche

Consideriamo un pianeta gassoso di massa m e raggio r su un'orbita circolare di raggio d attorno ad una stella di massa M e raggio R . Supponiamo $m \ll M$ e $r \ll d$. Proviamo a trovare la distanza minima dalla stella per cui il pianeta non si sfalda sotto l'azione della forza di marea dovuta alla stella.

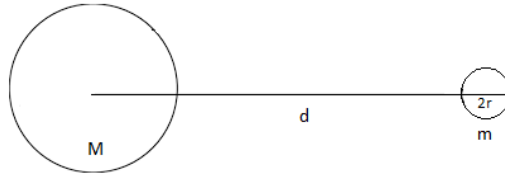


Figura 5: Sistema Stella-Pianeta gassoso

Grazie all'ipotesi $m \ll M$ la velocità angolare del sistema è

$$\omega^2 = \frac{GM}{d^3}$$

Consideriamo una massa μ posta sulla superficie del pianeta, nel punto nel punto più vicino alla stella. L'equilibrio delle forze impone

$$\frac{GM\mu}{(d-r)^2} = \frac{Gm\mu}{r^2} + \mu\omega^2(d-r)$$

Sviluppiamo il denominatore

$$\frac{GM}{d^2} \left(1 + \frac{2r}{d} + o\left(\left(\frac{r}{d}\right)^2\right) \right) = \frac{Gm}{r^2} + \frac{GM}{d^3}(d-r)$$

Al primo ordine si ottiene

$$\frac{3GMr}{d^3} \approx \frac{Gm}{r^2}$$

Segue che

$$d_{Roche} \approx r \left(\frac{3M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} = r \left(\frac{\frac{3}{4}\pi R^3 \rho_s}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p} \right)^{\frac{1}{3}} = R \left(\frac{3\rho_s}{\rho_p} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Facciamo adesso un confronto con il raggio della sfera di Hill. Sappiamo che

$$\begin{cases} d_{Roche} = r \left(\frac{3M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \\ r_{Hill} = d \left(\frac{m}{3M} \right)^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad (11)$$

Da queste due equazioni si ricava banalmente che

$$d_{Roche} r_{Hill} = r d$$

Questa relazione non esclude che possa esistere una configurazione per cui la Sfera di Hill sia più grande del lobo di Roche, ma c'è un problema di fondo: per avere le equazioni 11 sono state ricavate sotto le ipotesi $r \ll d$ e $m \ll M$. Quindi con questo metodo analitico non possiamo trattare i casi per cui d_{Roche} è confrontabile con r_{Hill} , che di certo possono esistere nell'universo, ma non sono analiticamente analizzabili.

Caso particolare: Supponiamo che il pianeta sia posto proprio sul limite di Roche, ovvero

$$d = d_{Roche} = r \left(\frac{3M}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Per questa configurazione, il raggio della sfera di Hill del pianeta vale

$$r_{Hill} \equiv d \left(\frac{m}{3M} \right)^{\frac{1}{3}} = d_{Roche} \left(\frac{m}{3M} \right)^{\frac{1}{3}} = r \left(\frac{3M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{m}{3M} \right)^{\frac{1}{3}} = r$$

Quindi la superficie del pianeta coincide con la superficie che delimita la sfera di Hill dello stesso³. Questo ci torna, perché sappiamo che se il pianeta supera il limite di Roche (nel senso che si avvicina alla stella) inizia a sfaldarsi, cioè la sua zona di influenza diventa più piccola delle sue stesse dimensioni. Oltre il limite di Roche, il pianeta non può avere alcun satellite che gli orbita attorno!

³Ovviamente, come già detto, la "sfera di Hill" non è esattamente una sfera, quindi a rigore non può mai coincidere esattamente con la superficie di un pianeta sferico.

7. Maree

7.1. Forza longitudinale e trasversale

Studiamo l'effetto dell'attrazione gravitazionale esercitata dalla Luna sulla Terra. Consideriamo inizialmente la configurazione in Figura 6.

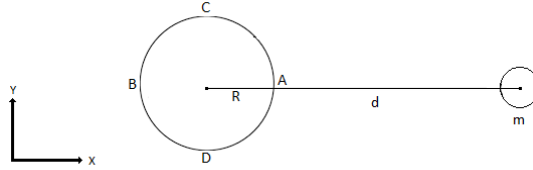


Figura 6: Sistema Terra-Luna

Siano M_L la massa della Luna, d la distanza terra-Luna e R il raggio della Terra. Calcoliamo la differenza tra la forza gravitazionale esercitata dalla Luna su una massa di prova μ in A e quella in B .

$$\mathbf{F}^L = \mathbf{F}_A - \mathbf{F}_B = \frac{GM_L\mu}{(d-R)^2}\hat{x} - \frac{GM_L\mu}{(d+R)^2}\hat{x}$$

L'apice L sta per "longitudinale". Supponiamo che $R \ll d$ e sviluppiamo le frazioni al solito modo.

$$\mathbf{F}^L = \frac{GM_L\mu}{d^2} \left(1 + \frac{2R}{d} - \left(1 - \frac{2R}{d} \right) + o\left(\left(\frac{R}{d}\right)^2\right) \right) \hat{x} \approx \frac{4GM_LR\mu}{d^3} \hat{x}$$

Quindi l'effetto aumenta con la separazione tra i due punti! Maggiore è il raggio, maggiore è la differenza di forza!

Altro modo di vedere F^L : Consideriamo solo i moduli. La forza gravitazionale a distanza r vale

$$F_g(r) = \frac{GM_L\mu}{r^2}$$

Calcoliamo la derivata rispetto alla distanza:

$$\frac{dF_g(r)}{dr} = -\frac{2GM_L\mu}{r^3}$$

Calcoliamo il dF nel nostro caso ($dr = 2R$)

$$dF_g = \left| \frac{dF_g(r)}{dr} \right|_{r=d} dr = \left| \frac{2GM_L\mu}{r^3} \right|_{r=d} (2R) = \frac{4GM_LR\mu}{d^3} = F^L$$

Abbiamo così dimostrato che la forza longitudinale di marea è approssimativamente pari al differenziale della forza gravitazionale. Questo ha senso, perché

essa è definita come differenza tra due valori di F_g in due punti diversi! Inoltre vale che $F^L = dF_g \ll F_g$ perché $R \ll d$.

Passiamo ora al calcolo della forza trasversale, definita come la differenza delle forze agenti sui punti C e D . In questo caso, per simmetria, le componenti lungo \hat{x} si compensano e la forza risulta tutta diretta lungo \hat{y} .

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{F}_C - \mathbf{F}_D = -\frac{GM_l\mu}{d^2 + R^2} \sin\theta \hat{y} - \left(\frac{GM_l\mu}{d^2 + R^2} \sin\theta \hat{y} \right) = -\frac{2GM_l\mu}{d^2 + R^2} \sin\theta \hat{y}$$

Dal disegno intuivamo che

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{R}{d} \approx \sin\theta$$

l'ultimo passaggio della riga precedente deriva dall'assunzione $R \ll d$, per cui $\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \sin\theta$. Sostituiamo e troviamo

$$\mathbf{F}^T = -\frac{2GM_l\mu R}{d^3(1 + (\frac{R}{d})^2)} \hat{y} \approx -\frac{2GM_l\mu R}{d^3} \hat{y}$$

La quantità $(\frac{R}{d})^2$ al denominatore è stata trascurata perché, se sviluppata, non ha contributi del primo ordine, ma li ha solo dal secondo in poi. Notiamo allora che

$$|F^T| = \frac{1}{2} |F^L|$$

Teniamo a mente questo risultato, ritornerà a breve. Il quadro dell'azione gravitazionale della Luna sulla Terra è schematizzato nella seguente Figura 7 (A). Ma sappiamo che le maree non funzionano così! Se la situazione reale fosse quella descritta in Figura 7 (B), avremmo una sola alta marea al giorno, ma sappiamo che le alte maree sono 2! La situazione reale è quella schematizzata nella Figura 7 (C).

Dove abbiamo sbagliato? Cosa non abbiamo considerato? Beh, la forza di marea non è l'unica forza in gioco, ovviamente. Dobbiamo considerare il sistema Terra-Luna in rotazione attorno al suo Centro di Massa⁴! La forza centripeta aggiusterà tutto! Se riuscissimo a dimostrare che la forza TOTALE che agisce in A è uguale in modulo ed opposta a quella che agisce in B, potremmo giustificare la schematizzazione in Figura 7 (C). Facciamolo.

La velocità angolare di Terra e Luna è

$$\omega^2 = \frac{G(M_T + M_L)}{d^3}$$

⁴Ci sarebbe da considerare anche la forza gravitazionale della Terra, ma siccome essa ha lo stesso modulo su tutta la superficie e l'effetto mareale è un effetto differenziale, possiamo farne a meno. Aggiungerebbe solo una costante in più alla forza totale.

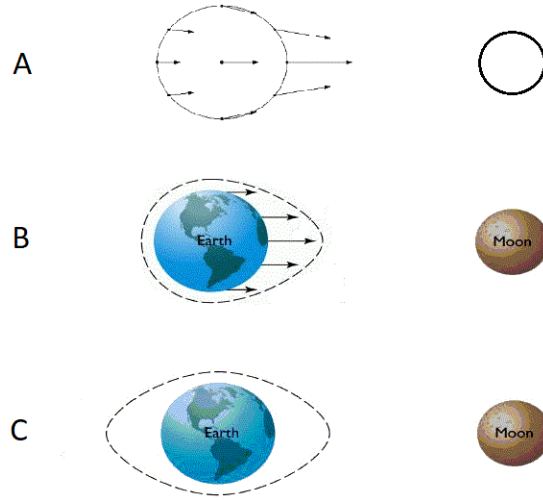


Figura 7: (A) Schematizzazione del campo di forza esercitato dalla Luna sulla Terra, (B) Profilo della superficie degli oceani nel caso statico, derivante dalla schematizzazione (A), Profilo realmente osservato

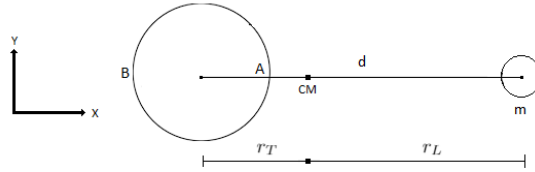


Figura 8: Schematizzazione del sistema Terra-Luna, in orbita circolare l'una attorno all'altra.

In questo caso non possiamo permetterci di trascurare la massa della Luna, altrimenti non concluderemmo nulla. Dette r_T e r_L rispettivamente la distanza Terra-CM e Luna-CM, per definizione di CM deve essere

$$r_T M_T = r_L M_L$$

Ma

$$r_T + r_L = d$$

Dalle ultime due equazioni segue che

$$r_T = \frac{M_L d}{M_T + M_L}$$

Calcoliamo la forza totale agente sulla massa μ posta in A, aiutandoci con la Figura 8:

$$\mathbf{f}_A = \frac{GM_L \mu}{(d - R)^2} \hat{x} - \frac{GM_T \mu}{R^2} \hat{x} + \mu \omega^2 (R - r_T) \hat{x}$$

Sviluppiamo al solito il primo addendo al primo ordine in $\frac{R}{d}$

$$\mathbf{f}_A = \frac{GM_L\mu}{d^2} \left(1 + \frac{2R}{d}\right) \hat{x} - \frac{GM_T\mu}{R^2} \hat{x} + \mu \frac{G(M_T + M_L)}{d^3} \left(R - \frac{M_L d}{M_T + M_L}\right) \hat{x}$$

Dopo alcune semplificazioni, otteniamo

$$\mathbf{f}_A = \left(\frac{G(M_T + 3M_L)\mu R}{d^3} - \frac{GM_T\mu}{R^2} \right) \hat{x} \quad (12)$$

Stessa cosa per il punto B

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_B &= \frac{GM_L\mu}{(d+R)^2} \hat{x} + \frac{GM_T\mu}{R^2} \hat{x} - \mu\omega^2(R+r_T)\hat{x} \\ \mathbf{f}_B &= \frac{GM_L\mu}{d^2} \left(1 - \frac{2R}{d}\right) \hat{x} + \frac{GM_T\mu}{R^2} \hat{x} - \mu \frac{G(M_T + M_L)}{d^3} \left(R + \frac{M_L d}{M_T + M_L}\right) \hat{x} \\ \mathbf{f}_B &= \left(-\frac{G(M_T + 3M_L)\mu R}{d^3} + \frac{GM_T\mu}{R^2} \right) \hat{x} \end{aligned} \quad (13)$$

Guardando (12) e (13) deduciamo che

$$\mathbf{f}_A = -\mathbf{f}_B$$

Quindi la situazione è simmetrica rispetto all'asse y . Ecco giustificato l'instaurarsi di due lobi di acqua, e non di uno.

7.2. Forza mareale generica

Consideriamo la configurazione in Figura 9

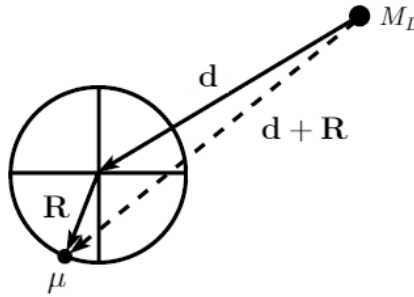


Figura 9: Schematizzazione del sistema TL

Definiamo la forza di marea come

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{R}) = -GM\mu \left(\frac{(\mathbf{d} + \mathbf{R})}{|\mathbf{d} + \mathbf{R}|^3} - \frac{\mathbf{d}}{d^3} \right)$$

Proviamo a giocare con le quantità presenti in essa, in modo da ottenere una forma più semplice. Per le proprietà del prodotto scalare segue

$$|\mathbf{d} + \mathbf{R}|^2 = d^2 + R^2 + 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}$$

Allora

$$\frac{1}{|\mathbf{d} + \mathbf{R}|^3} = \frac{1}{(d^2 + 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{R} + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{d^3} \left(1 + \frac{2\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{d^2} + \left(\frac{R}{d}\right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{d^3} \left(1 - \frac{3\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{d^2} \right)$$

dove l'ultimo passaggio è valido sotto l'ipotesi $R \ll d$. Sostituiamo nell'espressione della forza di marea.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t(\mathbf{R}) &= GM\mu \left(\frac{\mathbf{d}}{d^3} - \frac{(\mathbf{d} + \mathbf{R})}{d^3} \left(1 - \frac{3\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{d^2} \right) \right) = \frac{GM\mu}{d^3} \left(\mathbf{d} - (\mathbf{d} + \mathbf{R}) \left(1 - \frac{3\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{d^2} \right) \right) \\ \mathbf{F}_t(\mathbf{R}) &= \frac{GM\mu}{d^3} \left(\frac{3\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{d} + \mathbf{R})}{d^2} - \mathbf{R} \right) \approx \frac{GM\mu}{d^5} \left(3\mathbf{d}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}) - d^2\mathbf{R} \right) \end{aligned}$$

Consideriamo adesso i vettori d e R

$$\mathbf{R} = (x, y, z) \quad \mathbf{d} = (-d, 0, 0)$$

La forza diventa

$$\mathbf{F}_t(x, y, z) = \frac{GM\mu}{d^5} \left(3(-d, 0) [(-d, 0) \cdot (x, y, z)] - d^2(x, y, z) \right) = \frac{GM\mu}{d^3} (2x, -y, -z)$$

Questa forza è conservativa e ammette potenziale (si può dimostrare che il suo rotore è nullo).

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

Il potenziale mareale è

$$V_M(x, y) = \frac{GM\mu}{d^3} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - x^2 \right)$$

Calcoliamo l'altezza del dislivello dovuto alla marea. Per fare ciò consideriamo il lavoro fatto per portare una massa μ di acqua da un polo all'equatore:

$$W = V_M(x = R, y = z = 0) - V_M(x = y = 0, z = R) = \frac{GM\mu}{d^3} \left(R^2 + \frac{R^2}{2} \right) = \frac{3GM\mu R^2}{2d^3}$$

Durante questo trasferimento, la massa si sarà alzata di un'altezza h , quindi su di essa sarà stato compiuto un lavoro μgh .

$$\mu gh = \frac{3GM\mu R^2}{2d^3} \rightarrow h = \frac{3GM R^2}{2gd^3} \approx 0,5 \text{ m}$$

Con questo modello abbiamo predetto un'altezza massima della marea di circa mezzo metro. Ovviamente ci sono altri effetti da considerare per avere una stima migliore di quello che succede sulla Terra. Ad esempio, anche il Sole esercita una forza di marea sulla Terra, pari circa alla metà di quella Lunare. Quando Sole, Terra e luna stanno sulla stessa retta, i contributi di sole e Luna si sommano, mentre se i segmenti che collegano Sole-Terra e Terra-Luna sono perpendicolari, si compensano parzialmente.

Appendici

A. Derivate dei versori

I versori \hat{r} e $\hat{\theta}$ possono essere scritti in coordinate cartesiane

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad (14)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \quad (15)$$

Possiamo calcolare le derivate dei secondi membri delle Equazioni 14 e 15 senza particolari problemi, perchè i versori \hat{x} e \hat{y} sono fissi. Si ha

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= -\hat{x}\dot{\theta} \sin \theta + \hat{y}\dot{\theta} \cos \theta = \dot{\theta}\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\hat{x}\dot{\theta} \cos \theta - \hat{y}\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta}\hat{r} \end{aligned}$$

Queste derivate sono proprio della forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \vec{\Omega} \times \hat{r} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \vec{\Omega} \times \hat{\theta} \end{aligned}$$

a patto di porre $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$. Più in generale, consideriamo un vettore \vec{v} di modulo costante ed eseguiamo su di esso una rotazione attorno ad un asse \hat{n} di un angolo θ , come in Figura 10. La componente di \vec{v} parallela a \hat{n} , ossia

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

è lasciata inalterata dalla trasformazione. Al contrario, la componente perpendicolare

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$$

è ruotata di un angolo θ e rimane nel piano perpendicolare ad \hat{n} . In particolare, se indichiamo con un apice i vettori dopo la rotazione si avrà

$$\vec{v}'_{\perp} = (\vec{v} - \vec{v}_{\parallel}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Di conseguenza il vettore ruotato sarà

$$\vec{v}' = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Supponiamo ora che un vettore \vec{v} ruoti a velocità angolare ω (in generale dipendente dal tempo) attorno ad un asse \hat{n} . Se $d\theta = \omega dt$ è l'angolo infinitesimo di cui ruota \vec{v} , al primo ordine in dt abbiamo

$$\vec{v}(t + dt) = (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v} - (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n}) + (\hat{n} \times \vec{v}(t))\omega dt = \vec{v}(t) + \omega(\hat{n} \times \vec{v}(t)) dt$$

Ossia

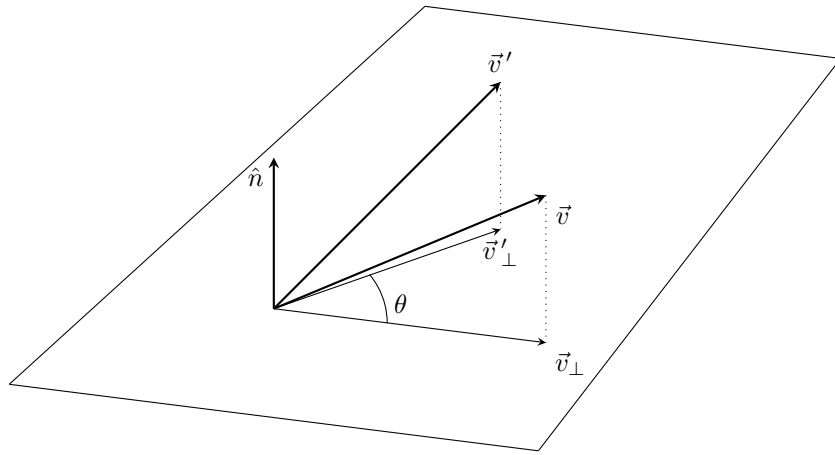


Figura 10: rotazione di \vec{v} intorno a \hat{n} .

$$\frac{\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

e al limite $dt \rightarrow 0$ si ha

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Problemi

1. Esercizio base

Consideriamo un satellite di massa m su un'orbita circolare di raggio R attorno alla Terra (di massa M), che supporremo ferma.

1. Trova la velocità v_R ed il periodo orbitale T del satellite.
2. Trova l'energia meccanica totale del satellite ed il suo momento angolare.
3. Trova il valore di R nel caso dell'orbita geostazionaria.

Supponiamo adesso che il satellite si muove su un'orbita ellittica (di semiasse maggiore a ed eccentricità ϵ) attorno alla Terra.

4. Trova v_m e v_M , rispettivamente la velocità minima e massima del satellite durante il moto orbitale
5. Trova il periodo T del moto orbitale.
6. Dimostra che

$$a = \frac{T}{2\pi} \sqrt{v_m v_M}$$

7. Trova l'energia meccanica totale del satellite.

2. Farfalle kamikaze

Per spiegare il motivo che porta una farfalla notturna a cadere a spirale sulla fiamma di una candela, si può fare l'ipotesi che normalmente esse facciano riferimento alla luce della luna per guidarsi, mantenendo costante l'angolo tra la direzione di provenienza di questa e la propria direzione di volo. Mostrare che questa è una strategia suicida se la luce di riferimento è quella di una fiamma vicina. Perché invece funziona se la luce è molto lontana?

3. Razzo su Marte

Marte è un pianeta roccioso con approssimativamente la stessa densità della Terra, solo che la sua gravità in superficie è $k = 0.38$ volte quella terrestre.

1. Detta V_T la velocità di fuga dalla superficie della Terra, e V_M la velocità di fuga dalla superficie di Marte, calcolare V_T/V_M .
2. Modelliamo un razzo come una massa m , corrispondente a tutta la struttura del razzo, e una massa M di propellente, che viene espulso ad una velocità w dal razzo. Noto che la densità tipica di un pianeta roccioso è di 5500 kg m^{-3} , e che sulla Terra $g_T = 9.81 \text{ m s}^{-2}$, calcolare il rapporto M/m nel caso della Terra e nel caso di Marte.

4. Missile verso l'equatore

Un missile viene lanciato dal polo Nord (con la prima velocità cosmica) in modo tale da farlo cadere su un punto posto all'equatore.

1. Trova il semiasse maggiore dell'orbita del missile.
2. Qual'è la massima altezza dalla superficie terrestre a cui il satellite arriva?
3. Quanto vale il tempo di volo del satellite? (Ricorda che l'area di un'ellisse vale $S = \pi ab$)

5. Asteroide dentro l'orbita terrestre

Un asteroide di massa m si muove su una traiettoria parabolica intorno al Sole (la cui massa è M_s) nello stesso piano dell'orbita terrestre, che si assume essere circolare e di raggio R . Trascurare l'attrazione tra asteroide e Terra.

1. Sia p la distanza di minimo avvicinamento dell'asteroide dal Sole. Nel caso in cui $p < R$, trovare il tempo T che la cometa spende all'interno dell'orbita terrestre.
2. Calcolare il massimo valore possibile di T in giorni. Per quale valore di p avviene ciò?

Se, invece, p è minore del raggio del Sole, l'asteroide ci cadrà dentro e la massa del Sole aumenterà di una frazione $\alpha \equiv \frac{m}{M_S}$.

3. Studiare come cambiano i parametri dell'orbita terrestre (asse maggiore ed eccentricità) al variare di α .

6. Limite di Roche

Ripetere il calcolo del limite di Roche nei casi in cui:

1. pianeta e stella non stanno ruotando l'uno attorno all'altra;
2. pianeta e stella ruotano l'uno attorno all'altra, ma in più il pianeta ruota attorno al suo asse con velocità angolare Ω costante.

7. Pianeti e palline

Due pianeti identici, di raggio $R = 1000 \text{ km}$, sono fissi nello spazio e distano fra loro $d = 5R$. Su uno di questi pianeti ci sono n palline in contatto l'una sopra l'altra, con masse $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$ (denominando con 1 la pallina più in basso, con 2 quella soprastante e così via), poste in modo che i baricentri di tutte le palline si trovino sulla congiungente dei centri dei due pianeti. La pallina più in basso viene lasciata libera di cadere da un metro d'altezza dalla superficie di uno dei pianeti. Supponendo che tutti gli urti siano elastici e che le dimensioni delle palline siano trascurabili, determinare il minimo valore di n tale che almeno una pallina possa arrivare sull'altro pianeta.

8. Asteroidi ferromagnetici

Un insieme di asteroidi ferromagnetici orbita intorno ad una pulsar. La pulsar genera un campo magnetico approssimabile con $\vec{H} = \vec{H}_0/|\vec{r}|$. Immaginando che la magnetizzazione \vec{M} di un asteroide dipenda soltanto da $\langle \vec{H} \rangle$, la media temporale del campo magnetico, secondo una legge del tipo $\vec{M} = \alpha \langle \vec{H} \rangle$, si calcoli la magnetizzazione media di un asteroide in funzione del semiasse maggiore della sua orbita a e della sua eccentricità e .

9. Nana Bianca

Una nana bianca è una stella “morta” che resiste al collasso gravitazionale perché il principio di esclusione di Pauli impedisce a più di due elettroni di trovarsi nello stesso posto con la stessa velocità: aumentando la densità di elettroni è necessario che le loro velocità siano diverse. Se abbiamo tanti elettroni “nello stesso posto” quindi ci saranno anche elettroni che si muovono ad alte velocità. Proprio questi elettroni generano una pressione (si pensi al modello microscopico della pressione). In meccanica quantistica, per un gas relativistico (il caso tipico di una nana bianca), si dimostra che la pressione p è legata alla densità elettronica n dalla relazione $p = \frac{chn}{4} \sqrt{3\pi^2 n}$. Ipotizzando una densità uniforme, e una composizione di ${}^4\text{He}$, verificare che esiste un limite massimo alla massa di un oggetto con questa relazione tra pressione e densità elettronica. Calcolare tale limite.

Segnaliamo poi alcuni problemi di meccanica celeste particolarmente stimolanti o istruttivi:

1. International Physics Olympiad 1990 - Problema 3
2. International Physics Olympiad 2001 - Problema 2
3. Northern Baltic Physics Olympiad 2017 - Problema 2
4. Northern Baltic Physics Olympiad 2019 - Problema 6

Soluzioni

1. Esercizio base

1. Eguagliando la forza gravitazionale a quella centripeta si trova

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Dall'equazione dell'energia segue

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}m \left(\frac{GM}{R} \right) - \frac{GMm}{R}$$

Il periodo del moto non è altro che la lunghezza della circonferenza divisa per la velocità del satellite

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$$

2. L'energia meccanica totale è pari alla somma di energia cinetica e potenziale

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$$

Il momento angolare, dalla definizione, vale

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mRv \hat{z} = m\sqrt{GMR} \hat{z}$$

dove \hat{z} è la direzione perpendicolare al piano dell'orbita.

3. L'orbita geostazionaria ha lo stesso periodo della rotazione terrestre (1 giorno). Allora, usando nuovamente la seconda legge di Newton, troviamo

$$m \left(\frac{2\pi}{T_{Giorno}} \right)^2 R_{GEO} = \frac{GMm}{R_{GEO}^2} \rightarrow R_{GEO} = \left(\frac{GMT_{Giorno}^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 42000 \text{ Km}$$

4. La velocità massima sarà assunta in corrispondenza del perielio, mentre la minima all'afelio. I valori desiderati si trovano facilmente uguagliando l'energia totale a $-\frac{GMm}{2a}$. Si trova che

$$v_{max} = \sqrt{\frac{GMr_{max}}{ar_{min}}}$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{GMr_{min}}{ar_{max}}}$$

5. Il periodo del moto orbitale è semplicemente dato dalla legge di Keplero

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

6. Questa identità segue direttamente dalle due richieste precedenti.
7. Infine, questo ultimo punto non è altro che la dimostrazione della famosa relazione usata in precedenza

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Esistono tanti modi per dimostrarla. Ad esempio, si può utilizzare un'operazione di media temporale dell'energia meccanica. Abbiamo visto che nel caso di un'orbita circolare

$$E = -\frac{GMm}{2R}$$

Cosa succede se R non è costante nel tempo? Calcoliamo la media temporale dell'energia

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{GMm}{2r(t)} dt$$

Ricordando che $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ e che $r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2(1+\varepsilon \cos \theta)}$ e sostituendo sopra, si ottiene

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{GMm}{2r(t)} dt = -\frac{L}{2T} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = -\frac{GMm}{2a}$$

2. Farfalle kamikaze

Posta la sorgente nell'origine, nel formalismo delle coordinate polari la velocità della farfalla, può essere scritta come

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{r} + R\dot{\theta}\hat{\theta} = -v \cos \alpha \hat{r} + v \sin \alpha \hat{\theta}$$

dove v è il modulo della velocità (non necessariamente costante), e α è l'angolo fissato tra la direzione del moto e la direzione della sorgente. Da questo segue

$$\begin{aligned} \dot{R} &= v \cos \alpha \\ R\dot{\theta} &= -v \sin \alpha \end{aligned}$$

e quindi

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{R}}{R} \tan \alpha$$

da cui integrando si ha

$$R = R_0 e^{-\frac{\theta}{\tan \alpha}}$$

che per $\tan \alpha > 0$ rappresenta una spirale logaritmica attorno all'origine. Se R_0 è molto grande possiamo osservare che la traiettoria diventi quasi essenzialmente rettilinea.

3. Razzo su Marte

1. Nell'approssimazione in cui un pianeta è un corpo sferico di massa M e raggio R , con densità ρ :

$$g = G \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho R \quad ; \quad \frac{1}{2} V_f^2 = G \frac{M}{R} = \frac{4}{3} \pi G \rho R^2$$

$$\Rightarrow \frac{V_T^2}{V_M^2} = \frac{R_T^2}{R_M^2} = \frac{g_T^2}{g_M^2} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{V_T}{V_M} = \frac{1}{k} \approx 2.63$$

2. Ci chiediamo innanzitutto quale velocità può raggiungere un razzo come quello descritto dal testo: analizziamo il problema nel sistema tangente (ovvero quello che è inerziale e con la stessa velocità del razzo al tempo t). Sia λ la massa rimanente di combustibile. In un istante dt il razzo perde una massa $d\lambda$ e prende un impulso $-w d\lambda$, da redistribuire su una massa $\lambda + m$, per cui prende una velocità $\frac{-w d\lambda}{\lambda + m}$. Il valore iniziale di λ è M e quello finale è 0:

$$\Delta V = \int_M^0 \frac{-w d\lambda}{\lambda + m} = w \int_0^M \frac{1}{\lambda + m} d\lambda = w \log \frac{M + m}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} = e^{\Delta V/w} - 1$$

Possiamo a questo punto osservare che:

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \wedge \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{g}{\frac{4}{3}\pi\rho G}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} V_f^2 = \frac{4}{3} \pi G \rho R^2 \Rightarrow V_f = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} g$$

Richiedendo che il ΔV sia proprio V_f :

$$\left(\frac{M}{m}\right)_T = e^{V_T/w} - 1 \quad , \quad V_T = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} g_T \approx 11.2 \text{ km/s}$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)_M = e^{V_M/w} - 1 \quad , \quad V_M = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} g_T k \approx 4.3 \text{ km/s}$$

4. Missile verso l'equatore

1. Dall'equazione dell'energia segue

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2} m \left(\frac{GM}{R}\right) - \frac{GMm}{R}$$

Segue quindi che $a = R$.

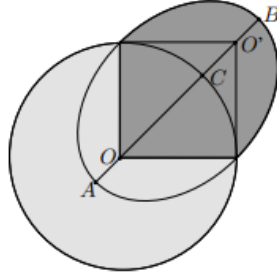


Figura 11: Schematizzazione della traiettoria del missile

2. L'ellisse ha la proprietà per cui la somma delle distanze da ciascun punto ai due fuochi è costante (ed uguale a $2a$). Quindi il secondo fuoco dell'ellisse (quello che non sta nel centro della Terra) sta a distanza R sia dal polo che dall'equatore, come in Figura 11. Quindi, l'altezza desiderata vale

$$h = |CB| = |OB| - R$$

Ma

$$|OB| = R + \frac{1}{2}|OO'| = R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Allora si trova

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

3. Il tempo di volo può essere trovato ricordando che esso è proporzionale all'area spazzata dal raggio vettore.

5. Asteroide dentro l'orbita terrestre

1. Se la traiettoria è parabolica, allora l'energia meccanica totale è nulla

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM_S}{r} = 0$$

Nel punto della parabola più vicino al sole si ha $r = r_{\min} = p$ e $\dot{r} = 0$, quindi sostituendo si trova $L^2 = 2m^2pGM_S$. Per un generico valore di r si ha che

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{GmM_S}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}$$

Separando le variabili da quest'ultima equazione è possibile integrare entrambi i membri e trovare che

$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \left[\frac{2}{m} \left(\frac{GmM_S}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2GM_S}} \int_p^R \frac{r dr}{\sqrt{r-p}}$$

Questo integrale è risolvibile operando la sostituzione $y = \sqrt{r-p}$. Quello che si ottiene è

$$T = \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2GM_S}} \left(1 + \frac{2p}{R}\right) \sqrt{1 - \frac{p}{R}}$$

2. Considerando T come una funzione della variabile p e annullando la sua derivata prima si trova che il valore massimo viene assunto per $p = \frac{R}{2}$ ed è

$$T_{Max} = \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2GM_S}} = \frac{2}{3\pi} T_t \simeq 77 \text{ giorni}$$

3. L'energia meccanica della Terra dopo la caduta dell'asteroide sul Sole è

$$-\frac{GM_S(1+\alpha)M_T}{2a} = \frac{GM_S M_T}{2R} - \frac{GM_S(1+\alpha)M_T}{R}$$

dove a è il semiasse maggiore della nuova orbita. Semplificando si trova

$$a = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha} R$$

Come era prevedibile, $a < R$ perché quello che prima era R adesso è la distanza massima dal fuoco.

$$R = a + c \rightarrow e \equiv \frac{c}{a} = \frac{R}{a} - 1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Questa eccentricità è una funzione crescente di α , limitata superiormente dal valore unitario. Quindi per ogni valore di $\alpha > 0$ si hanno delle orbite ellittiche.

7. Pianeti e palline

Essendo i due pianeti identici, basta che una pallina arrivi a metà strada tra i due con una velocità infinitesimale, in modo da cadere sul pianeta di arrivo. Calcoliamo quanto deve essere la velocità di lancio per fare avvenire ciò. Usando la conservazione dell'energia meccanica si trova

$$v_{lancio} = \sqrt{\frac{9GM}{10R}}$$

D'altra parte, la velocità di rimbalzo della pallina 1 è

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2GMh}{R^2}}$$

dove $h = 1m$. Dalla teoria degli urti elastici, sotto le ipotesi date nella traccia, segue che la velocità di rimbalzo della pallina n -esima vale

$$v_n = (2^n - 1)v_1 = (2^n - 1)\sqrt{\frac{2GMh}{R^2}}$$

Uguagliando la velocità di lancio necessaria affinché la pallina arrivi a metà strada e la velocità di rimbalzo della pallina n -esima, si trova

$$n = \log_2 \left(1 + \sqrt{\frac{9R}{20h}} \right) \approx 9,39$$

Il primo intero utile è quindi $n = 10$.

8. Asteroidi ferromagnetici

Per quanto affermato dal testo:

$$M = \alpha \langle \vec{H} \rangle = \alpha \vec{H}_0 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$$

Ma per il teorema del viriale:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

$$\Rightarrow E_{\text{TOT}} = -\frac{GM}{2a} = \langle U \rangle + \langle T \rangle = \frac{1}{2} \langle U \rangle = \frac{1}{2} \left\langle -\frac{GM}{r} \right\rangle = -\frac{GM}{2} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow M = \frac{\alpha \vec{H}_0}{a}$$

9. Nana bianca

Chiaramente, affinché una nana bianca si regga in piedi, la pressione al centro deve essere bilanciata dai moti degli elettroni:

$$p_c = \int_0^R \rho g(r) dr \leq p_{\text{max}} = \frac{c\hbar n}{4} \sqrt[3]{3\pi^2 n}$$

dove $g(r) = M(r)G/r^2 = \frac{4\pi}{3}\rho Gr$. Svolgendo l'integrale e sostituendo dopo $\rho = M/(\frac{4\pi}{3}R^3)$ e $n = \rho/(2m_H)$, con m_H l'unità di massa atomica, si ottiene che:

$$M^{2/3} \leq \frac{3c\hbar}{16Gm_H} \sqrt[3]{\frac{8\pi}{3m_H}}$$

dove m_H è l'unità di massa atomica. Sostituendo i numeri si ottiene una massa dell'ordine di 0.5 masse solari. Calcoli numerici più rigorosi mostrano che il limite di Chandrasekar è di circa 1.4 masse solari.