

Elettrodinamica

Alessandro Garaglio*, Filippo Girardi†
Marco Lastres‡, Alessandro Seccarelli§

6 febbraio 2020

Sommario

In questa lezione trattiamo la magnetostatica e l'evoluzione temporale dei fenomeni elettromagnetici. Introduciamo le leggi di Maxwell nella loro forma completa, mostrando particolare interesse al significato fisico delle componenti dipendenti dal tempo. Parliamo inizialmente, nel regime magnetostatico, del campo magnetico come mediatore di forze fra le correnti. Discutiamo poi in modo approfondito la legge di Faraday-Neumann-Lenz, mostrando come l'elettrodinamica si comporta in sistemi di riferimento in moto relativo, nel limite $v \ll c$. Infine ricaviamo l'esistenza delle onde elettromagnetiche, ed osserviamo le loro caratteristiche più importanti.

Per chiarimenti sulla notazione utilizzata si veda la sezione 4.1.

*alessandro.garaglio@sns.it

†filippo.girardi@sns.it

‡marco.lastres@sns.it

§alessandro.seccarelli@sns.it

Indice

1	Magnetostatica	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Correnti elettriche	3
1.3	La legge di Biot e Savart	4
1.4	Le leggi di Maxwell per la magnetostatica	7
1.5	Dipolo magnetico	7
1.6	Cenni di magnetismo nella materia	9
2	La terza e la quarta legge di Maxwell	10
2.1	La legge di Faraday e l'elettrodinamica nei sistemi di riferimento in moto relativo	10
2.2	La legge di Ampère-Maxwell	16
3	Onde elettromagnetiche	18
3.1	Energia elettromagnetica	18
3.2	L'equazione d'onda	19
4	Appendici	25
4.1	Notazione	25
4.2	Simmetrie del campo elettromagnetico	26
4.3	I teoremi di Gauss e di Stokes	27
4.4	Potenziale vettore	28
5	Problemi	29
6	Soluzioni	31

1 Magnetostatica

1.1 Introduzione

La formulazione moderna dell'elettrodinamica classica mostra che una comprensione completa dei fenomeni elettrici non può essere separata da quella dei fenomeni magnetici. Prima di mostrare la dinamica fra i campi associati alle forze elettriche e magnetiche, dove la relazione fra i due campi è più manifesta, tratteremo la classe dei fenomeni magnetostatici, caratterizzati da certe restrizioni sullo sviluppo temporale dei fenomeni.

Lo studio della magnetostatica permette di vedere chiaramente le proprietà fondamentali del campo magnetico, e, per questo motivo, storicamente precede una qualunque comprensione dell'elettrodinamica.

Una delle prime osservazioni effettuate sui magneti è la cosiddetta **assenza di monopoli**: l'attrazione e la repulsione magnetica fra corpi magnetizzati non dipende solo dalla loro "carica magnetica", ma anche dalla loro orientazione reciproca. La "carica magnetica" non è quindi uno scalare, ma un vettore; questa è chiamata **momento di dipolo magnetico** per analogia fra le leggi fisiche che regolano il dipolo magnetico ed il dipolo elettrico.

In presenza di magneti i dipoli si orientano parallelamente a quelle che, per definizione, sono le linee del campo di induzione magnetica \vec{B} , spesso chiamato semplicemente campo magnetico. Detto $\vec{\tau}$ il momento torcente agente sul dipolo magnetico si ha:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Nella storia della fisica non vennero fatti progressi quantitativi finché non venne scoperta la relazione tra correnti elettriche e campi magnetici, il primo passo verso l'unificazione delle due forze.

1.2 Correnti elettriche

Una corrente elettrica è uno spostamento di cariche attraverso lo spazio ed è descritta dal vettore di **densità di corrente**:

$$\vec{J}(\vec{r}) \equiv \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}),$$

dove \vec{v} è la velocità a cui si muove la carica di densità ρ . Nel sistema internazionale di unità di misura $[\vec{J}] = \text{Am}^{-2}$. La più familiare corrente I attraverso una superficie S è il flusso di \vec{J} attraverso S :

$$I \equiv \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

La legge della conservazione della carica impone che, per ogni intervallo di tempo, la quantità di carica uscente attraverso una data superficie chiusa sia uguale ed opposta alla variazione della carica nel volume racchiuso dalla superficie, ovvero $I_S dt = -dQ_{\text{int}}$; facendo tendere a zero l'intervallo di tempo si ha:

$$\boxed{\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = 0} \quad (1)$$

Quest'equazione è la forma integrale dell'**equazione di continuità**. Questa compare in molte aree della fisica, e descrive in modo completo la variazione di quantità continue nello spazio in funzione del loro spostamento, in questo caso dato dal flusso di corrente. Questa equazione non compare fra le leggi di Maxwell solo perché, nella loro forma completa, queste la implicano.

La magnetostatica si propone di studiare situazioni stazionarie nelle correnti e nella densità di carica¹, in cui la carica netta contenuta in una qualsiasi regione di spazio rimane costante nel tempo. Per la (1) otteniamo:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2)$$

Questo ha un'importante conseguenza: in magnetostatica è ben definito il **flusso di corrente concatenato** ad una curva chiusa², ovvero per ogni superficie S_γ con bordo in una stessa curva chiusa γ il flusso di \vec{J} attraverso S_γ è sempre lo stesso, purché si usi la regola della mano destra per scegliere l'orientazione di S_γ (si veda la sezione 1.4).

1.3 La legge di Biot e Savart

Nel 1819 Ørsted osservò che le correnti elettriche generavano una deflessione permanente dei dipoli magnetici nelle vicinanze. A partire da questo fatto, che le correnti elettriche interagiscono con il campo magnetico, cominciò un processo di astrazione che si concluse con la dichiarazione che *il campo magnetico è mediatore delle forze fra correnti* e con la riduzione di ogni "carica magnetica" ad una corrente. Biot e Savart (1820) e dopo Ampère (1825) posero le basi per la comprensione sperimentale della relazione tra le correnti e il campo \vec{B} ; detto $d\vec{\ell}$ un elemento di lunghezza del circuito orientato nel verso

¹È facile vedere che esistono distribuzioni stazionarie di corrente che non lasciano invariata la distribuzione di carica, ma si noti che è anche possibile avere una distribuzione di carica stazionaria con una distribuzione di corrente variabile (se $\vec{J}(\vec{r})$ lascia invariata la distribuzione di carica, anche un qualunque $\alpha(t)\vec{J}(\vec{r})$ lascia la stessa distribuzione invariata). La magnetostatica esclude entrambe le possibilità.

²Si veda il problema 5.1.

della densità di corrente, I la corrente elettrica, e \vec{r}' la posizione dell'elemento di lunghezza, si ha³:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

detta γ la curva delineata dal circuito dove scorre la corrente I , si ottiene integrando:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{I d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (3)$$

Astraendo dai circuiti alle densità di corrente possiamo pensare di formulare una legge più generale sostituendo a $I d\vec{\ell}' = \vec{J} d^3r'$:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'} \quad (\text{legge di Biot-Savart})$$

dove l'integrale è stato esteso alla regione di spazio in cui sono presenti densità di corrente. Nel caso di una carica puntiforme di carica q e velocità \vec{v} questa si riduce a:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{v} \times \vec{E}(\vec{r}).$$

In questa legge, nelle sue varie formulazioni, compare la costante universale $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$ detta *permeabilità magnetica del vuoto*. Si noti che questa legge descrive un fenomeno non magnetostatico, a causa del moto della particella, ma rimane comunque valida a basse velocità.

Mentre l'esperimento di Biot e Savart quantifica come le correnti generino un campo magnetico, gli esperimenti di Ampère quantificano la forza esercitata dal campo magnetico su una corrente. Un elemento infinitesimo di corrente $I d\vec{\ell}'$ subisce in un campo \vec{B} una forza:

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell}' \times \vec{B}.$$

Astraendo come prima dai circuiti otteniamo:

$$\vec{F} = \int \vec{J} \times \vec{B} d^3r, \quad (4)$$

³Nonostante questa legge possa sembrare equivalente alla legge di Coulomb, c'è una differenza sostanziale: mentre è possibile fisicamente isolare una carica elettrica, è fisicamente impossibile, a causa dell'equazione di continuità, isolare un elemento di corrente elettrica. Questa formula differenziale può essere un utile strumento concettuale, ma fisicamente solo la formula integrale (3) ha senso. Questo non è un problema di piccola rilevanza: il fatto che le interazioni magnetiche siano interazioni *fra circuiti*, e non fra cariche, le rese molto più difficili da studiare.

che per una particella con carica q e velocità \vec{v} si riduce a:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B},$$

che è l'espressione per il contributo magnetico alla forza di Lorentz. Si noti come il campo magnetico non compia lavoro, essendo $\vec{F} \perp \vec{v}$.

Per mostrare le conseguenze macroscopiche di queste leggi calcoliamo la forza che un circuito percepisce in presenza di un secondo circuito. Chiamando 1 e 2 le grandezze relative al rispettivo circuito, \vec{r}_{12} nell'integrale il vettore che indica la distanza fra gli elementi di lunghezza $d\vec{\ell}_1$ e $d\vec{\ell}_2$, e chiamando \vec{F}_{12} la forza sul secondo circuito causata dal primo:

$$\vec{F}_{12} = \oint_{\gamma_2} I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1 = \oint_{\gamma_2} I_2 d\vec{\ell}_2 \times \left(\oint_{\gamma_1} \frac{\mu_0 I_1 d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12}}{4\pi |\vec{r}_{12}|^3} \right).$$

Riordinando l'espressione otteniamo:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \times (d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}.$$

Si può manipolare ulteriormente questa formula usando l'identità vettoriale⁴ soprannominata *BAC-CAB*, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, con la quale si ottiene:

$$\frac{d\vec{\ell}_2 \times (d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3} = -(d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1) \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} + \left(d\vec{\ell}_2 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} \right) d\vec{\ell}_1,$$

dove il secondo termine, integrando lungo γ_2 , si annulla dato che $\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$ è un multiplo scalare del campo elettrostatico di una carica puntiforme, che essendo conservativo ha circuitazione nulla su curve chiuse. Si ottiene quindi:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2,$$

che mostra, dato che $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$, la validità della terza legge di Newton, ovvero $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, e che in particolare $\vec{F}_{11} = \vec{F}_{22} = 0$.

Si può inoltre discutere il momento torcente su una distribuzione di corrente dovuto ad un campo magnetico. Senza inoltrarci nell'argomento lasciamo solo la formula generale ricavabile dalla (4) tramite la definizione di momento torcente rispetto ad un polo \vec{r}_0 :

$$\vec{\tau} = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\vec{J} \times \vec{B}) d^3r.$$

⁴Le identità vettoriali sono un utile strumento, ma in genere non hanno alcuna profondità concettuale: la loro dimostrazione è solitamente una semplice verifica.

1.4 Le leggi di Maxwell per la magnetostatica

Le leggi dell'elettromagnetismo sono spesso espresse nella forma delle leggi di Maxwell, che racchiudono in modo compatto e completo una descrizione dei fenomeni dell'elettrodinamica classica. I fenomeni magnetostatici di cui finora abbiamo parlato possono essere descritti dalle equazioni:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{assenza di monopoli})$$
$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (\text{legge di Ampère})$$

dove nella prima equazione S è una qualsiasi superficie chiusa, e nella seconda equazione γ è una qualsiasi curva chiusa e S_γ una qualsiasi superficie con bordo γ (avevamo visto come la scelta di S_γ non cambia il valore dell'integrale, e che quindi la corrente concatenata ad una curva è ben definita).

La prima legge riflette l'assenza di cariche magnetiche libere; le linee di campo prodotte dai dipoli magnetici, come quelle prodotte dai dipoli elettrici, sono linee chiuse, quindi il loro flusso attraverso una superficie chiusa è nullo.

La seconda legge invece esprime, in modo equivalente alla legge di Biot-Savart, la relazione fra le correnti ed il campo magnetico; questa formulazione ha il vantaggio di facilitare, in casi di particolare simmetria, la computazione del campo magnetico nello spazio⁵. Inoltre questa formulazione permette di osservare una certa asimmetria fra i campi: il campo elettrico dipende dalla densità di carica tramite una relazione di flusso, mentre il campo magnetico dipende dalla densità di corrente tramite una relazione di circuitazione.

Per dare senso matematico alla seconda legge è necessario utilizzare la convenzione della mano destra: se i vettori tangenti alla curva $d\vec{\ell}$ hanno il verso delle dita della mano destra, i vettori normali alla superficie $d\vec{S}$ hanno il verso del pollice. Questa convenzione, insieme a quella del flusso uscente da una superficie chiusa, è di gran lunga la più utilizzata nella letteratura (dato che evita in molte formule un segno meno).

1.5 Dipolo magnetico

Come detto nella lezione di elettrostatica, il campo di dipolo è il campo generato da due particelle con carica $\pm q$ separate da una distanza \vec{d} piccola; il momento di dipolo di questa configurazione di cariche è poi definito come $\vec{p} = q\vec{d}$. Per una qualsiasi distribuzione di carica – che assumeremo per

⁵Si vedano ad esempio le distribuzioni di corrente del solenoide infinito, del piano di corrente, del filo infinito, ed il problema 5.3. Un breve approfondimento teorico sulla questione delle simmetrie si trova nella sezione 4.2.

semplicità avere carica totale nulla – si può inoltre definire un momento di dipolo:

$$\vec{p} \equiv \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3r',$$

una grandezza tale che il campo generato dalla configurazione di cariche è approssimabile a grandi distanze a quello di un dipolo elettrico di valore \vec{p} posizionato nell'origine (il punto dove $\vec{r}' = 0$ nell'integrazione di \vec{p}):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - r^2\vec{p}}{r^5}.$$

Si può fare, con qualche difficoltà in più, un'operazione analoga per il campo magnetico; a causa dell'assenza di cariche nette magnetiche, per una qualsiasi distribuzione di correnti localizzate l'approssimazione di dipolo sarà quella dominante in ogni approssimazione del campo magnetico a grande distanze (mentre per il campo elettrico il termine dominante è il monopolo $\frac{Q_{\text{tot}}}{r^3}\vec{r}$). La formula ottenuta è la seguente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2\vec{m}}{r^5}$$

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d^3r'.$$

Si possono osservare le analogie con la formula per il dipolo elettrico a grandi distanze. Si può inoltre notare che se abbiamo una distribuzione di corrente $\vec{J}(\vec{r})$ localizzata in una regione finita di spazio, le leggi di Maxwell per la magnetostatica assumono la forma di *flusso e circuitazione nulli* in ogni regione di spazio distante dalla distribuzione di corrente, dove noi ci proponiamo di calcolare \vec{B} ; nella situazione elettrostatica equivalente, le leggi di Maxwell per il campo elettrico assumono la stessa forma, quindi la formula data rispetta le leggi del campo magnetico. Per una traccia di ricavazione rigorosa, ma anche più laboriosa, si fa riferimento alla sezione 4.4. Per un'utile applicazione di questo strumento di approssimazione si veda il problema 5.4, dove si ricava che per una spira piana di superficie S si ha:

$$\vec{m} = IS\hat{n}.$$

Nota: leggere la prossima parte (i.e. la 1.6) non è necessario per comprendere le idee esposte nelle sezioni successive; sarà sufficiente ricordare che nel vuoto sono vere le leggi $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ e $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$. Queste leggi rimangono vere in alcuni materiali sostituendo degli opportuni ϵ e μ a ϵ_0 e μ_0 .

1.6 Cenni di magnetismo nella materia

Secondo il modello atomico di Rutherford, l'atomo di idrogeno è formato da un elettrone in orbita circolare attorno ad un protone posto al centro dell'orbita. Detto T il periodo dell'orbita si può approssimare l'orbita ad una corrente statica d'intensità $I = -\frac{e}{T}$ che scorre in una circonferenza di raggio r_0 (per l'idrogeno circa $0.5 \text{ \AA} = 5 \times 10^{-10} \text{ m}$).

A distanze molto maggiori di r_0 , il campo magnetico dell'atomo di idrogeno, si può approssimare al campo di dipolo relativo all'elettrone, che ha un momento pari a:

$$\vec{m} = IS\hat{n} = -\frac{\pi r_0^2 e}{T}\hat{n}.$$

Queste correnti microscopiche sono dette **correnti amperiane**, e contribuiscono al campo magnetico effettivamente presente in un mezzo materiale:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_{\gamma}} (\vec{J} + \vec{J}_m) \cdot d\vec{S},$$

dove \vec{J}_m è la densità media delle correnti microscopiche. Spesso un materiale su cui non agisce alcuna forza esterna ha \vec{J}_m nullo, dato che l'orientazione delle singole correnti sarà localmente distribuita in modo casuale. Ma campi esterni o proprietà intrinseche del materiale possono portare i dipoli microscopici ad orientarsi in media in un verso preferenziale, come ad esempio avviene in un magnete; questo comportamento può essere descritto dal concetto di "densità di dipolo", che è realizzato nella grandezza fisica detta **magnetizzazione**:

$$\vec{M}(\vec{r}) \equiv \frac{dN}{dV} \langle \vec{m} \rangle,$$

ovvero la media volumica *locale* del momento di dipolo. Definiamo ora il campo magnetico \vec{H} , detto anche intensità magnetica (grandezza distinta da \vec{B} , propriamente chiamata induzione magnetica):

$$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}}$$

Nei materiali questa grandezza sostituisce \vec{B} nella legge di Ampère:

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_{\gamma}} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (5)$$

dove \vec{J} non include le correnti amperiane, ma solo quelle macroscopiche; \vec{H} è la controparte macroscopica di \vec{B} (come lo è \vec{D} per \vec{E} , anche se nelle leggi

di Maxwell \vec{H} e \vec{D} hanno ruoli invertiti (\vec{E} e \vec{H} compaiono nelle leggi di circuitazione, mentre \vec{D} e \vec{B} in quelle di flusso)).

Per poter però effettivamente trattare la magnetostatica nei materiali in modo macroscopico è necessario esplicitare \vec{M} in funzione dei campi agenti sul materiale e di una qualche costante fenomenologica che racchiuda le informazioni fondamentali sulla struttura microscopica del materiale. Questo non è possibile in tutti i materiali, ma in quelli isotropi ed omogenei, per valori di \vec{B} non troppo elevati, vale la relazione:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (6)$$

data dalla relazione lineare fra intensità magnetica e magnetizzazione magnetica $\vec{M} = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\vec{H}$. La costante μ è detta permeabilità magnetica del materiale e solitamente $|\frac{\mu}{\mu_0} - 1| \approx 10^{-4}$. Nel problema 5.5 si ricava dalle leggi di Maxwell che all'interfaccia di due mezzi con permeabilità magnetiche μ_1 e μ_2 valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{J}_S, \end{aligned}$$

dove \hat{n} è la normale alla superficie fra i due mezzi nel verso $1 \rightarrow 2$ nel punto considerato, e \vec{J}_S è la densità di corrente *libera* superficiale sull'interfaccia tra i due mezzi (la corrente libera è quella causata da fenomeni macroscopici, distinti da quelli relativi alla magnetizzazione del materiale). Si ha quindi in particolare che in assenza di correnti libere sono continue all'interfaccia le grandezze \vec{B}_\perp e \vec{H}_\parallel . Osserviamo infine che la legge di Ohm e l'effetto Joule, leggi sulle correnti libere in materiali ohmici, assumono le espressioni $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ e $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$ dove σ è la conducibilità del materiale e $p = \frac{dP}{dV}$ è la densità volumica di potenza dissipata.

2 La terza e la quarta legge di Maxwell

2.1 La legge di Faraday e l'elettrodinamica nei sistemi di riferimento in moto relativo

Nel 1831, Faraday studiò il comportamento di circuiti posti in campi magnetici che variano nel tempo. Possiamo riassumere [Gri17] le sue osservazioni fondamentali mediante tre fenomeni empiricamente verificati (figura 1):

1. **Circuito in movimento.** Spostando un circuito fuori da un campo magnetico, una corrente scorre nel filo.

2. **Magnete in movimento.** Spostando la sorgente del campo magnetico, nuovamente una corrente scorre nel filo.
3. **Variazione di intensità.** Facendo variare l'intensità del campo magnetico, anche questa volta una corrente scorre nel circuito. Faraday usò un elettromagnete di cui fece cambiare l'intensità di corrente.

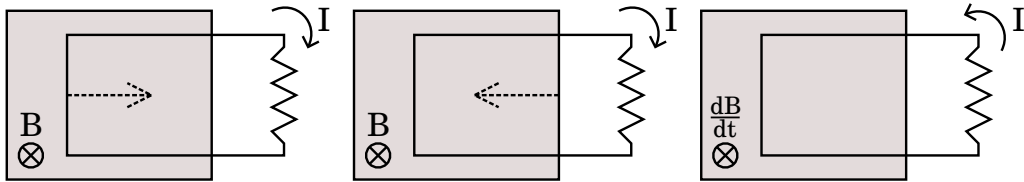


Figura 1: i tre fenomeni principali di induzione magnetica.

Faraday interpretò la comparsa di una corrente come conseguenza della variazione del flusso del campo magnetico attraverso il circuito. Per formulare questa legge definiamo due grandezze fisiche: \mathcal{E} e $\Phi(\vec{B})$. Pensando il circuito come una curva chiusa γ tracciata nello spazio, la variazione di flusso magnetico induce un campo elettrico del quale possiamo definire la **forza elettromotrice** lungo γ come l'integrale su γ del campo elettrico indotto \vec{E}' :

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell},$$

e detta S_{γ} una superficie⁶ che ha come bordo la curva γ , che delinea il circuito, possiamo scrivere il flusso del campo magnetico come:

$$\Phi(\vec{B}) \equiv \int_{S_{\gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

È importante chiarire subito che la scelta del sistema di riferimento non è indifferente: indicheremo con \vec{E}' il campo elettrico indotto dal campo magnetico *nel sistema di riferimento solidale al circuito*, mentre con \vec{B} il campo magnetico presente nel laboratorio. Le osservazioni di Faraday sono così espresse con la seguente legge:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

⁶Per circuiti planari è naturale prendere la superficie piana racchiusa dalla curva, ma in generale è possibile considerare una qualunque superficie nello spazio ed ottenere risultati equivalenti. Si veda il problema 5.1.

Nel segno del membro di destra è manifesta la **legge di Lenz**: la variazione di flusso del campo magnetico induce una corrente che genera un campo magnetico il cui flusso si oppone alla variazione originaria di flusso.

Scriviamo ora più esplicitamente questa legge, nei termini del campo elettrico indotto e del flusso del campo magnetico,

$$\oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}, \quad (7)$$

per poter studiarne le conseguenze alla luce del principio di invarianza galileiana, valido solo nel limite in cui $v \ll c$. Abbiamo esplicitato nel membro a destra dell'equazione (7) la dipendenza dal tempo delle quantità in gioco per ricordare che non è il solo campo magnetico a evolvere nel tempo. In altre parole, a seconda dei casi che considereremo, non sarà sempre il campo magnetico il solo a variare nel tempo, ma anche la posizione del circuito, o più precisamente la superficie che questo individua, cioè il dominio di integrazione stesso. Se non considerassimo questo dettaglio e ci limitassimo a derivare sotto il segno di integrale, nel primo esperimento, caratterizzato da $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, concluderemmo erroneamente che non vi sono correnti indotte ($\mathcal{E} = 0$). Cerchiamo di riscrivere la derivata nell'equazione (7) in modo che questi due aspetti della dipendenza temporale siano più chiari e distinti:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_{\gamma}(t+\delta t)} \vec{B}(t+\delta t) \cdot d\vec{S} - \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}}{\delta t} =$$

approssimiamo $\vec{B}(t+\delta t)$ con il suo sviluppo al prim'ordine $\vec{B}(t) + \delta t \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t)$, poiché nel calcolo di questa derivata – come vedremo – è quello rilevante:

$$= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{S_{\gamma}(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}}{\delta t} + \int_{S_{\gamma}(t+\delta t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t) \cdot d\vec{S} \right) =$$

eseguendo il limite sul secondo addendo otteniamo:

$$= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_{\gamma}(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}}{\delta t} + \int_{S_{\gamma}(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t) \cdot d\vec{S}.$$

Per il primo limite cerchiamo di riscrivere l'espressione a numeratore in una forma più comoda da trattare, grazie ad alcune manipolazioni la cui interpretazione può essere facilitata dalla figura 2.

Se nell'espressione a numeratore cambiamo il verso di $S_{\gamma}(t)$ (con $d\vec{S} \mapsto -d\vec{S}$) e pertanto anche il segno davanti al rispettivo integrale, otteniamo:

$$\int_{S_{\gamma}(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\gamma}(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\gamma}(t)} \vec{B}(t) \cdot (-d\vec{S})$$

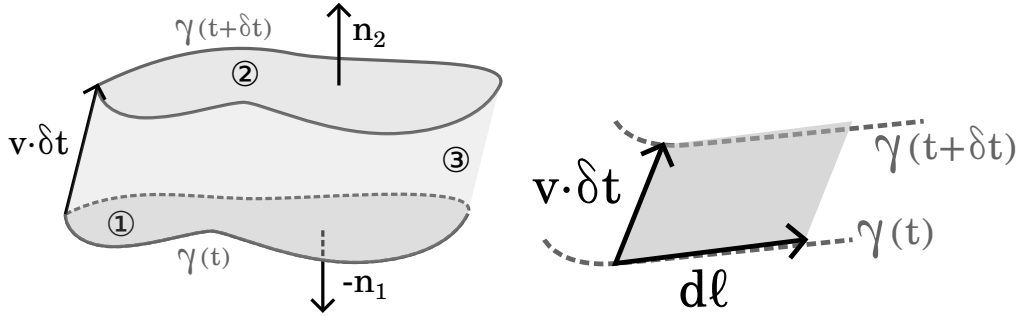


Figura 2: schema dell'evoluzione temporale della curva.

che rappresenta il flusso del campo magnetico attraverso le superfici 1 e 2 in figura. Sappiamo che il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è nullo, e dato che la superficie 1 + 2 + 3 è chiusa, si ha che il numeratore si può riscrivere come il flusso, cambiato di segno, di $\vec{B}(t)$ attraverso la superficie 3.

Esaminiamo adesso in dettaglio lo spostamento del circuito che delinea la superficie 3. L'elemento infinitesimo di superficie, che si riduce a un parallelogramma di lati $d\vec{\ell}$ e $\vec{v}\delta t$, ha una superficie descritta dal vettore $d\vec{S} = d\vec{\ell} \times \vec{v}\delta t$: il modulo è l'area del parallelogramma, il verso è quello che scegliamo per la superficie, cioè quello uscente, come è possibile verificare mediante la regola della mano destra. Il flusso del campo magnetico attraverso questo elemento di superficie è $d\vec{S} \cdot \vec{B} = (d\vec{\ell} \times \vec{v}\delta t) \cdot \vec{B} = (\vec{v}\delta t \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$. Abbiamo qui usato l'identità vettoriale del prodotto triplo $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$. Ora, per trovare il flusso complessivo attraverso la superficie 3, non resta che integrare il risultato ottenuto per la superficie infinitesima lungo l'intero circuito.

$$\int_{S_{\gamma(t+\delta t)}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S_{\gamma(t)}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = -\delta t \oint_{\gamma(t)} (\vec{v} \times \vec{B}(t)) \cdot d\vec{\ell},$$

da cui otteniamo il limite che volevamo calcolare:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{\gamma(t)}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \oint_{\gamma} (\vec{v} \times \vec{B}(t)) \cdot d\vec{\ell}.$$

Alla luce di tutto questo, riscriviamo l'equazione (7) nella forma che ci interessa studiare:

$$\boxed{\oint_{\gamma} (\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = - \int_{S_{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S}} \quad (8)$$

Ricordiamo che stiamo indicando con \vec{v} la velocità del circuito rispetto al laboratorio, che \vec{B} è espresso in termini delle coordinate spaziali del laboratorio,

e che \vec{E}' è il campo elettrico indotto nel circuito misurato nel sistema di riferimento del circuito stesso⁷, dove $d\vec{\ell}$ è a riposo; a questo punto non è più necessario specificare la dipendenza o l'indipendenza dal tempo di S_γ , dato che tutte le derivate temporali compaiono dentro gli integrali.

Cambiamo prospettiva. La legge (7) riassume una serie di osservazioni empiriche effettuate tramite lo studio delle correnti nei conduttori, ma astraendo dagli esperimenti di Faraday possiamo intuire che l'esistenza del campo elettrico indotto prescinde dalla presenza del circuito: questo è solo uno strumento che permette di misurare la variazione di campo elettrico in una data regione di spazio. La (7) è quindi fondamentalmente una relazione tra i campi \vec{E}' e \vec{B} . Se il flusso di un campo magnetico varia, anche in assenza di un circuito, la circuitazione del campo elettrico lungo una curva η qualunque può essere comunque calcolata, perché il campo \vec{E}' è effettivamente presente. È quindi ben definito il campo elettrico \vec{E} misurato nel laboratorio, e ne possiamo calcolare la circuitazione lungo la curva η . Possiamo ad esempio scegliere $\eta(t) \equiv \gamma(t_0)$, ovvero la curva relativa al circuito nella sua posizione ad un dato tempo fissato nel sistema del laboratorio. Dato che il dominio di integrazione η non dipende dal tempo, la (8) riferita al campo elettrico \vec{E} si scriverà ponendo $\vec{v} = 0$:

$$\oint_{\eta} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{S_\eta} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}. \quad (9)$$

Dato che però al tempo t_0 le curve γ e η coincidono, possiamo imporre scegliendo $S_\gamma = S_\eta$ che i membri di sinistra delle equazioni (8) e (9) siano uguali, ottenendo in particolare per l'arbitrarietà della scelta di γ :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}.$$

Questo risultato è alquanto sorprendente, per quanto valido solo per velocità $v \ll c$ (abbiamo infatti usato implicitamente le trasformazioni di Galileo nei passaggi per ricavare la (8) dalla (7)): il campo elettrico \vec{E}' di cui una carica q in moto nel laboratorio fa esperienza differisce dal campo \vec{E} percepito da una carica ferma di $\vec{v} \times \vec{B}$. Avviene quindi, nel cambio di sistema di riferimento, una trasformazione del campo magnetico in campo elettrico: questi sono infatti manifestazioni di un'unica entità fisica, detta **campo elettromagnetico**, le cui componenti elettriche e magnetiche trasformano in

⁷Infatti la forza elettromotrice che abbiamo considerato inizialmente è una grandezza "legata al circuito" e non allo spazio del laboratorio: nel laboratorio è possibile misurare \vec{E}' solo grazie alle correnti generate nel circuito, che però "vivono" nel sistema di riferimento del circuito stesso. Distinguiamo quindi \vec{E}' da \vec{E} , anche se questi coincidono se il circuito è stazionario (ovvero quando i sistemi del laboratorio e del circuito coincidono).

generale secondo le trasformazioni di Lorentz per il campo elettromagnetico. Pur essendo questa una proprietà delle leggi di Maxwell, le sue conseguenze furono scoperte e studiate solo dopo la formulazione da parte di Einstein della relatività speciale.

Tornando alla nostra carica in moto, nel laboratorio questa può essere pensata come una corrente di densità $\vec{J} \propto q\vec{v}$; allora dalla relazione $\vec{F} = \int \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d^3r$, – che nel caso di una singola carica si riconduce a $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ – concludiamo che la forza che la carica in moto prova nel laboratorio è in accordo con quanto accade nel sistema di riferimento della carica. In entrambi i casi si avrà:

$$\vec{F} = q\vec{E}' = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (10)$$

Non dimentichiamo che \vec{E} ed \vec{E}' sono i campi indotti. Non dobbiamo pertanto confondere il significato di $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ con quello che usualmente diamo alla forza di Lorentz nel caso statico. Nel vedere un'espressione così familiare, potremmo essere tentati di pensare \vec{E} come un campo elettrostatico, che chiameremo \vec{E}_0 per evitare confusioni, generato da una distribuzione di carica $\rho(\vec{r})$ stazionaria, la cui azione su una carica q in moto – in presenza anche di un campo magnetostatico \vec{B}_0 – è data da $\vec{F} = q(\vec{E}_0 + \vec{v} \times \vec{B}_0)$. Nella situazione descritta dalla (10) non vi è alcun campo elettrico conservativo \vec{E}_0 che si somma a quello indotto. Finché non vi è variazione del campo magnetico \vec{B} all'interno del laboratorio, nessun campo elettrico è misurato. Infatti, se \vec{B} rimanesse costante, la (10) diventerebbe $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ – come ci saremmo aspettati per il caso statico – dal momento che $\vec{E} = 0$. La differenza fondamentale tra \vec{E} ed \vec{E}_0 è la loro circuitazione, che è sempre nulla per \vec{E}_0 , mentre in generale non lo è per \vec{E} .

Ora è lecito chiedersi come comportarsi aggiungendo nel laboratorio un eventuale ulteriore campo elettrostatico \vec{E}_0 , generato da una distribuzione di carica $\rho(\vec{r})$, rispetto a quanto descritto in precedenza. Per il principio di sovrapposizione lineare, che è valido tanto nel caso statico quanto in quello dinamico, possiamo affermare che il campo elettrico agente complessivamente sulla carica q è $\vec{E}_0 + \vec{E}$, quindi $\vec{F} = q(\vec{E}_0 + \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Spostiamoci ora nel sistema di riferimento della carica q . Dopo quanto visto finora, non possiamo limitarci ad affermare che nel sistema della particella la distribuzione di carica ρ produce solamente un campo elettrico \vec{E}_0 (che è a tutti gli effetti presente, dato che la particella ne fa esperienza, alla luce del principio di relatività galileiana). La distribuzione di carica, in moto nel sistema della particella, produce anche un campo magnetico⁸, in quanto è vista anche come una

⁸Si pensi ad esempio a un filo in cui scorre corrente; solitamente il campo elettrico prodotto è nullo perché il filo è complessivamente neutro, ma se fosse carico produrrebbe anche un campo elettrico.

densità di corrente $\vec{J} = -\rho(\vec{r})\vec{v}$ che genera quindi un campo magnetico \vec{B}' dato dalla legge di Biot-Savart:

$$\begin{aligned}\vec{B}'(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{v} \times \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = \\ &= -\mu_0\epsilon_0\vec{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = -\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_0(\vec{r}),\end{aligned}$$

dove abbiamo definito $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}}$, che nella prossima sezione mostreremo essere la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche. Dunque, se nel laboratorio è presente il campo stazionario \vec{E}_0 , allora la particella farà esperienza di un campo magnetico $\vec{B}' = -\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_0$ nel sistema in cui è ferma.

Riassumendo queste ultime considerazioni, possiamo dire che, detti \vec{E} e \vec{B} i campi elettromagnetici nel sistema del laboratorio, e detti \vec{E}' e \vec{B}' i campi elettromagnetici nel sistema in moto⁹:

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{B}' = -\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} + \vec{B}, \end{cases}$$

o, utilizzando solo formalmente una notazione matriciale, e considerando le grandezze omogenee \vec{E} e $c\vec{B}$:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\vec{v}}{c} \times \\ -\frac{\vec{v}}{c} \times & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix}.$$

Per come è stata ricavata – calcolando dei termini correttivi a piccole velocità – questa trasformazione è un'approssimazione al prim'ordine in v/c della trasformazione di Lorentz per il campo elettromagnetico. Notiamo infatti che cambiando il segno di \vec{v} non otteniamo la trasformazione inversa, violando il principio di relatività – un'ulteriore conferma del fatto che i campi elettromagnetici non trasformano in modo coerente sotto il principio di invarianza galileiana. Utilizzando i risultati ricavati nella sezione 3.1 si può anche osservare che l'energia del campo elettromagnetico non rimane invariata sotto quest'approssimazione.

2.2 La legge di Ampère-Maxwell

Possiamo ora scrivere le leggi di Maxwell, nella misura in cui le abbiamo conosciute fino a questo punto (dove nella legge di Faraday consideriamo le

⁹Questa notazione differisce dalla precedente, dove si distinguono i campi statici da quelli indotti.

grandezze nel sistema del laboratorio, ed una curva stazionaria):¹⁰

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}} \quad (\text{legge di Gauss})$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{assenza di monopoli})$$

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{S_\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{legge di Faraday})$$

$$\oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{legge di Ampère})$$

Notiamo come la legge di Ampère sia stata ricavata sotto l'assunzione che $\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$: risulta cioè valida, al momento, solamente per la magnetostatica. Applichiamo la legge di Ampère a due superfici S_1 e S_2 il cui bordo γ è in comune, ma la cui orientazione è opposta (cioè una è delimitata da γ mentre l'altra da $-\gamma$), e sommiamo membro a membro:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{-\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{-\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \longrightarrow \quad 0 = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, \end{aligned}$$

dove S è la superficie data dall'unione di S_1 e S_2 , che racchiude un volume V_S .

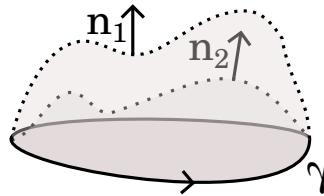


Figura 3: due superfici concatenate ad una stessa curva formano una superficie chiusa se si cambia orientazione ad una delle due superfici.

Ci siamo quindi ricondotti all'equazione che caratterizza la magnetostatica. Se però riprendiamo l'equazione di continuità ed applichiamo la legge di Gauss otteniamo:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial Q_{\text{int}}}{\partial t} = 0 \rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0.$$

¹⁰Per le definizioni di \vec{D} e \vec{H} leggere la sezione 1.6, o la nota che la precede.

Se precedentemente era quindi \vec{J} ad avere flusso nullo, cosa che ci permetteva nella legge di Ampère di scegliere arbitrariamente la superficie di integrazione S una volta dato il suo bordo γ , ora ad avere flusso nullo è una sua versione generalizzata: $\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, ottenuta sommando alla corrente di carica la cosiddetta **corrente di spostamento**¹¹. Se quindi sostituiamo \vec{J} con $\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ nella legge di Ampère otteniamo¹²:

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_{\gamma}} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (\text{legge di Ampère-Maxwell})$$

In questo modo otteniamo finalmente – nella loro forma integrale – le quattro leggi di Maxwell per l'elettrodinamica. Come discuteremo ampiamente nella prossima sezione, queste sono equazioni lineari del prim'ordine che descrivono in modo completo i due campi vettoriali \vec{E} e \vec{B} in funzione delle loro sorgenti ρ e \vec{J} , e delle proprietà elettromagnetiche locali ϵ e μ . A causa dei termini dinamici, in queste equazioni è impossibile descrivere \vec{E} e \vec{B} in modo indipendente, ed inoltre queste equazioni sono invarianti sotto le trasformazioni di Lorentz, che trasformano i due campi l'uno nell'altro esclusivamente in funzione della velocità relativa fra due sistemi di riferimento.

3 Onde elettromagnetiche

3.1 Energia elettromagnetica

Nell'elettrostatica l'energia potenziale di una configurazione di cariche si può pensare come l'energia necessaria per assemblare la configurazione portando le cariche nella loro posizione da molto lontano. Si può mostrare che questa è $U_{\text{es}} = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d^3r$, una volta scelto un potenziale nullo ad infinito. È possibile però riscrivere questa formula nel modo seguente:

$$U_{\text{es}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \vec{E}^2 d^3r,$$

cosa che permette di astrarre dalla definizione iniziale, e di attribuire l'energia del sistema al campo elettrico anziché alle cariche interagenti. Una simile

¹¹Per vedere in modo concreto il significato fisico di questa grandezza si consiglia lo svolgimento del problema 5.6.

¹²Chiaramente questo passaggio non è guidato esclusivamente dalla matematica: nella formulazione di questa nuova legge stiamo aggiungendo contenuto fisico alle nostre equazioni ($\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ non è l'unico campo a flusso nullo, e non è quindi l'unico campo che si potrebbe scegliere per rendere coerente la legge di Ampère).

astrazione, benché più laboriosa, è possibile anche per il campo magnetico:

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) d^3r, \quad (11)$$

dove l'integrando è detto **densità di energia elettromagnetica**.

Possiamo verificare questa legge nel caso della carica di un solenoide. In un circuito LR sono posti in serie un resistore di resistenza R ed un solenoide di superficie S , lunghezza ℓ , densità di spire n . L'equazione relativa al circuito è data da¹³:

$$\mathcal{E} = \mu_0 n^2 L S \frac{dI}{dt} + RI,$$

moltiplicando da entrambi i lati per dQ si ottiene il differenziale per l'energia del sistema:

$$\mathcal{E} dQ = \mu_0 n^2 \ell S I dI + RI dQ = \ell S \frac{B dB}{\mu_0} + RI^2 dt,$$

ovvero l'energia erogata dalla pila è in parte dissipata dal resistore ed in parte accumulata come energia potenziale del solenoide. Se integriamo il termine relativo al solenoide otteniamo:

$$U_{\text{sol}} = \ell S \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 d^3r,$$

che corrisponde al termine magnetico dell'energia del campo elettromagnetico.

3.2 L'equazione d'onda

Ci accingiamo ora a risolvere simultaneamente le leggi di Maxwell in un caso particolare: considereremo l'intero spazio come vuoto, cioè privo di cariche e correnti, che finora abbiamo considerato le sorgenti dei campi. Riscriviamo dunque le nostre equazioni con questa condizione aggiuntiva:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= 0 & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= - \int_{S_\gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} & \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

Queste equazioni descrivono l'evoluzione temporale di \vec{E} e \vec{B} in funzione di alcune proprietà del campo ad un dato istante. Possiamo già osservare che applicando le leggi di Coulomb e di Biot-Savart allo spazio vuoto, e quindi

¹³Si veda il problema 5.7.

trovando come soluzione i campi costantemente nulli, risolviamo le equazioni; questo però non ci soddisfa: il nostro sistema di equazioni ammette svariate soluzioni, e noi vogliamo imporre delle **condizioni iniziali** – un insieme aggiuntivo di equazioni che descrivono lo stato del sistema ad un certo istante – che ci permettano di rendere la soluzione unica. Questo è un procedimento che avviene spesso in fisica; gran parte delle leggi descrivono l'evoluzione di un sistema in modo differenziale – ad esempio $\vec{F} = m\vec{a}$ – e per risolvere un particolare problema è necessario imporre certe restrizioni sulla soluzione, come la posizione e la velocità iniziale di un corpo. Vogliamo quindi trovare prima quante condizioni iniziali è necessario imporre per garantire l'unicità della soluzione, e poi la soluzione effettiva del problema al variare delle condizioni. Possiamo già ad esempio intuire che sarà necessario descrivere il campo elettromagnetico in tutto lo spazio al tempo $t = 0$, ma scopriremo che sono necessarie ulteriori restrizioni.

Senza quindi cercare delle soluzioni a particolari problemi, tenteremo di ottenere una famiglia piuttosto ampia di soluzioni per comprendere alcune proprietà dei campi. Nulla ci vieterà di utilizzare poi questo insieme di soluzioni per la risoluzione di uno specifico problema fisico dalle condizioni iniziali fissate, per studiare altri fenomeni, o ancora approssimare situazioni più complesse che richiederebbero magari una trattazione eccessivamente laboriosa.

Per fare ciò imporre al campo elettromagnetico alcune simmetrie aggiuntive, oltre a quelle già descritte dalle leggi di Maxwell, per trovare un meccanismo semplice per produrre soluzioni al sistema. Sfrutteremo largamente in particolare la **linearità dei campi**, conseguenza del principio di sovrapposizione lineare ed osservabile nella linearità delle leggi di Maxwell: date due leggi valide di evoluzione temporale dei campi elettrico e magnetico \vec{E}, \vec{B} e \vec{E}', \vec{B}' , una qualunque loro combinazione lineare $a\vec{E} + b\vec{E}', a\vec{B} + b\vec{B}'$ è una nuova legge di evoluzione valida.

Cominciamo quindi supponendo che i campi dipendano da una sola coordinata spaziale e da quella temporale t , ovvero $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(z, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(z, t)$. Questo ridurrà ampiamente le tipologie di soluzioni che otterremo, ma ci permetterà di effettuare in un caso semplice varie osservazioni valide in generale. Tentiamo ora di ricavare alcune informazioni sulle componenti dei campi applicando le leggi di Maxwell.

Consideriamo una superficie cilindrica con asse parallelo all'asse z : a contribuire al flusso partecipano solo le basi. Infatti essendo sia \vec{E} che \vec{B} uniformi sui piani paralleli alle basi del cilindro, tante linee di campo entrano dalla superficie laterale quante ne escono. Dunque, applicando la legge di Gauss, il flusso attraverso la base superiore è uguale e opposto a quello

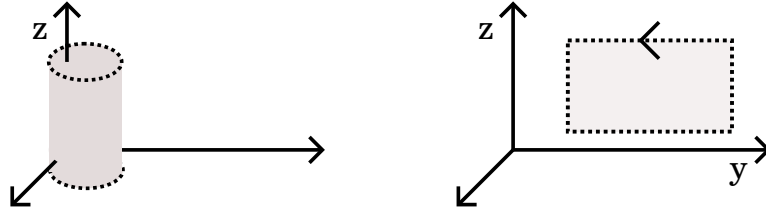


Figura 4: deduzione dell'equazione d'onda.

della base inferiore. Data l'arbitrarietà delle dimensioni e della posizione del cilindro, ed in particolare considerandone uno dalla base infinitesima ove il campo può essere considerato approssimativamente costante e dalla altezza qualsiasi, deduciamo che le componenti z dei campi sono, ad un dato istante di tempo, uguali ovunque. Le componenti z dei campi, oltre ad essere uniformi, sono inoltre costanti: se ad esempio E_z variasse nel tempo la circuitazione di \vec{B} sulla circonferenza di base del cilindro sarebbe diversa da zero, ma questo non può essere dato che \vec{B} è uniforme sul piano, e dunque la sua circuitazione è nulla su ogni curva. Un'argomentazione analoga vale anche per B_z . Siamo quindi solo interessati all'evoluzione di E_x , E_y , B_x , e B_y , dato che le componenti in z sono determinate da un singolo numero; poniamo quindi $E_z = B_z = 0$, sapendo che per linearità dei campi potremo sommare in ogni momento la soluzione costante $\vec{E} = \vec{E}\hat{z}$, $\vec{B} = \vec{B}\hat{z}$.

Effettuiamo ora la circuitazione di \vec{E} lungo un rettangolo giacente sul piano yz con lati di lunghezza dy e dz , e con il vertice in basso a sinistra alla posizione (x, y, z) : i lati paralleli all'asse z non forniscono un contributo essendo il campo nullo in quel verso. Il contributo degli altri due, è invece pari a $dy(E_y(z, t) - E_y(z + dz, t))$. Per la terza legge di Maxwell otteniamo:

$$dy(E_y(z, t) - E_y(z + dz, t)) = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{S_{\gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \approx - dy dz \frac{\partial B_x}{\partial t},$$

che nel limite di rettangoli piccoli diventa:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}. \quad (12)$$

Analogamente troviamo le seguenti uguaglianze applicando la terza e la quarta legge di Maxwell a rettangoli paralleli ai piani zy e zx :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Derivando la prima uguaglianza in z e usando la terza uguaglianza osserviamo:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Ovvero:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}} \quad (13)$$

Questa è un'espressione solamente di E_y , che ci permette di separare una variabile dalle altre quattro. Ripetendo il procedimento si ottiene l'insieme di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Questa equazione è nota come equazione di d'Alembert unidimensionale, detta anche equazione della corda vibrante. Se non avessimo ridotto i gradi di libertà spaziali da tre (ovvero x, y, z) a uno (solo z), avremmo ottenuto la seguente equazione, ricavabile e risolvibile però solo tramite l'uso di strumenti di analisi vettoriale:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Questa è l'equazione di d'Alembert tridimensionale, nota anche come equazione delle onde.

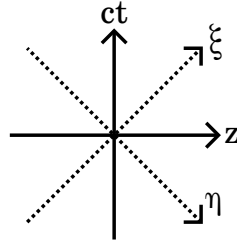


Figura 5: cambio di coordinate nel piano zt .

Tornando alla (13), per risolvere l'equazione può essere utile "fattorizzare" la derivata e definire $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_y = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_y = \frac{\partial}{\partial z + ct} \frac{\partial}{\partial z - ct} E_y,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la regola della derivazione della funzione composta. Otteniamo quindi l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial(z+ct)} \frac{\partial}{\partial(z-ct)} E_y = 0.$$

Nel piano zt , queste sono derivate effettuate lungo le rette $z = \pm ct$; prendiamo quindi temporaneamente queste due rette come assi del nostro piano, ponendo $\xi = z + ct$ e $\eta = z - ct$. Riscrivendo E_y in queste coordinate abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial\eta} E_y = 0,$$

che si può risolvere facilmente integrando singolarmente nelle due variabili e ottenendo $E_y = f(\eta) + g(\xi)$ come costanti di integrazione. Ritornando alle coordinate originarie si ha che la soluzione dell'equazione (13) assume sempre la forma:

$$E_y(z, t) = f(z + ct) + g(z - ct)$$

Le due funzioni reali che descrivono il campo possono essere viste come una coppia di “onde viaggianti”, una verso destra ed una verso sinistra, che si muovono ad una **velocità finita** c . Ad esempio se $f(\xi) = 0$ e $g(\eta) = \frac{1}{1+\eta}$, otteniamo che la componente y del campo elettrico ha una forma d'onda costante, con un picco alla posizione $z = ct$, e che viaggia quindi a velocità c verso destra¹⁴. Un modo comune per identificare un'unica soluzione, data dalla coppia di funzioni f e g , è imporre come condizioni iniziali i valori di $E_y(z, 0)$ e $\frac{\partial}{\partial t} E_y(z, 0)$ al variare di z , ovvero il valore del campo elettrico e della sua derivata temporale in tutto lo spazio al tempo $t = 0$.

Notiamo che per la (12), una volta determinata l'espressione del campo elettrico nella componente y anche il campo magnetico nella componente x è fissato a meno di una componente costante, o “magnetostatica”; integrando si ottiene infatti:

$$B_x(z, t) = \int_0^t \frac{\partial E_y}{\partial z}(z, t') dt' + B_x(z, 0),$$

dove $B_x(z, 0)$ è il valore del campo magnetico al tempo iniziale; se lo poniamo uguale a $\frac{1}{c}(f(z) - g(z))$ otteniamo un campo magnetico puramente ondulatorio¹⁵:

$$B_x(z, t) = \frac{f(z + ct) - g(z - ct)}{c},$$

¹⁴Nella figura 5 si può vedere come g , una funzione della sola η è costante lungo le rette parallele all'asse ξ , e quindi forma un'onda che trasla nel tempo nella direzione $+z$.

¹⁵Se volessimo considerare anche il caso in cui $B(z, 0)$ è diverso da quanto detto, allora otterremmo una componente costante sommata al campo magnetico trovato.

e ripetendo nuovamente tutto il procedimento otteniamo anche:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= h(z + ct) + k(z - ct) \\ B_y(z, t) &= -\frac{h(z + ct) - k(z - ct)}{c}. \end{aligned}$$

Da ciò deduciamo due importanti fatti, nel caso in cui l'onda si propaga in uno solo dei due versi (eg. $g \equiv 0$ e $k \equiv 0$): il rapporto tra i due campi è costante ed ovunque uguale a $\frac{|E|}{|B|} = c$, ed i due campi sono sempre fra loro perpendicolari (oltre che perpendicolari alla direzione di propagazione).

Una classe di soluzioni di particolare rilevanza è costituita dalle funzioni trigonometriche, che spesso descrivono in modo accurato fenomeni oscillatori, fra cui quelli che possono dare origine alle onde elettromagnetiche:

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t),$$

con E_0 l'ampiezza dell'onda, e k, ω parametri di cui chiariremo a breve la funzione. Poiché l'argomento di tale sinusoidale deve essere un multiplo di $z \pm ct$, si deve imporre la condizione $\frac{\omega}{k} = c$, che è equivalente ad affermare che i nodi dell'onda si muovono a velocità c . Dunque se $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ è la frequenza dell'onda, si ha che $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ è il "periodo" spaziale, cioè la lunghezza d'onda. Il fatto che ogni forma d'onda si muova alla stessa velocità finita c ci porta a concludere che variazioni dei campi elettrici e magnetici necessitano un tempo diverso da zero prima che i loro effetti si percepiscano in un dato punto dello spazio. Come già visto più volte in questa lezione, si osserva che l'introduzione di campi mediatori di forze non è un semplice espediente formale, ma permette di formulare leggi fisiche che descrivono fenomeni di natura diversa rispetto a quelli classici. In virtù di ciò una carica posta a grande distanza da una seconda che compie un movimento improvviso ne percepirà gli effetti solo dopo un certo intervallo di tempo. Dunque in tutta la fase transiente la forza tra le due non sarà necessariamente uguale e contraria: l'assenza di cosiddette forze a distanza contraddice quindi la terza legge di Newton, valida altrimenti in elettrostatica e magnetostatica. Possiamo inoltre osservare come un'onda elettromagnetica trasporti energia nello spazio, a causa della legge (11); nel problema 5.13 inoltre si mostra come in un certo senso il campo elettromagnetico trasporta anche momento angolare (e di conseguenza anche impulso).

Anche se le difficoltà non terminano qui, per risolvere questo particolare paradosso non è necessario scardinare l'intero edificio della meccanica newtoniana – è sufficiente apportarvi delle correzioni. Quando la fisica nacque come disciplina moderna, un passo imprescindibile fu la formulazione del principio

di relatività galileiano: le leggi della meccanica sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Ciò significa che se in due dati sistemi di riferimento inerziali si pongono le stesse condizioni iniziali quelli si evolveranno in modo perfettamente identico, proprio perché le leggi che ne governano l'evoluzione sono identiche.

Come accennato, quando si comprese questo importante tassello delle leggi fisiche, la disciplina stessa comprendeva poco oltre alla meccanica, ma con le scoperte sull'elettromagnetismo si ritenne che anche questa costruzione organica dovesse sottostarvi, come ogni altra legge fisica precedentemente nota. E da ciò sorgono delle difficoltà: nelle legge di Maxwell non vi è una alcuna dipendenza esplicita dalla velocità del sistema di riferimento impiegato, dunque in ognuno di questi sistemi le onde elettromagnetiche viaggiano ad una velocità pari a c , cosa che è in aperta contraddizione con la semplice ed intuitiva formula di addizione delle velocità. Da questa incoerenza scaturiranno varie speculazioni, di cui le più famose sono l'ipotesi dell'etere luminifero come mezzo di propagazione della luce e la profonda rivisitazione della fisica a partire da un nuovo principio di relatività formulato da Einstein e Poincaré. Il cambio di paradigma che seguirà la seconda di queste due sarà così importante da dare il nome di "fisica classica" a tutta la fisica che venne prima.

4 Appendici

Per alcuni dei passaggi svolti in questa lezione e per possibili approfondimenti rimandiamo a [Jac98].

4.1 Notazione

Per quanto riguarda le convenzioni fisiche, in questa lezione abbiamo utilizzato il sistema internazionale di unità di misura (noto anche come *mks*) ed abbiamo usato la nomenclatura standard per le grandezze e le costanti fisiche dell'elettrodinamica.

Per quanto riguarda invece le convenzioni matematiche, abbiamo indicato gli integrali in più dimensioni con un unico segno di integrale, per gli integrali di linea e di superficie abbiamo incluso il versore – rispettivamente tangente e normale – nel differenziale, ovvero abbiamo utilizzato $d\vec{\ell} = \hat{\tau} d\ell$ e $d\vec{S} = \hat{n} dS$, ed abbiamo ommesso il dominio di integrazione negli integrali di volume, dove il differenziale è indicato con $d^3r = dV$ per esplicitare la variabile di integrazione.

4.2 Simmetrie del campo elettromagnetico

Descriviamo qui brevemente alcune proprietà geometriche del campo elettromagnetico che possono aiutare a trovare rapidamente soluzioni a problemi le cui premesse presentano particolari simmetrie spaziali.

In fisica si è soliti chiamare “vettore” una qualunque grandezza fisica a tre componenti che sotto rotazioni “trasforma come la posizione”; per formulare questa affermazione in modo più preciso indichiamo con $\vec{f}(\vec{r}) = (f_1(\vec{r}), f_2(\vec{r}), f_3(\vec{r}))$ una grandezza fisica a tre componenti e con R una rotazione dello spazio tridimensionale; dato un oggetto a tre componenti \vec{a} , la sua rotazione si indica con $R\vec{a}$. Si dice che f è un vettore se, detta \vec{f}' la stessa grandezza calcolata dopo la rotazione dell'intero spazio fisico, $\vec{f}'(R\vec{r}) = R\vec{f}(\vec{r})$. Sia il campo elettrico che il campo magnetico sono, in questo senso, vettori (anche nel regime dinamico).

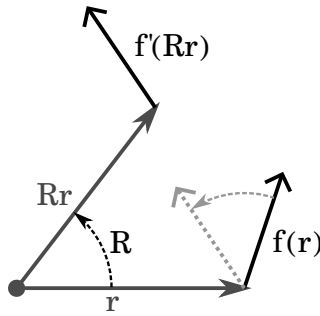


Figura 6: come un vettore trasforma sotto rotazioni.

Fra i vettori è possibile fare un'ulteriore distinzione, in base al comportamento sotto simmetrie planari: detta S una simmetria planare, \vec{f} si dice “vettore vero” se $\vec{f}'(S\vec{r}) = S\vec{f}(\vec{r})$, mentre si dice “pseudovettore” se $\vec{f}'(S\vec{r}) = -S\vec{f}(\vec{r})$. La maggior parte dei vettori fisici sono vettori veri, ad esempio la posizione \vec{r} , la velocità \vec{v} , la densità di corrente \vec{J} , ed il campo elettrico \vec{E} ; gli pseudovettori, come ad esempio il momento angolare \vec{L} ed il campo magnetico \vec{B} , sono meno ricorrenti e spesso descritti come prodotto vettoriale di vettori veri (per il momento angolare vale $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$, mentre per il campo magnetico vale la legge di Biot-Savart).

Ricordare che \vec{E} è un vettore vero e che \vec{B} è un pseudovettore può aiutare a dimostrare che in certi problemi alcune componenti di questi campi devono essere necessariamente nulle *per motivi di simmetria*, senza dover svolgere alcun calcolo. Consideriamo ad esempio, nel problema del solenoide infinito, delle simmetrie planari rispetto a piani perpendicolari al solenoide: la distribuzione di corrente rimane invariata sotto la trasformazione, quindi

$\vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$, ma per pseudovettorialità del campo magnetico $\vec{B}'(S\vec{r}) = -S\vec{B}(\vec{r})$; per punti giacenti sul piano di simmetria, dove $S\vec{r} = \vec{r}$, otteniamo quindi $\vec{B}(\vec{r}) = -S\vec{B}(\vec{r})$. Dato che ogni punto dello spazio giace su un tale piano di simmetria, si ha che in tutto lo spazio l'unica componente non nulla di \vec{B} è quella parallela all'asse del solenoide. Consigliamo come esercizio di calcolare in tutto lo spazio i campi magnetostatici del solenoide infinito, del piano di corrente (a.k.a. cascata di corrente), e del filo infinito.

4.3 I teoremi di Gauss e di Stokes

Per una trattazione completa dell'elettrodinamica è necessaria la familiarità con molti degli strumenti non elementari forniti dall'analisi vettoriale. Nonostante questa non sia necessaria per comprendere anche alcuni dei concetti più sofisticati dell'elettrodinamica (in questa lezione abbiamo evitato l'uso esplicito degli operatori differenziali), abbiamo raccolto qui i due teoremi più importanti per questa teoria fisica, che permettono infatti la riscrittura delle leggi di Maxwell nella loro forma differenziale.

Definiamo intanto la notazione, che spesso fa uso del simbolo nabla $\vec{\nabla}$; dette f e \vec{F} una funzione scalare ed un campo vettoriale (ed omettendo il punto in cui le funzioni sono calcolate):

$$\vec{\nabla} f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (\text{gradiente})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \equiv \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \quad (\text{divergenza})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \quad (\text{rotore})$$

dove un vettore è indicato qui come una terna. Questa notazione permette di interpretare nabla come un vettore $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ che agisce sulle funzioni tramite rispettivamente una moltiplicazione per uno scalare, un prodotto scalare, ed un prodotto vettoriale. Possiamo adesso enunciare i teoremi:

Teorema 4.1 (Gauss). *Se \vec{F} è un campo vettoriale e S è una superficie chiusa, allora detto V_S il volume racchiuso da S vale l'uguaglianza:*

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d^3r$$

Teorema 4.2 (Stokes). *Se \vec{F} è un campo vettoriale e γ è una curva chiusa, allora per ogni superficie S_γ con bordo in γ vale l'uguaglianza:*

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_\gamma} \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{S}$$

Applicando questi teoremi alle leggi di Maxwell otteniamo delle uguaglianze fra integrali sullo stesso dominio; eguagliando gli integrandi per arbitrarietà della scelta del dominio otteniamo le leggi di Maxwell in forma differenziale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{legge di Gauss})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{assenza di monopoli})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{legge di Faraday})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{legge di Ampère-Maxwell})$$

La forma differenziale delle equazioni rende più facile lo studio analitico dell'elettrodinamica, anche se è spesso più facile sfruttare le simmetrie di molti problemi usando le leggi in forma integrale.

4.4 Potenziale vettore

Come visto nella sezione precedente, il campo di magnetico \vec{B} ha divergenza nulla; per questo motivo¹⁶ esiste un potenziale vettore \vec{A} tale che $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. Per configurazioni finite di corrente un potenziale vettore per il campo magnetico è dato da:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r',$$

come si può verificare calcolandone il rotore lungo la variabile \vec{r} , ed ottenendo così la legge di Biot-Savart. Approssimando questa formula al prim'ordine nonnullo a distanze grandi dalla distribuzione di corrente – localizzata in una regione di spazio finita – otteniamo con molta fatica:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d^3r',$$

e dunque:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2\vec{m}}{r^5}.$$

¹⁶Il motivo è simile al motivo per cui campi vettoriali con rotore nullo, come \vec{E} , ammettono un potenziale scalare su tutto lo spazio.

5 Problemi

In questa sezione proponiamo alcuni problemi significativi sugli argomenti trattati in questa lezione. Abbiamo attribuito a ciascuno una valutazione della loro difficoltà e impegnatività in stelline da uno a quattro.

Nota: in questi problemi useremo dei termini specifici per descrivere alcune situazioni fisiche, spesso proprie dei circuiti elettrici; se si hanno dubbi sul significato dei termini o sul modo corretto di trattare questi oggetti, consigliamo di cercare informazioni online o su libri di testo. Si consiglia inoltre la lettura della sezione 1.6 dato che sono utili in molti problemi (anche non riguardanti fenomeni di magnetizzazione) la legge di Ohm e l'effetto Joule in forma locale.

Problema 5.1 (Flusso concatenato (*)). Si mostri che per i campi vettoriali \vec{J} , nel caso magnetostatico, e \vec{B} , il flusso del campo concatenato ad una curva chiusa è ben definito, ovvero per ogni S_γ con bordo γ il flusso è lo stesso.

Problema 5.2 (Cavo spesso (**)). Trovare il campo magnetostatico relativo ad una corrente I uniforme sulla sezione di un filo cilindrico infinito di raggio a . Se poi si scava in questo filo un foro cilindrico di raggio $b < a$ parallelo all'asse del filo, ma non necessariamente coassiale, quale sarà il campo magnetico all'interno del foro?

Problema 5.3 (Globo di corrente (*)). Trovare il campo magnetostatico relativo ad una corrente superficiale che si propaga dal polo nord al polo sud di un globo di raggio a viaggiando parallelamente ai meridiani, e che ritorna dal polo sud al polo nord risalendo in linea retta (la corrente mantiene una simmetria cilindrica rispetto all'asse nord-sud).

Problema 5.4 (Momento di dipolo di una spira piana (*)). Data una spira piana giacente sul piano xy , mostrare che il suo momento di dipolo è dato da:

$$\vec{m} = IS\hat{z}.$$

Problema 5.5 (Interfaccia fra diamagnetici (**)). Sia lo spazio suddiviso in due semispazi con permeabilità magnetica μ_1 e μ_2 . Se nel primo semispazio il campo magnetico è uniforme $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1$, trovare \vec{B} e \vec{H} in tutto lo spazio in un opportuno sistema di coordinate. Mostrare più in generale che se all'interfaccia scorre una densità superficiale di corrente \vec{J}_S valgono le relazioni:

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{J}_S,\end{aligned}$$

dove \hat{n} è la normale alla superficie fra i due mezzi nel verso $1 \rightarrow 2$ nel punto considerato.

Problema 5.6 (Corrente di spostamento in un condensatore (***)). Consideriamo un semplice circuito composto da un condensatore piano con lastre di area A , a distanza d , con un dielettrico di permittività ϵ , ed un filo di lunghezza L , sezione S , e resistività ρ . Inizialmente il condensatore viene caricato per induzione fino a raggiungere una differenza di potenziale V , ed al tempo $t = 0$ inizia il processo di scarica. Si scriva la legge di \vec{J} nel filo e di $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ nel dielettrico del condensatore. Si mostri esplicitamente che dato un anello γ perpendicolare al filo in prossimità del condensatore, il flusso di ciascuno dei due tipi di corrente attraverso γ dipende dalla scelta di S_γ , mentre mostrare come per varie superfici significative il flusso della somma delle due correnti rimane costante.

Problema 5.7 (Solenoidi e circuiti LR (**)). Consideriamo un circuito formato da una pila con differenza di potenziale V_0 , una resistenza R , ed un solenoide di raggio a , lunghezza ℓ , e densità di spire n . Trovare in funzione di I il campo magnetico all'interno del solenoide assumendo $\ell \gg a$, trovare la legge del circuito, e risolverla data la condizione iniziale $I(t = 0) = 0$.

Problema 5.8 (Sfera bucata (**)). Sia data una palla di raggio a con magnetizzazione uniforme \vec{M} ed un piccolo foro di raggio $b \ll a$ lungo il diametro parallelo alla magnetizzazione. Si trovi il campo magnetico nel foro della sfera, sapendo che per una sfera uniformemente polarizzata con polarizzazione \vec{P} il campo elettrico interno è uniforme ed uguale a $\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$.

Problema 5.9 (Sperimentale Senigallia 2017 (***)). Facendo scivolare un cilindro magnetizzato su un piano inclinato liscio conduttore (si assume un conduttore non ferromagnetico, e.g. l'alluminio) si osserva che questo raggiunge rapidamente una velocità limite. Modellizzando il magnete come una spira quadrata dai lati molto grandi, separata dal piano infinito da una distanza h , si trovi v_{lim} .

Problema 5.10 (Spira in moto uniforme (***)). Consideriamo una spira di raggio a e di resistenza R , immersa in un campo magnetico con simmetria azimutale $\vec{B}(r, z)$. Calcolare la forza che è necessario esercitare sulla spira per poterla mantenere a velocità $\vec{v} = v\hat{z}$ in funzione delle caratteristiche della spira e della sola componente $B_z(r, z)$ del campo magnetico, assumendo che il raggio a sia sufficientemente piccolo da permettere di considerare il campo approssimativamente costante sulla superficie della spira. Si confrontino i risultati ottenuti studiando l'effetto Joule con quelli ricavati dal calcolo della forza magnetica agente sulla corrente che fluisca nella spira. Problema adattato da [Mac19].

Problema 5.11 (Effetto Hall (**)). Un conduttore parallelepipedale di dimensioni $d \times \ell \times h$ con $h \ll \ell, d$ e lo spigolo h parallelo a \hat{z} si muove a velocità costante $v\hat{x}$ in un campo magnetico uniforme $B_0\hat{y}$. Si trovino all'equilibrio la densità di carica sulle due facce di dimensione maggiore.

Problema 5.12 (Solenoido attorno ad un conduttore (***)). Un solenoide di n spire per unità di lunghezza è avvolto attorno a un cilindro di ferrite, le cui dimensioni sono $\ell \gg R$. La ferrite ha permeabilità magnetica μ e conducibilità σ . Nel solenoide fluisce una corrente alternata $I = I_0 \cos \omega t$. Trovare il campo elettrico interno al solenoide e la potenza media dissipata per effetto Joule. Trovare la soluzione anche per un guscio cilindrico di ferrite di spessore $\delta \ll R$. Problema adattato da [Mac19].

Problema 5.13 (Arresto di una cascata di corrente (***)). Sul piano yz scorre nel verso $-\hat{z}$ una densità superficiale di corrente uniforme J_S . Trovare il campo magnetico in tutto lo spazio. A distanza d dal piano è posta una spira circolare – non conduttrice – di raggio a parallela al piano zx , e con densità di carica lineare λ . In un tempo δt la corrente sul piano si arresta totalmente, e la spira comincia a ruotare attorno al suo asse. Spiegare il fenomeno e trovare il momento angolare \vec{L} della spira. Si noti che il momento angolare meccanico del sistema non si conserva.

6 Soluzioni

Nelle soluzioni ai problemi useremo ma non spiegheremo i sistemi di coordinate [cartesiane](#), [cilindriche](#), e [sferiche](#). Indicheremo le componenti ed i [versori](#) di tali sistemi di coordinate con la notazione standard.

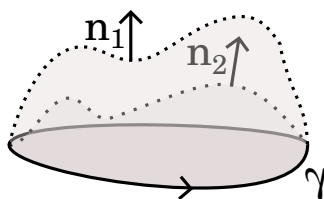


Figura 7: Soluzione del problema *Flusso concatenato*.

Soluzione 6.1 (Flusso concatenato). Nel caso magnetostatico $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ e in generale $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$. Mostriamo che per un campo vettoriale \vec{F} tale che per ogni superficie chiusa S vale $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ si ha che il flusso concatenato a una curva γ non dipende dalla particolare scelta di S_γ . Siano

S_1 e S_2 due scelte di superfici di bordo γ . Allora si ha che la superficie S data dall'unione di S_1 e $-S_2$ (abbiamo invertito il versore normale per avere una superficie orientata consistentemente) è chiusa, quindi $0 = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{-S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ cioè $\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$

Soluzione 6.2 (Cavo spesso). Per la simmetria del problema, scegliamo di lavorare in coordinate cilindriche (ρ, ϕ, z) dove \hat{z} è l'asse del filo. \vec{B} non può avere componenti lungo \hat{z} perché, riflettendo il problema rispetto a un piano ortogonale a z (quindi parallelo a xy) B_z deve rimanere invariato per le proprietà di pseudovettore, ma deve anche cambiare segno perché le sorgenti (cioè la corrente) si invertono. Inoltre, \vec{B} non può avere componente radiale, ovvero lungo $\hat{\rho}$, perché effettuando una simmetria lungo un piano passante per l'asse \hat{z} , B_r deve rimanere invariato dato che le sorgenti rimangono invariate sotto la trasformazione, ma deve anche cambiare segno dato che \vec{B} è un pseudovettore e $\hat{\rho}$ è parallelo al piano di simmetria. Questi due ragionamenti valgono solo se calcoliamo \vec{B} in una posizione \vec{r} giacente sul piano di simmetria (dato che in tal caso \vec{r} va a finire in sé stesso dopo la trasformazione), ma in entrambi i casi esiste per ogni posizione \vec{r} un piano di simmetria con le proprietà cercate e passante per \vec{r} . Per invarianza rotazionale attorno a \hat{z} e traslazionale lungo \hat{z} possiamo concludere infine che la componente tangenziale B_ϕ (l'unica che non è necessariamente nulla per simmetria) dipende solo dalla distanza dall'asse \hat{z} , ovvero $\vec{B}(\rho, \phi, z) = B_\phi(\rho)\hat{\phi}$.

A questo punto, presa una circonferenza γ ad altezza $z = 0$ (\vec{B} non dipende da z , quindi possiamo scegliere z a piacere) sul piano xy , usiamo $\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S}$ per ottenere:

$$2\pi\rho\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0\pi\rho^2 J\hat{\phi} & \text{per } \rho \leq a \\ \mu_0\pi a^2 J\hat{\phi} & \text{per } \rho > a \end{cases} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 J \rho}{2} \hat{\phi} & \text{per } \rho \leq a \\ \frac{\mu_0 J a^2}{2\rho} \hat{\phi} & \text{per } \rho > a \end{cases}$$

dove $\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$. L'espressione del campo magnetico, come ci ricorda la legge di Biot-Savart, può essere più manifestamente riscritta in termini dei vettori \vec{r} e \vec{J} . In effetti dato che $\rho\hat{\phi} = \hat{z} \times \vec{r}$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r} & \text{per } r \leq a \\ \frac{\mu_0 a^2}{2\rho^2} \vec{J} \times \vec{r} & \text{per } r > a \end{cases}$$

Per ottenere il campo magnetico dopo aver praticato il foro cilindrico, è sufficiente sovrapporre al filo di raggio a e corrente \vec{J} un secondo filo di raggio b e corrente $-\vec{J}$. Sommando le correnti, infatti, la situazione ottenuta sarà equivalente a quella voluta. Supponiamo di voler centrare il foro a una distanza \vec{d} dall'asse del filo di raggio a . Se chiamiamo $\vec{B}(\vec{r}; R, \vec{J})$ il campo

magnetico di un filo di raggio R e corrente \vec{J} nel punto \vec{r} , di cui conosciamo l'espressione per quanto fatto sopra, abbiamo che in questa nuova situazione il campo magnetico risultante è dato da:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}; a, \vec{J}) + \vec{B}(\vec{r} - \vec{d}; b, -\vec{J}).$$

Per studiare il campo magnetico nel foro, delle due possibili espressioni del campo magnetico sceglieremo quella con $\rho \leq b$, cioè $\vec{B}(\vec{r}; b, \vec{J}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r}$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r} - \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times (\vec{r} - \vec{d}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{d}.$$

Il campo è quindi uniforme all'interno del foro.

Soluzione 6.3 (Globo di corrente). Come nel problema precedente, il primo approccio riguarderà le simmetrie. Le coordinate che il problema ci suggerisce sono quelle sferiche (r, θ, ϕ) . Per invarianza rotazionale attorno all'asse \hat{z} , passante per i poli, le componenti del campo magnetico dipenderanno al più da r e θ . Consideriamo il campo magnetico in un punto del piano xz ; stiamo così scegliendo $\phi = 0$, il che non è restrittivo per quanto appena osservato. Le componenti di \vec{B} lungo \hat{r} e lungo $\hat{\theta}$, se riflettiamo il problema rispetto al piano xz , devono cambiare segno per pseudovettorialità, ma le sorgenti (cioè le correnti dentro e sulla sfera) rimangono invariate, e perciò il campo magnetico deve anche rimanere lo stesso. Quindi le componenti lungo \hat{r} e $\hat{\theta}$ sono nulle. Il risultato è altresì valido per ogni scelta di ϕ . Possiamo adesso individuare il valore di $\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r, \theta)\hat{\phi}$: applichiamo la legge di Ampère, scegliendo opportunamente la superficie S_γ presa una circonferenza γ parallela al piano xy , di raggio $r \sin \theta$ e centrata in $(0, 0, r \cos \theta)$ (in modo che i punti della circonferenza si trovino a distanza r dall'origine). Se ci troviamo dentro la sfera, la scelta più comoda è la superficie piana racchiusa dalla circonferenza: la corrente concatenata è quella che fluisce dal polo sud al polo nord e pertanto $2\pi r \sin \theta B_\phi(r, \theta) = \mu_0 I$ ovvero $\vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin \theta} \hat{\phi}$. Fuori della sfera, conviene scegliere una qualunque superficie che non intersechi la sfera. In questo caso si nota immediatamente che la corrente concatenata è nulla, perciò $\vec{B}(r, \theta) = 0$.

Soluzione 6.4 (Momento di dipolo di una spira piana). Abbiamo visto che $\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d^3 r'$. Per una spira piana l'integrazione avviene lungo il filo γ e al posto della densità di corrente \vec{J} usiamo la corrente I , ovvero usiamo $\vec{J}(\vec{r}') d^3 r' \rightarrow I(\vec{r}') d\vec{\ell}'$. In questi casi, una rapida verifica dimensionale ci può assicurare sulla riscrittura che stiamo operando. Si noti anche che abbiamo sostituito una quantità vettoriale con una vettoriale. A questo punto $\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_\gamma \vec{r}' \times I(\vec{r}') d\vec{\ell}'$. Poiché sia \vec{r}' sia $d\vec{\ell}'$ giacciono sul piano xy , \vec{m} sarà

diretto lungo \hat{z} . Inoltre, essendo la corrente costante lungo la spira, portiamo I fuori dall'integrale: $\vec{m} = I\hat{z} \oint_{\gamma} \frac{1}{2}r' d\ell' \sin\theta'$. Si ha infine che $\frac{1}{2}r' d\ell' \sin\theta'$ è l'elemento di area dS (col segno) del triangolo che ha lati \vec{r}' , $d\vec{\ell}'$, e $\vec{r}' + d\vec{\ell}'$. Perciò, integrando su tutta la spira, $\vec{m} = I\hat{z} \oint_{\gamma} dS = IS\hat{z}$.

Soluzione 6.5 (Interfaccia fra diamagnetici). Consideriamo un cilindretto con basi parallele alla superficie di separazione tra i due mezzi, localmente la superficie è approssimativamente planare, con una base nella regione 1 e l'altra nella regione 2; nel limite in cui l'altezza del cilindro è molto piccola rispetto al raggio di base nell'integrale di flusso del campo magnetico possiamo considerare soltanto il flusso attraverso le basi:

$$0 = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}.$$

Consideriamo ora un rettangolino con due lati di lunghezza ℓ paralleli alla superficie di separazione e gli altri due lati di lunghezza trascurabile e perpendicolari alla superficie. Sia \hat{t} la normale alla superficie S' del rettangolino, scelta coerentemente con la scelta dell'orientazione del rettangolo secondo la regola della mano destra. Se ora è presente sulla superficie di separazione una densità superficiale di corrente \vec{J}_S allora si ha che:

$$\int_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \ell \vec{J}_S \cdot \hat{t}$$

nel limite in cui ℓ è piccolo rispetto alle variazioni di corrente. In questo limite si ha anche, detto γ' il bordo del rettangolo:

$$\oint_{\gamma'} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \ell(\hat{t} \times \hat{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \ell(\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)) \cdot \hat{t},$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'identità del prodotto triplo. Sfruttando l'arbitrarietà di \hat{t} e la legge di Ampère si ottiene quindi:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S$$

Soluzione 6.6 (Corrente di spostamento in un condensatore). Detta $C = \epsilon \frac{A}{d}$ la capacità del condensatore, $R = \rho \frac{L}{S}$ la resistenza del filo, e $\tau = RC$, possiamo scrivere che, supponendo che percorrendo il circuito si abbia $\mathcal{E} = 0$ (ovvero trascurando i campi magnetici indotti durante il processo):

$$0 = \mathcal{E} = \frac{Q(t)}{C} + \frac{dQ}{dt}(t)R,$$

dove $Q(t)$ è la carica immagazzinata nel condensatore al tempo t . Dato che $Q(0) = VC$, la soluzione all'equazione è:

$$Q(t) = VCe^{-\frac{t}{\tau}} \quad I(t) = -\frac{dQ}{dt}(t) = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Si ha dunque, ricordando la definizione di I , e supponendo che la corrente viaggi nel filo uniformemente lungo la sezione, che:

$$\vec{J}(t) = \frac{V}{SR}e^{-\frac{t}{\tau}}\hat{t},$$

dove \hat{t} è il versore tangente al filo. Notiamo brevemente che applicando la legge di Ohm in forma locale otteniamo che nel filo $\vec{E} = \rho\vec{J} = \frac{V}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\hat{t}$, e quindi la differenza di potenziale ai capi del filo risulta essere $V(t) = Ve^{-\frac{t}{\tau}}$, coerentemente con i risultati ottenuti finora.

Nell'approssimazione di condensatore ideale si ha che fra le piastre del condensatore:

$$\vec{D}(t) = \frac{Q(t)}{A}\hat{n},$$

con \hat{n} perpendicolare alle due facce del condensatore e nello stesso verso della corrente; si avrà dunque:

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{V}{RA}e^{-\frac{t}{\tau}}\hat{n}.$$

Consideriamo ora un cilindro con asse parallelo al filo e basi parallele alle lastre del condensatore, la cui superficie laterale non intersechi le lastre, con una base fuori dal condensatore ed una dentro. Consideriamo ora come cammino il perimetro della base esterna al condensatore e consideriamo due superfici che per bordo hanno questa curva: la base esterna al condensatore del cilindro, S_1 , e la restante superficie del cilindro, S_2 .

Calcoliamo ora su entrambe il flusso della densità di corrente e della corrente di spostamento:

$$\int_{S_1} \vec{J}(t) \cdot \hat{t} dS = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}},$$

ricordando che nell'approssimazione di condensatore infinito non vi è un campo elettrico fuori dal condensatore:

$$\int_{S_1} \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{t} dS = 0,$$

mentre per la seconda superficie, in quanto non vi sono cariche in moto nel dielettrico attraverso la superficie laterale:

$$\int_{S_2} \vec{J}(t) \cdot \hat{n} dS = 0,$$

e dato che dove è presente il campo elettrico è tangente alla superficie laterale e perpendicolare alla base nel condensatore:

$$\int_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Osserviamo dunque come solo la somma di entrambi i tipi di corrente non dipende dalla superficie scelta, e come dunque il termine aggiuntivo dovuto a Maxwell nell'equazione di Faraday sia fondamentale.

Soluzione 6.7 (Solenoidi e circuiti LR). Un circuito attraversato da una corrente variabile nel tempo genera un campo magnetico variabile, che per la legge di Faraday induce a sua volta nel circuito una f.e.m. che si oppone alle variazioni osservate; in sostanza il circuito autoinduce in sé una nuova variazione della corrente. Si definisce quindi l'autoinduttanza di un circuito, una grandezza legata alle caratteristiche geometriche delle correnti e definita nel seguente modo:

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

dove Φ è il flusso magnetico attraverso il circuito e I è la corrente passante per il circuito. L non dipende da I dato che la (3) è lineare nella corrente. Osserviamo ora che se L rimane costante (ovvero il circuito non si deforma nel tempo):

$$\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}.$$

Ora però, come noto per la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

e dunque:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Calcoliamo ora L per il solenoide il questione, sfruttando le osservazioni svolte alla fine della sezione 4.2 ed applicando la legge di Ampère:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\pi a^2 \ell n \cdot B}{I} = \frac{\pi a^2 \ell n \cdot \mu_0 n I}{I} = \mu_0 \pi a^2 \ell n^2.$$

Nel nostro circuito possiamo trascurare l'autoinduttanza del filo conduttore rispetto a quella del solenoide, ma bisogna tener conto invece della f.e.m. del generatore, e quindi $\mathcal{E} = V_0 - L \frac{dI}{dt}$. Per la legge di Ohm $\mathcal{E} = IR$, e quindi:

$$V_0 = RI + L \frac{dI}{dt}.$$

L'equazione si risolve come somma di una soluzione particolare dell'equazione completa $I_p = \frac{V_0}{R}$ e di una di quella omogenea (dove si pone $V_0 = 0$), $I_o = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$, dove A si ricava imponendo la condizione iniziale. Si ha dunque:

$$I(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}).$$

Soluzione 6.8 (Sfera bucata). Possiamo considerare il sistema come sovrapposizione di una sfera uniformemente magnetizzata con magnetizzazione \vec{M} e di un cilindro con magnetizzazione uniforme $-\vec{M}$. Possiamo usare il risultato dato nel testo del problema sul campo elettrostatico sfruttando la simmetria fra campo elettrico e campo magnetico nelle equazioni di Maxwell nei rispettivi casi statici:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Queste equazioni rimangono infatti invariate se si scambia, in assenza di sorgenti, \vec{D} con \vec{B} e \vec{E} con \vec{H} ; inoltre dato che $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ e $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$, possiamo sostituire quindi μ_0 a ϵ_0 e $\mu_0 \vec{M}$ a \vec{P} ed ottenere che nel nostro problema, una sfera uniformemente magnetizzata ha $\vec{H}_{\text{int}} = -\frac{\vec{M}}{3}$. Quindi:

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0(\vec{H}_{\text{int}} + \vec{M}) = \mu_0 \frac{2\vec{M}}{3}.$$

Il cilindretto di polarizzazione $-\vec{M}$ si comporta invece come un solenoide, infatti sostituendo nelle equazioni di Maxwell $\mu_0 \vec{H} = \vec{B} + \mu_0 \vec{M}$ si hanno le equazioni:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = - \oint_\gamma \mu_0 \vec{M} \cdot d\vec{\ell}.$$

Da queste si nota immediatamente la soluzione $\vec{B}_{\text{cil}} = -\mu_0 \vec{M}$, che può essere giustificata dal fatto che si può sostituire la circuitazione della magnetizzazione con il flusso attraverso un certo S_γ di correnti amperiane superficiali, che a causa della forma del campo \vec{M} saranno disposte come le correnti di un solenoide; notiamo infatti che per rendere tale circuitazione non nulla, γ deve intersecare la superficie del cilindro.

Sommando i due contributi si ha all'interno della cavità un campo di intensità:

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_{\text{int}} + \vec{B}_{\text{cil}} = -\mu_0 \frac{\vec{M}}{3},$$

in accordo col fatto che, essendo i campi paralleli all'asse del cilindro, \vec{H} deve essere continuo attraverso la superficie laterale del cilindro stesso.

La soluzione a questo problema può essere ricavata senza fare ricorso al caso di una sfera uniformemente polarizzata: sfruttando il fatto che \vec{M} è uno pseudovettore vi invitiamo a provare a dimostrare che all'interno di una sfera uniformemente magnetizzata si trova un campo $\vec{H}_{\text{int}} = -\frac{\vec{M}}{3}$.

Soluzione 6.9 (Sperimentale Senigallia 2017). Nel testo del problema non sono state volutamente fornite le grandezze necessarie alla risoluzione con l'intento di invitare il risolutore a riflettere autonomamente quali fossero le grandezze fisiche di rilievo.

Tentiamo innanzitutto di capire la struttura qualitativa del fenomeno. Scorrendo sul piano conduttore il campo magnetico in un punto fissato varia a causa della variazione della distanza dalla spira che modella il magnete (si noti che la presenza di materia, i.e. il piano conduttore, non richiede l'utilizzo delle equazioni di Maxwell nei mezzi materiali proprio poiché si è supposto $\mu_r \approx 1$). Dunque a queste variazioni di flusso, applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz, sono associate delle circuitazioni non nulle del campo elettrico; essendo il piano conduttore ciò comporta che della corrente inizierà a fluire al suo interno, ma sappiamo che tra le correnti del piano e quelle della spira si esercitano forze, che possiamo attenderci essere frenanti data la necessità di conservare l'energia (una motivazione simile alla legge di Lenz). Inoltre dato che l'induzione è tanto più intensa quanto più rapide sono le variazioni di campo magnetico, ci si attende che all'equilibrio la velocità sarà tale da generare una forza frenante pari alla componente parallela al piano della forza peso.

Procediamo ora ad una valutazione quantitativa: come prima ulteriore semplificazione notiamo che i fili disposti parallelamente alla velocità limite non contribuiscono alla forza poiché, il campo magnetico di un filo lungo dipende solo dalla distanza da questo, e quindi il loro campo magnetico calcolato in un punto del piano rimane approssimativamente costante, e non causa quindi induzione. Inoltre essendo gli altri due fili – quelli orientati perpendicolarmente al moto – molto distanti, possiamo limitarci a considerare individualmente un unico filo infinito che scorre ad altezza h sul piano, disposto lungo l'asse y con corrente nel verso positivo e con velocità diretta lungo l'asse delle x positivo. Chiaramente con questa modellizzazione, dove consideriamo oggetti di dimensioni infinite, dovremo effettuare il calcolo delle quantità in gioco (i.e. la forza) per unità di lunghezza, altrimenti non troveremo altro che grandezze infinite. Risulta agevole, al fine di determinare la struttura delle linee di corrente nel piano conduttore, porsi nel s.d.r. della spira: in questo sistema quello che si osserva è un piano con cariche libere di muoversi che scorre a velocità costante in presenza di un campo magnetico di intensità non uniforme ma costante nel tempo. Dato ciò le cariche risentono di una

forza di Lorentz pari a:

$$\vec{F}(x) = q\vec{v} \times \vec{B}(x) = qv_{\text{lim}}\hat{x} \times B_z(x)\hat{z} = qv_{\text{lim}}\frac{\mu_0 I h}{2\pi(h^2 + x^2)}\hat{y},$$

dove con q si è indicata la carica della singola particella ed x la coordinata del punto del piano in cui si trova la carica, ricordando che il filo è posto sopra all'asse delle y ad una altezza h . Il campo magnetico è l'usuale campo magnetico di un filo infinito carico, diretto quindi tangenzialmente, che nell'ultimo passaggio è stato proiettato lungo l'asse z poiché nel prodotto vettore la componente x si annulla. Notiamo che l'espressione è stata calcolata per il semipiano positivo delle x , l'espressione per quello negativo è semplicemente cambiata di segno. Questa forza agisce sulle cariche in un modo analogo ad un campo elettrico di intensità F/q , innescando dunque una densità di corrente pari a:

$$\vec{J}(x) = \frac{\sigma \vec{F}(x)}{q},$$

dove con σ si indica la conducibilità elettrica del piano, pari all'inverso della resistività. A questo punto per calcolare la forza per unità di lunghezza totale è sufficiente integrare la forza tra correnti e moltiplicare per un fattore 4 (un fattore due per i due semipiani, ed un secondo fattore due per i due fili). Se poniamo pari a δ lo spessore, molto piccolo, del piano si ha:

$$(F_{\text{tot}})_x = 4 \int_0^{+\infty} -\frac{\mu_0^2 \sigma \delta h I^2 v_{\text{lim}} x}{4\pi^2(x^2 + h^2)} dx = -\frac{\mu_0^2 \sigma \delta h I^2 v_{\text{lim}}}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + h^2)^2} dx = \frac{\mu_0^2 \sigma \delta h I^2 v_{\text{lim}}}{2h^2 \pi^2}.$$

Per effettuare il calcolo dell'integrale si è riconosciuto che a numeratore, a meno di fattori numerici, è presente la derivata del denominatore al quadrato, potendo dunque applicare al contrario la regola di derivazione della potenza di una funzione. Per ottenere quindi la velocità limite è sufficiente imporre l'equilibrio meccanico lungo l'asse, inclinato ad un angolo θ rispetto all'orizzontale, che rappresenta la pendenza del piano. Ricordando che $(F_{\text{tot}})_x$ è espresso per unità di lunghezza, detta ℓ la larghezza della spira:

$$mg \sin \theta = \frac{\mu_0^2 \sigma \delta I^2 v_{\text{lim}} \ell}{2\pi^2 h}$$

$$v_{\text{lim}} = \frac{2\pi^2 h m g \sin \theta}{\mu_0^2 \sigma \delta I^2 \ell}.$$

Con questo il problema si conclude anche se ricondurre il risultato ad un magnete reale non è facile, e dipende dalla scelta della modellizzazione del magnete tramite questa spira (ci sono infatti vari modi per ottenere un dato momento di dipolo magnetico avendo ℓ e I come parametri liberi).

Soluzione 6.10 (Spira in moto uniforme). In primo luogo calcoliamo la corrente che scorre nella spira; applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la variazione di flusso dovuta alla variazione nello spazio di \vec{B} si può scrivere:

$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \pi a^2 \frac{B_z(z+dz, r) - B_z(z, r)}{dt} = \pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} v,$$

dove si è sfruttato che il campo magnetico lungo la direzione z è approssimativamente costante sulla superficie della spira. Applicando la legge di Ohm al circuito:

$$I = \frac{\pi a^2}{R} \frac{\partial B_z}{\partial z} v.$$

Per la conservazione dell'energia, la potenza dissipata per effetto Joule deve essere uguale a quella assorbita dalla forza esterna. Ricordando che istantaneamente la potenza di una forza è pari al prodotto scalare con la velocità del corpo su cui è esercitata si deduce:

$$F = \frac{I^2 R}{v} = \frac{(\pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z})^2 v}{R} \rightarrow P = \frac{(\pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} v)^2}{R}.$$

Per calcolare direttamente la forza magnetica è utile capire in prima battuta quali componenti del campo magnetico contribuiscono alla forza resistiva. Poiché la spira e la corrente che scorre in essa giacciono su un piano perpendicolare all'asse z , la componente del campo magnetico che produce forza lungo l'asse delle z è quella diretta radialmente rispetto al centro della spira. Procediamo al calcolo della potenza per mezzo della definizione:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F dz}{dt} = \frac{dz \int_0^{2\pi} B_{\perp} I a d\theta}{dt}.$$

L'integrale rappresenta la somma di ogni elemento infinitesimo di forza applicato ad ogni tratto $d\ell = a d\theta$ della circonferenza e B_{\perp} rappresenta il campo magnetico perpendicolare ad ogni $d\ell$. Osserviamo che se portiamo dentro l'integrale dz ed inoltre facciamo uscire I possiamo riconoscere nell'integrale il flusso del campo magnetico uscente dalla superficie esterna di un cilindro ottenuto dalla traslazione nello spazio della spira. Ma allora applicando la legge di Gauss magnetica possiamo sostituire l'integrale con il flusso attraverso le due basi del cilindro sopra individuato diviso per dt . Quest'ultimo è già stato calcolato all'inizio della risoluzione, quindi sostituendo si ha:

$$P = \frac{(\pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} v)^2}{R},$$

cioè lo stesso valore ottenuto precedentemente.

Soluzione 6.11 (Effetto Hall). A causa della presenza del campo magnetico, le cariche nel conduttore sperimentano una forza di Lorentz pari a $q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\hat{z}$. A causa di ciò le cariche si spostano lungo lo spigolo h , ma questa separazione di cariche comporta la comparsa di un campo elettrico lungo l'asse z , in particolare verso la direzione negativa di questo asse, accumulandosi le cariche positive sulla faccia superiore. Nei fatti, sfruttando l'approssimazione suggerita, è come se fossimo in presenza di due piani infiniti carichi. Il processo di carica prosegue fino a che la forza elettrica non reinstaura l'equilibrio. Operando lungo l'unico asse di rilievo, quello z , otteniamo:

$$qvB = qE \rightarrow E = vB,$$

che, ricordando la formula della capacità di un condensatore piano (ottenuta applicando la legge di Gauss), porta a:

$$\sigma = \epsilon_0 vB.$$

Soluzione 6.12 (Solenoido attorno ad un conduttore). Nella risoluzione del problema useremo chiaramente le coordinate cilindriche. Il campo magnetico generato dal solenoide vale, come sempre, in prima approssimazione $B_z = \mu n I \cos(\omega t)$. Notiamo però che qui, oltre ad approssimare il solenoide come infinito, stiamo anche trascurando i cosiddetti termini di ordine superiore del campo elettromagnetico: per le ultime due leggi di Maxwell si ha che la variazione di uno dei due campi causa una variazione nell'altro, fenomeno che si può schematizzare tramite una serie di correzioni sempre più piccole ai campi elettromagnetici. Poiché all'interno del cilindro è presente un campo magnetico variabile, dalla terza legge di Maxwell deduciamo che deve essere presente un campo elettrico indotto. Data la sua origine ci si attende che si presenti con linee chiuse, più precisamente circonferenze, data la simmetria cilindrica del sistema che le crea. Dunque:

$$-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = 2\pi r E_\phi(r, t),$$

dove con r si è indicato il raggio della circonferenza su cui si sta valutando la circuitazione di $E_\phi(r, t)$, cioè il campo elettrico tangenziale in funzione del tempo e della distanza dall'asse. Calcolando il flusso di \vec{B} si ottiene:

$$E_\phi(r, t) = \frac{\mu n I \omega r}{2} \sin(\omega t).$$

Applicando dunque la legge di Ohm in forma microscopica si ottiene che la densità di corrente cresce linearmente con la distanza dall'asse e varia nel

tempo con carattere sinusoidale:

$$J_\phi(r, t) = \sigma E_\phi(r, t) = \frac{\sigma \mu n I \omega r}{2} \sin(\omega t).$$

Il calore dissipato si ottiene applicando la legge di Joule, sempre espressa in forma microscopica ($p = \frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E}$). Per ottenere però il risultato richiesto sarà necessario mediare su un periodo e poi integrare sul volume del cilindro:

$$p(r, t) = E_\phi(r, t) J_\phi(r, t) = \frac{\sigma (\mu n I \omega r)^2}{4} \sin^2(\omega t)$$

Ricordando che in un periodo, $\sin^2(x)$ vale in media $\frac{1}{2}$:

$$P = \ell \int_0^R 2\pi r p(r) dr = \frac{\pi \sigma \ell (\mu n I \omega)^2}{4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \sigma \ell (\mu n I \omega)^2 R^3}{16}$$

dove l'integrale è stato effettuato sommando corone cilindriche di raggio interno r , altezza ℓ e spessore dr infinitesimo, avendo quindi volume pari a $2\pi r \ell dr$, al cui interno il valore di $p(r)$, la densità di potenza media dissipata, può essere considerata uniforme.

Se vogliamo calcolare una prima correzione al valore del campo magnetico dobbiamo tener conto della corrente aggiuntiva che scorre nel cilindro e della corrente di spostamento, cioè delle variazioni di campo elettrico. Calcoliamoli separatamente: per calcolare il contributo delle correnti reali aggiuntive si può osservare che, nei fatti, ogni singolo strato di corrente a distanza r dall'asse e di spessore dr si comporta come un solenoide con prodotto $In = J(r) dr$ dunque per ottenere la correzione al campo magnetico ad una certa distanza dovremo integrare i contributi di tutte le corone cilindriche di corrente più esterne:

$$B_z^{(1)}(r, t) = \int_r^R \mu J_\phi(r') dr' = \int_r^R \mu \frac{\sigma \mu n I \omega r'}{2} \sin(\omega t) dr' = \frac{\mu^2 \sigma n I \omega}{4} \sin(\omega t) (R^2 - r^2).$$

Per calcolare invece la correzione del termine della corrente di spostamento calcoleremo la circuitazione del campo magnetico lungo un rettangolo giacente in uno dei piani di simmetria contenenti l'asse del solenoide e con un lato lungo a coincidente con l'asse stesso. Al solito per motivi di simmetria non sono presenti componenti radiali di \vec{B} dunque:

$$aB_z^{(2)}(r, t) = \mu \frac{d\Phi(\vec{D})}{dt} = a \int_0^r \frac{\epsilon \mu^2 n I \omega^2 r'}{2} \cos(\omega t) dr' = \frac{\epsilon \mu^2 n I \omega^2}{4} \cos(\omega t) r^2.$$

A posteriori si verifica che le correzioni siano effettivamente di ordine maggiore, cioè che i rapporti $B_z^{(1,2)}/B_z$ siano piccoli, ove piccolo è al solito da intendersi

in relazione alla precisione che una eventuale procedura sperimentale è in grado di raggiungere. Notiamo che il rapporto $B_z^{(2)}/B_z^{(1)}$ tra le due correzioni può, sotto certe ipotesi, rendere trascurabile il termine dovuto alla corrente di spostamento. Infatti questo è dell'ordine $\frac{\epsilon\omega}{\sigma}$. Aggiungiamo poi che, se lo si volesse, si potrebbero calcolare le correzioni alle correzioni. Il caso del guscio cilindrico si presenta identico nelle idee e nei passaggi però, nell'eventualità in cui si potesse trascurare il termine della corrente di spostamento si può ottenere una soluzione diretta e completa del problema; come sopra si ottengono applicando le ultime due equazioni di Maxwell:

$$2\pi RE_\phi(R, t) = -\pi R^2 \frac{\partial B_z(t)}{\partial t} \quad B_z(t) = \mu(nI \cos(\omega t) + \delta\sigma\epsilon E_\phi(R, t)),$$

da cui, disaccoppiando e risolvendo l'equazione differenziale cercando una soluzione del tipo $B_z(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$ con α e β costanti opportune si ha:

$$\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) = \mu n I \cos(\omega t) - \frac{\mu\epsilon\delta\omega\sigma R}{2} \alpha \cos(\omega t) + \frac{\mu\epsilon\delta\omega\sigma R}{2} \beta \sin(\omega t).$$

Eguagliando i termini con la stessa dipendenza temporale ricaviamo α e β :

$$\alpha = \frac{\mu\epsilon\delta\sigma\omega R}{2} \frac{\mu n I}{1 + \frac{(\mu\epsilon\delta\sigma\omega R)^2}{2}} \quad \beta = \frac{\mu n I}{1 + \frac{(\mu\epsilon\delta\sigma\omega R)^2}{2}}.$$

Soluzione 6.13 (Arresto di una cascata di corrente). Prima di procedere alla soluzione osserviamo che nella situazione fisica descritta dal problema non è facile descrivere l'evoluzione temporale dei campi: l'arresto della cascata porta ad una variazione del campo magnetico nello spazio, che a sua volta causa la formazione di un campo elettrico a causa della terza equazione di Maxwell. Durante l'arresto si forma quindi sulla superficie del piano un'onda elettromagnetica che viaggia a velocità c nei versi $\pm\hat{x}$; questa viaggiando "spazza via" il campo magnetostatico della cascata di corrente, "trascinandosi dietro" la nuova soluzione del campo elettromagnetico (che possiamo assumere stazionaria).

Cerchiamo adesso di descrivere la nuova soluzione. Questa avrà certamente campo magnetico nullo: per simmetria traslazionale il campo magnetico dipenderà solo dalla distanza dal piano, e per simmetria planare (lungo il piano della corrente (yz) e lungo un piano perpendicolare al piano della corrente ma parallelo al verso di questa (zx)), per pseudovettorialità del campo magnetico, questo avrà direzione lungo \hat{y} e sarà dispari rispetto al piano della corrente; applicando la legge di Ampère ad un rettangolo parallelo a xy e simmetrico rispetto al piano della corrente yz , si avrà che \vec{B} è nullo,

essendo la corrente nulla dopo l'arresto della cascata. Per ragionamenti di simmetria analoghi si trova che il campo elettrico sarà diretto lungo \hat{z} e costante in tutto lo spazio, ma essendo questo pari rispetto al piano della corrente, è impossibile dichiarare a priori che questo sarà nullo dopo l'arresto della corrente. È quindi possibile che, in questa situazione ipotetica ben poco realizzabile, le cariche sull'anello sentano ad ogni tempo dopo l'arresto della cascata un'accelerazione costante: una quantità illimitata di quantità di moto sarebbe trasmessa alle cariche nella direzione \hat{z} (si noti che il verso è lo stesso della cascata).

Fortunatamente il problema chiede semplicemente di trovare il momento angolare trasferito all'anello. Ci viene detto che l'anello ruota attorno al suo asse di simmetria rotazionale, parallelo a \hat{y} . Chiamando γ la curva che delinea l'anello:

$$\frac{d}{dt}L_y = \tau_y = \left(\oint_{\gamma} (\vec{r} - d\hat{x}) \times d\vec{F} \right) \cdot \hat{y} = \oint_{\gamma} a\vec{E} \cdot \lambda d\vec{\ell} = a\lambda\mathcal{E} = -a\lambda\frac{d\Phi}{dt},$$

dove \mathcal{E} è la forza elettromotrice lungo γ e Φ è il flusso magnetico lungo γ ; il passaggio intermedio si può giustificare usando l'identità vettoriale del prodotto triplo, quello più a sinistra con le equazioni cardinali, e quello più a destra con la legge di Faraday-Neumann-Lenz. A questo punto integrando gli estremi si ha, ricordando il campo magnetostatico di un piano infinito di corrente:

$$L_y = a\lambda\Phi(t=0) = -\lambda\pi a^3 \frac{\mu_0 J_S}{2}.$$

Riferimenti bibliografici

- [Gri17] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics Fourth Edition*, page 312. Cambridge University Press, 2017.
- [Jac98] John David Jackson. *Classical Electrodynamics Third Edition*. Wiley, 1998.
- [Mac19] Andrea Macchi. Fisica 2: problems and solutions, 2019. Pubblicato sul [sito dell'autore](#).