

# Modulo di Analisi avanzato

Edoardo Maria Centamori\*, Paolo Alessandro Xavier Tognini†

24 marzo 2020

## Sommario

La lezione del secondo livello vuole approfondire una conoscenza dell'Analisi che si richiede essere già parzialmente esistente al fine di poter seguire correttamente questo modulo. Si tratteranno funzioni in più variabili, le derivate parziali, la Regola della Catena, un'intuizione fisica del concetto di Gradiente e l'espansione in Taylor in più variabili. Verranno dunque approfonditi i concetti di integrali doppi e tripli anche in geometrie curve introducendo dunque la nozione di integrale di linea e di superficie e dopo aver introdotto le nozioni di divergenza e rotore le applicazioni di questi concetti ai teoremi di Gauss e di Stokes. Si studieranno infine i modi elementari di risoluzione delle Equazioni Differenziali Ordinarie (ODE).

## 1 Introduzione ai concetti fondamentali per il calcolo multivariato

### 1.1 Continuità e derivabilità

Rivediamo brevemente che cosa significa la continuità e la derivabilità per una funzione in una variabile.

Una *funzione*  $y = f(x)$  è una regola con la quale ad ogni elemento  $x$  posso associare uno e un solo elemento  $y$ . Ad ogni coppia  $(x, f(x))$  possiamo associare un punto sul piano cartesiano  $xy$  e trovare così il grafico di  $f(x)$ : una funzione è il suo grafico.

Una funzione si dice *continua in un punto*  $x$  se, quando  $x + dx$  si avvicina a  $x$  ( $dx \rightarrow 0$ ), allora anche  $f(x + dx) \rightarrow f(x)$  (nel senso che il numero

---

\*edoardo.centamori@sns.it

†paolo.tognini@sns.it

$|f(x + dx) - f(x)|$  può diventare piccolo a piacere, se scelgo  $dx$  abbastanza piccolo).

Una funzione che è continua in ogni punto si dice semplicemente funzione *continua*. In pratica significa che il suo grafico può essere disegnato sul piano  $xy$  senza staccare mai la matita dal foglio: in questo modo, a cambiamenti abbastanza piccoli sulla  $x$  corrispondono cambiamenti piccoli sulla  $y$ .

Prima di proseguire, domandiamoci: che ne è delle funzioni non continue? Esistono funzioni che non sono continue in nessuno dei loro punti, ma non le affronteremo in questa sede perché non compaiono in fisica.

Consideriamo invece una funzione che è continua in tutti i punti tranne uno. È il caso di una *discontinuità a salto*: ad esempio, una funzione che è uguale a zero per  $x \leq 0$  e uguale a uno per  $x > 0$ . Funzioni di questo tipo compaiono in fisica: ad esempio, può rappresentare il potenziale elettrico di due regioni, separate da un sottile condensatore; oppure l'attrito statico che cambia improvvisamente perché cambia il materiale di cui è fatto il pavimento. A volte può convenire immaginare che la funzione in realtà non abbia un "salto", piuttosto sale in modo continuo anche se molto veloce.

È chiaro che la funzione in  $x = 0$  non è continua: anche se prendo  $dx > 0$  piccolo quanto mi pare, troverò comunque che  $dy = 1$ , e quindi non diminuisce. Tuttavia se prendo  $dx < 0$  ho  $dy = 0$ , che è piccolo, quindi si può dire che la funzione è *continua a sinistra*: è continua se mi restringo a considerare solo  $dy < 0$ . Tuttavia è inutile addentrarsi troppo in questi problemi.

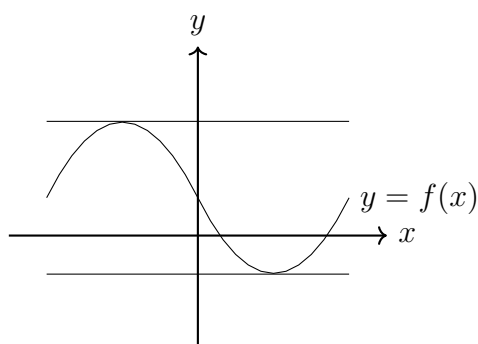
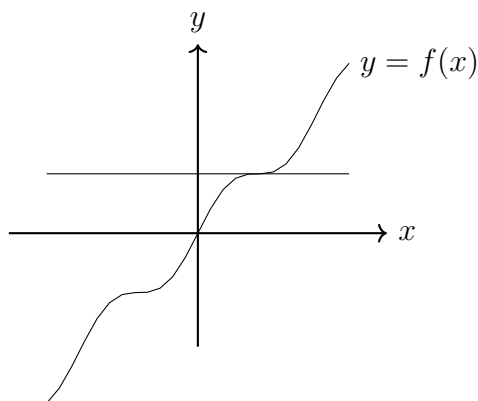
Procediamo ora a definire cosa sia la pendenza di una funzione in un punto. Se in un punto una funzione non ha spigoli, guardandola abbastanza da vicino essa sembrerà una retta. Se in un intorno di un punto, la funzione, guardandola sempre più da vicino, sembra sempre più una retta, allora è possibile definire (e calcolare) la pendenza della funzione in quel punto: possiamo confondere la funzione con la retta tangente in quel punto, e avvicinandosi l'errore che commettiamo diventa arbitrariamente piccolo. La pendenza della funzione è dunque definita come la pendenza della retta tangente. In questo caso si dice che la funzione è *derivabile* in quel punto. Una funzione derivabile in tutti i suoi punti è detta semplicemente *derivabile*.

La pendenza di una retta si misura come  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Per calcolare la pendenza nel punto  $(x, y)$  calcoliamo la pendenza della retta che collega  $(x, y)$  e  $(x + dx, y + dy)$ , dove  $dx$  e  $dy$  sono molto piccoli e tendono a zero. La funzione che, data  $x$ , associa la pendenza della funzione  $f(x)$  nel punto  $x$  stesso (ovvero  $\frac{dy}{dx}$  calcolata nel punto  $x$ ), si chiama *funzione derivata*, o semplicemente *derivata*, di  $f(x)$ . Si assume che abbiate familiarità con questo concetto. La derivata è definita come un rapporto di differenziali, ovvero di quantità che diventano via via più piccole.

Si assume inoltre che imponendo la derivata uguale a zero possiate trovare i

punti di massimo locale, minimo locale e di flesso di una funzione, mostrati in figura.

Ecco degli esempi di flesso, punto di massimo e punto stazionario:



Prima di proseguire, vediamo qualche esempio in cui non si ha derivabilità. Esistono funzioni che sono continue e non derivabili in ogni punto: la prima fu scoperta da Weierstrass ed è mostrata in figura. Alcuni esempi di queste funzioni sono i frattali, per chi li conosce. Queste compaiono in fisica, ad esempio nel moto Browniano, cioè il moto di una particella di pulviscolo in un bicchiere d'acqua, dove viene spinta in modo casuale dalle molecole. Oppure nei rumori casuali elettromagnetici nelle linee telefoniche, dovuti a fluttuazioni termiche. Tuttavia non li tratteremo.

Consideriamo una funzione continua ovunque, e derivabile in tutti i punti tranne uno. Ricordo che, se una funzione in un punto non è continua, non è neppure derivabile: si ricorda l'esempio precedente della discontinuità a salto. Oppure, poiché quando  $dx > 0$  si ha che  $dy = 1$  e  $dx \rightarrow 0$ , si ottiene  $dy/dx \rightarrow +\infty$ , quindi la derivata fa infinito. Ma se avessi usato i  $dx < 0$  avrei ottenuto  $dy/dx = 0$ . Possiamo quindi definire una *derivata destra* che è la pendenza a destra, e analogamente una *derivata sinistra*.

Consideriamo dunque una funzione continua non derivabile: ad esempio un

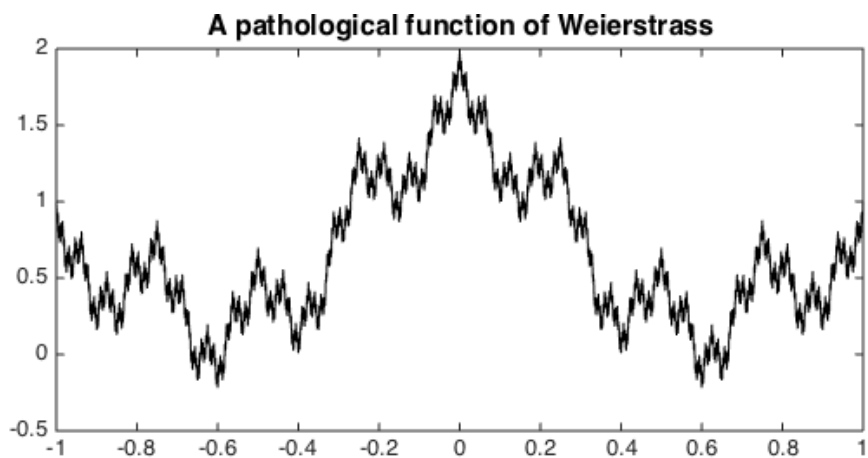
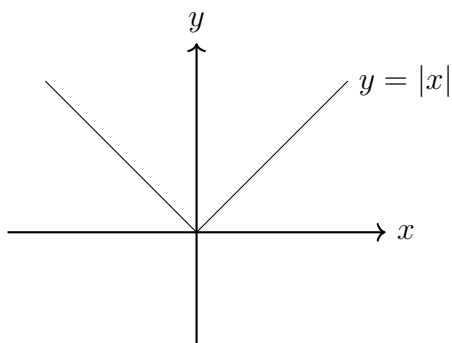
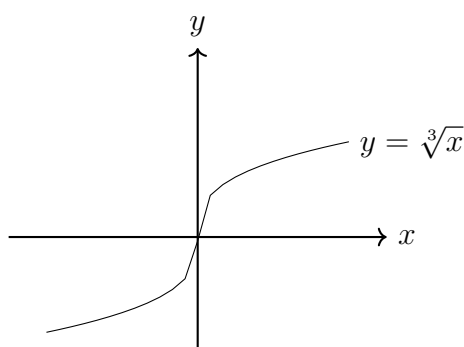
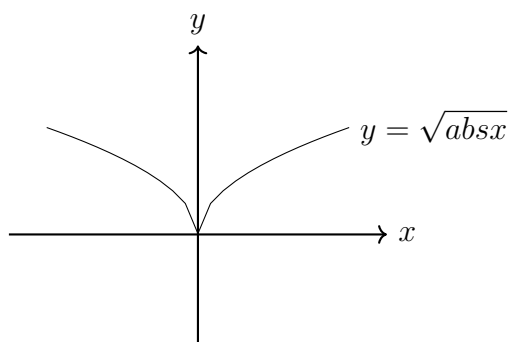


Figura 1: Funzione di Weierstrass, continua ovunque e mai derivabile  
<https://www.chebfun.org/examples/approx/WeierstrassFunction.html>

punto angoloso. Si consideri la funzione  $y = |x|$ . La funzione chiaramente può essere disegnata senza staccare la matita dal foglio, ma per quando io ingrandisca l'intorno del punto  $x = 0$ , la funzione non assomiglia sempre di più a una retta, ma sembra sempre una "V" (vedi figura). In questo caso, vediamo che la derivata destra è  $+1$  e la derivata sinistra è  $-1$ .



Abbiamo invece una *cuspid*e quando la derivata destra e la derivata sinistra fanno l'una infinito e l'altra meno infinito (o viceversa). Questo capita ad esempio con la funzione  $y = \sqrt{|x|}$ : avvicinandosi sempre più a  $x = 0$ , la pendenza delle rette tangenti a destra e a sinistra tende a diventare infinita. Esistono anche casi in cui le pendenze tendono entrambe a più infinito: è il caso della funzione  $y = \sqrt[3]{x}$  in  $x = 0$ .



Questi esempi basteranno a darvi un'idea di quali funzioni stiamo trascurando quando assumiamo che una funzione sia continua e derivabile.

## 1.2 Esponenziali

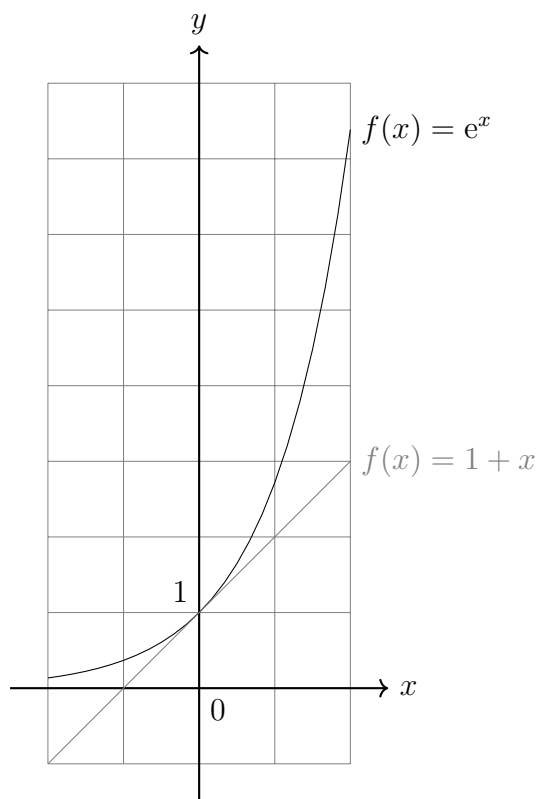
Consideriamo

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{(a^{x+dx} - a^x)}{dx} = a^x \frac{a^{dx} - 1}{dx} = a^x k(a)$$

dove  $k(a) = f'(0)$  non dipende da  $x$  ed è quindi costante (dipende da  $a$ , che è costante), ed è diversa da 0.

Plottando la funzione  $y = a^x$  per diversi valori di  $a$ , ci si convince che esiste un certo valore di  $a$  per cui  $k(a) = 1$ : esso è il numero di Nepero  $e$ . La funzione  $e^x$  ha la proprietà di essere la derivata di se stessa. È chiaro che esiste un'unica funzione tale che  $f(0) = 1$  e tale che in ogni punto la pendenza è uguale al valore della funzione (so dove parte la funzione, e per ogni passettino  $dx$  so quanto vale il  $dy$  corrispondente, quindi è unica).

Segue il grafico della funzione  $e^x$ : come si può notare, la sua derivata in 0 è 1.



Consideriamo la quantità  $\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ , dove  $N$  è un numero intero *infinito*, cioè un numero che può diventare arbitrariamente grande e che tende a infinito ( $N \rightarrow +\infty$ ). Un numero infinito si può considerare come il reciproco di un infinitesimo: quando quest'ultimo diventa arbitrariamente piccolo, il primo diventa arbitrariamente grande.

Sviluppando il binomio si vede che

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N &= 1 + N \frac{x}{N} + \frac{N(N-1)}{2!} \frac{x^2}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \frac{x^3}{N^3} + \dots = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

dove ho usato che  $\frac{N+k}{N} = 1 + \frac{k}{N} \approx 1$  poiché  $\frac{k}{N}$  è un infinitesimo.

Derivando termine a termine la serie infinita appena trovata, troviamo che è uguale alla serie stessa. Per unicità, abbiamo che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

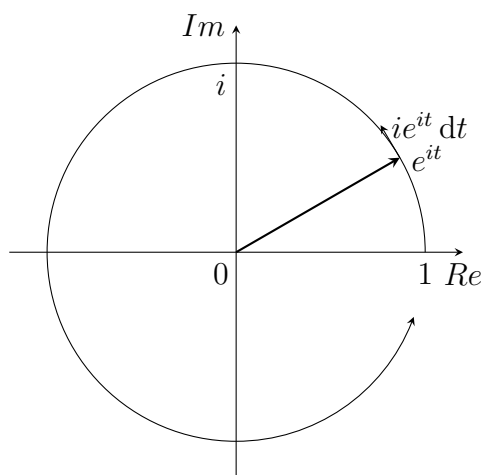
La funzione  $y = e^x$  si chiama esponenziale. La sua funzione inversa  $x = \ln(y)$

si chiama *logaritmo naturale*, o *logaritmo* (la funzione inversa di  $y = a^x$ , ovvero  $x = \log_a(y)$ ), si chiama *logaritmo in base  $a$* , e le sue proprietà possono essere dedotte facilmente da  $(a^b)^c = a^{bc}$ .

Consideriamo ora  $e^{it}$  dove  $i$  è l'unità immaginaria e  $t$  può essere inteso come il tempo. La interpreteremo come una funzione da un numero reale (il tempo) a un numero complesso,  $e^{it}$ . La  $i$  non deve spaventare, perché è un numero, quindi nelle derivate calerà dall'esponenziale come un qualunque altro numero. Dato un  $dt$ , lo spostamento è

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = ie^{it} dt$$

che corrisponde a ruotare di  $\pi/2$  in senso antiorario il valore della funzione nel piano complesso. La traiettoria seguita dal vettore è dunque una circonferenza (lo spostamento è sempre ortogonale al raggio). Come un moto circolare è un modo furbo di cadere senza schiantarsi, si può dire che un'esponenziale immaginario sia un modo furbo di crescere proporzionalmente alla propria grandezza, senza cambiare davvero la propria grandezza.



Possiamo scrivere

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \dots$$

e ricordare che l'ascissa (la parte reale) di un moto circolare uniforme è il coseno e l'ordinata (la parte immaginaria) è il seno: vale cioè l'importantissima formula

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

Otteniamo dunque le seguenti formule:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\end{aligned}$$

Derivando termine a termine si scopre che  $\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x)$  e che  $\frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x)$ .

La formula  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$  è molto importante: da essa si ricava  $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  e che  $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ , da cui si possono calcolare più semplicemente le derivate di seno e coseno.

Inoltre si nota che

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = e^{ix \cdot n} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Questa è la *formula di de Moivre* e può essere usata per ricavare molte formule trigonometriche, come si vedrà negli esercizi.

Esistono anche le funzioni coseno iperbolico e seno iperbolico, definite come  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  e  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , il cui nome deriva dal legame con gli angoli iperbolici.

È possibile calcolare le derivate di tangente e cotangente, ma anche quelle delle funzioni inverse come arcoseno o logaritmo.

**Esempio 1** (derivata del logaritmo). Io so che se  $y = e^x$  allora  $\frac{dy}{dx} = y$ , quindi  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$  e quindi  $\frac{d \ln(y)}{dy} = \frac{1}{y}$ .

**Esempio 2** (derivata dell'arcotangente). Se  $y = \tan(x)$  si trova  $\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2(x) = 1 + y^2$ , da cui  $\frac{dx}{dy} = \frac{d \arctan(y)}{dy} = \frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - y^6 + \dots$  dove si è usata l'espansione di  $\frac{1}{1-x}$  di cui si è parlato nell'introduzione.

## 2 Calcolo differenziale

### 2.1 Derivabilità in più variabili, derivate parziali e totali, chain rule

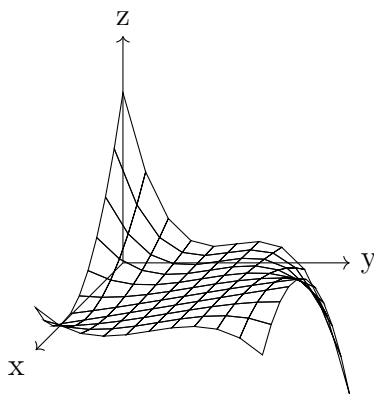
Una *funzione in due variabili*  $z = f(x, y)$  è una regola che associa ad ogni coppia  $(x, y)$  un numero  $z$ . È rappresentabile con un grafico tridimensionale: per ogni coppia  $(x, y)$  si ha un'unica altezza  $z$  fornita dalla funzione. La funzione è continua se può essere figurata come un telo senza strappi; più



precisamente, se ad ogni spostamento piccolo, diciamo di  $(dx, dy)$ , corrisponde un cambiamento piccolo di altezza,  $dz$ .

È derivabile se, vicino ad ogni suo punto, può essere approssimata ad un piano (ad esempio, la funzione  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ha la forma di un cono, perciò non è derivabile in zero).

Ecco un esempio di una funzione in due variabili:



Ora  $x$  e  $y$  sono coordinate indipendenti, poiché posso sceglierne il valore arbitrariamente: è  $z$  che non può essere preso arbitrariamente, perché è determinato dalla scelta di  $x$  e  $y$ .

Potendo scegliere arbitrariamente  $x$  e  $y$ , si può decidere di fissare  $y$  e di far variare  $x$ . La funzione in due variabili  $z = f(x, y)$  ad  $y$  fissato è ora un'espressione che ad ogni  $x$  associa una  $z$ . È possibile visualizzare il grafico di questa funzione “affettando” il grafico tridimensionale tagliandolo lungo la retta che ha come valore di  $y$  il valore fissato scelto. Posso ora calcolare la derivata di questa funzione in una variabile, e posso farlo in tutti i punti (prima affetto il grafico tridimensionale lungo un asse parallelo all'asse  $x$ , poi calcolo la derivata nel punto d'interesse).

Analogamente si ottiene tenendo fisso  $x$  e facendo variare  $y$ . Tuttavia queste non sono le uniche possibilità.

Il lettore rifletta su come questo taglio si possa effettuare imponendo una qualunque condizione su  $x$  e  $y$ , in generale della forma  $g(x, y) = 0$  con  $g$  una funzione arbitraria. Il grafico si può ottenere “affettando” il grafico tridimensionale lungo la curva che soddisfa  $g(x, y) = 0$ . Un esempio è imporre  $x + y = c$  con  $c$  una costante. La funzione che fornisce  $z$  in funzione di  $x$  in questo caso è  $z = f(x, c - x)$ ; oppure  $z = f(t, c - t)$ , dove si è rinominato il parametro come  $t$  per evidenziare che non deve essere per forza uguale a una

delle due variabili originarie.

Le *derivate parziali* sono definite come

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_y = \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx}$$

dove il pedice  $y$  esplicita il fatto che si effettua la derivata rispetto a  $x$  con  $y$  costante. Essa può essere intesa come la derivata della funzione  $g(x) = f(x, y)$  dove  $y$  è costante:  $g(x)$  è la “sezione” trovata dal grafico con un taglio parallelo all’asse  $y$  nel punto d’interesse.

Si noti che il pedice è spesso omesso in quanto chiaro nel contesto; può essere utile adoperarlo in Termodinamica, per evitare confusioni. In generale si intende

$$f_x(x, y) = \partial_x f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_y$$

Dove la prima notazione non dev’essere confusa con la notazione per le componenti dei vettori; e solo l’ultima notazione è davvero univoca, in quanto specifica che bisogna far variare  $x$  lasciando  $y$  costante.

Il lettore ricordi che ciò può causare confusione poiché in generale:

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{x+y}$$

Vediamo subito applicato il concetto di derivata parziale. Si consideri la funzione  $f(x, y) = \cos(x + y)e^{x^2y}$ , e si calcolino  $\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_y$  e  $\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{x+y}$ . Nel primo caso, bisogna semplicemente effettuare la derivata rispetto a  $x$  come se  $y$  fosse una costante, un numero:

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_y = -\sin(x + y)e^{x^2y} + \cos(x + y)e^{x^2y}2x$$

Nel secondo caso,  $x + y = c$ , dove  $c$  è una costante, e quindi non va derivata. Invece  $y$  non è costante! È uguale a  $c - x$  (e quindi la sua derivata rispetto a  $x$  è  $-1$ ). Sostituendo otteniamo  $f(x, c - x) = \cos(c)e^{x^2(c-x)}$ . Derivando rispetto a  $x$ , e trattando  $c$  come una costante, otteniamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{x+y} &= \left[\frac{df(x, c-x)}{dx}\right]_{c=x+y} = \left[\cos(c)e^{x^2c-x^3}(2xc - 3x^2)\right]_{c=x+y} = \\ &= \cos(x + y)e^{x^2y}(2xy - x^2) \end{aligned}$$

Dove la notazione con le parentesi quadre e il pedice  $c = x + y$  significa che le  $c$  presenti nell'espressione, alla fine, dopo aver effettuato la derivata, andranno sostituite con  $x + y$ .

Supponiamo che sia  $x$  sia  $y$  dipendano da  $t$ . Si può quindi pensare la funzione  $f$  come una funzione solo di  $t$ :  $f(x(t), y(t))$ . Calcoliamone la derivata rispetto a  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{df(x, y)}{dt} &= \frac{f(x + dx, y + dy) - f(x, y)}{dt} = \\ &= \frac{f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy)}{dt} + \frac{f(x, y + dy) - f(x, y)}{dt} = \\ &= \frac{f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy)}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{f(x, y + dy) - f(x, y)}{dy} \frac{dy}{dt} = \\ &= \left( \frac{\partial f(x + dx, y)}{\partial x} \right)_y \frac{dx}{dt} + \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_x \frac{dy}{dt} = \\ &= \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y \frac{dx}{dt} + \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_x \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio posso mandare  $dx$  a 0.

Vale la regola

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

che è assai utile in molti casi (essa viene detta *regola della catena*).

Si noti come non si è esplicitato che cosa viene lasciato fisso nelle derivate parziali, in quanto chiaro dal contesto.

Per fare un esempio, immaginiamo di avere  $f(x, y)$  e di calcolarne la derivata rispetto a  $x$ , sapendo che  $y$  dipende da  $x$  ( $y = y(x)$ ). Si vede facilmente che:

$$\frac{df(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

La derivata di  $y$  rispetto a  $x$  è totale perché  $y = y(x)$  è una funzione a un solo argomento.

## 2.2 Taylor in una e più variabili

Esiste una formula molto utile, che *di solito* vale per le funzioni che sono continue e derivabili infinite volte.

Dico di solito perché non funziona per  $e^{-1/x^2}$  (lo si verifichi per esercizio). Tuttavia funzionerà per le funzioni che incontrerete spesso in fisica.

La formula è utile perché, dato il valore della funzione e delle sue derivate in un punto (derivata prima, derivata seconda, eccetera) è possibile calcolare il valore della funzione in ogni altro punto! Inoltre, le derivate di ordine più alto danno correzioni sempre minori. Spesso capita che basta conoscere le prime due derivate per trovare una buona approssimazione del valore della funzione. La formula si chiama *espansione in Taylor* ed è la seguente:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Dove  $x_0$  è il punto in cui conosco il valore della funzione  $f$  e delle sue derivate  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$  eccetera; mentre  $x$  è il punto in cui voglio calcolare il valore della funzione.

I più astuti avranno notato una certa somiglianza con l'espressione dell'esponenziale, e infatti il lato destro è uguale a  $e^{(x-x_0)D}f(x_0)$ , dove  $D$  indica il numero di derivate da applicare alla funzione  $f$ . Vorrei parlarne più a lungo, ma mi è stato proibito dalla censura. Dirò solo che, come l'esponenziale è dato da infiniti piccoli aumenti percentuali sempre uguali, così per andare da  $x_0$  a  $x$  compio infiniti piccoli passettini in cui posso approssimare la funzione a una retta, e quindi usare solo il valore della derivata prima.

Se ho una funzione in più variabili, ad esempio  $z = f(x, y)$ , è possibile usare Taylor in due volte consecutive. Prima espandiamo in Taylor in  $x$  tenendo  $y$  fisso, tenendo solo, ad esempio, i termini fino al terzo ordine in  $\Delta x = (x - x_0)$  e in  $\Delta y = (y - y_0)$  (Per capirci: entrambe le quantità saranno considerate di prim'ordine):

$$f(x, y) \approx f(x_0, y) + \frac{df}{dx}(x_0, y)\Delta x + \frac{d^2f}{dx^2}(x_0, y)\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx^3}(x_0, y)\frac{\Delta x^3}{3!}$$

Ora, espandiamo ciascun termine in Taylor in  $y$ , tenendo sempre i termini fino al terzo ordine:

$$\begin{aligned} \approx & f(x_0, y_0) + \frac{df}{dx}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{d^2f}{dx^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx^3}(x_0, y_0)\frac{\Delta x^3}{3!} + \\ & + \frac{df}{dy}f(x_0, y_0)\Delta y + \frac{d^2f}{dx dy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + \frac{d^3f}{dx^2 dy}(x_0, y_0)\frac{\Delta x^2\Delta y}{2!} + \\ & + \frac{d^2f}{dy^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta y^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx dy^2}(x_0, y_0)\frac{\Delta x\Delta y^2}{2!} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{d^3 f}{dy^3}(x_0, y_0) \frac{\Delta y^3}{3!} + \dots$$

Chiaramente, bisognerebbe riordinare questi termini in base all'ordine di infinitesimo: per come ho scritto ora l'espressione, il termine con  $\Delta x^3$ , che è di terz'ordine, compare prima del termine di prim'ordine con  $\Delta y$ !

Vi dico, senza dimostrarlo (ma è ovvio), che il termine con  $\Delta x^a \Delta y^b$ , è:

$$\frac{d^{a+b} f}{dx^a dy^b}(x_0, y_0) \frac{\Delta x^a \Delta y^b}{a!b!}$$

Se avessimo avuto una funzione in  $n$  variabili  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , allora il termine con  $\Delta x_1^{a_1} \Delta x_2^{a_2} \cdot \Delta x_n^{a_n}$  è:

$$\frac{d^{a_1+a_2+\dots+a_n} f}{dx_1^{a_1} dx_2^{a_2} \dots dx_n^{a_n}}(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0}) \frac{\Delta x_1^{a_1} \Delta x_2^{a_2} \dots \Delta x_n^{a_n}}{a_1! a_2! \dots a_n!}$$

È sufficiente scrivere questi termini fino all'ordine di approssimazione voluto, senza scordarsene nessuno, per ottenere l'espansione in Taylor di una funzione di dimensione arbitraria.

Al prim'ordine, in tre dimensioni (e analogamente in un diverso numero di dimensioni) si ha:

$$f(x, y, z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta \mathbf{x}$$

dove

$$\Delta \mathbf{x} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

è il vettore che ha come componenti gli spostamenti lungo le coordinate, mentre

$$\nabla f = \left( \frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz} \right)$$

è il *gradiente*, di cui parleremo meglio nel seguente paragrafo.

## 2.3 Nozione di campo, gradiente e punti critici

Diamo ora un'idea della nozione di campo, uno dei concetti più utilizzati in fisica. Si supponga di avere una certa nozione di spazio fisico (i.e. nel caso più semplice  $\mathbb{R}^3$ , ma in molti casi anche strutture più generali) caratterizzata da una serie di trasformazioni che lasciano inalterate le equazioni fisiche che caratterizzano questo spazio (e.g. nel caso della meccanica classica rotazioni e traslazioni, nel caso della relatività ristretta rotazioni e boost su  $\mathbb{R}^4$ ) delle cosiddette simmetrie.

Un campo nel caso più generale indica una mappa che associa ad ogni punto dello spazio un oggetto caratterizzato da specifiche proprietà di trasformazione rispetto a tali simmetrie.

- Un *campo scalare* è una funzione che a ogni punto dello spazio  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  associa uno scalare:  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , le proprietà sotto rotazioni sono banali, se  $\hat{R}$  è la rotazione che agisce sullo spazio  $\phi(\mathbf{v}) \rightarrow \phi(\hat{R}^{-1}\mathbf{v})$ . Un esempio di campo scalare è la pressione (ricordiamo che la notazione  $f : A \rightarrow B$  indica una funzione con dominio  $A$  e immagine  $B$ ).
- Un *campo vettoriale* è una funzione che a ogni punto dello spazio associa un vettore:  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , le proprietà sotto rotazioni sono date da  $A_i(\mathbf{v}) \rightarrow \sum_j R_{ij} A_j(\hat{R}^{-1}\mathbf{v})$  (dove i coefficienti  $R_{ij}$  sono i coefficienti della trasformazione lineare associata alla rotazione). Un esempio di campo vettoriale è il campo elettrico.
- Restando nel mondo delle rotazioni potrei avere oggetti che trasformano in maniera più complessa, ad esempio potrei avere un campo fatto di matrici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  (ossia oggetti con 9 elementi indipendenti tra di loro) caratterizzato da proprietà di trasformazione della forma  $A_{ij}(\mathbf{v}) \rightarrow \sum_{l,m} R_{il} R_{jm} A_{lm}(\hat{R}^{-1}\mathbf{v})$  o ancora oggetti con un numero maggiore di indici che trasformano in maniera analoga, in generale tali oggetti danno origine ai cosiddetti *campi tensoriali*. Un esempio di campo tensoriale è il tensore delle tensioni in un materiale.
- Solo per fare un esempio, alla lezione di relatività vi verrà introdotto il concetto di *campi quadrivettoriali*. Un quadrivettore è un oggetto ad un indice che può assumere 4 valori  $\nu = 0, 1, 2, 3$  e trasforma secondo  $A_\mu \rightarrow \sum_\nu \Lambda_\mu^\nu A_\nu$  dove  $\Lambda_\mu^\nu$  è una matrice  $4 \times 4$  che definisce una cosiddetta trasformazione di Lorentz (le simmetrie della relatività ristretta). Un esempio di campo quadrivettoriale è il quadrivettore spostamento nello spazio-tempo .

Ora supponiamo di avere un campo scalare  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , ammesso che sia differenziabile, definiamo il suo *gradiente* il campo vettoriale  $\nabla\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tale che  $\nabla\phi(\mathbf{v}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial x_d} \right)$ .

Il gradiente è un operatore estremamente utile per l'analisi delle proprietà di una funzione. Lavoriamo per un attimo in 2 dimensioni per semplicità, se definiamo lo spostamento infinitesimo come il vettore infinitesimo  $ds =$

$(dx, dy)$ , allora si può riscrivere la regola della catena come

$$df(x, y) = \nabla f \cdot ds$$

Come si è visto nella parte sul teorema di Taylor il differenziale è la migliore approssimazione lineare di  $f$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$ , ossia:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + O((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2)$$

la formula sopra mette in evidenza due proprietà rilevanti:

- Il gradiente è sempre parallelo alla direzione di massimo incremento della funzione scalare  $\phi$ , ad esempio se  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  indicasse l'altezza di una collina allora  $\nabla \phi$  indicherebbe in ogni punto quale sarebbe la direzione nella quale questa è maggiormente inclinata.
- Data una funzione  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  posso sempre definire delle cosiddette *superfici equipotenziali* ciascuna delle quali è definita come il luogo dei punti per cui  $\phi$  assume valore costante. Per avere in mente un esempio concreto si può pensare alle superfici isobare di un gas o alle curve alla stessa altezza s.l.m di una collina. Allora il gradiente è sempre perpendicolare a tali superfici.

Avendo definito il gradiente possiamo ora trattare dei problemi di minimo e di massimo. In questi punti non è definita una direzione di massimo incremento perchè il piano tangente a tali punti è 'orizzontale'

I punti a gradiente nullo si dicono *punti critici* ed in due dimensioni ce ne sono di tre tipi

- Massimi locali : Nell'esempio la cima di una collina
- Minimi locali : Nell'esempio il fondo di un fossato
- Punti di sella : Nell'esempio il valico di due monti

Più in generale si può capire quello che accade fissando una direzione e iniziando a muoversi in quella direzione, siccome il gradiente è nullo (assumendo che non sia nullo anche il secondo ordine) dovrei avere l'impressione di muovermi lungo una parabola e questo è vero per ogni direzione. Si può dimostrare con strumenti un po' sofisticati per questa lezione che esistono direzioni perpendicolari a due a due (una cosiddetta base) che identificano di che tipo

di punto critico si parla (ne esistono  $d + 1$  possibili). Nel caso bidimensionale, esistono 2 direzioni perpendicolari tali che se percorse possono dare vita a 3 scenari:

- 2 parabole verso l'alto  $\rightarrow$  massimo;
- 2 parabole verso il basso  $\rightarrow$  minimo;
- 2 parabole una verso l'alto, una verso il basso  $\rightarrow$  punto di sella.

### 3 Calcolo integrale

#### 3.1 Integrali doppi e tripli

Data una  $f(x, y)$ , l'integrale

$$\int_S f(x, y) \, dx \, dy$$

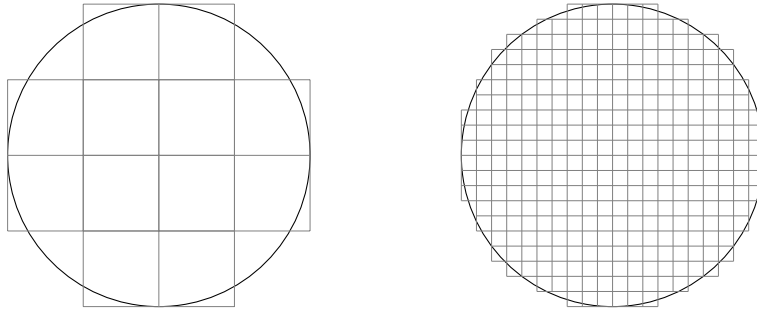
lungo una certa superficie  $S$  del piano  $xy$ , è il volume sotteso dal grafico di  $f(x, y)$ . L'obiettivo è misurarlo come somma di parallelepipedi di base infinitesima (e quadrata).

Dividiamo l'area del piano  $xy$  in  $N$  quadratini infinitesimi di lato  $dx = dy$ . Se il bordo dell'area è curvo sto commettendo un certo errore, ma questo errore va a 0 mano a mano che  $dx \rightarrow 0$ . In realtà è necessaria una certa regolarità delle funzioni perchè questo sia vero, la continuità è sufficiente e basta molto meno ma in pratica ogni funzione ragionevole che capita di trovare in fisica ammette un risultato (al più infinito). Poiché i quadratini hanno un'estensione infinitesima, si può dire che siano localizzati in singoli punti, le cui coordinate chiameremo  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , ecc. Posso considerare dunque l'integrale come

$$\sum_{k=0}^N f(\mathbf{r}_k) \, dS$$

con  $dS = dx \, dy$ . Analogamente si definisce l'integrale in tre dimensioni.





Si ricorda che mentre in una dimensione basta specificare due estremi  $a$  e  $b$ , negli integrali doppi occorre specificare una linea di contorno (come il cerchio della figura soprastante) oppure una superficie nel caso degli integrali tridimensionali (come la superficie di una sfera, che può essere divisa in cubetti).

In realtà calcolare integrali multipli non è molto più complesso che calcolare quelli normali, un integrale doppio si chiama così semplicemente perchè in realtà sono due integrali semplici.

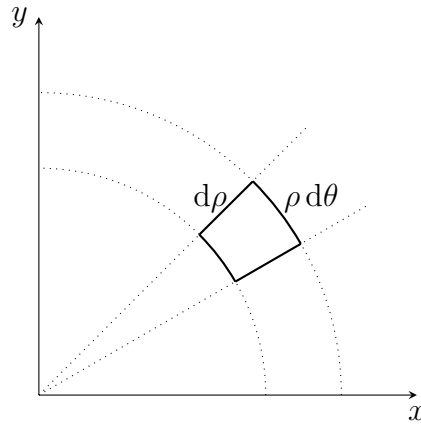
Quando sommo quei quadratini di cui si parlava prima potrei farlo riga per riga o colonna per colonna, che nel caso di un domino rettangolare vorrebbe dire

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \left( \int f(x, y) dx \right) dy = \int \left( \int f(x, y) dy \right) dx$$

oppure potrei essere più sofisticato e sommare per circonferenze concentriche o raggio per raggio, in questo caso come spiegheremo a breve è necessario prestare attenzione. Se è data  $f(x, y) = \tilde{f}(r, \theta)$  si ha

$$\int \int \tilde{f}(r, \theta) dr d\theta = \int \left( \int \tilde{f}(r, \theta) dr \right) d\theta = \int \left( \int \tilde{f}(r, \theta) d\theta \right) dr$$

Ciò a cui bisogna stare attenti in questi cambi di variabile è che se decido di cambiare coordinate di fatto quello che sto facendo è dividere il piano in domini che non sono più necessariamente quadrati ed è rilevante sapere quale è la loro area per poter fare la somma, ad esempio nel caso delle coordinate polari poco fa utilizzate i domini usati sono degli archi di corona circolare che dunque hanno area  $r dr d\theta$  (si noti il fattore  $r$  a moltiplicare, si noti anche che in assenza di questo ci sarebbero problemi dimensionali).



Questo vuole dire che

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \int \tilde{f}(r, \theta) r dr d\theta \neq \int \int \tilde{f}(r, \theta) dr d\theta$$

Con lo stesso modo di ragionare si può vedere anche che

$$\int \int \int f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int \tilde{f}(r, \theta, \phi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

Più in generale dato un cambio di coordinate esiste una procedura generale per poter determinare il corretto cambio di variabili, la mostriamo per le coordinate polari per chiarezza ma è da intendersi come valida per qualsiasi cambio di variabili:

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \int \tilde{f}(\rho, \theta) |J| d\rho d\theta$$

Dove  $J$  è lo Jacobiano della trasformazione, ovvero è il determinante di una matrice:

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Analogamente, per le coordinate sferiche:

$$\int \int \int f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int \tilde{f}(\rho, \theta, \phi) |J| d\rho d\theta d\phi$$

con

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

Tuttavia la formula dello Jacobiano va vista come una semplice curiosità, poiché in fisica le trasformazioni più usate sono quelle tra cartesiane e polari oppure tra cartesiane e sferiche, ed è inutile diagonalizzare matrici invece che ricordare i coefficienti  $\rho$  e  $r^2 \sin(\theta)$  rispettivamente.

### 3.2 Integrali curvilinei e di superficie

Lavoriamo in 3 dimensioni per semplicità, ma il discorso è facilmente generalizzabile. Una *curva* è una mappa  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ciò che ci interessa davvero in generale è il *sostegno* della curva ossia la sua immagine (i.e. il disegno della curva nello spazio), curve diverse possono descrivere lo stesso sostegno ad esempio data  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  allora  $\gamma_1(t) = \gamma(t)$  e  $\gamma_2(t) = \gamma(t^2)$  sono curve diverse che descrivono lo stesso sostegno (sono quello che si dice delle parametrizzazioni). Una buona immagine per pensare delle curve è quella di un osservatore che percorre i loro sostegni, la parametrizzazione della coordinata  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$  indica il tempo così che  $\gamma(t)$  è a posizione dell'osservatore al tempo  $t$ . Così ad esempio  $\mathbf{v} = \frac{d\gamma}{dt}$  è la velocità dell'osservatore.

Un *integrale curvilineo* ha bisogno di due ingredienti, una campo scalare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ed una curva  $\gamma$ . La notazione è

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{r}) ds$$

dove  $ds$  rappresenta il vettore spostamento. Per capirne l'interpretazione fisica si pensi all'immagine dell'osservatore in movimento, lui istante per istante si annota la distanza da lui percorsa (quello che chiameremmo  $s(t) = \int_{\gamma} ds$  dove la curva si intende fino al tempo  $t$ ) e il valore della funzione in quel punto, poi semplicemente svolge l'integrale semplice  $\int f(s) ds$ . Siccome banalmente  $ds = |\mathbf{v}| dt$  il modo di calcolare questi integrali è

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{r}) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \left\| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\| dt$$

Il risultato è dunque un numero, l'interpretazione fisica lo rende evidente ma si dimostri comunque per esercizio che questo risultato dipende solo dal sostegno ma non dalla particolare curva utilizzata come parametrizzazione. Spesso in fisica si possono incontrare oggetti simili come

$$\int_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot ds$$

o

$$\int_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \, ds$$

o altre variazioni sul tema, le notazioni usate rendono chiara l'interpretazione di questi integrali, ad esempio

$$\int_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt} dt$$

e ha come risultato un numero (il secondo oggetto invece ha come risultato un vettore e si può calcolare componente per componente).

Il passaggio a superfici presenta solo delle difficoltà tecniche di calcolo ma concettualmente non cambia nulla. Si chiama *superficie* una mappa  $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e come prima la parte rilevante è la sua immagine, il *sostegno*.

Tristemente cade l'interpretazione di un osservatore che si muove nel tempo, creo un'altra immagine che può aiutare a capire che sta accadendo. Immaginate di considerare i punti di un atlante (nell'interpretazione sarebbe  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ) e di immaginare come si comporterebbero tali punti se invece si muovessero sulla terra (sarebbe il sostegno della mia superficie). Ora l'atlante sta in un piano quindi posso descriverlo facilmente con due coordinate (potrebbero essere ad esempio  $x$  e  $y$  oppure latitudine e longitudine nell'atlante) chiamiamole  $u$  e  $v$  (in un certo senso sarebbero l'equivalente del tempo nell'esempio della curva di prima ma cercare un'interpretazione con due dimensioni temporali non mi sembrava un'idea saggia) se io ora traccio sull'atlante delle curve muovendo solo  $u$  o solo  $v$  queste rappresenteranno delle curve sulla terra, le cui 'velocità' sarebbero  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ , l'unica cosa da ricordare per poter sviluppare effettivamente questi conti è che nel punto della terra  $\Phi(u, v)$  la quantità

$$d\mathbf{S} = (d\mathbf{s}_u) \wedge (d\mathbf{s}_v) = \left( \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} du \right) \wedge \left( \frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} dv \right) = \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} dudv$$

è il vettore che ha come modulo l'area del parallelogrammo di lati  $d\mathbf{s}_u$ ,  $d\mathbf{s}_v$  e direzione perpendicolare al parallelogrammo stesso e quindi ha come modulo l'area della superficie infinitesima in quel punto ed è normale alla superficie. Una volta capito questo aspetto diventano chiare le interpretazioni fisiche e il modo di calcolare oggetti come

$$\int_{\Phi} f(\mathbf{r}) \, dS = \int \int_{\Omega} f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} \right\| dudv$$

o variazioni sul tema, infatti si riconducono a semplici integrali doppi.

## 4 Connessioni tra il calcolo integrale e quello differenziale : proprietà globali e locali

### 4.1 Operatori differenziali in tre dimensioni: divergenza e rotore

Come al solito troviamo un'immagine per visualizzare il significato fisico di questi oggetti, si pensi ad un fluido in movimento descritto da un campo di velocità  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  e si fissi l'attenzione su di una piccola sfera di fluido al tempo  $t$ , al tempo  $t + dt$  ci aspettiamo 4 tipi di fenomeni diversi:

- traslazioni rigide
- espansioni e compressioni omotetiche
- rotazioni rigide
- deformazioni a volume costante

#### 4.1.1 Traslazioni rigide

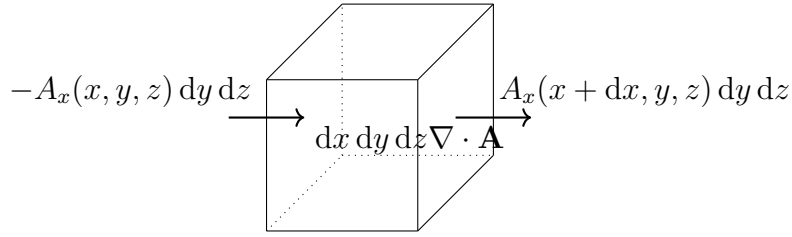
Queste sono fondamentalmente banali da descrivere, infatti danno informazioni unicamente sulla velocità al centro della sfera, invece noi siamo interessati alle variazioni di  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  perchè vogliamo descrivere degli operatori differenziali per questo campo.

#### 4.1.2 Espansioni e compressioni omotetiche

Si osservi che delle quattro trasformazioni dette queste sono le uniche che tengono conto delle variazioni di volume. Si definisce allora l'operatore *divergenza* come

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

dove  $V$  rappresenta il volume della sferetta di liquido in esame. Quindi è un operatore che agisce su un campo vettoriale e restituisce un campo scalare. Ora si noti che l'operatore è definito in modo intrinseco ossia a prescindere dalla scelta di coordinate, poi però a seconda della geometria del problema è possibile calcolarlo in diversi sistemi di coordinate, a titolo di esempio facciamo vedere il caso in cartesiane.



Si consideri un volumetto cubico di lati  $L$  al tempo  $t$  e si consideri il displacement al tempo  $t + dt$ , trascurando ordini superiori è chiaro che il lato orientato lungo  $x$  varia in lunghezza di

$$dL_x = (v_x(\mathbf{r} + L\hat{x}) - v_x(\mathbf{r})) dt = \frac{\partial v_x}{\partial x} L dt$$

segue trascurando gli ordini successivi in  $\partial t$

$$dV = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) V dt$$

e dunque segue che in generale

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Questa formula è sempre vera però poi in problemi con geometrie differenti le coordinate cartesiane possono essere scomode, si provi a dimostrare usando ragionamenti analoghi e usando come solidi dei frammenti di corona cilindrica e di corona sferica che per coordinate cilindriche e sferiche vale

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \end{aligned}$$

### 4.1.3 Rotazioni rigide

Come possiamo trovare un modo di valutare la componente rotazionale del fluido? Beh è interessante osservare che se la sfera ruota rigidamente con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  allora poichè

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}$$

Il modulo di questo vettore è direttamente proporzionale a quello di  $\boldsymbol{\omega}$ , inoltre il primo termine è parallelo ad  $\boldsymbol{\omega}$  ed il secondo lo diventa se mediato su tutti i valori di  $\mathbf{r}$  della sfera. Ossia, definendo il *rotore*

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \wedge \mathbf{v}$$

poichè  $d\mathbf{S} = dS\hat{r}$  è facile osservare che  $\nabla \wedge \mathbf{v}$  (che è un vettore) è proporzionale a  $\boldsymbol{\omega}$ . Come prima la definizione permette agilmente di poter trovare espressioni differenti per questo operatore a seconda delle coordinate utilizzate, mostriamo solo il caso in coordinate cartesiane per non appesantire troppo la discussione. Considerato il solito cubetto infinitesimo di lato  $L$  si ha per le facce con normale lungo  $\hat{x}$

$$d\mathbf{S}(\mathbf{r} + L\hat{x}) \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r} + L\hat{x}) + d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}) = L^2 \hat{x} \wedge (\mathbf{v}(\mathbf{r} + L\hat{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}))$$

Dove il segno meno deriva dal fatto che le due facce del cubetto hanno normali antiparallele tra loro. prendendo ora il primo ordine

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}(\mathbf{r} + L\hat{x}) \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r} + L\hat{x}) + d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \\ = V \hat{x} \wedge \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \hat{z} \right) &= V \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \hat{z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \hat{y} \right) \end{aligned}$$

e considerando i contributi delle altre facce

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \left( \frac{dv_z}{dy} - \frac{dv_y}{dz} \right) \hat{x} + \left( \frac{dv_x}{dz} - \frac{dv_z}{dx} \right) \hat{y} + \left( \frac{dv_y}{dx} - \frac{dv_x}{dy} \right) \hat{z}$$

che spiega anche la notazione per indicare il rotore.

#### 4.1.4 Deformazioni a volume costante

Al primo ordine rilevante la sfera si deforma in un ellissoide, per descriverlo ho bisogno di 5 parametri: 3 per indicare l'asse maggiore, 2 per il secondo asse (visto che deve essere perpendicolare al primo) e il terzo è univocamente determinato dalle richieste di perpendicolarità e volume costante.

Né un campo scalare né uno vettoriale hanno così tanti parametri quindi l'oggetto che dobbiamo utilizzare sarà qualcosa di più complesso (in effetti mi servirebbe un campo di matrici di dimensione 3 simmetriche e a traccia nulla) meglio non indagare troppo per ora, tanto abbiamo definito gli operatori per i quali avevamo iniziato questa trattazione.

## 4.2 I teoremi di Gauss e di Stokes

Ci sono due teoremi importantissimi che caratterizzano ulteriormente le proprietà della divergenza e del rotore.

Si consideri un volume  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  delimitato da una superficie  $\partial\Omega$ , vogliamo valutare la quantità

$$\int_{\Omega} d^3r \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Ora riprendiamo in mano la definizione di divergenza sempre nell'esempio idrodinamico dove vale la nostra intuizione.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

Siccome la variazione totale di volume è data da quanto fluido entra nella superficie  $\partial V$

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$$

allora

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$$

Ossia è il flusso infinitesimo attraverso la superficie. Per poter integrare questa quantità lungo tutto il volume  $\Omega$  posso immaginare di dividerlo in volumetti cubici molto piccoli all'interno dei quali il valore di  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  è circa costante, allora considerando due cubetti adiacenti i termini di flusso delle facce a contatto di annullano perchè le facce hanno normale rivolta in verso opposto (o detto in altri termini, il fluido che esce da un cubetto entra in un altro). Dunque l'unico contributo rilevante può essere dato unicamente dalle facce di cubetti che non hanno altri cubetti confinanti, ossia quelli sul bordo di  $d\Omega$ . Quindi in parole povere

$$\int_{\Omega} d^3r \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{\text{cubetti}} \left( \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \right) \Delta V = \int_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$$

Che è noto come *teorema di Gauss*. In pratica questo teorema stabilisce una relazione tra il flusso attraverso una superficie che è una proprietà globale e la divergenza che è una proprietà locale, come esercizio lo si usi per dimostrare le due leggi di Maxwell in forma locale

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Cerchiamo un teorema analogo per il rotore, poichè



$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \wedge \mathbf{v}$$

un ragionamento identico a quello precedente mostrerebbe che

$$\int_{\Omega} d^3r \nabla \wedge \mathbf{v} = \sum_{\text{cubetti}} \left( \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial V} d\mathbf{S} \wedge \mathbf{v} \right) \Delta V = \int_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \wedge \mathbf{v}$$

che è una relazione vera, ma non ancora quello che stiamo cercando (comunque è una relazione spesso utile, è bene tenerla a mente).

Lavoriamo allora in una geometria più comoda, immaginiamo di avere un cilindretto molto piccolo di altezza  $h$  lungo  $\hat{z}$  e area di base  $A$  vogliamo calcolare

$$\hat{z} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v})$$

quindi dobbiamo lavorare con la quantità infinitesimale

$$\hat{z} \cdot (d\mathbf{S} \wedge \mathbf{v})$$

le facce piane del cilindro non contribuiscono alla somma perchè  $d\mathbf{S} \propto \hat{z}$  per quanto riguarda le altre facce invece si ha

$$\hat{z} \cdot \int_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \wedge \mathbf{v} = \int_{\Gamma} \hat{z} \cdot ((h d\hat{\rho}) \wedge \mathbf{v}) = h \int_{\Gamma} d\ell (\hat{z} \wedge \hat{\rho}) \cdot \mathbf{v} = h \int_{\Gamma} d\hat{\ell} \cdot \mathbf{v} = h \int_{\Gamma} d\ell \cdot \mathbf{v}$$

dove  $\Gamma$  è una curva che parametrizza la circonferenza di base. Quello che si sta vedendo dunque è che il rotore ha a che fare con la circuitazione infinitesima del campo, infatti

$$\hat{z} \cdot \nabla \wedge \mathbf{v} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\ell$$

Come per il teorema di Gauss cerchiamo un modo di legare proprietà locali a quelle globali, quindi consideriamo una superficie  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  di bordo  $\partial\Omega$ , allora immaginando di tassellarla con dei quadratini molto piccoli, e osservando ancora una volta che i contributi dei lati interni di quadratini adiacenti si annullano abbiamo che

$$\int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{\text{quadratini}} \left( \frac{1}{\Delta A} \int_{d\Delta A} \mathbf{v} \cdot d\ell \right) \Delta A = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\ell$$

che è noto con il nome di teorema di Stokes. Come esercizio lo si usi per dimostrare le equazioni di Maxwell in forma locale

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}$$

Per capire la potenza degli strumenti appena trattati si osservi che le quattro equazioni di Maxwell in forma locale che avete ricavato per esercizio dicono tutto quello che si può dire su campi elettromagnetici, e riducono un qualsiasi problema di elettromagnetismo ad una qualche equazione differenziale.

## 5 Equazioni alle derivate orinarie (ODE)

Un'ODE, ovvero un'*equazione alle derivate ordinarie* (per distinguerla dalle PDE, le *equazioni alle derivate parziali*), è un'equazione che esprime la relazione tra una funzione e le sue derivate, e che ha come incognita la funzione stessa. Un esempio è  $\alpha \ddot{y} + \sin(y) = 0$ . Sono ubiqui in fisica.

Le ODE si dicono di *primo ordine* quando contengono solo le derivate prime, e più in generale di *n-esimo ordine* quando contengono solo le derivate fino all'*n*-esima. Come vedremo adesso, in generale la soluzione di un'ODE (ovvero la funzione che soddisfa la proprietà richiesta) non è unica, ma esiste un insieme di soluzioni che dipende da alcuni parametri liberi. Nei problemi di fisica, questi parametri liberi vengono fissati dalle condizioni particolari del problema, come le condizioni iniziali (e.g. posizione e velocità iniziali di una particella) o le condizioni al contorno (e.g. che a  $+\infty$  la funzione sia nulla). Anche se non è sempre vero, ci si può attendere che le ODE di *n*-esimo ordine ammettano una soluzione con *n* parametri liberi. Questo capita per tutte le ODE presentate in seguito.

In fisica, ad esempio quando vogliamo calcolare la traiettoria di un corpo, dobbiamo risolvere una ODE e abbiamo bisogno di un'unica soluzione. Come si può fissare il valore dei parametri liberi? Visto che  $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$  è un'ODE di ordine 2, ci si aspettano 2 parametri liberi. Essi vengono fissati da 2 equazioni, che sono date dalla conoscenza della posizione iniziale  $x(0)$  e della velocità iniziale  $\frac{dx}{dt}(0)$  del corpo.

Vediamo alcune ODE del prim'ordine e alcune tecniche di risoluzione. Ci aspettiamo che la soluzione dipenda da un parametro libero.

Un esempio banale di equazione differenziale è dato da

$$\frac{dy}{dx} = \alpha f(x)$$

dove la soluzione è semplicemente una primitiva di  $f(x)$ , cioè  $y = \alpha \int_{x_0}^x f(\bar{x}) d\bar{x}$ .

Si approfitti di questo esempio per notare come la variabile d'integrazione è stata rinominata  $\bar{x}$  per non farla coincidere con  $x$ , l'estremo d'integrazione; e come uno dei due estremi d'integrazione possa essere scelto arbitrariamente (ciò corrisponde alla somma di una costante arbitraria  $c$ ). In ambito fisico, il valore di  $x_0$  è dato dalle condizioni iniziali del problema.

Ora affrontiamo tre metodi standard di risoluzione di equazioni differenziali ordinarie e degli esempi fisici della loro naturale occorrenza in fisica.

### 5.0.1 Il metodo di separazione delle variabili

Si immagini di avere un'equazione della forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

allora è possibile applicare una tecnica nota come *separazione delle variabili*. Essa consiste nel portare da un lato tutti i termini dipendenti da una stessa variabile, ottenendo

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

e poi integrando

$$\int_{y_0}^y \frac{d\bar{y}}{g(\bar{y})} = \int_{x_0}^x f(\bar{x}) d\bar{x}$$

e infine cercando di esplicitare  $y$  in funzione di  $x$  nell'equazione risultante. (si tenga a mente che questo modo di trattare i differenziali come se fossero fattori moltiplicativi è ottimo per i conti ma considerato spesso leggermente abusivo, in ogni caso questi metodi possono essere dimostrati in modo formale ma non lo faremo in questa sede)

Mostriamo un esempio esplicito di applicazione del metodo, dal problema numero 1 del concorso di ammissione al corso ordinario in Scuola Normale Superiore del 2015.

'Supponendo che la temperatura dell'aria sulla superficie di un lago ghiacciato rimanga costantemente pari a  $-5.2^\circ\text{C}$  per 60 giorni, si formuli un modello per descrivere la rapidità con cui cresce lo spessore di ghiaccio a partire dal suo valore iniziale  $h_0 = 25$  cm. Sapendo, in particolare, che dopo 12 giorni si misura uno spessore di 37 cm e dopo 21 giorni uno spessore di 44 cm, si stimi lo spessore  $h_f$  raggiunto dal ghiaccio dopo 60 giorni.'

E' un problema che ci permette di avere un modello molto semplice fittando poi tutte le costanti utili al termine, quindi ignoriamo ogni costante moltiplicativa e capiamo solo le dipendenze. Lo spessore di ghiaccio offrirà una certa resistenza termica che dipende linearmente dallo spessore, quindi  $R \propto h$ , la massa di ghiaccio che congela per unità di tempo è proporzionale alla quantità di calore ceduta per unità di tempo  $\frac{dM}{dt} \propto \frac{dQ}{dt}$  così come alla variazione di altezza (assumendo la sezione del lago costante) per unità di tempo  $\frac{dM}{dt} \propto \frac{dQ}{dt} \propto \frac{dh}{dt}$ . Ora la differenza di temperatura tra le due estremità della parte ghiacciata rimane fissata (una a  $-5.2^\circ\text{C}$  e l'altra a  $0^\circ\text{C}$  perchè è una superficie di acqua e ghiaccio) dunque

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} \Delta T \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{C}{h}$$

dove  $C$  è una costante moltiplicativa da determinare. Separando le variabili

$$h dh = C dt \Rightarrow h^2(t) - h_0^2 = Ct \Rightarrow h(t) = \sqrt{h_0^2 + Ct}$$

Si osserva che abbiamo dei dati in eccesso, ci basterebbero 2 punti per trovare le costanti  $h_0$  e  $C$ , si può comunque notare che anche il terzo punto è perfettamente predetto dal modello.

### 5.0.2 Il metodo del fattore integrante

Questo metodo permette di avere la soluzione di una generica equazione lineare del primo ordine, ossia di un'equazione della forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

si può usare la tecnica del *fattore integrante*. In pratica si moltiplica per una quantità che renda i due termini al membro sinistro il risultato di una derivata. Il fattore integrante è  $F(x, x_0) = e^{\int_{x_0}^x P(\bar{x}) d\bar{x}}$ ; infatti si ha:

$$\frac{d}{dx} (F(x, x_0)y) = F(x, x_0) \frac{dy}{dx} + P(x)F(x, x_0)y = F(x, x_0)Q(x)$$

Ora è possibile integrare ed esplicitare  $y$ :

$$y = \frac{1}{F(x, x_0)} \left( \int_{\bar{x}_0}^x F(\bar{x}, x_0) Q(\bar{x}) d\bar{x} \right)$$

dove si può notare che la scelta della primitiva di  $P(x)$  si rivela essere ininfluente (se si cambia  $x_0$ , la funzione  $F(x, x_0)$  cambierebbe di un fattore, che

si eliderebbe essendoci una funzione  $F$  al numeratore e una al denominatore), e dunque la soluzione dipende da un'unico parametro,  $\bar{x}_0$ , come atteso da un'ODE di prim'ordine.

### 5.0.3 ODE lineari a coefficienti costanti omogenee

Vediamo ora un tipo di ODE di ordine  $n$ -esimo, la cui soluzione effettivamente dipende da  $n$  parametri.

Se l'equazione è della forma

$$f^{(n)} + c_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + c_2f''(x) + c_1f'(x) + c_0f(x) = 0$$

allora si dice essere a coefficienti costanti (i  $c_j$  non dipendono da  $x$ ) e lineare (le derivate di  $f$  non sono moltiplicate tra loro) e omogenea (il tutto è uguale a 0, non a una funzione arbitraria di  $x$  come nelle equazioni disomogenee, che vedremo in seguito). Le ODE di questa forma hanno la seguente proprietà: la somma di due soluzioni è ancora una soluzione: si provi per credere! La soluzione è nota, e può essere dimostrata nel modo seguente: si possono raccogliere le derivate e si può scrivere

$$(D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \dots + c_2D^2 + c_1D + c_0)f(x)$$

Fattorizzando il polinomio nelle sue radici  $\alpha, \beta, \dots, \zeta$ , ottengo

$$(D - \alpha)(D - \beta) \dots (D - \zeta)f(x) = 0$$

L'equazione  $(D - \alpha)f(x)$  ha come soluzione  $f(x) = Ae^{\alpha x}$ , con  $A$  costante arbitraria. Dunque le soluzioni dell'ODE considerata saranno della forma  $Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \dots + Ze^{\zeta x}$ , dove  $A, B, \dots, Z$  sono costanti arbitrarie.

Se una radice  $\alpha$  compare  $k$  volte, bisogna considerare le combinazioni lineari delle seguenti  $k$  soluzioni:  $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}$ : si può verificare che tutte queste funzioni vengono mandate a 0 se si applica loro l'operatore  $(D - \alpha)^k$ .

**Nota:** la dimostrazione fornita è valida solo se  $\alpha, \beta$ , eccetera, sono costanti! infatti, se fossero  $\alpha(x), \beta(x)$ , eccetera, si avrebbe  $(D - \alpha(x))(D - \beta(x)) \neq (D - \beta(x))(D - \alpha(x))$ .

Non trattiamo le tecniche per risolvere il caso non omogeneo, ossia quando a destra dell'equazione invece di 0 ho un generico addendo  $g(x)$ , ci limitiamo a

dire una cosa (che potete dimostrare per conto vostro visto che è molto semplice) vera per tutte le equazioni differenziali lineari (anche non a coefficienti costanti). Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea si trovano così, se ne trova una sola in qualche modo e tutte le altre si ottengono sommando tutte le possibili soluzioni di quella omogenea.

Come esempio di applicazione consideriamo l'equazione dell'*oscillatore armonico*, cioè

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

e le sue varianti. Come abbiamo visto le sue soluzioni sono combinazioni lineari di  $e^{i\omega t}$  e di  $e^{-i\omega t}$ . Poiché le variabili fisiche sono reali, saranno accettabili solo le combinazioni lineari a coefficienti reali di  $\cos(\omega t)$  e di  $\sin(\omega t)$ . Si noti che la combinazione lineare di due sinusoidi di uguale frequenza è una singola sinusoide di tale frequenza, poiché data  $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ , se scelgo  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  e  $\phi = \arctan(\frac{A}{B})$ , avrò che  $A = C \sin(\phi)$  e  $B = C \cos(\phi)$ , e quindi la soluzione dell'ODE diventa

$$C(\sin(\phi) \cos(\omega t) + \cos(\phi) \sin(\omega t)) = C \sin(\omega t + \phi)$$

Nel caso di un *oscillatore armonico smorzato*, l'equazione è

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0$$

(il nuovo termine rappresenta una forza di attrito rivolta nel verso opposto alla velocità).

Le radici di  $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$  sono chiaramente

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Quindi si distinguono 3 regimi a seconda di quanto è grande il termine di dissipazione  $\gamma$

1.  $\gamma < \omega$  la dissipazione è piccola, siamo in regime di *sottosmorzamento*, quindi il corpo oscilla ma l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce esponenzialmente, nello specifico le soluzioni sono della forma

$$x = (x_1 \sin(\omega_0 t) + x_2 \cos(\omega_0 t))e^{-\gamma t}$$

$$\text{con } \omega_0^2 = \omega^2 - \gamma^2$$

2.  $\gamma > \omega$  la dissipazione è grande, siamo in regime di *sovrasmorzamento*, e le oscillazioni in questo caso sono inibite, la molla rilassa all'equilibrio esponenzialmente come

$$x = x_1 e^{-\gamma_+ t} + x_2 e^{-\gamma_- t}$$

$$\text{con } \gamma_{\pm} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} > 0$$

3.  $\gamma = \omega$  in questo caso siamo in un punto che deve essere di raccordo tra i due regimi, uno oscillante smorzato ed uno senza oscillazioni. la soluzione è della forma

$$x = (x_1 + v_1 t)e^{-\gamma t}$$

Come si vede il termine lineare in  $t$ , può permettere di avere un timido tentativo di oscillazione, che però viene subito inibita dopo mezzo ciclo, è un regime di raccordo come ci aspettavamo e viene detto *smorzamento critico*

## 6 Esercizi

Come esercizi si ripresentano quelli dell'anno scorso.

### 6.1 Legenda

Il simbolo ★ indica il livello di difficoltà. Il simbolo ☆ indica quanto ci sembra utile il problema. (purtroppo per i problemi di Fisica mancano spesso entrambi i simboli...)

### 6.2 Basic

- ☆☆☆☆ *Esercizio Zero* Dato un triangolo con due lati lunghi  $a$  e  $b$ , e un angolo compreso di  $\theta$ , trovare la lunghezza del lato opposto.
- ☆ Quanto vale la superficie laterale di una sfera di raggio  $R$ , compresa tra le altezze  $h$  e  $h + dh$  (con  $-R \leq h < R$ )?
- ☆ Calcola il volume di un tetraedro di lato 1.
- ☆ Considerare la sequenza dei poligoni a 4, 8, 16, 32, ... lati, e usando la trigonometria, dimostrare che  $\pi = 2 \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$
- ☆ Quali sono tutti e soli i numeri complessi  $z$  tali che  $e^z = 1$ ? Quanto fa  $\ln(z)$ ?
- ☆☆☆☆ La derivata logaritmica di  $f(x)$  è definita come  $\frac{d}{dx} \ln(f(x))$ . Trovare la derivata logaritmica di  $x^n$  e di  $e^x$  (spesso è più facile calcolare la derivata logaritmica invece che la derivata classica). Calcolare la derivata logaritmica di  $\frac{e^x \arctan(x) \sin(x)}{x^4 \ln(x)}$ . Da essa ricavare la derivata classica.
- ☆☆☆☆ Calcolare il valore di  $\frac{a^{dx}-1}{dx}$  (vedi capitolo sugli Esponenziali). Si noti che è uguale alla derivata in 0 di  $a^x$ . Si calcoli tale derivata.
- ☆ Calcola la derivata di  $x^x$  nei seguenti due modi:  $x^x = e^{x \ln(x)}$  oppure  $x^x = f(x, x)$  dove  $f(x, y) = x^y$  (derivata totale di una funzione in due variabili).
- ☆☆☆☆ Sia dato un tronco di cono di un materiale di resistività  $\rho$ . I raggi sono rispettivamente  $a$  e  $b$  con  $a \geq b$ . Qual è la resistenza ai capi dell'oggetto? (Nota importante: la soluzione richiesta deve essere valida per  $b \approx a$ . Discutere sul perché quando  $b$  è sensibilmente più grande di  $a$ , la soluzione data in precedenza non funziona.)



10. Dimostrare che  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  è il volume del parallelepipedo tridimensionale i cui lati sono i tre vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . Capire a che cosa è associato il segno di questa espressione. Accorgersi ora che  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
11. Verificare se la formula  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  fornisce risposte corrette in alcuni casi banali. Solo dopo aver fatto questo, dimostrarla per componenti (questa formula è chiamata “bac meno cab”).
12. ☆☆☆ Nel caso aveste dubbi, calcolate la derivata di  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  e di  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  (fatelo per componenti).
13. ★ ☆☆☆ Usare la formula di De Moivre, e in generale i numeri complessi, o qualunque altro metodo, per dimostrare le seguenti formule trigonometriche:
- (i)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$
  - (ii)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$
  - (iii)  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$
  - (iv)  $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot(\alpha) \cot(\beta) - 1}{\cot(\beta) + \cot(\alpha)}$
  - (v)  $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
  - (vi)  $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
  - (vii)  $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$
  - (viii)  $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$
  - (ix)  $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
  - (x)  $1 + 2 \cos(x) + 2 \cos(2x) + 2 \cos(3x) + \dots + 2 \cos(nx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
  - (xi)  $\sin^3(\alpha)$  in funzione di  $\sin(\alpha)$ ,  $\sin(2\alpha)$ ,  $\sin(3\alpha)$ , ...

### 6.3 ODE e PDE

14. Consideriamo l'ODE di un oscillatore forzato con forzante  $x^5$ , ovvero:

$$\omega_0^2 y + \ddot{y} = f x^5$$

- (i) Trovare la soluzione dell'omogenea associata (ovvero l'equazione dello stesso problema senza la forzante, ovvero con 0 nel lato destro).
- (ii) Per trovare la soluzione particolare, scrivete il lato sinistro come  $(\omega_0^2 + D^2)y$ , dove  $D$  è l'operatore che deriva rispetto a  $t$ . Per esplicitare  $y$ , che cosa vi viene spontaneo fare? (*Nota*:  $d$  non commuta con gli scalari, perché  $D\alpha \neq \alpha D$ . Quindi occhio a quello che fate)

15. Usare gli stessi metodi del problema precedente con l'ODE

$$\omega_0^2 y + \ddot{y} = f \sin(\omega t).$$

Provare lo stesso metodo e vedere che non funziona. Trovare la soluzione con  $\omega_0 = 2$ ,  $\omega = 2$ ,  $f = 1$ . Provare come soluzione un qualche polinomio di grado basso moltiplicato per coseno e seno della frequenza che vi aspettate e vedere se funziona.

16. Risolvi con una serie di potenze attorno a  $x = 0$  l'ODE

$$\ddot{y} + xy = 0.$$

(Soluzione: una delle due soluzioni è  $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4x^6}{6!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7x^9}{9!} + \dots$ ) (MTP4.20)

17. Risolvi con una serie di potenze attorno a  $x = 0$  l'ODE

$$\ddot{y} + \frac{x}{\sin y} = 0$$

(Soluzione:  $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{192}x^5 \dots$ ) (MTP4.57)

18. Risolvi con una serie di potenze attorno a  $x = 0$  l'ODE

$$x^2 \ddot{y} - 2ix\dot{y} + (x^2 + i - 1)y = 0.$$

(MTP4.58)

19. ☆☆☆ Risolvere l'ODE

$$y\dot{y} = x(4 - y^2)$$

(Suggerimento: usare la separazione delle variabili)

20. ★ ☆☆☆ Che equazione ha una *Cicloide*? (traiettoria di un punto sul cerchio di una ruota di raggio  $R$ ) Quale ODE risolve la Cicloide (Soluzione:  $\dot{y} = \frac{2R}{y} - 1$ )?

21. ★ ☆☆☆ Verifica che l'Equazione delle Onde  $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$  ammette come soluzioni le funzioni che si propagano a velocità costante  $\pm c$  e le loro combinazioni lineari.

## 6.4 Volumetti Infinitesimi

22. ☆☆☆ *Formule di Pappo* Vediamo i Teoremi di Pappo. Il primo afferma che la superficie di una superficie di rotazione (ottenuta ruotando la figura bidimensionale di contorno lungo  $l$ ) è uguale alla lunghezza  $l$  per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè  $2\pi r$ , con  $r$  distanza del baricentro del contorno dall'asse di rotazione. Il secondo afferma che il volume di un volume di rotazione (ottenuto ruotando la figura bidimensionale di area  $S$ ) è uguale all'area  $S$  per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè  $2\pi r$ , con  $r$  raggio del baricentro della superficie dall'asse di rotazione.
- (i) Dire perché i due teoremi sono veri, pensando a quale superficie è generata dalla rotazione di un segmento  $dl$  e a quale volume è generato dalla rotazione di una superficie  $dS$
  - (ii) Trovare superficie e volume di un toro
  - (iii) Trovare il volume di un toro a sezione rettangolare.
  - (iv) Calcolarne la resistenza elettrica data una resistività  $\rho$  costante.
23. ★★ ☆☆☆ Trova la formula del raggio di curvatura nel punto  $(x_0, y_0)$  della funzione  $y = f(x)$  in funzione di  $y, \dot{y}, \ddot{y}$ . (Suggerimento: usare gli infinitesimi)
24. ★ ☆☆☆ Il *momento d'inerzia* è definito come  $I_0 = \int \rho(\mathbf{r})r^2 d^3r$  dove  $\mathbf{r}$  è la distanza dall'asse attorno a cui avviene la rotazione. Calcolare il momento d'inerzia di qualunque cosa. Esempi: sfera, guscio sferico, lastra rettangolare di spessore trascurabile, parallelepipedo a basi rettangolari, asta sottile rispetto al centro, asta sottile rispetto a un estremo, cono rispetto all'asse, insieme di Cantor.

## 6.5 Ordini e Limiti

25. ☆☆☆ Data  $y^5 - y = x$  calcolare fino al quint'ordine  $y(x)$ . (*Soluzione:*  $y = -x - x^5 + 5x^9 - 15x^{13} + O(x^{17})$ )
26. ☆☆☆ Calcolare al sesto ordine  $e^{x^2+\alpha x}$  in  $x$ .
27. ☆☆☆ Calcolare al sesto ordine  $e^{x^2+\alpha x}$  in  $\alpha$ .
28. ☆☆☆ Calcolare al second'ordine  $\frac{1}{\sqrt{1-2x \cos \theta + x^2}}$  in  $x$ .
29. ☆☆☆ Trovare l'espansione al quint'ordine di  $\tan x$ . (*Soluzione:*  $\tan x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 + O(x^9)$ )

30. ☆☆☆ Calcolare se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \ln(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}}.$$

31. ☆☆☆ Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x})$  (MTP2.15)

32. ☆☆☆ Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{x} + \frac{1}{1-\sqrt{1+x}})$  (MTP2.16)

33. ☆☆☆ Trovare l'espansione in Taylor dell'arcoseno, sapendo quello della sua derivata.

34. ☆☆☆ L'espressione dell'entropia nell'oscillatore armonico quantistico è  $S = k(\frac{x}{e^x-1} - \log(1 - e^{-x}))$ , dove  $k$  è la costante di Boltzmann e  $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$ . Calcolare ai primi ordini il valore dell'entropia nei limiti di temperatura alta e bassa. Poiché alta e bassa non vuol dire niente, si intende alta e bassa rispetto a cosa, secondo voi?

35. ☆☆☆ Se  $1 \gg \alpha \gg \beta$ , ha più senso approssimare  $1 + \alpha + \beta$  al primo ordine in  $\alpha$  o al primo ordine in  $\beta$ ?

## 6.6 Fisica

36. ☆☆☆ Ad una certa ora del mattino inizia a nevicare, e a mezzogiorno uno spalaneve parte per pulire le strade. La neve continua a cadere con intensità costante. Si sa che la velocità con cui procede lo spazzaneve è inversamente proporzionale all'altezza della neve. Nelle prime due ore di lavoro lo spazzaneve riesce a pulire 4 km di strada. Nelle due ore successive invece se ne liberano solo 2 km. A che ora ha iniziato a nevicare? (C3.14)

37. (Questo problema è un sottoinsieme di un altro problema) In presenza di una forza di attrito viscoso  $\mathbf{F} = -\lambda\mathbf{v}$  una particella di massa  $m$  viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale di modulo  $v_0$ . Determinare la massima altezza raggiunta rispetto al punto di partenza. Determinare inoltre la velocità alla quale la particella passa nuovamente dal punto di partenza, in particolare nel caso in cui  $v_0$  è molto grande. Cosa significa *molto grande* in questo caso? (C5.3)

38. ★★★ Ho un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e un campo magnetico  $\mathbf{B}$  ortogonali. Una particella di carica  $q$  parte da ferma e su di essa agisce la forza elettrica  $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$  e la forza di Lorentz  $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Che forma assume la traiettoria? (*Soluzione*: è una Cicloide, basta saper risolvere la ODE  $\ddot{y} = -y + c$ )

39. ☆☆☆ Una corda lunga  $l$  di massa  $m$  è distesa orizzontalmente su un tavolo eccetto per l'estremità che pende verticalmente per una lunghezza  $x_0$ . In presenza di gravità, come evolve il sistema? (C5.17)
40. Su un oscillatore armonico (massa  $m$  e costante elastica  $k$ ) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge  $F = \alpha t$ . È possibile assegnare delle condizioni iniziali a  $t = 0$  s in modo tale che la massa si muova di moto uniforme? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto. (C5.18)
41. Su un oscillatore armonico (massa  $m$  e costante elastica  $M$ ) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge  $F = \alpha t^2$ . È possibile assegnare delle condizioni iniziali a  $t = 0$  s in modo tale che la massa si muova di moto uniformemente accelerato? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto. (C5.19)
42. ★ Un punto materiale si muove su una guida parabolica di equazione  $y = -ax^2$ . È possibile che il punto si stacchi dalla guida? (*Suggerimento*: usare la formula per il raggio di curvatura (farsela dire se non la si è calcolata) e la conservazione dell'energia).
43. ☆ Esprimere il periodo di un pendolo come integrale. Calcolare la correzione al prim'ordine (*Suggerimento*: scrivere l'equazione della conservazione dell'Energia, esplicitare  $dt$ , integrare  $dt$ )
44. Una scodella di massa  $M$  e sezione  $S$  può muoversi liberamente su un piano orizzontale senza attrito. Su di essa cade della pioggia: ciascuna goccia all'arrivo sulla scodella ha una velocità orizzontale  $V_x > 0$  e una verticale  $V_y < 0$ . Inoltre la massa di acqua che arriva su una superficie  $S$  fissa sul terreno è costante e vale  $\Gamma$ . Supponendo che la pioggia raccolta dalla scodella rimanga in quiete rispetto ad essa, e che questa si inizialmente ferma, studiarne il moto. Trascurare l'effetto dell'urto della pioggia sulle superfici laterali della scodella. (C5.88)
45. Un proiettile di massa  $m$  viene lanciato da terra con una velocità iniziale di modulo  $v_0$  che forma un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale. Oltre a un campo di gravità costante è presente una forza di attrito viscoso  $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$ . Trovare l'equazione esplicita della traiettoria, e discutere il limite nel quale si può considerare "piccolo" l'attrito, dicendo in modo preciso che cosa si intende con questo. (C5.128)
46. (Questo problema in realtà non è molto buono. . . ) Su un nastro trasportatore mantenuto in movimento a velocità costante  $v_C$  viene depositata continuamente della sabbia. La massa di sabbia che si deposita per unità di tempo è costante e pari a  $dm/dt = \gamma$ . Calcolare la potenza del motore necessaria a mantenere la sabbia in movimento. (C5.132)

47. ★ ☆ L'equipaggio di un razzo inizialmente fermo vuole aumentare la propria velocità espellendo una massa  $\eta m$  di gas. La velocità del gas al momento dell'emissione relativa al razzo è sempre  $-v_0$ . La massa iniziale di quest'ultimo è  $m$  e chiaramente  $0 \leq \eta < 1$ . Indicheremo con  $\mu(t)$  la massa espulsa al tempo  $t$ . Calcolare  $\mu(t)$  nei due casi seguenti:
- (i) tutta la massa viene espulsa istantaneamente a  $t = 0$  s;
  - (ii) la massa espulsa per unità di tempo è costante, e viene espulsa tutta in un tempo  $\tau$ .
- Dette  $v_f^1$  e  $v_f^2$  le velocità finali del razzo nel primo e nel secondo caso, stabilire se è vero che  $\lim_{\tau \rightarrow 0} v_f^{(1)} = v_f^{(2)}$ . (C5.133)
48. ★ ☆☆☆ Consideriamo un oscillatore armonico forzato, senza attrito, con una forzante  $F = F_0 \cos \omega t$ , e sia  $\omega_0$  la frequenza naturale dell'oscillatore. Come ci si aspetta che sia la soluzione, qualitativamente? Claimare la soluzione e verificare che soddisfa l'equazione differenziale.
49. ★★ ☆☆☆ Una *molla massiva* può essere pensata come tante masse infinitesime separate da molle infinitesime identiche. Indichiamo con  $x$  una coordinata che varia da 0 a 1 e che conta la percentuale di masse infinitesime che distano da un capo della corda. Se la molla massiva viene appesa in verticale al capo con  $x = 0$ , trovare:
- (i) la tensione in funzione di  $x$ .
  - (ii) l'altezza  $h(x)$  in funzione della coordinata  $x$
  - (iii) l'allungamento totale della molla e la sua lunghezza. (C5.139)
50. Una curva piana senza attrito ha la forma di una funzione i cui estremi sono alla stessa altezza. Una catena di densità lineare uniforme viene adagiata sulla curva da un estremo all'altro. Mostrare, considerando la forza netta di gravità sulla curva, che la catena non si muove. (M1.3)
51. ★ ☆☆☆ Data un'asta semi-infinita (cioè una semiretta) con densità lineare  $\lambda(x)$  che dipende dalla posizione, calcolare  $\lambda(x)$  in modo che abbia la seguente proprietà: se l'asta è tagliata in una posizione arbitraria  $x_0$ , allora la parte semi-infinita rimasta sarà in equilibrio se bilanciata su un perno a distanza fissata  $l$  dall'estremo (cioè nel punto a coordinata  $x_0 + l$ ). (M1.18)
52. ★★ ☆☆☆ Dire esplicitamente quali integrali bisogna fare per risolvere l'equazione  $F = ma$  nei tre casi in cui  $F$  dipende solo da: (i)  $x$ , (ii)  $v$ , (iii)  $t$ . (M2)

53. ★ ☆☆☆ Una palla viene lanciata in aria in verticale. L'attrito è  $F = -\gamma v$ . Trovare velocità e altezza in funzione del tempo. (M2) (Questo è bello perché non ci si deve confondere quando si trova il logaritmo di una quantità dimensionale...)
54. ☆ Una particella di massa  $m$  è soggetta alla forza  $F(v) = -bv^2$ . La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è  $0 \text{ m s}^{-1}$ . Trovare  $x(t)$ . (M2.E9)
55. ☆ Una particella di massa  $m$  è soggetta alla forza  $F(x) = -kx$ . La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è  $0 \text{ m s}^{-1}$ . Trovare  $x(t)$ . (M2.E10)
56. ☆ Una particella di massa  $m$  è soggetta alla forza  $F(x) = +kx$ . La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è  $0 \text{ m s}^{-1}$ . Trovare  $x(t)$ . (M2.E11)
57. ★ Un motociclista vuole percorrere un cerchio di raggio  $R$ . Il coefficiente di attrito tra le ruote e il suolo è  $\mu$ . Il motociclista parte da fermo. Qual è la minima distanza che il motociclista deve percorrere per ottenere la massima velocità possibile? (M2.E12)
58. ☆ Una particella di massa  $m$  è soggetta alla forza  $F(x) = e^{-bt}$ . La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è  $0 \text{ m s}^{-1}$ . Trovare  $x(t)$ . (M2.9)
59. ☆☆☆ Un razzo di massa  $m$  e a velocità  $v$  ha ugelli con velocità di scarico pari a  $u$ . Trovare l'equazione del razzo che mette in relazione la massa di carburante consumata e il  $\Delta v$ . Trovare la massa corrispondente a  $\Delta v = 3u$ .
60. ★ ☆☆☆ *Strato di ghiaccio su un lago* Supponendo che la temperatura dell'aria sulla superficie di un lago ghiacciato rimanga costantemente pari a  $-5,2$  gradi centigradi per 60 giorni, si formuli un modello per descrivere la rapidità con cui cresce lo spessore del ghiaccio a partire dal suo valore iniziale  $h_0 = 25$  cm. Sapendo, in particolare, che dopo 12 giorni si misura uno spessore di 37 cm e dopo 21 giorni uno spessore di 44 cm, si stimi lo spessore  $h_f$  raggiunto dal ghiaccio dopo 60 giorni. (SNS 2015 1).
61. ☆☆☆ La resistenza elettrica di un resistore a due piastre vicine è  $R = \frac{l}{S\sigma}$  dove  $\sigma$  è la conducibilità. La capacità di un condensatore a due piastre vicine è  $C = \frac{S\epsilon}{l}$  dove  $\epsilon$  è la costante dielettrica del materiale. Se due conduttori con carica  $+Q$  e  $-Q$  rispettivamente sono immersi in un materiale con conducibilità  $\sigma$  e costante dielettrica  $\epsilon$ , trovare  $Q(t)$  sul primo conduttore. Cosa si può dire sul prodotto  $RC$  indipendentemente dalla forma del conduttore?
62. ☆☆☆ Calcolare l'energia potenziale posseduta da una corda di lunghezza  $l$  e massa per unità di lunghezza  $\rho$  appesa per un estremo al soffitto.
63. ★★★ ☆☆☆ Calcolare il tempo impiegato da un'onda a propagarsi sulla corda dell'esercizio precedente, partendo dall'estremo più alto a quello più basso.

64. ★ ☆☆☆ Un corpo è soggetto a una forza di attrito che in modulo è pari a  $F = bv^n$ , dove  $v$  è la velocità e  $b$  un'opportuna costante. Esso viene lanciato con una velocità iniziale pari a  $v_0$ ; trova, **attraverso l'analisi dimensionale**, una stima del tempo impiegato a fermarsi e della distanza che ha percorso dal punto di lancio. Il risultato ha senso? Rispondere alle domande precedenti *per bene* (trovando l'equazione del moto) e poi si confrontino i risultati.
65. ★ ☆☆☆ *Molla massiva*. Si vuole trattare approssimativamente l'effetto della massa non nulla  $\mu$  di una molla sulla frequenza di oscillazione. Per fare questo si scrive l'energia del sistema supponendo che la molla si muova nello stesso modo in cui si muoverebbe se la sua massa fosse nulla. Usando tale metodo si determini la frequenza di oscillazione del sistema dato dal soffitto a cui è appesa la molla alla quale è appesa un oggetto di massa  $M$ , supponendo la molla di lunghezza a riposo nulla (C5.43).
66. ★★★ ☆ Ricavare l'equazione del telegrafista. Si schematizzi la seguente situazione: vi sono due cavi paralleli molto lunghi. A ogni passettino  $dx$ , vi è una resistenza  $r dx$  sul primo cavo, un'induttanza  $l dx$  sul primo cavo, una capacità  $c dx$  tra i due cavi e, in parallelo a questa, una resistenza tra i due cavi di conduttanza  $g dx$  (la conduttanza è la grandezza fisica reciproca della resistenza. Perché in questo caso si usa la conduttanza secondo voi?). Ricavare l'ODE soddisfatta dalla corrente e quella soddisfatta dalla tensione.
67. IphO 2014, problema 3.
68. IphO 2006/2007 (?), problema sull'amplificatore lock-in.

## 6.7 Derivate e Integrali

69. Calcolare  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ . (*Suggerimento*: dove avete già visto questa espressione?)

70. ☆☆☆ Usare l'integrazione per parti per dimostrare l'utile formula ricorsiva

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{nx} \theta \, d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{(n-2)x} \theta \, d\theta.$$

Dimostrare che funziona anche con i seni e anche da 0 a  $\pi$ . Calcolare il valore per  $n = 8$ . Calcolare poi  $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta \, d\theta$ . (*Suggerimento*: usare de Moivre)

71. ☆☆☆ Usare l'integrazione per parti per dimostrare la formula

$$x! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, dt$$

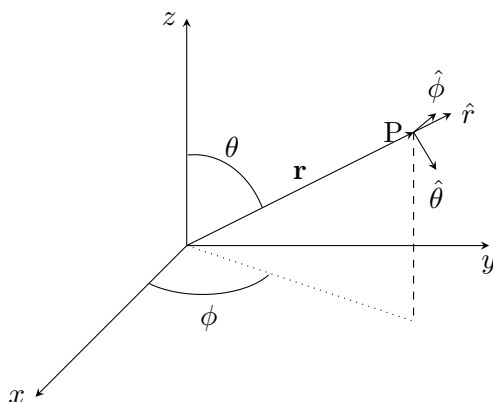
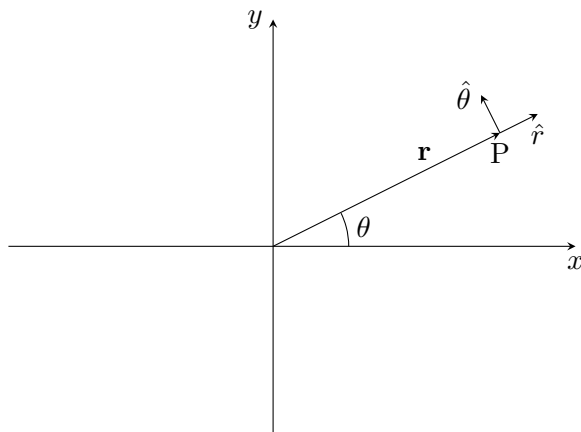
Tale espressione è la *funzione Gamma di Eulero*. Calcolare  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$ . (*Suggerimento*: ricondursi a  $(-1/2)!$  con un cambio di variabili)



72. ★ ☆☆☆ Ridimostrare il valore della funzione Gamma di Eulero usando l'integrazione parametrica: per calcolare  $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$  calcolo  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x dt$  e derivo per  $\alpha$  trovando così una formula ricorsiva.
73. ☆☆☆ Ricalcolare  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$  in questo modo: calcolare  $I^2$  (l'integrale di una gaussiana in due dimensioni) e passare in coordinate polari.
74. ☆☆☆ Scrivere  $\sin(\alpha)$  e  $\cos(\alpha)$  in funzione di  $t = \tan(\frac{\alpha}{2})$ . Questa è la sostituzione che permette di risolvere molti integrali trigonometrici.
75. ★★ ☆☆☆ A volte, invece, serve trasformare integrali polinomiali o con radici quadrate in integrali trigonometrici in seni e coseni (o seni e coseni iperbolici). Ad esempio, cosa vi ricordano i seguenti integrali?, quanto valgono?
- (i)  $\int \frac{du}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$
- (ii)  $\int \frac{du}{\sqrt{(u^2-a^2)}}$
- (iii)  $\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+a^2)}}$
- (iv)  $\int \frac{du}{\sqrt{(-u^2-a^2)}}$
- (v)  $\int \frac{du}{a^2+u^2}$
- (vi)  $\int \frac{du}{a^2-u^2}$
76. ★ ☆☆☆ Dimostrare il seguente lemma, molto utile in termodinamica: data una qualche relazione tra le quantità  $x$ ,  $y$  e  $z$  (ad esempio, del tipo  $f(x, y, z) = 0$ ), si ha

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$$

## 6.8 Calcolo sui Vettori, per Meccanica



77. ★ ☆ Scrivere i versori delle *coordinate polari*  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  e trovare  $\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{dt}$  e  $\dot{\hat{\theta}} = \frac{d\hat{\theta}}{dt}$ . Dato un vettore generico espresso in coordinate radiali,  $\mathbf{r} = r\hat{r}$ , calcolare  $\dot{\mathbf{r}}$  e  $\ddot{\mathbf{r}}$ . Fare lo stesso in *coordinate sferiche* (*Suggerimento*: le derivate agiscono sia sulle componenti sia sui versori!).
78. ★ ☆ Se un sistema di riferimenti di versori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  ruota con velocità angolare  $\omega$ , quanto vale la derivata temporale dei versori? E di un vettore generico? (*Suggerimento*: guardare lo spostamento infinitesimo).
79. ★ ☆☆☆ Usare quanto appena scoperto per ricalcolare le derivate dei versori in polari. Usarlo anche per le sferiche: una rotazione che cambia  $\phi$  a quale vettore  $\omega$  corrisponde? A che raggio corrisponde? Qual è l'accelerazione centripeta corrispondente?

## 6.9 Avanzati

80. ★☆☆ La *catenaria* è la funzione che rappresenta la disposizione di una corda massiva inestensibile (con  $\lambda = dm/dx$  costante) i cui due capi sono appesi a due muri, ad altezze non necessariamente uguali. Usando gli infinitesimi, trovare l'equazione della catenaria (*Suggerimento*: guardare la forza che agisce su un piccolo tratto infinitesimo. Una delle componenti della forza è costante su tutta la corda.)
81. ★★ *Operatori (I parte)*. Immaginiamo che  $\alpha$  e  $\beta$  siano due operatori, cioè “numeri” che non commutano. Essi possono essere moltiplicati con scalari e restano operatori. Essi sono indipendenti da  $t$  a meno che non sia indicato esplicitamente. Risolvere i seguenti quesiti:
- (i)  $(\alpha + \beta)^2$ .
  - (ii) Dire se è vero che  $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha\beta}$  e perché.
  - (iii) Dire se la derivata di un operatore è un operatore (sì, dovreste saperlo).
  - (iv) Calcolare  $\frac{d}{dt}(\alpha(t)\beta(t))$  usando gli infinitesimi.
82. ★★★ *Operatori (II parte)*.
- (v) Calcolare  $\frac{d}{dt}e^{\alpha t}$  usando le serie infinite.
  - (vi) Calcolare  $\frac{d}{dt}e^{\alpha(t)}$  come serie infinita.
  - (vii) Rifare il conto usando la definizione di esponenziale come  $e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$  e vedere se si trova lo stesso risultato.
  - (viii) Calcolare  $e^{\alpha t} \beta e^{-\alpha t}$ .
  - (ix) Definendo  $\hat{\alpha}$  come un operatore tale che  $\hat{\alpha}\beta = \alpha\beta - \beta\alpha$ . Notare che  $e^{\alpha t} \beta e^{-\alpha t} = e^{\hat{\alpha} t} \beta$ .
  - (x) Provare a rifare il punto (vi) seguendo questo approccio:
- $$\frac{d}{dt}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)} e^{-\alpha(t)} \frac{d}{dt}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)} e^{-\hat{\alpha}(t)} \frac{d}{dt} = \dots$$
- (Soluzione:  $\frac{de^{\alpha(t)}}{dt} = e^{\alpha(t)} \frac{1 - e^{-\hat{\alpha}(t)}}{\hat{\alpha}(t)} \dot{\alpha}(t)$ )
83. ★★☆☆ Si consideri una curva parametrizzata da  $\lambda$ . A ogni punto  $(x(\lambda), y(\lambda))$  consideriamo un segmento tangente dello stesso verso di  $(\dot{x}(\lambda), \dot{y}(\lambda))$ , lungo  $l(\lambda)$ . Il *Teorema di Mamikon* afferma che l'area spazzata da questo segmento (di cui un estremo è sempre sulla curva) è uguale all'area spazzata dallo stesso segmento, con uguale direzione e verso, ma di cui l'estremo è tenuto fisso. Dire:

- (i) Perché questo teorema è vero guardando i triangolini infinitesimi.
  - (ii) Calcolare l'area dell'anello circolare in cui la tangente alla circonferenza interna interseca la circonferenza esterna in due punti a distanza  $2a$
  - (iii) Calcolare l'area sottesa dalla cicloide. (*Soluzione:  $3\pi r^2$* )
  - (iv) Un bambino si trova nell'origine  $(0, 0)$  e tiene in mano un laccio inestensibile in tensione legato a una macchina giocattolo a  $(a, 0)$ . Il bambino cammina verso  $(0, +\infty)$ . L'area spazzata diverge? Se no, quanto vale?
84. ★★ Trovare l'equazione della curva tracciata dal giocattolo nel punto (iv) del problema precedente. Tale curva prende il nome di *Trattrice*. Calcolarne l'area sottesa e verificare se è uguale al valore trovato con i triangolini infinitesimi (*Soluzione: su wikipedia*).

85. ★ ☆☆☆ Definiamo la *Trasformata di Fourier* di  $f(x)$  come la seguente funzione in  $\omega$ :

$$F[f(x)](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt$$

Si noti come da una funzione in  $x$  ottengo dunque una funzione in  $\omega$ , che non dipende più da  $x$ . Calcolare:

- (i)  $F[e^{i\alpha} f(x)](\omega)$ .
  - (ii)  $F[\frac{d}{dx} f(x)]$ .
  - (iii)  $\frac{d}{d\omega} F[f(x)](\omega)$ .
  - (iv) La trasformata di Fourier di una funzione che vale 1 nell'intervallo tra  $-1$  e  $1$ , e 0 fuori da quell'intervallo (*funzione rettangolo*).
86. ☆☆☆ Si consideri  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt$ , con  $f(x)$  continua e con un integrale finito. Quale ci si aspetta che sia il valore dell'integrale nel limite  $\omega \rightarrow +\infty$ ? Spiegare visivamente.
87. ★ ☆☆☆
- (i) Calcolare  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$  e descrivere qualitativamente cosa succede al grafico della funzione (considerandola come una funzione di  $x$ ).
  - (ii) Calcolare  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} dx$ .
  - (iii) Descrivere qualitativamente cosa succede al grafico di  $\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$  quando si manda  $\epsilon$  a 0.
  - (iv) Calcolare, ragionando visivamente,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} f(x) dx$  dove  $f(x)$  è una funzione qualunque (*Nota: vedere il problema successivo*).
88. ☆ Definiamo  $\delta(x)$  come una *gaussiana* di area 1 e di ampiezza infinitesima. Ragionando visivamente, capire perché  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

89. ☆ Usando l'integrazione per parti, dimostrare che  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x) dx = -f'(0)$

90. ☆ Più in generale calcolare  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)f(x) dx$

91. ★★ Una molla massiva fa piccole oscillazioni in verticale. Considerandola come tante masse infinitesime separate da molle infinitesime identiche, ricavare l'equazione differenziale che descriva l'evoluzione nel tempo di questo sistema (Essa sarà l'*equazione delle onde*).

92. ★★ ☆☆☆ Consideriamo il seguente modello per la *diffusione del calore* in un materiale: lo spazio è una griglia cubica, e ciascun vertice ha una quantità di calore  $Q$ . A un passo infinitesimo  $dt$  questo calore viene distribuito equamente tra le sei celle adiacenti. Ricavare l'*equazione del calore* (*Suggerimento*: provare prima il caso analogo unidimensionale, con punti equispaziati invece che una griglia cubica. Tra l'altro, ricordate la definizione qualitativa del Laplaciano).

93. ★ ☆☆☆ Sapendo quando vale la Funzione Gamma di Eulero trattata nei problemi precedenti, espanderla al second'ordine attorno al suo punto di massimo (trovatelo!), ottenendo

$$\int_0^{+\infty} e^{-n+n \ln t - \frac{(t-n)^2}{2n}} t^x dt.$$

Riconoscendo l'integrale della *Gaussiana*, trovare l'*approssimazione di Stirling*  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

94. ★★ ☆ Volume dell'*ipersfera n-dimensionale*. Denotando sempre con

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

scrivere  $I^n$  e mettersi in coordinate polari (ovvero distinguere l'integrale sul raggio dall'integrale sulle superfici  $(n-1)$ -dimensionali delle ipersfere  $n$ -dimensionali). In questo modo è possibile trovare quanto vale la superficie  $(n-1)$ -dimensionale, e quindi quanto vale il volume  $n$ -dimensionale dell'ipersfera. (*Soluzione*:  $V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{(\frac{n}{2})!}$ )

95. ★★★ La *funzione Beta di Eulero* è definita come

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Dimostrare con un cambio di variabili che è uguale a

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta.$$

Poi, dimostrare che  $\frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!} = B(x, y)$ . (*Suggerimento:* (i) partire da  $(x-1)!$  e  $(y-1)!$  espressi come Gamma di Eulero con variabili d'integrazione  $t$  e  $t'$ , (ii) fare il cambio di variabili da  $t$  ad  $a = t^2$  e da  $t'$  a  $b = t'^2$ , (iii) considerare l'integrale doppio in  $a$  e in  $b$  come un integrale sul piano, e passare in coordinate polari)

96. ★ Provate a fattorizzare  $\sin(x)$  come se fosse un polinomio (dopo tutto sapete dove sono i suoi zeri e sapete che molteplicità hanno). Che problemi ha questa espressione? Cambiatela in modo che ogni fattore vada a 1 quando  $x = 0$ .

97. ★★★ Dimostrate la formula trovata nel punto precedente lavorando prima con  $\sinh(x)$ :

(i) Espandere  $\sinh(x)$  usando la definizione di esponenziale come  $(1 + \frac{x}{N})^N$

(ii) Usare che

$$(a-b)^N = (a-b)(a^2+b^2-2ab\cos(1\cdot\theta)) \dots (a^2+b^2-2ab\cos((N-1)\theta))$$

dove  $\theta = \frac{2\pi i}{N}$  ed esprimere quindi  $\sinh(x)$  come produttoria (prendete  $N$  dispari per poter fare questa cosa).

(iii) In questa produttoria, all'inizio  $\theta$  è piccolo, mentre alla fine  $\theta \approx 1$ . Spezzare la sommatoria in una prima parte, dove si approssima il coseno usando che  $\theta$  è piccolo, e una seconda parte, che *non dipende da*  $x$ , e che chiameremo  $B$ .

(iv) Dai conti scoprite che viene proprio quello che vi aspettavate, a meno di un altro fattore che non sapete quanto vale ma che non dipende da  $x$ . Chiamatelo  $A$ .

(v) Dimostrate che  $AB = 1$  approssimando la funzione al prim'ordine e imponendo che faccia  $x$ .

98. Guardare il terzo ordine dell'espansione di  $\sin(x)$  dell'esercizio precedente. Concludere che  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$  (*Problema di Basilea*).

## 7 Soluzioni

1. ☆☆☆  $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$
2. ☆  $2\pi R \partial h$
3. ☆  $\sqrt{2}/12$
4. ☆ Si può partire da un quadrato inscritto in un cerchio: il rapporto perimetro/raggio è 4. Ora disegnare l'ottagono inscritto nel cerchio ma "circoscritto" al quadrato (i vertici del quadrato sono vertici anche dell'ottagono). Ogni lato si è "spezzato" in due, leggermente più lunghi. Il fattore di cui ogni lato si è allargato è  $1/\cos(\theta)$  con  $\theta$  l'angolo di cui è ruotato il lato del quadrato per formare uno dei lati dell'ottagono. Calcolare questi coseni invertendo la formula  $\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1$ . Il rapporto perimetro/raggio è  $2\pi$ .
5. ☆  $z = 2\pi i$ . Se  $z = re^{i\theta}$  con  $r$  reale allora  $\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi i k$  con  $k$  un arbitrario numero intero.
6. ☆☆☆  $n/x$ ;  $1$ ;  $1 + \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} + \cot(x) - \frac{4}{x} - \frac{1}{x \ln x}$ . La derivata classica si ottiene moltiplicando per la funzione originaria.
7. ☆☆☆  $\frac{a^{dx}-1}{dx} = \frac{e^{\ln(a) dx}-1}{dx} = \frac{e^{\ln(a) dx}-1}{\ln(a) dx} \ln(a) = 1 \ln(a) = \ln(a)$
8. ☆  $\frac{\partial}{dx} e^{x \ln(x)} = e^{x \ln(x)} (\ln(x) + 1)$ ;  
 $[\frac{\partial}{dx} x^y + \frac{\partial}{dy} x^y]_{x=y} = [x^y \frac{y}{x} + x^y \ln(x)]_{x=y} = x^x + x^x \ln(x)$
9. ☆☆☆ La resistenza di un cilindro infinitesimo lungo  $dx$  e di raggio  $r$  è  $\rho dx \pi r^2$ . Integrando per l'altezza  $h$  del cilindro (che non ho segnato tra i dati, ma deve essere considerato come noto) si ottiene  $\rho dx \pi r^2$   
 Si noti come l'integrale corrisponde alla somma di infinite resistenze infinite in serie. Questo è vero perché le superfici equipotenziali sono all'incirca ortogonali all'asse del tronco di cono. Se  $b$  è sensibilmente più grande di  $a$ , questo non è vero: ci si attende che le superfici equipotenziali siano curve (si consideri il caso limite della base maggiore che va all'infinito e della base minore puntiforme. Si ha la corrente che esce dalla base minore e si diffonde in modo radiale: le superfici equipotenziali sono calotte sferiche).
10.  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  ha come modulo la superficie della base del parallelepipedo. Chiamando  $\theta$  l'angolo tra  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  e  $\mathbf{a}$ , si vede che si ha  $\mathbf{a} \cdot |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \pm a \cos(\theta) |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \pm h |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ , dove  $h = a \cos(\theta)$  è l'altezza del parallelepipedo. Quindi si ottiene il volume del parallelepipedo  
 Il segno è positivo se  $a, b, c$  sono una terna destrorsa (cioè se posso ricavare  $c$  da  $a, b$  usando la regola della mano destra).  
 Ora bisogna accorgersi che le altre equazioni esprimono tutte il volume del parallelepipedo (badando al segno corretto).

11. Il prodotto vettore è un operatore lineare, cioè  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ , e  $\mathbf{a} \times k\mathbf{b} = k\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  con  $k$  un numero reale.

Si calcoli il prodotto vettore tra i versori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ , che sono i vettori di lunghezza 1 rivolti come gli assi cartesiani.

Ora, scomponendo i due vettori lungo gli assi, si ha  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\mathbf{x} + a_y\mathbf{y} + a_z\mathbf{z}) \times (b_x\mathbf{x} + b_y\mathbf{y} + b_z\mathbf{z}) = \dots = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{x} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{y} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{z}$ , dove si sono usati i prodotti vettoriali tra i vettori rivolti lungo gli assi cartesiani.

Ora si dimostri che la formula “bac meno cab” è vera se si guarda solo la componente  $x$ . Ci si accorda che, ciclando le variabili (cioè mandando  $x$  in  $y$ ,  $y$  in  $z$ ,  $z$  in  $x$ ), la dimostrazione appena fatta vale anche per la componente  $y$  e per la componente  $z$ .

12. ☆☆☆ La definizione di derivata impone che  $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a} + \partial\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} + \partial\mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \partial\mathbf{b} + \partial\mathbf{a} \cdot \partial\mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial\mathbf{b}}{dt} + \frac{\partial\mathbf{a} \cdot \partial\mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial\mathbf{b}}{dt}$ , dove si è correttamente eliminato l'ultimo termine perché è infinitesimo.

Il calcolo con il prodotto vettore è uguale, solo che al posto dei prodotti scalari ci sono i prodotti vettori.

Si notino le cose importanti: (1) la derivata di un vettore è un vettore, perché per fare la derivata bisogna fare una differenza e poi una divisione per un numero, (2) le operazioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale sono lineari, cioè “si comportano bene” con la somma.

13. ★ ☆☆☆ Sulle prime due equazioni bisogna sostituire le definizioni di seno e di coseno coi numeri complessi. Sulla terza e sulla quarta si possono riciclare le prime due: ad esempio per la terza si ha  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)} = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$ , dove nell'ultimo passaggio si è diviso sopra e sotto per  $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ .

La quinta e la sesta sono uguali alla settima e all'ottava, se solo si cambiano i nomi degli angoli e si scambiano i due lati dell'equazione.

La settima si trova dalla prima: se si sommano  $\sin(\alpha + \beta)$  e  $\sin(\alpha - \beta)$  calcolati con la prima equazione (ricordando che  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$  e che  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ ), si ottiene  $2\sin(\alpha)\sin(\beta)$ . Si divida per 2.

L'ottava si trova dalla seconda allo stesso modo.

La nona si ottiene dalla seconda allo stesso modo, concentrandosi sul termine  $\sin(\alpha)\sin(\beta)$ . Nella decima bisogna usare la definizione del coseno coi numeri complessi, notando che si ottiene la serie geometrica  $e^{inx} + e^{i(n-1)x} + \dots + e^{-inx} = e^{inx}(1 + e^{-inx} + \dots + e^{-i2nx}) = e^{inx} \frac{1 - e^{-i(2n+1)x}}{1 - e^{-inx}} = \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{inx/2} - e^{-inx/2}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ , ricordando la definizione del seno coi numeri complessi.

L'undicesima si trova usando De Moivre:  $\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos(x) + i\sin(x))^3$ . Prendendo solo le parti immaginarie di ambo i membri, e semplificando le  $i$ , ottengo:  $\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) -$



$$\sin^3(x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x). \text{ Esplicitando il termine di interesse si ottiene}$$

$$\sin^3(x) = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$$

## 7.1 ODE e PDE

14.  $\omega_0^2 y + \ddot{y} = 0$  ha come soluzione  $y = e^{\pm i\omega_0 t}$ , così come visto a lezione.  
 Per trovare  $y$  da  $(\omega_0^2 + D^2)y = fx^5$  viene spontaneo portare nel lato destro il membro di parentesi, invertito, ottenendo  $y = \frac{1}{\omega_0^2 + D^2} fx^5$ , che ha senso solo se si interpreta la frazione come una serie di potenze, cioè  $\frac{1}{\omega_0^2 + D^2} fx^5 = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{1 + (D/\omega_0)^2} fx^5 = \frac{1}{\omega_0} (1 - (D/\omega_0)^2 + (D/\omega_0)^4 - (D/\omega_0)^6 + \dots) fx^5 = \frac{f}{\omega_0} (x^5 - 20x^3/\omega_0^2 + 120x/\omega_0^4)$  poiché tutti gli altri termini fanno zero.  
 Può sembrare assurdo usare un metodo simile quando  $D$  non è un numero, eppure esso diventa un numero dopo essere stato applicato a  $fx^5$ . Inoltre l'approssimazione di  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  funziona solo quando a destra si sommano termini via via sempre più trascurabili: in questo caso  $D$ , agendo su  $fx^5$ , diventa in effetti trascurabile (in particolare nullo), quindi la formula è valida.  
 Ciò che fugge ogni possibile dubbio è comunque verificare che la soluzione trovata in effetti sia una soluzione dell'equazione di partenza.  
 La nota era riferita al fatto che quando si porta il termine con  $D$  a destra, bisogna tenerlo a destra (affinché la derivata agisca su  $fx^5$ ), altrimenti non funziona. Il motivo è che quel passaggio si ottiene mettendo, sulla sinistra di ambo i membri, il fattore  $\frac{1}{\omega_0^2 + D^2}$ , che si semplifica con  $\omega_0^2 + D^2$  e che si ritrova quindi sul lato destro, ma a sinistra di  $fx^5$ .
15. L'equazione è  $4y + \ddot{y} = \sin(2t)$ . Si provi  $y = (At + B) \sin(2t) + (Ct + D) \cos(2t)$  (l'unica frequenza che compare nell'equazione è  $2!$ , quindi mi aspetto che sia anche la frequenza della soluzione!). Poiché posso sommare o sottrarre le soluzioni dell'omogenea associata  $4y + \ddot{y} = 0$ , ovvero  $\sin(2t)$  e  $\cos(2t)$ , è chiaro che posso porre  $B = D = 0$ . La domanda è quanto valgono  $A$  e  $C$ .  
 Provo a inserire la soluzione nell'ODE. Facendo infiniti conti si trova  $y = -\frac{1}{4}t \cos(2t)$ . A questa soluzione particolare è possibile sommare una soluzione dell'omogenea, e si trovano altre soluzioni. La soluzione più generale è dunque  $y = -\frac{1}{4}t \cos(2t) + A \sin(2t) + B \cos(2t)$ . Come atteso le costanti arbitrarie sono due.
16. (*Soluzione:* una delle due soluzioni è  $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \star 4x^6}{6!} + \frac{1 \star 4 \star 7x^9}{9!} + \dots$ ) (MTP4.20)
17. (*Soluzione:*  $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{192}x^5 \dots$ ) (MTP4.57)
18. Non ho mai fatto i conti. (MTP4.58)

19. ☆☆☆  $y = \pm\sqrt{4 + ce^{-x^2}}$
20. ★ ☆☆☆  $x(t) = Rt - R\sin t$  e  $y(t) = R - R\cos t$ . Ricavando  $\cos t$  dalla seconda equazione, si calcolano  $\sin t$  e  $t$  e li si inseriscono nella prima equazione, ottenendo  $x = -\sqrt{y(2R - y)} + R\arccos(1 - y/R)$   
(Soluzione:  $\dot{y} = \frac{2R}{y} - 1$ )
21. ★ ☆☆☆ Una funzione che si propaga a velocità costante  $\pm c$  si può scrivere come  $f(x \mp ct)$ , con  $f(x)$  funzione arbitraria. La soluzione generale è dunque  $Af(x + ct) + Bg(x - ct)$ , con  $f$  e  $g$  funzioni arbitrarie.

## 7.2 Volumetti Infinitesimi

22. ☆☆☆ *Formule di Pappo* Un segmento  $\partial l$  a distanza  $r$  dall'asse di rotazione genera un'area  $2\pi r\partial l$  (il fatto che non tutto il segmento è alla stessa distanza dall'asse di rotazione genera correzioni di second'ordine, che quindi si trascurano). L'integrale di  $r\partial l$  sulla superficie è uguale al valore medio di  $r$  per la lunghezza del contorno ( $r_{medio} = \int r\partial l / \int \partial l$  per definizione). Allo stesso modo per il volume: una superficie  $\partial S$  che giace su un piano che viene fatto ruotare genera una superficie  $2\pi r\partial S$ , dove  $r$  è la distanza di  $\partial S$  dall'asse di rotazione. L'integrale è  $2\pi r_{medio}S$ , dove  $r_{medio} = \int r\partial S / \int \partial S$ .  
Il toro che si ottiene facendo ruotare una circonferenza di raggio  $r$  attorno a un asse che dista  $R$  dall'origine della circonferenza, ha superficie  $4\pi^2 Rr$  e volume  $2\pi^2 Rr^2$ .  
Il toro che si ottiene facendo ruotare un rettangolo di lati  $a$  e  $b$  attorno a un asse che dista  $R$  dal baricentro del toro, ha volume  $2\pi abR$ .  
La resistenza di un toro rettangolare di base  $b$  e di altezza  $h$  (quest'ultima parallela all'asse di rotazione) è  $\frac{2\pi\rho}{h\ln(b/a)}$ : è formata da tante fettine di torta messe in serie (ottenute con tagli radiali), ciascuna delle quali è formata da tante resistenze di forma curva messe in parallelo (ottenute con tagli tangenziali), ciascuna delle quali ha resistenza  $\rho l/S$ , con  $l$  e  $S$  infinitesimi e che potete calcolarvi dai dati.
23. ★★ ☆☆☆ L'idea è di considerare l'espansione al second'ordine  $y(x) = y(0) + x\dot{y}(0) + \frac{1}{2}x^2\ddot{y}(0)$ . Ora considero i tre punti di ascisse  $x$ ,  $x + dx$  e  $x + ddx$ , e li collego con due segmenti, che approssimano la funzione. Posso calcolare ora le equazioni degli assi dei due segmenti, e poi calcolare il punto dove le rette si intersecano. Questo è il centro della circonferenza che, vicino a  $(x, y)$ , approssima al meglio la funzione (può anche essere una circonferenza degenera, cioè una retta). Il raggio di curvatura è il raggio di questa circonferenza, che dai conti viene  $R = \frac{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{y}|}$ .
24. ★ ☆☆☆ La pagina di wikipedia sul Momento d'Inerzia è esauriente. L'insieme di Cantor si può ottenere così: si prenda un segmento lungo  $l$  a

cui si sottrae il terzo centrale, ottenendo due segmenti uguali lunghi  $l/3$ . A ciascuno di questi si sottragga il loro terzo centrale, e così via per ogni segmento che si ottiene.

Se si immagina che l'insieme di Cantor abbia massa  $m$ , si vede che facendolo ruotare attorno al centro, e immaginando che sia rigido, esso ha momento di inerzia  $aml^2$ , dove  $a$  è un numero reale ignoto. Si sa anche che è uguale al momento d'inerzia di due sbarre decentrate, per cui si può applicare il teorema degli assi paralleli: quindi  $aml^2 = 2(a(m/2)(l/3)^2 + (m/2)(l/3)^2)$ , da cui si ottiene  $a = \frac{1}{8}$ .

### 7.3 Ordini e Limiti

25. ☆☆☆ (Soluzione:  $y = -x - x^5 + 5x^9 - 15x^{13} + O(x^{17})$ )
26. ☆☆☆  $e^{x^2+\alpha x} = e^{x^2} e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + (1 + \frac{\alpha^2}{2!})x^2 + (\alpha + \frac{\alpha^3}{3!})x^3 + (\frac{1}{2!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!})x^4 + (\frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!})x^5 + (\frac{1}{3!} + \frac{\alpha^2}{2!2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{\alpha^6}{6!})x^6 + o(x^6)$ .
27. ☆☆☆  $e^{x^2+\alpha x} = e^{x^2}(1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 x^3 + \frac{1}{4}\alpha^4 x^4 + \frac{1}{5}\alpha^5 x^5 + \frac{1}{6}\alpha^6 x^6 + o(\alpha^6))$
28. ☆☆☆  $\frac{1}{\sqrt{1-2x \cos \theta + x^2}} = 1 + \cos(\theta)x + (\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2})x^2 + o(x^3)$ . Bisogna ricordarsi che  $(1 + \epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\epsilon^2 + \dots$
29. ☆☆☆ Sapendo che la derivata di  $t = \tan(x)$  è uguale a  $1 + t^2$ , si possono calcolare rapidamente le prime sei derivate della funzione e inserirle nell'espansione in Taylor (nell'espansione in Taylor le derivate vanno valutate in 0, quindi bisogna ricordarsi che  $t(0) = \tan(0) = 0$ ) ( $\tan x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 + O(x^9)$ )
30. ☆☆☆  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \ln(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}} = -1$
31. ☆☆☆  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}) = \frac{1}{3}$  (MTP2.15)
32. ☆☆☆ Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{x} + \frac{1}{1-\sqrt{1+x}}) = \frac{1}{2}$  (MTP2.16)
33. ☆☆☆  $\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$
34. ☆☆☆ Per  $T$  alta e bassa si intende rispettivamente  $x$  basso e alto:  $x$  è un numero puro, quindi si intende confrontato rispetto a 1, il che è come chiedere che  $T$  sia confrontato con  $\frac{\hbar\omega}{k}$ , che tra l'altro è l'unica altra temperatura nelle equazioni...  
Per  $T$  alto si ha  $S \approx k(1 - \log(x))$ .  
Per  $T$  basso si ha  $S \approx k(xe^{-x} + e^{-x})$ .

35. ☆☆☆ In entrambi i casi il valore approssimato è  $1 + \alpha + \beta$ . È vero che in un caso è  $(1 + \alpha) + \beta$  e nell'altro è  $(1 + \beta) + \alpha$  dando l'idea erronea che  $\alpha$  sia piccolo rispetto a  $\beta$ , ma non ha senso lamentarsi per delle parentesi.

## 7.4 Fisica

36. ☆☆☆ (C3.14)

37. (C5.3)

38. ★★★ Prendiamo  $\mathbf{E} = E\hat{x}$  e  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . L'equazione del moto  $m\ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$  diventa il sistema di due equazioni:

$$(1) \ddot{x} = \frac{qE}{m} + \frac{qB}{m}\dot{y}$$

$$(2) \ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}$$

Ora è possibile derivare la prima equazione e sostituire a destra  $\dot{y}$  con la seconda equazione:  $\ddot{x} = -(\frac{qB}{m})^2 x$ , da cui  $\dot{x} = A \sin(\omega t)$ , dove si definisce  $\omega = \frac{qB}{m}$  (è un seno e non un coseno perché la velocità all'inizio è nulla per ipotesi).

Ora nella prima equazione possiamo calcolare  $\ddot{x}$  e trovare agevolmente  $\dot{y} = A \cos(\omega t) - \frac{E}{B}$ . Imponendo che la velocità iniziale sia nulla si ottiene  $A = \frac{E}{B}$ .

Integrando  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  e imponendo che la posizione iniziale sia l'origine, si ottiene:

$$(1) x = R(1 - \cos(\omega t))$$

$$(2) y = R(\sin(\omega t) - \omega t)$$

Effettuando la sostituzione  $R = \frac{Em}{qB^2}$ . Questa si vede essere l'equazione di una cicloide.

39. ☆☆☆ (C5.17)

40. (C5.18)

41. (C5.19)

42. ★ Ovviamente c'è la gravità. Il punto si stacca non appena l'accelerazione gravitazionale ortogonale alla guida  $g \cos(\theta)$  diventa minore dell'accelerazione centripeta di un'orbita circolare (che approssima localmente la traiettoria parabolica).

Sapendo che  $\tan(\theta) = \left| \frac{dy}{dx} \right| = 2ax$ , si trova  $g \cos(\theta) = \frac{g}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} = \frac{g}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$ ,

mentre l'accelerazione centripeta è  $\frac{v^2}{R} = \frac{-2gy}{R} = \frac{-2gy|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{4ga^2x^2}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$ .

Imponendo l'uguaglianza tra le due accelerazioni si trova che nel punto in cui inizia a staccarsi vale  $1 = \frac{4a^2x^2}{1+4a^2x^2}$  il che non si può verificare.

43. ☆  $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16})$ , dove  $\theta_{\max}$  è l'angolo massimo raggiunto nelle oscillazioni.

44. (C5.88)
45. (C5.128)
46. (C5.132)
47. ★ ☆ (C5.133)
48. ★ ☆☆☆ L'equazione del moto è  $m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos(\omega t)$ , ed è simile ad un'altalena alla quale venga applicata una spinta a una certa frequenza, che non è necessariamente la frequenza tipica dell'altalena  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Ci si aspetta, come su un'altalena, che il moto sia periodico con lo stesso periodo della forzante; dunque  $\omega$  e non  $\omega_0$ . Si prova dunque la soluzione  $A \cos(\omega t)$  (ma anche  $A \sin(\omega t)$  andrà bene).  
Si ottiene  $-mA\omega^2 \cos(\omega t) = -kA \cos(\omega t) + F_0 \cos(\omega t)$ , da cui  $A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$ . Si vede che se la forzante ha frequenza vicina alla frequenza di risonanza  $\omega_0$ , l'ampiezza delle oscillazioni diventa molto alta.
49. ★★ ☆☆☆ (C5.139)
50. (M1.3)
51. ★ ☆☆ (M1.18)
52. ★★ ☆☆☆ (M2, nella parte di teoria)
53. ★ ☆☆☆ (M2, nella parte di teoria)
54. ☆ (M2.E9)
55. ☆ (M2.E10)
56. ☆ (M2.E11)
57. ★ (M2.E12)
58. ☆ (M2.9)
59. ☆☆☆ In un istante il razzo ha massa  $m$  ed è fermo nel suo sistema. Poi la massa del razzo cambia di  $\partial m$  (negativo) e viene eiettato dall'ugello  $-\partial m$  di carburante a velocità  $u$  rispetto al razzo. La conservazione della quantità di moto impone  $0 = -\partial m(-u) + (m + \partial m)\partial v$ . Ignorando il differenziale di second'ordine si trova  $\partial v = -u \frac{\partial m}{m}$ , ed integrando  $\Delta v = -u \ln\left(\frac{m_{fin}}{m_{in}}\right) = u \ln\left(1 + \frac{m_c}{m_0}\right)$ , dove  $m_c$  è la massa del carburante e  $m_0$  è la massa finale, cioè del razzo che ha esaurito il carburante.  
 $\Delta v = 3u$  corrisponde a  $m_c = m_0(e^3 - 1) \approx 19m_0$ .
60. ★ ☆☆☆ *Strato di ghiaccio su un lago* (SNS 2015 1) (si trova online).

61. ☆☆☆ Poiché  $V = R\dot{Q}(t)$  e  $C = \frac{Q(t)}{V}$ , si ha  $\dot{Q}(t) = \frac{1}{RC}Q(t)$ , e quindi  $Q(t) = Q(0)e^{-t/RC}$ .  $RC$  è dunque il tempo caratteristico della decrescita esponenziale (cioè il tempo in cui la carica diminuisce di un fattore  $e$ ).  
 In un conduttore a forma di prisma, le cui facce sono le piastre del condensatore, Si vede bene che  $RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$ .  
 Ora consideriamo un conduttore di forma arbitraria con due piastre di forma arbitraria. Posso dividere ogni piastra in tante aree infinitesime e per ciascuna di esse considerare il percorso che fa la corrente per arrivare all'altra piastra. Questo condensatore è localmente un prisma (così come un cavo di alimentazione è localmente un cilindro), e ciascun condensatore è indipendente dagli altri, quindi la carica decresce di un fattore  $\frac{\epsilon}{\sigma}$ . Poiché il valore totale di  $RC$  è uguale al tempo caratteristico, è uguale ancora a  $\frac{\epsilon}{\sigma}$ .

62. ☆☆☆  $U = -\rho gl^2/2$

63. ★★★ ☆☆☆  $v(x) = \sqrt{T(x)/\rho}$  (come viene dall'esercizio di ricavare l'equazione delle onde), dove  $v(x)$  è la velocità dell'onda ad altezza  $x$  dall'alto, e  $T(x)$  è la tensione della corda in quel punto. Poiché la tensione della corda è dovuta al peso della massa sottostante, vale  $T = g\rho(l-x)$ . Quindi  $v(x) = \sqrt{g(l-x)}$ . Il tempo impiegato è  $T = \int dt = \int_l^0 \frac{dx}{v(x)} = \int_l^0 \frac{dx}{\sqrt{g(l-x)}} = [-2\sqrt{\frac{l-x}{g}}]_0^l = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$

64. ★ ☆☆☆ Poiché le uniche grandezze in gioco sono  $m$ ,  $g = [l]/[t^2]$ ,  $v_0 = \frac{[l]}{[t]}$ ,  $b = \frac{[m][l]}{[t]^2} \frac{[t]^n}{[l]^n}$ , si vede come per ottenere un tempo si potranno usare solo  $g$ ,  $v_0$  e  $\frac{b}{m}$ . Queste sono tre grandezze in  $[l]$  e  $[t]$ , quindi esiste una loro combinazione adimensionale, cioè  $v_0 \sqrt[n]{\frac{b}{mg}}$ . In generale quindi  $v$  si può esprimere come una combinazione a caso che abbia le unità di misura giuste (ad esempio  $\frac{v_0}{g}$ ) moltiplicata per una qualche funzione analitica  $f_n$  (che dipenderà da  $n$  visto che al cambiare di  $n$  le equazioni del moto da integrare cambieranno!) della quantità adimensionale:  $v = \frac{v_0}{g} f_n(v_0 \sqrt[n]{\frac{b}{mg}})$ .  
 Fin qui si arriva solo con la Matematica, ora bisogna usare anche la Fisica. Se  $b$  tende a 0, il tempo per arrivare al punto più alto deve diventare  $\frac{v_0}{g}$ , quindi  $f_n(+\infty) = 1$ .

Integrando invece le equazioni del moto (ricordandosi che ci si trova nel caso  $F(v)$  affrontato nell'esercizio 52) si trova:

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = F(v) = -mg - bv^n$$

$$t = \int dt = \int_{v_0}^0 \frac{m \partial v}{-mg - bv^n} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{\partial v}{1 + bv^n/mg}$$

Ora, con il cambio di variabili nella variabile adimensionale  $w = \sqrt[n]{\frac{b}{mg}} v$ , ottengo:

$$t = \frac{1}{g} \sqrt[n]{\frac{mg}{b}} \int_{\sqrt[n]{\frac{b}{mg}} v_0}^0 \frac{\partial w}{1 + w^n}, \text{ integrale che può essere fatto con l'analisi complessa (ma probabilmente non con metodi più facili).}$$

In ogni caso si può verificare che per  $b$  che tende a 0, si sta integrando 1, e la soluzione tende effettivamente a  $\frac{v_0}{g}$  come desiderato.

La distanza compiuta orizzontalmente si può calcolare in questo modo: ripetendo i conti dati per velocità verticale  $v_0 \sin(\theta)$  con gravità  $g$ , e per velocità orizzontale  $v_0 \sin(\theta)$  con gravità 0. I metodi utilizzati sono gli stessi.

65. ★ ☆☆☆ (C5.43).

66. ★★★ ☆ Si rimanda alla pagina di wikipedia “Equazioni dei telegrafisti”. Si faccia attenzione al fatto che lì si usano  $R$ ,  $L$ ,  $C$  e  $G$  per indicare rispettivamente la resistenza, induttanza, capacità e conduttanza *per unità di lunghezza*, mentre nel testo dell’esercizio si è indicato il valore per unità di lunghezza con le lettere minuscole per sottolineare la differenza.

Si è scelto di usare la conduttanza per il resistore tra i due cavi perché la conduttanza è infinitesima, mentre la resistenza sarebbe stata infinita; inoltre perché la conduttanza  $g dx$  è additiva in  $dx$  (i resistori che collegano i due cavi lunghi sono in parallelo). Quando si usa  $r dx$ , invece, esso è infinitesimo ed è additivo poiché i resistori lungo ciascun cavo sono in serie.

67. IphO 2014, problema 3 (si trova online)

68. IphO 2006/2007 (?), problema sull’amplificatore lock-in.

## 7.5 Derivate e Integrali

69. L’espressione  $1 + x^2$  è già stata vista quando si calcola la derivata della tangente  $t = \tan(x)$ , ovvero  $\frac{dt}{dx} = 1 + t^2$ , da cui  $\frac{\partial(\arctan(t))}{t} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ . Si ha quindi  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$ .

70. ☆☆☆ Sia che gli estremi siano 0 e  $\pi/2$  oppure 0 e  $\pi$ , è facile verificare che nell’integrale per parti il termine non sotto il segno d’integrale è nullo. Poi basta usare  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ . Sia nel caso dei coseni che dei seni.  $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta \partial\theta = \frac{1}{5}$ , che tra l’altro viene molto più velocemente con il cambio di variabili  $\alpha = 5\theta$ .

71. ☆☆☆  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = (-1/2)!$  usando il cambio di variabili  $t = x^2$ . In effetti non si sa ancora quanto vale  $(-1/2)!$ ...

72. ★ ☆☆☆  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x dt = \frac{1}{\alpha^{x+1}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^x \partial s$  per cambio di variabili  $s = \alpha t$ .

Chiamiamo  $f(x, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x dt$ . Si vede che  $f(0, \alpha) = \alpha^{-1}$ . Inoltre  $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x dt = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-\alpha t} t^x dt = -f(x+1, \alpha)$ . Questo permette di scoprire che  $f(n, \alpha) = (-\frac{\partial}{\partial \alpha})^n \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{(n+1)}}$ . Ponendo  $\alpha = 1$  si trova  $f(n, 1) = n!$ , che era quello che volevamo.

73. ☆☆☆  $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-s} ds/2 = \pi$  con  $s = r^2$ . Quindi  $I = (-1/2)! = \sqrt{\pi}$

74. ☆☆☆ Se  $t = \tan(\alpha/2)$  si ricavano facilmente  $1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha/2}$  e quindi si trovano  $\cos \alpha/2$  e, moltiplicando per  $t$ ,  $\sin \alpha/2$ . Con le formule di duplicazione del seno e del coseno è facile trovare  $\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$  e  $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ .

75. ★★ ☆☆☆ Convieni sempre effettuare la sostituzione  $x = u/a$ , in modo che al denominatore ci sia  $\pm 1 \pm x^2$  o una sua radice. Ci si aspetta che si troveranno arcoseni, arcotangenti, magari anche iperboliche. Quindi bisogna fare le derivate delle funzioni trigonometriche ed iperboliche per vedere quale corrisponde a quale integrale.

Quanto basta sapere di seno iperbolico e coseno iperbolico è che sono l'uno la derivata dell'altro, e che  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ : questo permetterà di esprimere uno in funzione dell'altro. Ad esempio  $\frac{\partial}{\partial x} \sinh(x) = \cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$ , quindi ho scoperto che  $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arcsinh}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ , che ricorda il terzo integrale dopo un cambio di variabili.

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(a^2-u^2)}} = \arcsin(u/a)$$

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(u^2-a^2)}} = \operatorname{arccosh}(u/a)$$

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(u^2+a^2)}} = \operatorname{arcsinh}(u/a)$$

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(-u^2-a^2)}} = \pm i \operatorname{arcsinh}(u/a)$$

$$\int \frac{\partial u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \arctan(u/a)$$

$$\int \frac{\partial u}{a^2-u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctanh}(u/a)$$

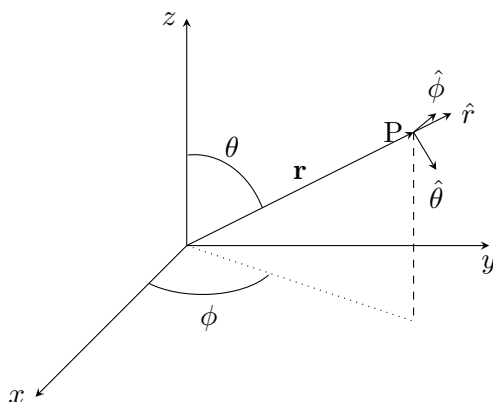
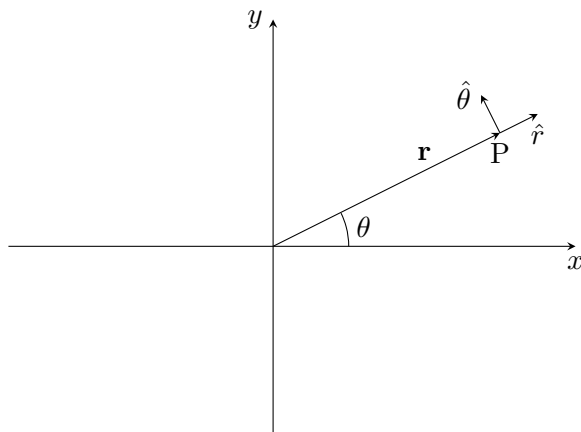
76. ★ ☆☆☆  $f(x, y, z) = 0$  localmente al punto di interesse avrà l'equazione di un piano  $Ax + By + Cz = D$ .

Ora, tenendo  $y$  fisso, si ha  $A dx + C dz = 0$ , quindi  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{A}{C}$ , e analogamente si ottiene  $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{B}{C}$  e  $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{A}{B}$ .

Quindi si ha  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{A}{C} = -(-\frac{B}{C})(-\frac{A}{B}) = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$  e si spiega la presenza del segno meno.



## 7.6 Calcolo sui Vettori, per Meccanica



77. ★ ☆ In polari:

$$\hat{r} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ e } \hat{\theta} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} \text{ e } \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}.$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}.$$

In sferiche:

$$\hat{r} = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))$$

$$\hat{\theta} = (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), -\sin(\theta))$$

$$\hat{\phi} = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin(\theta)\hat{\phi}; \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r} + \dot{\phi}\cos(\theta)\hat{\phi}; \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\sin(\theta)\hat{r} - \dot{\phi}\cos(\theta)\hat{\theta}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin(\theta)\hat{\phi}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + (2\dot{r}\dot{\phi}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta) + r\ddot{\phi}\sin(\theta))\hat{\phi}$$

78. ★ ☆ Scelgo un sistema di riferimento in cui il vettore velocità angolare è  $\mathbf{\Omega} = \omega \hat{z}$ . Allora  $\dot{\hat{x}} = \omega \hat{y}$ ;  $\dot{\hat{y}} = -\omega \hat{x}$ ;  $\dot{\hat{z}} = 0$ , e quindi per un vettore generico vale  $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}$ . Quindi questa formula vale sempre.
79. ★ ☆☆☆ Una rotazione in polari può cambiare solo l'angolo  $\theta$  e avviene attorno all'asse  $z$ : è quindi  $\mathbf{\Omega} = \dot{\theta} \hat{z}$ , dove  $z = r \times \phi$ . In questo modo si possono ricalcolare le derivate dei versori  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$ .  
Una rotazione in sferiche può cambiare sia l'angolo  $\theta$  ruotando attorno all'asse del versore  $\phi$ , sia l'angolo  $\phi$  ruotando attorno all'asse  $z$ . La velocità angolare è dunque la somma di questi due effetti (così l'istante successivo  $\theta$  cambia di  $\dot{\theta} dt$  e  $\phi$  cambia di  $\dot{\phi} dt$ , esattamente come deve avvenire):  $\mathbf{\Omega} = \dot{\theta} \hat{\phi} + \dot{\phi} \hat{z}$ , dove  $\hat{z}$  è il versore verticale che può essere espresso come combinazione lineare di  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$ .  
Quindi la rotazione che cambia  $\phi$  ha come  $\mathbf{\Omega}$  corrispondente  $\dot{\phi} \hat{z}$ , ha come raggio corrispondente la distanza tra la punta del vettore che ruota con l'asse di rotazione, quindi  $r \sin(\theta)$ , e l'accelerazione centripeta corrispondente è  $a_{centripeta} = -r \sin(\theta) \dot{\phi}^2 \hat{y} = -r \sin(\theta) \dot{\phi}^2 (\sin(\theta) \hat{r} + \cos(\theta) \hat{\theta}) = -r \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \hat{r} - r \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \hat{\theta}$ , che sono due dei nove termini dell'accelerazione in sferiche  $\ddot{\mathbf{r}}$  calcolata negli esercizi precedenti.

## 7.7 Avanzati

80. ★ ☆☆☆ In un piccolo tratto infinitesimo la forza che agisce è la gravità verticale più le due forze laterali, le quali hanno dunque uguale componente orizzontale, che chiamiamo  $T_0 = T \cos(\phi)$ . Nel punto più basso della corda, la tensione è tutta orizzontale; partendo da lì, la tensione in un punto spostato a margine è dato dalla forza peso della corda, quindi è  $T \sin(\phi) = \lambda s g$ , dove  $s$  è la lunghezza della corda. Quindi  $\frac{dy}{dx} = \tan(\phi) = \frac{\lambda s g}{T_0} = \frac{s}{a}$  dove si definisce per semplicità  $a = \frac{T_0}{\lambda g}$ . Questa equazione differenziale si può risolvere in tanti modi.  
Ad esempio, poiché  $dy = \frac{s}{a} dx$ , so che  $\partial s = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}} dx$ , e quindi  $x = \int dx = \int \frac{\partial s}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}} = a \operatorname{arcsinh}(\frac{s}{a}) + \text{costante}$ . Si ponga la costante a zero cambiando l'origine degli assi. Ora  $s = a \sinh(\frac{x}{a})$ . Inserendola nell'equazione di partenza abbiamo  $\frac{dy}{dx} = \sinh(\frac{x}{a})$ , ovvero  $y = a \cosh(\frac{x}{a})$ .
81. ★★ *Operatori (I parte)*.  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2$ . Infatti  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$  in generale.  
Si intendeva chiaramente se  $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$  (il + mancava nella domanda). Questo è falso in generale perché già al secondo ordine, nel secondo membro ho la combinazione  $\beta\alpha$ , che non si può mai ottenere nel primo membro.  
La derivata di un operatore è la differenza tra due operatori, diviso uno scalare, e poi facendo tendere lo scalare a zero. Il risultato di questa operazione, in

base alle definizioni, è ancora un operatore.

$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha(t)\beta(t)) = \frac{\partial\alpha(t)}{\partial t}\beta(t) + \alpha(t)\frac{\partial\beta(t)}{\partial t}$ . Si noti che l'ordine è importante.

82. ★★★ *Operatori (II parte).*  $\frac{\partial}{\partial t}e^{\alpha t} = \frac{\partial}{\partial t}(1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!}) + \dots =$   
 $(\alpha + \alpha^2 + \frac{\alpha(\alpha t)^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha t)^3}{3!}) + \dots = \alpha e^{\alpha t}$

$\frac{\partial}{\partial t}e^{\alpha t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^N = N\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^{N-1}\frac{\alpha}{N} = \left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^N \left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^{-1}\alpha =$   
 $\alpha e^{\alpha t}\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^{-1} = \alpha e^{\alpha t}$  dove nell'ultimo passaggio si è eliminato un termine

che tende a 1. Si nota come  $\alpha$  commuti con i termini tra parentesi poiché l'unico operatore all'interno è  $\alpha$  stesso, e chiaramente  $\alpha$  commuta con se stesso.

$e^{\alpha t}\beta e^{-\alpha t} = \left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^N \beta \left(1 - \frac{\alpha t}{N}\right)^N$ , che vuol dire applicare  $N$  volte a  $\beta$  una moltiplicazione a sinistra e una moltiplicazione a destra per i due fattori dentro le parentesi. Vediamo meglio cosa succede:  $\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)\beta\left(1 - \frac{\alpha t}{N}\right) =$   
 $\left(\beta + \frac{t}{N}(\alpha\beta - \beta\alpha)\right)$ . Ora, se uso la definizione suggerita  $\hat{\alpha}\beta = \alpha\beta - \beta\alpha$ , ho che  $\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)\beta\left(1 - \frac{\alpha t}{N}\right) = \left(1 + \frac{\hat{\alpha}t}{N}\right)\beta$ , e applicarla  $N$  volte significa trovare  $\left(1 + \frac{\hat{\alpha}t}{N}\right)^N \beta = e^{\hat{\alpha}t}\beta$  (la  $t$  all'esponente è mancante nel testo dato).

$\frac{\partial}{\partial t}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)}e^{-\alpha(t)}\frac{\partial}{\partial t}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)}e^{-\hat{\alpha}(t)}\frac{\partial}{\partial t}$ . Per semplicità di notazione si scrive  $e^{(\alpha)}e^{-\hat{\alpha}}D$ , dove è sottinteso che  $\alpha = \alpha(t)$ . Ora si ottiene  $e^{\alpha}(D - \hat{\alpha}D + \frac{\hat{\alpha}^2}{2!}D - \frac{\hat{\alpha}^3}{3!}D + \dots)$ . Ora usando che  $D$  con niente a destra è  $D1 = 0$ , e che  $\hat{\alpha}D = \alpha D - D\alpha = D\alpha = \dot{\alpha}$ , si può scrivere  $e^{\alpha}(0 + \dot{\alpha} - \frac{\hat{\alpha}}{2!}\dot{\alpha} + \frac{\hat{\alpha}^2}{3!}\dot{\alpha} - \dots) = e^{\alpha}\frac{1-e^{-\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}}\dot{\alpha}$ , dove nell'ultimo passaggio si è riconosciuta la serie di Taylor di  $\frac{1-e^{-x}}{x}$ . Si noti come  $\dot{\alpha}$  non commuti necessariamente con  $\alpha$ , poiché  $\alpha(t)$  non commuta necessariamente con  $\alpha(t')$ .

83. ★★ ☆ Il Teorema di Mamikon è vero perché il segmento tangente può solo ruotare o muoversi parallelamente a se stesso (il segmento e il versore tangente alla traiettoria  $(\dot{x}(\lambda), \dot{y}(\lambda))$  sono paralleli per ipotesi!). Ora, l'area spazzata è dovuta alla rotazione del segmento, non al suo moto parallelo a se stesso! Un'asta che si muove parallelamente a se stessa infatti non spazza area.

Anche senza sapere i raggi dei due cerchi che formano l'anello circolare, si vede che l'area dell'anello è spazzata dal segmento lungo  $a$  (che parte tangente dal cerchio e arriva al cerchio esterno), se lo si fa ruotare attorno al cerchio interno (ruoterà di un angolo  $2\pi$ ). Per il Teorema di Mamikon è l'area spazzata da un segmento lungo  $a$  che ruota di  $2\pi$ , ovvero l'area di un cerchio di raggio  $a$ , cioè  $\pi a^2$ .

L'area sottesa dalla cicloide è un problema complicato, perché non bisogna mantenere il segmento tangente di lunghezza costante. Si rimanda alla pagina di wikipedia in inglese "Visual Calculus".

Il laccio tenuto dal bambino è lungo  $a$ , si muove parallelamente a se stesso come richiesto dal Teorema di Mamikon, e ruota in tutto di  $\pi/2$ . L'area spazzata è dunque quella di un quarto di cerchio, cioè  $\pi a^2/4$ .

84. ★★ Per come è stata definita, si chiede che il segmento parallelo alla curva verso l'asse  $y$  sia lungo  $a$ , ovvero  $a^2 = x^2 + (\frac{dy}{dx})^2 x^2$ , da cui, isolando la derivata, si trova  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$  (si ricorda che la funzione è decrescente per come sono stati scelti gli assi).

L'ODE trovata può essere integrata, ma non è illuminante.

85. ★ ☆☆☆ I risultati si ottengono se  $f(x)$  è una funzione che va a 0 all'infinito più velocemente di qualunque polinomio (cioè con ordine di infinitesimo maggiore), altrimenti alcuni integrali non convergono e non scompare un termine quando si fa l'Integrale per Parti.

Nel primo esercizio c'è un lapsus all'esponente (mancava la  $x$ , senza la quale l'esercizio è banale perché la costante esce fuori):  $F[e^{i\alpha x} f(x)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega+\alpha)x} f(x) dx = F[f(x)](\omega + \alpha)$ .

$F[\frac{\partial}{\partial x} f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial t} f(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (e^{i\omega t}) f(t) dt = -i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\omega t}) f(t) dt = -i\omega F[f(x)](\omega)$ , dove nell'Integrale per Parti l'altro termine è nullo.

$\frac{\partial}{\partial \omega} F[f(x)](\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} i t f(t) dt = F[ix f(x)](\omega)$ . Se chiamiamo la funzione rettangolo  $R(x)$  si ha:

$$F[R(x)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} R(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \right]_{-1}^{+1} = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2\pi i \omega} = \frac{\sin(\omega)}{\pi \omega}$$

86. ☆☆☆ Se moltiplico una funzione continua e con integrale finito per una senoide di frequenza molto alta, mi aspetto che l'ansa alta e quella bassa della senoide, essendo molto vicine e molto strette, siano alte uguali (vengono moltiplicate per valori quasi uguali di  $f(x)$ ). Quindi aumentando sempre più la frequenza il valore dell'integrale va a zero.

87. ★ ☆☆☆  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = 0$  chiaramente, visto che il numeratore decresce e il denominatore è circa  $x^2$ , che è un numero finito. L'unico problema si ha se  $x = 0$ : in questo caso il limite è  $1/\epsilon$ , ovvero infinito. Il grafico diventa una sorta di campana centrata in 0 che diventa via via più stretta e alta.  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1}$  dove  $y = x/\epsilon$ . L'integrale è  $\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) = \pi$ .

E' chiaro che mentre la funzione a campana diventa stretta e alta, l'area sottesa resta costante.

Per fare  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} f(x) dx$  basta notare che la campana stretta e alta fa in modo che contino solo i valori di  $f(x)$  con  $x$  vicino a 0: quelli lontani vengono moltiplicati per valori molto piccoli, e sono irrilevanti. Al limite,

conta solo il valore  $f(0)$  e i valori vicini (che sono praticamente identici), moltiplicati per  $\pi$ . Il risultato è dunque  $\pi f(0)$ .

88. ☆ La gaussiana è una funzione a campana (anche se non è quella dell'esercizio precedente). In ogni caso come  $\delta(x)$  va bene una funzione di qualunque forma, anche a rettangolo, o a triangolo, o a pinna di squalo, purché abbia area 1 e ampiezza infinitesima. I motivi per cui  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$  sono gli stessi dell'esercizio precedente: avente la funzione ampiezza infinitesima, contano solo i valori  $f(x)$  con  $x \approx 0$ , che sono tutti all'incirca  $f(0)$  (se  $f$  è continua). Quindi sto facendo la media di questi valori (l'integrale di una funzione moltiplicata per un'altra funzione di area 1 corrisponde a una media!), e troverò necessariamente  $f(0)$ .
89. ☆  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f'(x)dx = -f'(0)$
90. ☆  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)f(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f^{(n)}(x) dx$  applicando  $n$  volte l'integrazione per parti, ottenendo infine  $(-1)^n f^{(n)}(x)$
91. ★★ (C5.139 e C5.140)
92. ★★ ☆☆☆ In base a quanto detto, una regione perde calore se ha più calore della media del calore delle regioni circostanti (delle celle circostanti nel nostro modello a cubetti, oppure della superficie sferica circostante se prendiamo una regione sferica). Quindi  $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}$  deve essere proporzionale al laplaciano  $\nabla^2 Q(x,t)$ , e la costante di proporzionalità è positiva: infatti se la regione ha meno calore che le regioni circostanti, si è visto che il laplaciano è positivo (la somma delle derivate seconde è positiva!) e con costante positiva si ha un aumento del calore nel tempo. L'equazione quindi è  $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = D\nabla^2 Q(x,t)$ , dove  $D > 0$  include tutte le informazioni sul tipo di materiale. Si noti come si è usato il postulato sottointeso che il calore non viene mai creato né distrutto, ma solo trasportato per diffusione nel metodo indicato. Questa è l'*equazione del calore* o *equazione di diffusione*.
93. ★ ☆☆☆  $n! = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt$ . Per trovare il massimo dell'integrando (al variare di  $t$ ), poiché  $e^{-t}t^n = e^{-t+n \ln(t)}$ , basta imporre che  $-t + n \ln(t)$  abbia valore massimo, cioè derivata nulla:  $-1 + n/t = 0$ , ovvero si ha massimo per  $t = n$ . Espandendo  $f(t) = -t + n \ln(t)$  per  $t \approx n$  si ottiene con Taylor  $f(t) = f(n) + f''(n)(t-n)^2/2$  (poiché la derivata prima si annulla perché è un massimo!) ovvero  $-n + n \ln(n) - (t-n)^2/2n$ , che reinserito nell'esponente dell'integrando da l'integrale voluto:  $\int_0^{+\infty} e^{-n+n \ln n - \frac{(t-n)^2}{2n}} dt$  (nel testo del problema c'erano un paio di lapsus).  
Tirando fuori le costanti troviamo  $e^{-n+n \ln n} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}} dt$ . Poiché l'integrando decresce rapidamente quando ci si allontana da  $n$ , si può estendere

questo integrale da  $-\infty$  a  $+\infty$  commettendo un errore trascurabile. Ora, noi sappiamo l'area totale sottesa da una gaussiana grazie alla formula dell'esercizio 73 ritoccata con un cambio di variabili, ovvero  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ . Si ottiene dunque  $e^{-n} n^n \sqrt{2n\pi}$ , che è esattamente l'approssimazione di Stirling.

94. ★★ ☆ Si definisce  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  (c'era un lapsus nel testo riguardo agli estremi di integrazione). Ora  $I^n = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} S_n(r) \partial r$ , dove  $S_n(r)$  è la superficie  $(n-1)$ -dimensionale di un'ipersfera a  $n$  dimensioni. Calcoliamola: chiaramente  $S_n(r) = S_n(1)r^{(n-1)}$ , quindi ottengo  $I^n = S_n(1) \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{(n-1)} \partial r = S_n(1) \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{(n-2)/2} \partial s \frac{1}{2} = (\frac{n-2}{2})! S_n(1) \frac{1}{2}$ . Quindi  $S_n(r) = r^{n-1} S_n(1) = r^{n-1} \frac{2\pi^{n/2}}{(\frac{n-2}{2})!}$ . Per trovare il volume basta integrare:  $V_n(R) = \int_0^R S_n(r) \partial r = \frac{R^n}{n} \frac{2\pi^{n/2}}{(\frac{n-2}{2})!} = \frac{\pi^{n/2} R^n}{(\frac{n}{2})!}$  usando il fatto che  $\frac{(\frac{n-2}{2})! \frac{n}{2}}{(\frac{n}{2})!} = (\frac{n}{2})!$  per le proprietà del fattoriale.

95. ★★★ Il suggerimento dato nel testo è sufficiente. I conti sono fatti, ad esempio, sulla pagina di wikipedia "Beta di Eulero".

96. ★ Si può provare a dire  $\sin(x) = \dots(x+3\pi)(x+2\pi)(x+\pi)x(x-\pi)(x-2\pi)(x-3\pi)\dots$ , ma questa espressione non converge mai (esistono sempre infinite radici da cui sono molto distanti). Se l'espressione deve andare a 1 quando  $x=0$ , si fa in modo che tutti i fattori vadano a 1, dividendo per il fattore giusto (ovviamente si intendono tutti i fattori tranne  $x$ , per soddisfare  $\sin(x) \approx x$  quando  $x$  va a 0). Si ottiene così  $\sin(x) = \dots(1 + \frac{x}{3\pi})(1 + \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{\pi})x(1 - \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 - \frac{x}{3\pi})\dots = x(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})\dots = x \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2})$ , dove la  $\Pi$  indica la produttoria per tutti i  $k$ , in questo caso da 1 a  $+\infty$ . Si noti come questa espressione non è stata effettivamente dimostrata in quanto potrebbero esserci altri zeri nel piano complesso che stiamo ignorando, oppure potrei moltiplicare per esponenziali (che non aggiungono nuovi zeri), oppure altro. In ogni caso questa espressione è giusta.

97. ★★★  $\sinh(x) = \frac{1}{2}((1 + \frac{x}{N})^N - (1 - \frac{x}{N})^N) = \frac{1}{2}((1 + \frac{x}{N}) - (1 - \frac{x}{N})) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} ((1 + \frac{x}{N})^2 + (1 - \frac{x}{N})^2 - 2(1 + \frac{x}{N})(1 - \frac{x}{N}) \cos(\frac{2\pi k}{N})) = \frac{x}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (2 + 2\frac{x^2}{N^2} - 2 \cos(\frac{2\pi k}{N}) + 2\frac{x^2}{N^2} \cos(\frac{2\pi k}{N}))$ .

Ora  $\cos(2\pi k/N) = 1 - \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 k^2}{N^2} + O(\frac{k^4}{N^4})$ . Si ottiene:

$\sinh(x) = \frac{x}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (4\frac{x^2}{N^2} + \frac{4\pi^2 k^2}{N^2} + O(\frac{k^4}{N^4}) + O(\frac{k^2 x^2}{N^4}))$ , ma l'ultimo  $O$  si può omettere poiché, quando  $x \gg k$  è più piccolo di  $O(\frac{1}{N^4})$ , e poiché  $k > 1$  si può includere nell'altra  $O$ ; mentre quando  $k \gg x$ , il termine è più piccolo di  $O(\frac{k^4}{N^4})$ , e quindi è già incluso nell'altra  $O$ .

Si ottiene così qualcosa da cui si riesce a intravedere il risultato che ci si aspettava: infatti, raccogliendo, si trova:

$\sinh(x) = \frac{x}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (4 \frac{k^2 \pi^2}{N^2}) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} + O(\frac{k^2}{N^2}))$  (al contrario dell'esercizio precedente qui c'è il + poiché si sta parlando del seno iperbolico). Un grosso problema è che, verso la fine della produttoria  $k \approx N$ , e  $\frac{k}{N}$  diventa non trascurabile. Come però fatto notare nel suggerimento (iii), quando questo avviene il contenuto della produttoria non dipende più da  $x$ : infatti  $\frac{x^2}{k^2} \approx \frac{x^2}{N^2}$ , che tende a zero ed è trascurabile in confronto a  $1 - O(\frac{k^2}{N^2})$ . La produttoria si può quindi dividere in due parti: all'inizio  $k \ll N$  e quindi  $O(\frac{k^2}{N^2})$  è trascurabile, mentre alla fine  $N \approx k \gg x$ , e in questo caso posso trascurare il termine che dipende da  $x$  (a essere precisi c'è una fase intermedia in cui entrambi i termini sono trascurabili, e quindi contribuisce con degli 1 alla produttoria...). Il prodotto sulla parte finale non dipende da  $x$  e viene chiamato  $B$ . Il prodotto sulla parte iniziale può essere reso eliminando  $O(\frac{k^2}{N^2})$  ed estendendo l'estremo superiore della produttoria fino a  $+\infty$  (dopo un po' si sta praticamente moltiplicando solo per 1). Si ottiene quindi:

$$\sinh(x) = B \frac{x}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (4 \frac{k^2 \pi^2}{N^2}) \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2})$$

Ora, ho ottenuto quello che volevo a parte per il fattore  $\frac{1}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (4 \frac{k^2 \pi^2}{N^2})$ , che chiamo  $A$  e che non dipende da  $x$ . Ho quindi:

$$\sinh(x) = ABx \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2})$$

Al prim'ordine questa espressione fa  $x = ABx$ . Ottengo così che  $AB = 1$ , e quindi:

$$\sinh(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}) \quad \text{Da } \sin(x) = \frac{1}{i} \sinh(ix) \text{ si ottiene facilmente anche:}$$

$$\sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2})$$

98. Guardando il terzo ordine dell'espressione precedente si ottiene:  $-\frac{x^3}{3!} = -\frac{x^3}{\pi^2} (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots)$ , da cui si conclude facilmente che  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$  (*Problema di Basilea*).

## A La seconda legge di Newton

Applichiamo quanto si è imparato nella risoluzione delle equazioni differenziali alla seconda legge di Newton:

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

In generale la forza dipenderà dal tempo  $t$  (ad esempio se qualcuno applica una forza su un corpo solo per un certo periodo), dalla posizione del corpo  $x$  (ad esempio per la forza di gravità) e dalla sua velocità  $v$  (ad esempio per le forze di attrito):

$$F(t, x, v) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Il nostro scopo è quello di trovare la traiettoria del corpo, ovvero trovare  $x = x(t)$ . Si presuppone di conoscere le condizioni iniziali al tempo  $t_0$ , ovvero posizione  $x_0 = x(t_0)$  e velocità  $v_0 = v(t_0)$ . Come si può facilmente prevedere, l'equazione precedente non è risolvibile in generale in forma esplicita. Ovviamente una soluzione esiste (poiché *qualcosa* fisicamente deve accadere), e può essere trovata con metodi numerici.

Tuttavia, è possibile trovare una soluzione se la forza dipende da una sola delle tre variabili citate. Vediamo i casi uno alla volta.

Se l'equazione è della forma

$$F(t) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

per trovare  $x = x(t)$  è sufficiente integrare due volte:

$$x(t) = \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^{t'} \frac{F(t'')}{m} dt'' \right) dt'$$

Se l'equazione è della forma

$$F(x) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

è possibile effettuare le seguenti sostituzioni:

$$\frac{F(x)}{m} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

A questo punto è possibile usare la separazione delle variabili  $x$  e  $v$ :



$$\int_{x_0}^x F(x') dx' = m \int_{v_0}^v v' dv' = \frac{1}{2}mv^2$$

il che spiega come emerge la nota espressione dell'energia cinetica: è un fatto puramente matematico legato alle forze che dipendono solo da  $x$ .

Dall'espressione trovata è possibile in linea di principio trovare  $v(x)$ , da cui poi, invertendo la definizione di  $v$ , si ottiene:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{v(x')} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0$$

da cui, sempre in linea di principio, si può invertire e trovare  $x = x(t)$ .

Come esercizio, si calcoli la traiettoria di un corpo di massa  $m$  trascurabile, posta a distanza  $R$  rispetto alla massa  $M$ , sotto l'azione della forza gravitazionale. Si tratta ovviamente del caso di una forza che dipende solo dalla posizione (si immagini la massa  $M$  ferma).

Infine, se l'equazione è della forma

$$F(v) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

si possono percorrere due strade.

La prima è scrivere l'accelerazione come  $\frac{dv}{dt}$ , applicare la separazione delle variabili, invertire per trovare  $v = v(t)$  da cui, integrando nel tempo, è possibile trovare  $x = x(t)$ .

L'altro modo è esprimere l'accelerazione come  $\frac{dv}{dx}v$  (come nel caso precedente), applicare la separazione delle variabili, invertire per trovare  $v = v(x)$ , e poi concludere come si era concluso nel caso precedente.

## B Complementi sugli operatori differenziali per campi nello spazio

Poiché è utile in Meccanica, si vuole per prima cosa assicurare che non ci siano difficoltà concettuali nel derivare un vettore  $\mathbf{A}$ . Immaginiamo che un vettore dipenda da un parametro  $t$ . Variando quest'ultimo di una quantità infinitesima  $dt$  il vettore cambia infinitesimalmente della quantità:

$$d\mathbf{A} = \mathbf{A}(t + dt) - \mathbf{A}(t)$$

la quale è ancora un vettore (infinitesimo), essendo la differenza di due vettori. A questo punto si può definire la derivata come:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\mathbf{A}(t + dt) - \mathbf{A}(t)}{dt}$$

che è un vettore non infinitesimo.

Si noti come in questa definizione *non richiede alcuna scelta di coordinate*: è una definizione assoluta, che vale in cartesiane come in polari e in sferiche.

Solo in cartesiane, dove i versori sono costanti, è vero che la derivata di un vettore è uguale alla derivata delle componenti:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) = \frac{dA_x}{dt}\hat{x} + \frac{dA_y}{dt}\hat{y} + \frac{dA_z}{dt}\hat{z}$$

Un operatore differenziale utile che non è stato introdotto precedentemente è il *laplaciano di un campo scalare* in un punto si può calcolare nel seguente modo: si prenda una superficie che circonda il punto, si calcoli la differenza tra il valor medio del campo scalare sulla superficie e valore del campo nel punto di interesse, e si calcoli il rapporto tra questa quantità e il valore della superficie. Il risultato è proporzionale al laplaciano (la costante di proporzionalità è positiva; il suo valore non ci interessa). Se il laplaciano è zero, il valore del campo in un punto è uguale alla media del valore nei punti di una sfera circostante. È possibile dimostrare che il laplaciano di un campo scalare  $\phi$  si possa calcolare come la divergenza del gradiente di  $\phi$ :

$$\text{lapl}(\phi) = \nabla \cdot (\nabla(\phi)) = \nabla \cdot (\nabla\phi) = (\nabla \cdot \nabla)\phi = \nabla^2\phi$$

Scritto in coordinate, se siamo in tre dimensioni, si ha:

$$\nabla^2\phi(x, y, z) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Il laplaciano è molto importante in fisica, in particolare nella diffusione del calore e nelle onde. Vediamo ora il primo esempio.

Immaginiamo di avere un materiale che conduce il calore. Consideriamo un punto. Se i punti circostanti hanno una temperatura media superiore al punto considerato, esso tenderà a scaldarsi; viceversa tenderà a raffreddarsi se hanno una temperatura inferiore, e manterrà la stessa temperatura se la temperatura media dei punti circostanti è la stessa. Questo permette di “spiegare” intuitivamente l’equazione del calore:

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial t} = \mu \nabla^2 T(x, y, z)$$

dove  $\mu$  è un coefficiente positivo che caratterizza la rapidità con cui viene scambiato il calore, e quindi con cui cambia la temperatura.

Per esercizio, si provi a ricavare l'Equazione del Calore in modo alternativo, usando il fatto che il flusso di calore è proporzionale al gradiente di temperatura (equazione 1), e il fatto che la derivata temporale della temperatura è proporzionale al calore acquisito (equazione 2). Si scrivano le due equazioni e si scopra a che cosa equivale il coefficiente che in precedenza è stato indicato con  $\mu$ .

## C Equazione delle Onde

Si svolgerà in seguito un esercizio guidato, con lo scopo di ricavare l'Equazione delle Onde, più precisamente le onde longitudinali che si sviluppano in una corda elastica massiva (in sostanza, una molla massiva).

Modellizziamo la corda come costituita da  $N$  piccole sfere di massa  $m$  e collegate in fila da piccole molle di costante elastica  $k$ . Alla fine si manderà  $N$  a infinito.

Indichiamo con  $u(x, t)$  lo spostamento infinitesimo subito dalla sfera che, quando la corda è a riposo, si troverebbe nel punto  $x$ . Immaginiamo che la lunghezza a riposo delle molle sia  $l$ . Applicando la seconda legge di Newton, la forza che agisce sulla sfera in posizione  $x$  è:

$$m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = k(u(x+l, t) - u(x, t)) - k(u(x, t) - u(x-l, t))$$

Ora, la massa totale della corda è  $M = mN$  e la lunghezza totale della corda è  $L = lN$ , mentre la costante elastica totale della corda, essendo le molle in serie, è  $K = k/N$  (lo si verifichi come esercizio!). Dunque

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{u(x+l, t) - 2u(x, t) + u(x-l, t)}{l^2}$$

Lasciando andare  $N$  a infinito, mantenendo costanti i parametri della corda come  $M$ ,  $K$  e la sua lunghezza  $L$ ; si ha che  $l = L/N$  va a zero, e si ottiene una derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Ponendo ora  $c^2 = \frac{KL^2}{M}$ , si ottiene l'equazione nella sua forma più nota:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Quali sono le soluzioni di questa equazione? Si può notare che l'equazione delle onde si può scomporre in:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$$

Con le nuove variabili

$$\chi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

e le trasformazioni inverse

$$x = \chi + \eta, \quad t = (\chi - \eta)/c$$

si ottiene convenientemente (usando la regola della catena):

$$\frac{\partial}{\partial \chi} = \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

Dunque l'equazione delle onde si può riscrivere come:

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, \chi) = 0$$

A questo punto è chiaro che:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, \chi) = f(\eta)$$

poiché non può dipendere da  $\chi$ . Integrando di nuovo si ottiene:

$$u(\eta, \chi) = F(\eta) + G(\chi)$$

dove  $F$  e  $G$  sono funzioni completamente arbitrarie. Ritornando alle variabili di partenza abbiamo ottenuto la generica soluzione

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

dove  $F$  rappresenta un'onda che si muove nel verso positivo delle  $x$ , e  $G$  un'onda che si muove nel verso negativo. La costante  $c$  ha il significato fisico della velocità a cui si propagano le onde, che fisicamente sono perturbazioni delle masse e molle infinitesime che costituiscono la corda.

Come si è visto le PDE (equazioni alle derivate parziali), di cui l'equazione delle onde è un esempio, sono molto diverse dalle ODE. La soluzione infatti non dipende da 2 parametri, o da un numero finito di parametri. Si ha invece la libertà di scegliere arbitrariamente due funzioni  $F$  e  $G$ , a partire dalle quali si può costruire una soluzione.

Per quanto riguarda la fisica, chiaramente la soluzione di un problema sarà unica; e alla maggiore libertà corrisponderà un maggior numero di equazioni, che saranno date ad esempio dalle condizioni iniziali, ovvero dal valore di  $u(x, t)$  e anche di  $\frac{du(x, t)}{dt}$  in tutto lo spazio. Si provi a verificare che, conoscendo queste ultime due funzioni, è possibile ricavare il valore di  $F$  e  $G$  (suggerimento: si provi a impostare il problema semplicemente come un problema di 2 equazioni in 2 incognite).

## Riferimenti bibliografici

- [Cel18] Giancarlo Cella. *Un esercizio al giorno*. 2018. Reperibile [qui](#).
- [Mor08] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2008.
- [Nea10] James Nearing. *Mathematical Tools for Physics (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 2010.