

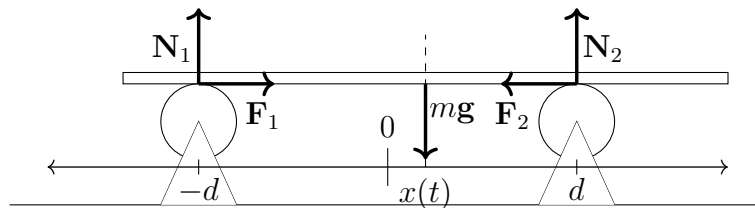
# Soluzioni dei problemi del test di ammissione

Lo staff dello stage\*

23 dicembre 2022

## 1 Vasoio su rulli rotanti [60 pt.]

### 1.1 Domanda 1



Come prima cosa si considerano le forze in gioco, mostrate in figura: il peso del vasoio  $mg$ , applicato nel suo baricentro, le forze normali  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  (verticali e dirette verso l'alto) che i rulli esercitano sul vasoio, e le forze di attrito  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  (orizzontali e dirette entrambe verso il centro). Sia  $x$  la posizione del baricentro del vasoio, che è funzione del tempo.

Indicando il modulo di un vettore con lo stesso simbolo ma senza il grassetto, abbiamo che  $F_1 = \mu N_1$  e  $F_2 = \mu N_2$ .

Durante il suo movimento, il cilindro non deve ruotare, e quindi il momento totale delle forze rispetto a entrambi i punti di contatto tra vasoio e rulli deve essere nullo. Questo vuol dire che, se si prende come polo il punto di contatto con il rullo a sinistra, si ha

$$2N_2d - mg(d + x) = 0$$

e quindi

$$N_2 = \frac{d + x}{2d} mg.$$

---

\*segreteria.stagefisica@sns.it

Discorso analogo per il punto di contatto a destra, dove vale

$$-2N_1d + mg(d - x) = 0$$

ovvero

$$N_1 = \frac{d - x}{2d}mg.$$

Ora siamo in grado di trovare l'equazione del moto per  $x$ . La componente orizzontale della forza risultante è data da

$$F(x) = F_1 - F_2 = \mu(N_1 - N_2) = -\frac{\mu mg}{d}x.$$

Usiamo il secondo principio della dinamica e otteniamo l'accelerazione orizzontale:

$$ma(t) = -\frac{\mu mg}{d}x(t).$$

Questa è l'equazione del moto di un oscillatore armonico con frequenza

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{d}}$$

e la forma generale del moto è data da

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

mentre per la velocità vale la formula

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi).$$

All'inizio il vassoio si trova fermo con il baricentro in posizione  $x_0$ , dunque le condizioni iniziali date sono  $x(0) = x_0$  e  $v(0) = 0$ . Sostituendo e risolvendo per  $A$  e  $\phi$  otteniamo che

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\mu g}{d}}t\right).$$

## 1.2 Domanda 2

Per il secondo punto chiamiamo  $I$  l'impulso dato inizialmente al vassoio. Il teorema dell'impulso ci dice che la quantità di moto iniziale del vassoio è proprio uguale a  $I$ . Questo vuol dire che

$$v(0) = \frac{I}{m}.$$

Questa condizione, assieme a  $x(0) = 0$ , ci permette di determinare il moto del vassoio che parte da questa nuova configurazione iniziale. Imponendo prima di tutto  $x(0) = 0$  troviamo che

$$A \cos(\phi) = 0$$

ovvero  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , il caso  $\phi = \frac{3}{2}\pi$  è ridondante dato che ciò che cambia è solo un segno. Usando adesso la condizione su  $v$  si ha

$$-\omega A = \frac{I}{m}$$

e quindi  $A = -\frac{I}{m\omega}$ . Il risultato finale viene quindi

$$x(t) = \frac{I}{\omega m} \sin(\omega t).$$

La seconda domanda chiede che il baricentro del vassoio rimanga sempre tra i due rulli. Questo vuol dire che l'ampiezza di oscillazione deve essere minore di  $d$ :

$$\frac{I}{\omega m} \leq d.$$

Da ciò otteniamo  $I_{\max}$ :

$$I_{\max} = md\omega = md\sqrt{\frac{\mu g}{d}} = m\sqrt{\mu g d}.$$

## 2 Pallina contro asta non omogenea [60 pt.]

Consideriamo il sistema formato dall'asta e la pallina e chiamiamo P il punto rispetto a cui è incernierata l'asta. Il momento angolare calcolato rispetto P è conservato durante l'urto, perché le uniche forze esterne al sistema sono quelle che il perno esercita sull'asta, che però hanno braccio nullo. Anche l'energia cinetica non varia dato che l'urto è elastico. È importante dire che il momento angolare è calcolato rispetto al punto P, perché se lo calcoliamo rispetto ad un'altro punto, le forze vincolari non hanno più braccio nullo e quindi  $\vec{L}$  non è più conservato. Chiamiamo  $v_1$  e  $\omega$  rispettivamente la velocità della pallina e la velocità angolare dell'asta dopo l'urto. Chiamiamo  $I_P$  il momento di inerzia dell'asta calcolata rispetto al punto P. Scrivendo le leggi di conservazione otteniamo

$$\begin{cases} LMv_0 = LMv_1 + I_P\omega \\ \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}I_P\omega^2. \end{cases}$$

$I_P$  può essere calcolato sommando il momento di inerzia calcolato rispetto al centro di massa e il momento di inerzia che avrebbe l'asta se la sua massa fosse concentrata nel centro di massa, per il teorema di Huygens-Steiner.

$$I_P = Md^2 + I_{\text{CdM}}.$$

Il momento di inerzia calcolato rispetto al centro di massa si può scrivere nella forma  $I_{\text{CdM}} = \alpha ML^2$  dove  $\alpha$  dipenderà dalla distribuzione della massa lungo la lunghezza dell'asta. Chiamando  $f = 0.4$ , si ha:

$$I_P = (f^2 + \alpha)ML^2.$$

Sostituendo questo risultato nel sistema iniziale e risolvendo rispetto al rapporto  $v_1/v_0$ :

$$\begin{cases} LMv_0 = LMv_1 + (f^2 + \alpha)ML^2\omega \\ \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}(f^2 + \alpha)ML^2\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{v_0 - v_1}{(f^2 + \alpha)L} \\ \frac{v_1}{v_0} = \frac{1 - (f^2 + \alpha)}{1 + (f^2 + \alpha)} = 1 - \frac{2}{1 + f^2 + \alpha} \end{cases}$$

Notiamo che il rapporto è decrescente rispetto ad  $\alpha$ , quindi si otterrà il valore massimo in corrispondenza del minimo valore di  $\alpha$  e viceversa. Il minimo valore di  $\alpha$  è 0 che si ha nel caso limite in cui la massa è totalmente concentrata nel CdM ( $\alpha$  non può mai assumere valori negativi). Il massimo valore di  $\alpha$  si ottiene intuitivamente allontanando la massa il più possibile dal CdM:  $\frac{3}{5}M$  in P e  $\frac{2}{5}M$  nel punto opposto.

La dimostrazione è la seguente: Si fissi un sistema di riferimento con l'origine nel centro di massa e tale che P sia posizionato sul semiasse negativo delle  $x$ . Consideriamo l'asta come la composizione di due corpi: la parte di asta con coordinata negativa di massa  $mM$  e la parte di asta con coordinata positiva di massa  $(1 - m)M$ . Chiamiamo  $x_1$  la posizione del centro di massa della prima parte di asta e  $x_2$  la posizione del centro di massa della seconda parte di asta.

$$\begin{cases} x_{\text{CdM}} = 0 \\ I_{\text{CdM}} = \alpha ML^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx_1 = (1 - m)x_2 \\ mx_1^2 + (1 - m)x_2^2 = \alpha L^2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo  $\alpha = \frac{x_1 x_2}{L^2}$  e per come sono stati definiti  $x_1$  e  $x_2$  devono rispettare  $fL > x_1 > 0$  e  $0 < x_2 < (1 - f)L$ . Si trova quindi:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \alpha_{\min} = 0 \\ \alpha_{\max} = f(1-f) = 0.24 \end{cases} \implies \\ \implies 0.428571 \approx \frac{3}{7} = \frac{1-f}{1+f} \leq \frac{v_1}{v_0} \leq \frac{1-f^2}{1+f^2} = \frac{21}{29} \approx 0.724137 \end{aligned}$$

### 3 Motore e bagno termico [70 pt.]

#### 3.1 Domanda 1

Viene specificato che la macchina opera reversibilmente, quindi possiamo porre nulla la variazione d'entropia lungo un ciclo intero:  $\Delta S_{\text{ciclo}} = 0$ .

Operando la macchina fra le due sole temperature  $T_1$  e  $T_2$ , poniamo due trasformazioni isoterme, una per ogni temperatura, che portano il gas da uno stato  $A$  a uno stato  $B$  (per  $T_1$ ) e da uno  $C$  a uno  $D$  (per  $T_2$ ), assorbendo e cedendo calore alla rispettiva sorgente. Per poi portare il gas dallo stato  $B$  a  $C$  viene utilizzata un'adiabatica, in modo che non vi siano ulteriori scambi di calore, e analogo per il passaggio da  $D$  ad  $A$ .

A questo punto troviamo il rendimento lavorando sull'entropia:

$$\Delta S_{\text{ciclo}} = \Delta S_{A \rightarrow B} + \Delta S_{B \rightarrow C} + \Delta S_{C \rightarrow D} + \Delta S_{D \rightarrow A} = 0 \quad (1)$$

Da come definite le trasformazioni sappiamo che:

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = \frac{Q_{\text{ass}}}{T_1} \quad \Delta S_{B \rightarrow C} = 0 \quad \Delta S_{C \rightarrow D} = \frac{Q_{\text{ced}}}{T_2} \quad \Delta S_{D \rightarrow A} = 0$$

Sostituendo ciò nella (1) otteniamo

$$\frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} = -\frac{T_2}{T_1} \quad \text{da cui} \quad \eta = 1 + \frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} = \boxed{1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Per l'assegnazione dei punteggi si è tenuto conto del fatto che è incompleto affermare che la macchina abbia il rendimento di Carnot in quanto opera reversibilmente: esistono infatti cicli reversibili il cui rendimento ha una forma differente; era importante specificare che lo scambio di calore avvenisse a due precise temperature.

## 3.2 Domanda 2

Denotiamo con  $T(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $\eta(x)$  la temperatura del corpo caldo, il calore assorbito e il rendimento, rispettivamente, al ciclo  $x$ -esimo (con ciclo 0-esimo si intenderanno le condizioni iniziali del sistema; ad esempio,  $T(0) = T_1$ ).

Innanzitutto, ci viene richiesto il valore  $N$  per cui vale  $\eta(N) = \frac{1}{2}\eta(0)$ , da cui cerchiamo di esplicitare una dipendenza di  $T(N)$  da altri parametri dati:

$$\eta(N) = \frac{1}{2}\eta(0) \quad 1 - \frac{T_2}{T(N)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Da cui:

$$T(N) = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} \quad (2)$$

Da questo momento possono essere presi due differenti approcci: quello discreto e quello differenziale, la cui veridicità è garantita da  $k\Delta T \gg CT_2$

### 3.2.1 Interpretazione continua

Al ciclo  $x$  la macchina assorbe un calore  $Q(x)$  equivalente a

$$Q(x) = k \Delta T(x) = k [T(x) - T_2]$$

Dividendo tutto per la capacità termica  $C$  otteniamo:

$$\frac{Q(x)}{C} = \frac{k}{C}(T(x) - T_2)$$

Ma, per come definita la capacità termica, possiamo scrivere:

$$-\frac{Q(x)}{C} = \frac{dT(x)}{dx} = T'(x) = -\frac{k}{C}(T(x) - T_2)$$

Il meno serve per far concordare i segni: a calore assorbito dalla macchina, quindi ceduto dal corpo, corrisponde ovviamente un'abbassamento della temperatura di quest'ultimo.

Quindi si tratta di risolvere il seguente problema di Cauchy (in non pochi aspetti analogo al caso più noto della scarica di un condensatore in un circuito RC), dove poniamo  $A = \frac{k}{C}$  per alleggerire la scrittura:

$$\begin{cases} T'(x) = -A(T(x) - T_2) \\ T(0) = T_1 \end{cases} \quad (3)$$

Per risolverlo prima passiamo dall'omogenea  $T'_{\text{omo}}(x) = -AT_{\text{omo}}$ , la cui soluzione è, banalmente:

$$T_{\text{omo}}(x) = \tau e^{-Ax}$$

Dove  $\tau$  ha le dimensioni di una temperatura, e il suo valore dipende dalle condizioni iniziali.

Posto ora  $T(x) = T_{\text{omo}}(x) + T_{\text{part}}(x)$ , trovo la soluzione particolare  $T_{\text{part}}$  sostituendo nella prima equazione differenziale del sistema (3):

$$\frac{d}{dx}(T_{\text{omo}} + T_{\text{part}}) = -A(T_{\text{omo}} + T_{\text{part}} - T_2) \quad T'_{\text{part}} = -AT_{\text{part}} + AT_2$$

Che nella sua forma più semplice contempla la soluzione  $T_{\text{part}} = T_2$ .

Come si può verificare per sostituzione, si è ottenuto:

$$T(x) = \tau e^{-Ax} + T_2 \quad (4)$$

Imponendo le condizioni iniziali:

$$T(0) = \tau + T_2 = T_1 \quad \Rightarrow \quad \tau = T_1 - T_2$$

Quindi:

$$T(x) = (T_1 - T_2) e^{-\frac{k}{C}x} + T_2 \quad (5)$$

Sostituendo la (5) nella (2) otteniamo l'equazione seguente:

$$(T_1 - T_2) e^{-\frac{k}{C}N} + T_2 = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}$$

La cui soluzione, ricavabile tramite soli passaggi algebrici banali, risulta essere:

$$\boxed{N = \frac{C}{k} \ln \left( 1 + \frac{T_1}{T_2} \right)}$$

### 3.2.2 Interpretazione discreta

In modo del tutto analogo alla soluzione precedente, definiamo le seguenti quantità (l'introduzione di tale notazioni non è necessaria, ma trattandosi di successioni è preferibile rispetto a quella utilizzata precedentemente):

- $T_1^{(n)}$  : temperatura del bagno caldo all'inizio del ciclo n-esimo
- $Q_1^{(n)}$  : calore assorbito dalla macchina durante il ciclo n-esimo

- $\eta^{(n)}$  : rendimento del ciclo n-esimo
- $\Delta T^{(n)} = T_1^{(n)} - T_2$

Precediamo alla risoluzione:

Dai dati del problema:  $Q_1^{(n)} = k\Delta T^{(n)}$

Dalla definizione di capacità termica:  $T_1^{(n)} - T_1^{(n+1)} = Q_1^{(n)}/C$

Da cui otteniamo la seguente equazione:

$$C \left( T_1^{(n)} - T_1^{(n+1)} \right) = k \left( T_1^{(n)} - T_2 \right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta T_1^{(n+1)} = \frac{C-k}{C} \Delta T_1^{(n)}$$

Notiamo che le differenze di temperatura sono in progressione geometrica di ragione  $q = (C - K)/C$ .

$$\Delta T^{(n)} = q^{(n-1)} \Delta T^{(0)} \quad \Longrightarrow \quad T_1^{(n)} = q^{n-1} (T_1 - T_2) + T_2$$

Inserendo questo nell'uguaglianza (2), otteniamo quanto segue tramite banali passaggi algebrici:

$$q^{n-1} (T_1 - T_2) + T_2 = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad \Longrightarrow \quad q^{n-1} = \frac{T_2}{T_1 + T_2}$$

Concludendo applicando il logaritmo:

$$N = \frac{\ln \frac{T_2}{T_1 + T_2}}{\ln \frac{C-k}{C}} + 1$$

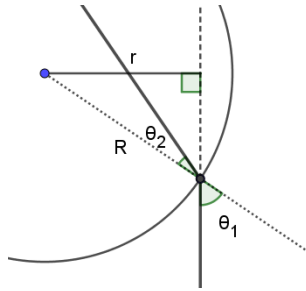
Volendo essere precisi, si possono considerare come soluzione anche  $\lfloor N \rfloor$  e  $\lceil N \rceil$ .

Sono ammesse come soluzioni anche versioni in cui non è presente il termine +1 finale o in cui esso si presenta col segno meno, derivando queste dalla numerazione arbitraria dei cicli.

## 4 Sfera di cristallo [70 pt.]

### 4.1 Domanda 1

Il parametro d'impatto  $r$  è definito come la distanza perpendicolare fra la traiettoria del raggio luminoso e il centro della sfera. Siano  $\theta_1$  l'angolo di incidenza e  $\theta_2$  l'angolo di rifrazione.



Prendendo in considerazione l'angolo opposto al vertice di  $\theta_1$  risulta evidente la relazione

$$\sin \theta_1 = \frac{r}{R}$$

Supponendo che la sfera sia immersa nel vuoto, si applichi la legge di Snell al raggio rifratto, ottenendo:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n$$

da cui:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n} = \frac{r}{nR}$$

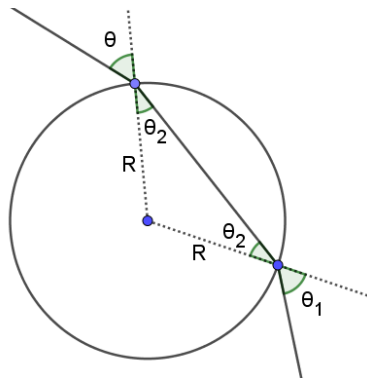
ovvero:

$$\theta_2 = \arcsin \left( \frac{r}{nR} \right)$$

## 4.2 Domanda 2

Il fenomeno di riflessione totale interna ha luogo quando non si forma il raggio rifratto. Ciò può avvenire solamente quando l'indice di rifrazione del primo mezzo è maggiore dell'indice di rifrazione del secondo. Quindi la riflessione totale interna non può verificarsi all'ingresso del raggio nella sfera, potrebbe invece verificarsi all'uscita di esso.

Si analizzi pertanto questo secondo caso.



Evidentemente l'angolo di incidenza della seconda delle rifrazioni è uguale all'angolo di rifrazione della prima delle due, ossia a  $\theta_2$ .

Sia  $\theta$  il secondo angolo di rifrazione, come in figura. Applicando la legge di Snell alla seconda rifrazione si ottiene:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} = \frac{1}{n}$$

da cui:

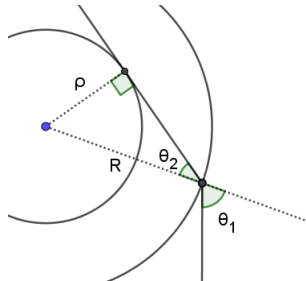
$$\sin \theta = n \sin \theta_2$$

Ma  $n \sin \theta_2$  è uguale a  $\sin \theta_1$  per la legge di Snell applicata alla prima rifrazione. Da ciò concludiamo che dev'essere  $\theta = \theta_1$ , perciò anche il secondo raggio rifratto si forma sempre. Ovvero non si ha mai riflessione totale interna per ogni valore di  $r < R$ .

### 4.3 Domanda 3

La condizione di tangenza implica che il triangolo evidenziato in figura dev'essere rettangolo, pertanto vale la relazione:

$$\sin \theta_2 = \frac{\rho}{R}$$



Come ricavato al punto 1, è altresì  $\sin \theta_2 = \frac{r}{nR}$ . Quindi, chiamando  $r'$  il parametro d'impatto per cui si verifica la condizione di tangenza ed eguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$\frac{r'}{nR} = \frac{\rho}{R}$$

da cui:

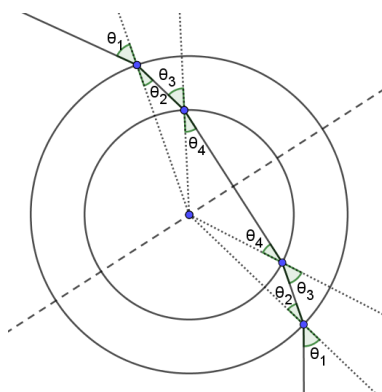
$$r' = n\rho$$

#### 4.4 Domanda 4

Se il raggio di luce rifratto non attraversa la sfera interna la situazione è identica a quella trattata al punto 2.

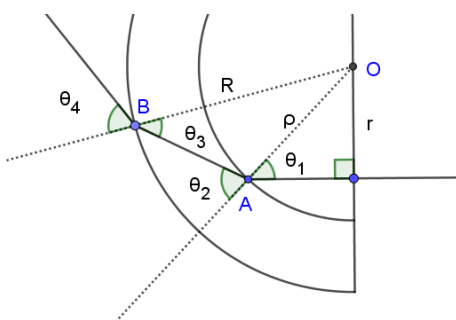
Se invece il raggio attraversa la sfera interna la traiettoria presenta comunque simmetria assiale rispetto all'asse del segmento congiungente i punti di ingresso e di uscita, come è visibile in figura.

Da ciò segue che l'esistenza del raggio incidente implica l'esistenza del raggio rifratto, perciò non si ha mai riflessione interna totale.



#### 4.5 Domanda 5

Si definiscano gli angoli  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  e  $\theta_4$  come indicato in figura.



All'ingresso nella semisfera interna la direzione del raggio rimane invariata per la condizione di ortogonalità.

In seguito il raggio incide sulla superficie di separazione fra le semisfere formando con la normale un angolo  $\theta_1$  tale che  $\sin \theta_1 = \frac{r}{\rho}$ . Applicando la legge di Snell a questa prima rifrazione si ottiene:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n}{n'}$$

da cui:

$$\sin \theta_2 = \frac{n'}{n} \sin \theta_1 = \frac{n'r}{n\rho}$$

L'equazione  $\sin \theta_2 = \frac{n'r}{n\rho}$  ha soluzione rispetto a  $\theta_2$  solo quando  $\frac{n'r}{n\rho} \leq 1$ , ovvero  $r \leq \frac{n\rho}{n'}$ , che sono di conseguenza i valori di  $r$  per i quali non si verifica riflessione interna totale alla superficie di separazione fra le semisfere.

Adesso rimane da imporre che non avvenga riflessione interna totale nemmeno all'uscita del raggio dalla semisfera esterna.

Per ciò si consideri il triangolo  $AOB$ , con  $\overline{OA} = \rho$  e  $\overline{OB} = R$ . Per il teorema dei seni:

$$\frac{\sin(\pi - \theta_2)}{R} = \frac{\theta_3}{\rho}$$

da cui si ricava:

$$\sin \theta_3 = \frac{\rho}{R} \sin(\pi - \theta_2) = \frac{\rho}{R} \sin \theta_2 = \frac{\rho}{R} \frac{n'r}{n\rho} = \frac{n'r}{nR}$$

Applicando la legge di Snell alla seconda superficie di separazione si ottiene:

$$\sin \theta_4 = n \sin \theta_3 = \frac{n'r}{R}$$

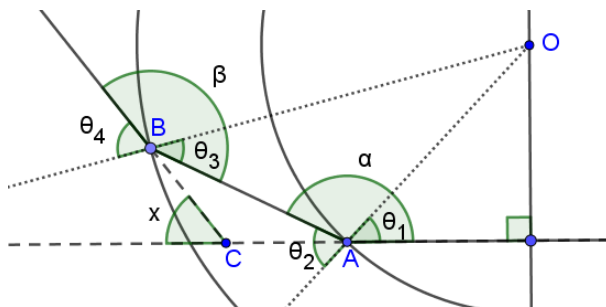
La condizione per l'esistenza del raggio rifratto è, in questo caso,  $\frac{n'r}{R} \leq 1$ , ossia  $r \leq \frac{R}{n'}$ .

Concludiamo quindi che non si ha mai riflessione interna totale quando:

$$r \leq \frac{n\rho}{n'} \quad \text{e} \quad r \leq \frac{R}{n'}$$

## 4.6 Domanda 6

Si considerino gli angoli  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $x$  definiti come in figura. L'angolo  $x$  rappresenta la deviazione del raggio rispetto alla direzione iniziale all'uscita dalla semisfera esterna.



$$\alpha = (\pi - \theta_2) + \theta_1 = \pi - \arcsin\left(\frac{n'r}{n\rho}\right) + \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right)$$

$$\beta = (\pi - \theta_4) + \theta_3 = \pi - \arcsin\left(\frac{n'r}{R}\right) + \arcsin\left(\frac{n'r}{nR}\right)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  e  $x$  sono angoli esterni del triangolo  $ABC$ , di conseguenza la loro somma vale  $2\pi$ . Pertanto:

$$x = 2\pi - \alpha - \beta$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi - \left( \pi - \arcsin\left(\frac{n'r}{n\rho}\right) + \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right) \right) - \left( \pi - \arcsin\left(\frac{n'r}{R}\right) + \arcsin\left(\frac{n'r}{nR}\right) \right) \\ &= \arcsin\left(\frac{n'r}{n\rho}\right) + \arcsin\left(\frac{n'r}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right) - \arcsin\left(\frac{n'r}{nR}\right) \end{aligned}$$

## 5 E pur si muove... [80 pt.]

### 5.1 Domanda 1

Per ricavare  $p = f(\nu, h, c)$  usando l'analisi dimensionale occorre prima di tutto esprimere le grandezze di  $p, \nu, h, c$  come combinazione delle tre grandezze fondamentali *lunghezza*  $[L]$ , *massa*  $[M]$  e *tempo*  $[T]$ . Si ottiene:

- $[p] = [M][L][T]^{-1}$  (per definizione  $p = mv$ )
- $[c] = [L][T]^{-1}$  (velocità)
- $[\nu] = [T]^{-1}$  (frequenza)
- sfruttando la relazione  $E = h\nu$ , dove  $E$  è l'energia del fotone si ricava  $[h] = \frac{[E]}{[\nu]} = \frac{[M][L]^2[T]^{-2}}{[T]^{-1}} = [M][L]^2[T]^{-1}$

A questo punto, sapendo che la costante adimensionale è 1, per ottenere  $f(\nu, h, c) = \nu^\alpha h^\beta c^\gamma$  si risolve  $[p] = [\nu]^\alpha [h]^\beta [c]^\gamma$ , che sostituendo risulta

$$[M][L][T]^{-1} = ([T]^{-1})^\alpha ([M][L]^2[T]^{-1})^\beta ([L][T]^{-1})^\gamma$$

ovvero il sistema:

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ 2\beta + \gamma = 1 \\ -\alpha - \beta - \gamma = -1 \end{cases} \quad (6)$$

la cui unica soluzione è  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$ . Dunque:  $p = \frac{h\nu}{c}$

## 5.2 Domanda 2

Per trattare il fenomeno della riflessione come un urto classico, si consideri il fascio di luce come un fascio di particelle, i fotoni, con energia  $E = h\nu$  e la quantità di moto  $p$  trovata nel punto precedente. Poichè il fenomeno è una riflessione totale l'urto dei fotoni è da intendersi come totalmente elastico

Se la potenza del fascio è  $P$  ciò significa che la sua sorgente in  $dt$  emette energia pari a  $P dt$ . Poichè l'energia del fascio è trasportata dai fotoni, in  $dt$  ne vengono emessi  $N = \frac{P dt}{h\nu}$ . In questo caso l'intero fascio viene riflesso dal disco dunque il numero di fotoni che urtano il disco in  $dt$  è sempre  $N$

Quando un singolo fotone viene riflesso dalla parete la sua quantità di moto cambia da  $p$  a  $-p$ , l'impulso della forza tra il disco e un fotone durante un singolo urto è dunque  $I = 2p$ .

In  $dt$  sull'area  $A$  si applica dunque una forza media  $F$  ovvero

$$F = \frac{NI}{dt} = N \frac{2p}{dt} = \frac{P dt}{h\nu} \frac{2h\nu}{c dt} = \frac{2P}{c} \quad (7)$$

poichè tale forza risulta indipendente da  $dt$  (e dall'istante considerato), sul disco agisce costantemente la forza:

$$\boxed{F = \frac{2P}{c}} \quad (8)$$

## 5.3 Domanda 3

Il caso della vela solare si distingue dal precedente in quanto il sole non emette un fascio cilindrico di luce ma emette radiazione isotropicamente in ogni direzione. La radiazione si diffonde infatti formando un fronte d'onda sferico, la cui superficie aumenta allontanandosi dalla sorgente. Si possono ugualmente mantenere i ragionamenti del punto precedente tenendo presente però che alla vela non arriva l'intera potenza  $P_s$  emessa dal sole ma solo una sua frazione, ovvero  $P_s \frac{A}{4\pi R_0^2}$ . (Occorre inoltre supporre che  $A \ll a\pi R^2$  per poter approssimare il fronte d'onda nella regione locale del satellite come il piano tangente, parallelo alla vela). Dunque la pressione di radiazione applica una forza radiale pari a:

$$F = \frac{2P_s}{4\pi R^2 c} A = \frac{P_s}{2\pi R^2 c} A \quad (9)$$

Sul satellite agiscono quindi due forze radiali ovvero la forza di gravitazione  $F_g = G \frac{mM}{R^2}$  diretta verso il sole e la forza esercitata dalla pressione di radiazione

$F$  diretta nel verso opposto. Affinchè il satellite sia in un'orbita circolare di raggio  $R_0$  e velocità angolare  $\omega$ :

$$F_g - F = m\omega_0^2 R_0 \implies G \frac{mM}{R_0^2} - \frac{P_s A}{2\pi R_0^2 c} = m\omega_0^2 R_0 \quad (10)$$

Dunque:

$$\omega_0 = \sqrt{\left(GM - \frac{P_s A}{2\pi mc}\right) \frac{1}{R_0^3}} \implies T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R_0^3}{\left(GM - \frac{P_s A}{2\pi mc}\right)}} \quad (11)$$

#### 5.4 Domanda 4

Se il satellite fosse privo di vela su di esso agirebbe solo la forza di gravitazione  $F'_g = G \frac{mM_{\text{eff}}}{R^2}$ . Dunque:

$$F'_g = F_g - F \implies G \frac{mM_{\text{eff}}}{R_0^2} = G \frac{mM}{R_0^2} - \frac{P_s A}{2\pi R_0^2 c} \implies M_{\text{eff}} = M - \frac{P_s A}{2\pi Gmc} \quad (12)$$

#### 5.5 Domanda 5

Se il sistema viene perturbato da un piccolo impulso radiale il momento angolare del satellite si conserva dunque, se in dato istante il satellite si muove con  $\omega$  a distanza  $r$ , allora

$$m\omega r^2 = m\omega_0 R_0^2 \implies \omega = \omega_0 \frac{R_0^2}{r^2}$$

Ci si ponga ora in un sistema di riferimento inerziale che ruota solidale al satellite. In questo sistema sul satellite agiscono le seguenti forze radiali: la forza di gravitazione, la forza esercitata dalla pressione di radiazione e la forza apparente  $F_{\text{app}} = m\omega^2 r$ . La forza totale applicata sul satellite è quindi sempre radiale e vale  $F_R(r)\hat{r}$  dove

$$F_R(r) = -F_g + F + m\omega^2 r = \left(-GmM + \frac{P_s A}{2\pi c}\right) \frac{1}{r^2} + m\omega_0^2 R_0^4 \frac{1}{r^3} \quad (13)$$

Ricordando l'espressione di  $\omega_0$  ricavata precedentemente, risulta:

$$F_R(r) = m\omega_0^2 R_0^3 \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{R_0}{r^3}\right) \quad (14)$$

Si approssimi ora al primo ordine la forza nell'intorno di  $r = R_0$  ricordando che  $F_R(R_0) = 0$ :

$$F_R(r) \approx F_R(R_0) + \left. \frac{dF_R}{dr} \right|_{r=R_0} (r - R_0) \quad (15)$$

$$F_R(r) \approx m\omega_0^2 R_0^3 \left( 2\frac{1}{r^3} - 3\frac{R_0}{r^4} \right)_{r=R_0} (r - R_0) = -m\omega_0^2 (r - R_0) \quad (16)$$

L'equazione del moto radiale risulta dunque

$$F_R(r) = m\ddot{r} \implies \ddot{r} = -m\omega_0^2 (r - R_0) \quad (17)$$

questa è l'equazione caratteristica del moto armonico. Il satellite oscilla dunque radialmente intorno alla posizione di equilibrio  $r = R_0$  di moto armonico con pulsazione  $\omega_0$ , quindi:

$$\boxed{T = T_0} \quad (18)$$

## 6 Termodinamica strana [70 pt.]

Per risolvere il problema possiamo utilizzare il primo principio della termodinamica. In questo caso, dal momento che tra i due gas e l'ambiente esterno non avviene nessuno scambio di calore vale la seguente relazione. Consideriamo positivo il lavoro subito dal sistema, ovvero con il segno opposto rispetto alla convenzione solita.

$$\Delta U = W$$

La strategia risolutiva consiste nel trovare un'espressione della variazione infinitesima di energia interna e del lavoro. Uguagliando queste due quantità possiamo trovare la temperatura corrispondente a uno spostamento  $L$  delle pareti. La variazione di energia interna dipende solo dalla variazione di temperatura. Dal momento che il setto conduce perfettamente il calore possiamo assumere che la temperatura dei due gas sia la stessa.

$$\begin{aligned} dU &= dU_1 + dU_2 \\ &= \frac{1}{2}nlR dT_1 + \frac{1}{2}nlR dT_2 \\ &= nlR dT \end{aligned}$$

Dove  $l$  sono i gradi di libertà del gas, che nel caso di un gas monoatomico è pari a 3. Ora calcoliamo la variazione infinitesima del lavoro compiuto dalle due pareti:

$$\begin{aligned} dW &= dW_1 + dW_2 \\ &= F_1(x) dx + F_2(x) dx \\ &= SP_1(x) dx - SP_2(x) dx \end{aligned}$$

Dove  $S$  è la superficie del setto. Ora applichiamo la legge dei gas perfetti. Dal momento che lo spostamento del setto avviene molto lentamente possiamo considerare la temperatura come una funzione della sua posizione.

$$\begin{aligned} dW &= S \frac{nRT(x)}{V_1(x)} dx - S \frac{nRT(x)}{V_2(x)} dx \\ &= SnR \frac{T(x)}{S(d-x)} dx - SnR \frac{T(x)}{S(d+x)} dx \\ &= nR \frac{T(x)}{d-x} dx - nR \frac{T(x)}{x+d} dx \\ &= nRT(x) \left( \frac{1}{d-x} - \frac{1}{x+d} \right) dx \\ &= nRT(x) \frac{2x}{d^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Ora uguagliamo lavoro alla variazione di energia interna.

$$\begin{aligned} dU &= dW \\ nlR dT &= nRT(x) \frac{2x}{d^2 - x^2} dx \\ l dT &= T(x) \frac{2x}{d^2 - x^2} dx \\ l \frac{dT}{dx} &= T(x) \frac{2x}{d^2 - x^2} \\ lT'(x) &= T(x) \frac{2x}{d^2 - x^2} \end{aligned}$$

Il risultato è un'equazione differenziale a variabili separabili, risolvendola possiamo trovare la funzione  $T(x)$ .

$$\begin{aligned}
 l \frac{dT(x)}{dx} &= T(x) \frac{2x}{d^2 - x^2} \\
 l \frac{1}{T(x)} dT(x) &= \frac{2x}{d^2 - x^2} dx \\
 l \int_{T(0)}^{T(L)} \frac{1}{T(x)} dT(x) &= \int_0^L \frac{2x}{d^2 - x^2} dx \\
 -l [\ln T(x)]_{T(0)}^{T(L)} &= [\ln (d^2 - x^2)]_0^L \\
 [\ln T(x)^{-l}]_{T(0)}^{T(L)} &= [\ln (d^2 - x^2)]_0^L \\
 \ln \left( \frac{T(L)}{T(0)} \right)^{-l} &= \ln \left( 1 - \frac{L^2}{d^2} \right) \\
 \left( \frac{T(L)}{T(0)} \right)^{-l} &= 1 - \frac{L^2}{d^2} \\
 T(L) &= T(0) \left( 1 - \frac{L^2}{d^2} \right)^{-\frac{1}{3}} \\
 T(L) &= 300 \text{ K} \left( 1 - \left( \frac{0.3 \text{ m}}{1.0 \text{ m}} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{3}} \\
 T(L) &\approx 309.58 \text{ K}
 \end{aligned}$$

## 7 Palla in un fossato semicilindrico [70 pt.]

Per prima cosa ci si rende conto che il moto della pallina avviene sul piano su cui giacciono il vettore della sua velocità iniziale e quello dell'accelerazione gravitazionale. Riduciamo quindi il problema a due dimensioni: il fossato diventa una semplice semicirconferenza.

La quantità richiesta è adimensionale, quindi deve essere funzione delle quantità adimensionali che caratterizzano il problema:

- L'unica combinazione adimensionale delle quantità fisiche in gioco è  $\alpha = \frac{gR}{V^2}$
- Un ulteriore parametro geometrico adimensionale è necessario: definiamo  $\theta$  l'angolo tra il raggio passante per il punto di impatto della pallina con la parete del fossato e la verticale.

Il problema è risolto una volta che si riesce a determinare la funzione che esprime  $\frac{h}{R} = f(\alpha, \theta)$  e l'unica coppia  $(\alpha, \theta)$  compatibile con i vincoli del problema (rimbalzo verticale).

Iniziamo imponendo i vincoli geometrici imposti: essendo l'urto completamente elastico, l'angolo tra il raggio e la velocità della pallina l'istante precedente all'urto deve coincidere in modulo, per conservazione della quantità di moto parallela alla parete del fossato e conservazione in modulo della quantità di moto normale a tare parete, con l'angolo tra il raggio e la velocità che ha la pallina nell'istante immediatamente successivo all'urto. Imponendo che il rimbalzo sia verticale si osserva che tali angoli devono essere in modulo uguali a  $\theta$ .

Con facili conti con gli angoli si ottiene che per far sì che questo succeda l'angolo compreso tra l'orizzontale e la velocità della pallina un istante prima dell'impatto deve essere in modulo pari a  $\frac{\pi}{2} - 2\theta$ . La tangente di questo angolo è pari al rapporto tra i moduli della componente verticale ed orizzontale della velocità della pallina l'istante prima dell'impatto.

Prima dell'urto la pallina compie una traiettoria libera in campo gravitazionale uniforme: imponiamo le equazioni del moto

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

che corrispondono ad un moto uniforme lungo  $x$  e un moto uniformemente accelerato lungo  $y$ .

Essendo il moto lungo  $x$  uniforme, la componente orizzontale della velocità della pallina subito prima dell'impatto è  $V_x = V$ . Inoltre, avendo percorso la pallina una distanza orizzontale pari a  $R(1 + \sin(\theta))$  prima dell'impatto, il tempo trascorso tra il lancio della pallina e l'impatto è  $t = \frac{R(1+\sin(\theta))}{V}$ .

Essendo il moto lungo  $y$  uniformemente accelerato, la componente verticale della velocità della pallina subito prima dell'impatto è in modulo  $V_y = gt = g \frac{R(1+\sin(\theta))}{V}$ ; si ottiene dunque il primo vincolo del problema:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \frac{1}{\tan(2\theta)} = \frac{V_y}{V_x} = \alpha(1 + \sin(\theta)).$$

Imponiamo inoltre che il punto di impatto considerato si trovi effettivamente sulla circonferenza: la distanza percorsa in verticale dalla pallina deve coincidere con  $R \cos(\theta)$ . Imponendo le equazioni del moto uniformemente accelerato si ottiene la seconda condizione:

$$\frac{\alpha}{2}(1 + \sin(\theta))^2 = \cos(\theta).$$

Queste due condizioni ci permettono di determinare in modo univoco l'unica coppia  $(\alpha, \theta)$  che permette di risolvere il problema; eseguiamo quindi i calcoli necessari per risolvere questo sistema di equazioni.

Riarrangiando la seconda condizione si ottiene  $\alpha = \frac{2 \cos(\theta)}{(1 + \sin(\theta))^2}$ , che sostituita nella prima condizione porta alla seguente equazione in  $\theta$ :

$$\frac{1 - 2 \sin^2(\theta)}{2 \sin(\theta) \cos(\theta)} = \frac{2 \cos(\theta)}{(1 + \sin(\theta))}$$

dove si è usata l'identità trigonometrica  $\tan(2\theta) = \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{1 - 2 \sin^2(\theta)}$ .

Riarrangiando e sfruttando  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$  si ottiene

$$1 - 2 \sin(\theta) = \frac{4(1 - \sin^2(\theta)) \sin(\theta)}{(1 + \sin(\theta))}.$$

Sfruttando la relazione  $1 - a^2 = (1 + a)(1 - a)$  e sapendo che  $\sin(\theta)$ , si ottiene

$$2 \sin^2(\theta) - 4 \sin(\theta) + 1 = 0$$

L'unica soluzione compatibile con  $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$  è

$$\sin(\theta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Troviamo ora  $\frac{h}{R} = f(\alpha, \theta)$ ; essendo l'urto completamente elastico, l'energia meccanica della pallina si conserva, quindi

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

Ne consegue che

$$\frac{h}{R} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Sostituendo  $\alpha = \frac{2 \cos(\theta)}{(1 + \sin(\theta))^2}$  il problema è risolto:

$$\frac{h}{R} = \frac{(\sqrt{2} - \frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}}{2} \approx 0.43706.$$

## 8 Carica e scarica del condensatore [90 pt.]

In tutta la soluzione,  $q$  indicherà la carica presente sull'armatura più in alto del condensatore,  $V(t)$  il voltaggio ai capi del generatore (preso positivo

se il polo positivo è quello più in alto),  $V$  il voltaggio ai capi del diodo (preso positivo se il polo positivo è quello a sinistra),  $I$  la corrente che scorre nel diodo (presa positiva se scorre da sinistra a destra).

## 8.1 Domanda 1

Quando il diodo si comporta come un circuito aperto, vale  $I = 0$ , e la maglia di destra è isolata. Abbiamo allora un semplice circuito RC, con:

$$\frac{q}{C} - iR = \implies i = \frac{q}{RC}$$

essendo  $i$  presa positiva in senso orario.

Con questa convenzione si ha inoltre  $i = -\dot{q}$ , da cui:

$$\dot{q} = -\frac{q}{RC} \implies q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \dot{q}(t) = -\frac{q_0}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

## 8.2 Domanda 2

In generale, la corrente nel ramo di destra, presa positiva in senso orario, vale  $I - \dot{q}$  per la legge dei nodi. Scrivendo la legge delle maglie per entrambe le maglie del circuito si ottengono le seguenti equazioni sempre valide:

$$\frac{q}{C} - R(I - \dot{q}) = 0 \implies I = \frac{q}{RC} + \dot{q}$$

$$V(t) - RI - V = \frac{q}{C} \implies V(t) - V = \frac{2q}{C} + R\dot{q}$$

Sia  $t = 0$  l'istante in cui  $V(t)$  passa da 0 a  $V_1$ . Cerchiamo una soluzione periodica in cui, inizialmente, valga pure  $V = V_0$  e, di conseguenza, passi corrente nel diodo. Fintantoché ciò è verificato, si ha:

$$V_1 - V_0 = \frac{2q}{C} + R\dot{q} \implies q(t) = \frac{C(V_1 - V_0)}{2} + A \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)$$

Dove  $A$  è una costante che dipende solamente dalla carica presente a  $t = 0$  sul condensatore, e che sarà determinata in seguito imponendo la periodicità di  $q$ . Da  $q(t)$  troviamo  $I(t)$ :

$$I(t) = \frac{V_1 - V_0}{2} - \frac{A}{C} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)$$

Deve essere  $I(0) > 0$ , altrimenti il diodo non farebbe passare corrente, perciò imponiamo:

$$I(0) > 0 \implies \frac{C(V_1 - V_0)}{2} > A$$

Si noti che ciò implica anche  $I(t) > 0$  per il tempo successivo, perciò tale andamento della carica si interrompe quando, al tempo  $t = T$ , cambia la d.d.p. ai capi del generatore. La presenza delle resistenze nel circuito implica che la carica sul condensatore deve essere una funzione continua del tempo: se così non fosse, a un salto della carica dovrebbe corrispondere una corrente infinita, e, perciò, una d.d.p. infinita ai capi di almeno una delle due resistenze, il che impedirebbe di soddisfare la legge di Kirchhoff. All'inizio del nuovo tratto, in cui riscalo il tempo a 0 per comodità, si ha quindi:

$$q = \frac{C(V_1 - V_0)}{2} + A \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right)$$

Nel nuovo tratto, vogliamo che la carica inverta l'andamento rispetto al precedente, così da poter imporre la periodicità alla fine. Ciò avviene se si interrompe il passaggio di corrente nel diodo e la maglia di destra si comporta come nel punto 1. Cerchiamo dunque una condizione verificata la quale all'inizio del nuovo tratto debba necessariamente essere  $V < V_0$ . Supponiamo che ciò non accada, e che resti  $V = V_0$ . Dalle equazioni scritte sopra, risolte con  $V(t) = 0$ , si avrebbe:

$$\begin{aligned} q(t) &= -\frac{CV_0}{2} + \left[ \frac{CV_1}{2} + A \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right) \right] \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \\ \implies I(t) &= -\frac{V_0}{2R} - \left[ \frac{V_1}{2R} + \frac{A}{R} \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right) \right] \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \end{aligned}$$

Imponendo  $-\frac{C(V_1 - V_0)}{2} < A$ , dovrebbe essere  $I(0) < 0$ , che non può accadere, perciò tale condizione è sufficiente a imporre che nel diodo smetta di passare corrente. Si noti che le assunzioni fatte finora su  $A$  sono riassumibili in:

$$\frac{C(V_1 - V_0)}{2} > |A|$$

Risolviamo ora le equazioni di sopra tenendo conto che  $V(t) = 0$  e  $I = 0$ :

$$q(t) = \left[ A \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right) + \frac{C(V_1 - V_0)}{2} \right] \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$V = -\frac{q}{C} = -\frac{1}{C} \left[ A \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right) + \frac{C(V_1 - V_0)}{2} \right] \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

La condizione imposta su  $A$  implica automaticamente  $V < V_0$ , come deve essere. Questo andamento della carica si interrompe quindi a  $t = T$ , quando essa vale:

$$q = \left[ A \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right) + \frac{C(V_1 - V_0)}{2} \right] \exp\left(-\frac{T}{RC}\right)$$

Dunque, per la condizione di raccordo, imponiamo questo valore uguale a quello assunto della carica all'inizio del periodo  $2T$ :

$$\begin{aligned} \left[ A \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right) + \frac{C(V_1 - V_0)}{2} \right] \exp\left(-\frac{T}{RC}\right) &= A + \frac{C(V_1 - V_0)}{2} \\ \implies A &= -\frac{C(V_1 - V_0)}{2} \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{RC}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{3T}{RC}\right)} \end{aligned}$$

Infine, si nota che tale valore di  $A$  soddisfa la condizione sul suo modulo trovata sopra, dunque tale soluzione è consistente. Per rispondere alla domanda, la carica sul condensatore in funzione del tempo in un periodo vale:

$$q(t) = \frac{C(V_1 - V_0)}{2} + A \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) \quad \text{per } 0 < t < T$$

$$q(t) = \left[ A \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right) + \frac{C(V_1 - V_0)}{2} \right] \exp\left(-\frac{t-T}{RC}\right) \quad \text{per } T < t < 2T$$

Dove  $A$  è quello appena calcolato.

## 9 Girando attorno al cilindro [100 pt.]

### 9.1 Introduzione Domanda 1

La prima domanda del problema può essere affrontata in diversi modi:

- Energia
- Momenti delle forze
- Dinamica

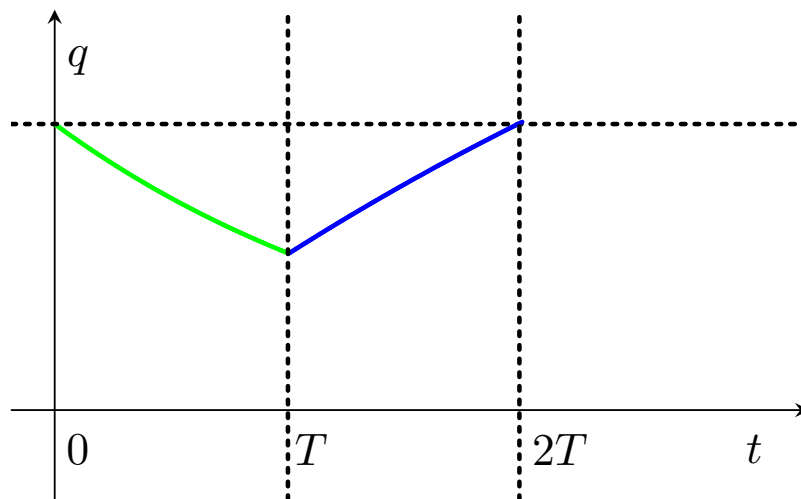
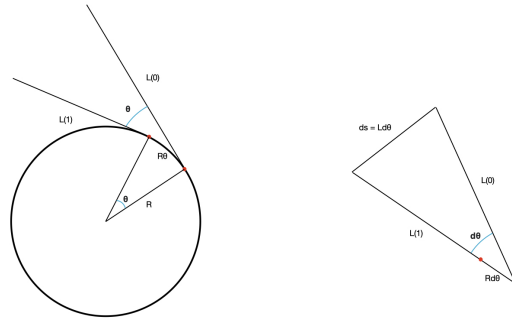


Figura 1: Grafico indicativo del valore della carica del condensatore in un periodo. In verde è rappresentato il periodo di scarica, ovvero quello in cui l'onda quadra è “bassa”, in blu quello di carica.

### 9.1.1 Soluzione 1: Energia

La massa attaccata alla fune ha inizialmente un'energia pari alla sua energia cinetica:  $E = \frac{1}{2}mv^2$ . Le uniche due forze agenti sulla massa sono la tensione  $T$  e l'attrito  $F_a$ . La prima osservazione da fare è che la massa  $m$  ha sempre una velocità perpendicolare al filo, ne consegue che il lavoro della tensione è nullo. Resta solo la forza d'attrito che, essendo sempre parallela alla direzione del moto, esercita un lavoro  $W$  pari a:  $W = F_a s$ , dove  $s$  è la lunghezza del percorso fatto dalla massa. La forza d'attrito è costante ed è pari a  $F_a = mg\mu$ . Resta solo quindi da calcolare la lunghezza della traiettoria. Per prima cosa bisogna considerare un intervallo infinitesimo di angolo  $d\theta$ .



In questo regime la traiettoria coincide con quella di una circonferenza, perchè, come si vede in figura il filo si è accorciato di  $Rd\theta$ , ma si è anche spostato il punto di contatto con il cilindro nella stessa direzione sempre di  $Rd\theta$ . Ne consegue che:  $ds = l d\theta$ , dove  $l$  rappresenta la lunghezza del filo in quell'istante. Inoltre sappiamo che  $l = L - R\theta$ .

$$(L - R\theta)d\theta = ds \quad (19)$$

Integrando da una parte e dall'altra:

$$L\theta - R\frac{\theta^2}{2} = s(\theta) \quad (20)$$

Così facendo abbiamo trovato quanto vale la lunghezza della traiettoria in funzione dell'angolo fatto, da cui sostituendo  $\theta = \frac{L}{R}$ , ovvero l'angolo a cui il filo è completamente arrotolato al cilindro si ottiene:

$$s = \frac{L^2}{2R} \quad (21)$$

Imponendo ora che la pallina si fermi quando arriva, ovvero che la sua energia cinetica quando arriva sia nulla, ovvero che il lavoro della forza d'attrito in modulo sia uguale all'energia cinetica iniziale, si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\mu\frac{L^2}{2R} \quad (22)$$

da cui:

$$\boxed{\mu = \frac{v^2 R}{gL^2}} \quad (23)$$

### 9.1.2 Soluzione 2: Momento forza d'attrito

Come detto in precedenza l'unica forza a compiere lavoro è la forza d'attrito. Consideriamo il momento della forza d'attrito rispetto al centro della circonferenza:  $M = dF_a \cos \alpha$ , dove  $d$  è la distanza della massa  $m$  dal centro della circonferenza. Come si vede in figura  $l = d \cos \alpha$ . Il lavoro fatto dalla forza d'attrito in un infinitesimo di angolo è:  $dW = Md\theta$ . Da cui:

$$W = \int Md\theta = F_a \int (L - R\theta)d\theta = F_a \left( L\theta + R\frac{\theta^2}{2} \right) \quad (24)$$

Sostituendo, come prima,  $\theta = \frac{L}{R}$  e  $F_a = \mu mg$ , otteniamo:

$$W = \mu mg \frac{L^2}{2R} \quad (25)$$

Uguagliando il lavoro della forza d'attrito all'energia iniziale,  $E = \frac{1}{2}mv^2$ , si ottiene:

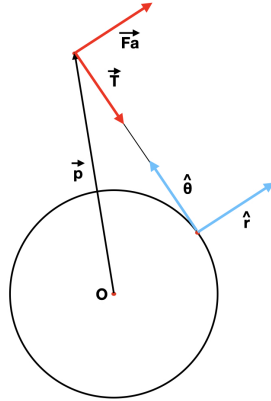
$$\boxed{\mu = \frac{v^2 R}{gL^2}} \quad (26)$$

### 9.1.3 Soluzione 3: Dinamica

Se non ti sono piaciute le due soluzioni precedenti, molto semplici e intuitive, e adori farti del male nel pomeriggio questa è la soluzione che fa per te.

Per prima cosa bisogna prendere come origine del sistema il centro della circonferenza e due versori ruotanti in moto tale che  $\hat{r}$  sia sempre perpendicolare al segmento  $l$  e che  $\hat{\theta}$  sia sempre parallelo a  $l$  (vedi figura).

In questo sistema il vettore posizione risulta:



$$\vec{p} = R\hat{r} + (L - R\theta)\hat{\theta} \quad (27)$$

L'accelerazione è quindi:

$$\ddot{\vec{p}} = (-\ddot{\theta}(L - R\theta) + \dot{\theta}^2)\hat{r} + (-\dot{\theta}^2(L - R\theta))\hat{\theta} \quad (28)$$

Da qui si possono impostare le equazioni del moto lungo i due versori: parallelo a  $\hat{r}$  agisce solo la forza d'attrito e parallelo a  $\hat{\theta}$  agisce solo la tensione del filo.

$$\begin{cases} m[-\ddot{\theta}(L - R\theta) + \dot{\theta}^2 R] = mg\mu \\ m[-\dot{\theta}^2(L - R\theta)] = T \end{cases} \quad (29)$$

Dalla prima equazione è possibile ricavare  $\theta(t)$  risolvendo la seguente equazione differenziale:

$$\boxed{-\ddot{\theta}(L - R\theta) + \dot{\theta}^2 R = g\mu} \quad (30)$$

**Soluzione intermedia** In questo momento si può avere un'intuizione: la lunghezza della traiettoria non dipende dall'attrito. Quindi si può provare a trovare la lunghezza della traiettoria dall'equazione omogenea associata per poi ricondursi alla soluzione 1.1.

Si risolve l'omogenea:

$$\dot{\theta}^2 R = \ddot{\theta}(L - R\theta) \quad (31)$$

$$\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = \frac{R\dot{\theta}}{L - R\theta} \quad (32)$$

$$\ln(\dot{\theta}) = -\ln(L - R\theta) + c \quad (33)$$

$$\dot{\theta}(L - R\theta) = k = v \quad (34)$$

Si può facilmente vedere che questa costante  $k$  vale proprio  $v$ , ovvero la velocità iniziale della massa. Proseguendo:

$$L\theta - R\frac{\theta^2}{2} = vt \quad (35)$$

$$\theta_o(t) = \frac{L}{R} - \sqrt{\frac{L^2}{R^2} - \frac{2vt}{R}} \quad (36)$$

Per avere soluzioni reali il discriminante della soluzione deve essere maggiore di 0 e quindi si ottiene:

$$t < \frac{L^2}{2vR} \quad (37)$$

Ricordandosi che la soluzione dell'omogenea equivale alla soluzione senza forza d'attrito e quindi con velocità sempre costante e rendendosi quindi conto che questo  $t$  equivale quindi al tempo che ci metterebbe l'intero filo ad avvolgersi intorno al cilindro (senza attrito), si ottiene che:

$$s = \frac{L^2}{2R} \quad (38)$$

da cui si rimanda alla soluzione 1.1.

**Soluzione brutale** Risolviamo l'equazione differenziale:

$$-\ddot{\theta}(L - \theta R) + \dot{\theta}^2 R = g\mu \quad (39)$$

Moltiplico a sinistra e destra per  $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}\ddot{\theta}(L - \theta R) = \dot{\theta}(-g\mu + \dot{\theta}^2 R) \quad (40)$$

Chiamiamo  $x = \theta - \frac{L}{R}$

$$\dot{x}\ddot{x}(Rx) = \dot{x}(g\mu - \dot{x}^2 R) \quad (41)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{x})^2}{g\mu - \dot{x}^2 R} = \frac{dx}{Rx} \quad (42)$$

$$\frac{1}{2} \ln (g\mu - \dot{x}^2 R) = -\ln Rx + c \quad (43)$$

$$\ln ((g\mu - \dot{x}^2 R)^{\frac{1}{2}} Rx) = c \quad (44)$$

$$(g\mu - \dot{x}^2 R)^{\frac{1}{2}} Rx = c \quad (45)$$

$$\dot{x} = \left( \left( \frac{c}{Rx} \right)^2 + \mu g \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{R}} \quad (46)$$

$$Rx \left( \frac{R}{c + \mu g R^2 x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx = dt \quad (47)$$

Chiamo  $y = \mu g R^2 x^2$

$$\frac{1}{2\mu g \sqrt{R}} \frac{1}{\sqrt{c+y}} dy = dt \quad (48)$$

$$\frac{1}{\mu g \sqrt{R}} \sqrt{c+y} = t + k \quad (49)$$

$$y = R\mu^2 g^2 t^2 + k^2 + 2\mu g \sqrt{R} t + c \quad (50)$$

Da cui:

$$\theta(t) = \frac{L}{R} - \sqrt{\frac{\mu g}{R} t^2 + \frac{k^2}{\mu g R^2} + \frac{2k}{R\sqrt{R}} t + c} \quad (51)$$

Ricaviamo anche la derivata prima:

$$\dot{\theta}(t) = - \left( \frac{k}{R\sqrt{R}} + \frac{\mu g}{R} t \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu g}{R} t^2 + \frac{k^2}{\mu g R^2} + \frac{2k}{R\sqrt{R}} t + c}} \quad (52)$$

Per ricavare le costanti  $k$  e  $c$  dobbiamo imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t=0) = \frac{v^2}{L} \\ \theta(t=0) = 0 \end{cases} \quad (53)$$

Da cui:

$$k = -v\sqrt{R} \quad (54)$$

$$c = \frac{L^2}{R^2} - \frac{v^2}{\mu g R} \quad (55)$$

$$\theta(t) = \frac{L}{R} - \sqrt{\frac{\mu g}{R} t^2 - \frac{2v}{R} t + \frac{L^2}{R^2}} \quad (56)$$

$$\dot{\theta}(t) = \left( \frac{v}{R} - \frac{\mu g}{R} t \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu g}{R} t^2 - \frac{2v}{R} t + \frac{L^2}{R^2}}} \quad (57)$$

Ora bisogna imporre che quando  $\theta = L/R$  ovvero quando  $t = t_{arrivo}$  avvenga che  $\dot{\theta} = 0$ . Dalla prima ricaviamo il tempo di arrivo:

$$t_{arrivo} = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - \frac{\mu g L^2}{R}}}{\mu g} \quad (58)$$

Dalla seconda ricavo il tempo di arrivo:

$$t_{arrivo} = \frac{v}{\mu g} \quad (59)$$

Li impongo uguali e trovo:

$$\boxed{\mu = \frac{Rv^2}{L^2 g}} \quad (60)$$

## 9.2 Introduzione Domanda 2

La domanda due può essere affrontata in due modi diversi:

- pensando al lavoro della forza di attrito
- come la soluzione “dinamica” della domanda precedente

### 9.2.1 Soluzione 1: Lavoro

L’idea è quella di calcolare quanto tempo ci metta la forza d’attrito a fermare la massa sapendo già che si fermerà dove vogliamo noi. Sappiamo che:

$$dW = F_a ds = F_a v(t) dt \quad (61)$$

$v(t)$  è facilmente calcolabile imponendo la conservazione dell’energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 - W(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 \quad (62)$$

Da cui:

$$v(t) = \sqrt{v^2 - \frac{2W(t)}{m}} \quad (63)$$

Sostituendo otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{v^2 - \frac{2W(t)}{m}}} dW = mg\mu dt \quad (64)$$

Integrando:

$$-m\sqrt{v^2 - \frac{2W(t)}{m}} = mg\mu t + c \quad (65)$$

Da cui:

$$W(t) = \frac{m}{2}(2g\mu vt - g^2\mu^2 t^2) \quad (66)$$

Nelle soluzioni 1.1 e 1.2 abbiamo trovato  $W = \frac{mg\mu L^2}{2R}$ . Sostituendo:

$$t^2(g\mu) - t(2v) + \frac{L^2}{R} = 0 \quad (67)$$

Sostituendo il valore di  $\mu$  trovato al punto precedente e risolvendo per  $t$  si ottiene:

$$\boxed{t_{arrivo} = \frac{L^2}{vR}} \quad (68)$$

### 9.2.2 Soluzione 2: Dinamica

Questa soluzione è a seguito della soluzione 1.3.2. Infatti una volta trovato  $\mu$  basta sostituirlo in  $t = \frac{v}{\mu g}$  per trovare:

$$\boxed{t_{arrivo} = \frac{L^2}{vR}} \quad (69)$$

## 10 Molla in campo elettrico [100 pt.]

### 10.1 Domanda 1

Per il teorema dell'impulso  $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$  e nel nostro caso la forza è costante:  $F = Eq$  diretta nel verso negativo dell'asse  $x$ . Consideriamo il sistema costituito da entrambe le particelle, le forze interne si annullano (ossia le forze elastiche); quindi solo la forza dovuta al campo elettrico contribuirà alla variazione della quantità di moto:  $p_{iniziale} = 2mv$ ,  $p_{finale} = -2mv$  e  $t_0 = 0$ , quindi  $\Delta p = 4mv$  e  $\Delta t = t_1$ . Quindi:

$$t_1 = \frac{4mv}{Eq}$$

### 10.2 Domanda 2

Dalla seconda legge di Newton abbiamo che  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Analizziamo ora l'evoluzione del moto delle singole particelle.

$$m\ddot{x}_B = k(L + x_A - x_B) - Eq$$

$$m\ddot{x}_A = k(x_B - x_A - L)$$

Definiamo l'allungamento della molla  $\Delta L \equiv x_B - x_A - L$ , e calcoliamo la derivata seconda di  $\Delta L$  rispetto al tempo. le equazioni diventano:

$$m\ddot{x}_B = -k\Delta L - Eq$$

$$m\ddot{x}_A = k\Delta L$$

$$\Delta\ddot{L} = -\frac{2k}{m}\Delta L - Eq$$

Risolvendo questa equazione differenziale e imponendo le condizioni iniziali  $\Delta L(0) = 0$  e  $\Delta\dot{L}(0) = 0$  si ottiene:

$$\Delta L(t) = -\frac{Eq}{2k} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right)$$

L'allungamento della molla oscilla tra 0 e  $-\frac{Eq}{k}$ , con frequenza  $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ .

L'energia cinetica del centro di massa della molla non varia tra l'istante iniziale e finale. Siccome il lavoro svolto complessivamente sul sistema è 0, alla fine non si avranno moti relativi delle due masse rispetto al centro di massa

e quindi la molla dovrà avere lunghezza pari a quella di riposo:  $\Delta L(t_1) = 0$ . Il tempo  $t_1$  dovrà quindi essere un multiplo intero del periodo.

Volendo imporre che la lunghezza minima si ottenga una sola volta è necessario che il tempo  $t_1$  sia esattamente 1 periodo. Si ottiene quindi, ricordando che  $\omega\tau = 2\pi$ , che la condizione desiderata è  $\sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot \frac{4mv}{Eq} = 2\pi$ .

### 10.3 Domanda 3

Per trovare la posizione massima della massa A, studiamo prima il moto del centro di massa del sistema. Dato che le particelle hanno la stessa massa  $x_{cm} = \frac{x_A + x_B}{2}$ . Utilizzando le equazioni per le singole masse trovate al punto precedente troviamo l'accelerazione.

$$\ddot{x}_{cm} = -\frac{Eq}{2m}$$

Il moto del centro di massa è uniformemente accelerato con accelerazione costante negativa. Troviamo l'equazione del moto imponendo le condizioni iniziali:

$$x_{cm}(0) = -\frac{L}{2}$$

$$\dot{x}_{cm}(0) = v$$

$$x_{cm}(t) = -\frac{L}{2} + vt - \frac{Eq}{4m}t^2 = \frac{x_{B(t)} + x_{A(t)}}{2}$$

Notiamo che al tempo  $t_1/2$  il centro di massa ha velocità nulla dato. Questo corrisponde al punto in cui raggiunge la posizione massima  $x_{cm,max}$ , dato che prima di questo istante ha velocità positiva e dopo questo istante negativa. L'unicità del massimo trovato è assicurata dal fatto che l'accelerazione di A è sempre negativa o al massimo nulla ( $m\ddot{x}_A = k\Delta L$  e  $\Delta L \leq 0$ ). Sostituiamo ora  $t_1/2$  in  $x_{cm}(t)$  e otteniamo

$$x_{cm,max} = -\frac{L}{2} + \frac{mv^2}{Eq}$$

Se n è dispari allo stesso tempo abbiamo anche la massima compressione della molla, quindi anche il minimo  $x_{cm} - x_A$ , ossia abbiamo  $x_{A,max}$ . Per fare in modo che la massa A non entri mai nella regione  $x > 0$  è sufficiente imporre che la posizione massima raggiunta dal centro di massa sia minore della metà della lunghezza minima della molla.

Ricordando dal punto 2) abbiamo:

$$\Delta L(t) = -\frac{Eq}{2k} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right)$$

$$L_{min} = L - \frac{Eq}{k}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} x_{cm,max} &< \frac{L_{min}}{2} \\ -\frac{L}{2} + C &< \frac{L}{2} - \frac{Eq}{2k} \\ L &> \frac{Eq}{2k} + \frac{Eq}{2k} \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $n$  sia pari, al tempo  $t_1/2$  la molla ha lunghezza  $L$  quindi la condizione imposta è più che sufficiente a soddisfare la richiesta. Anche in questo caso il tempo  $t_1$  corrisponde ad un punto di massimo. Si può notare dal fatto che la velocità di A in quell'istante è nulla.

## 10.4 Domanda 4

Per trovare le equazioni del moto possiamo utilizzare i risultati ottenuti ai punti precedenti:

$$\begin{aligned} \frac{x_B(t) + x_A(t)}{2} = x_{cm}(t) &= -\frac{L}{2} + vt - \frac{Eq}{4m} t^2 \\ \frac{x_B(t) - x_A(t)}{2} = \frac{L + \Delta L(t)}{2} &= \frac{L}{2} - \frac{Eq}{4k} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right) \end{aligned}$$

Da qui posso sommare e sottrarre le due equazioni per trovare le due leggi orarie:

$$\begin{aligned} x_A(t) &= -L + vt - \frac{Eq}{4m} t^2 + \frac{Eq}{4k} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right) \\ x_B(t) &= vt - \frac{Eq}{4m} t^2 - \frac{Eq}{4k} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right) \end{aligned}$$

Il moto delle 2 masse è la somma di due moti: un moto uniformemente accelerato (moto del centro di massa) e un moto armonico rispetto al centro

di massa. Per evidenziare questo risultato nel grafico è stata aumentata l'ampiezza dell'oscillazione oltre quanto le condizioni del problema lo permettano. Infatti dovendo rispettare i parametri fisici il tempo  $t_1/2$  dovrebbe corrispondere ad una posizione di massimo per la massa A perchè la sua velocità è sempre decrescente.

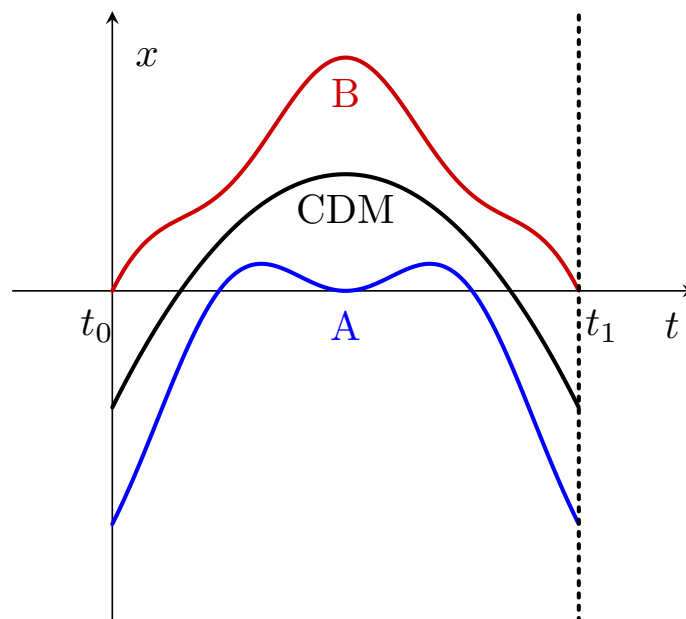


Figura 2: Grafico qualitativo del moto delle due particelle tra gli istanti  $t_0$  e  $t_1$ . Prima e dopo questi tempi il moto è rettilineo uniforme per ipotesi.

## 11 Trasformazione di un gas reale [110 pt.]

### 11.1 Domanda 1

Espandendo il prodotto al primo membro dell'equazione di stato di Van der Waals, trascurando il termine in  $ab$  e moltiplicando entrambi i membri per il volume  $V$ , si ottiene

$$PV^2 - n(bP + RT)V + an^2 = 0.$$

Questa è un'equazione di secondo grado in  $V$ , le cui soluzioni sono

$$V_{\pm} = \frac{n}{2P} \left( bP + RT \pm RT \sqrt{1 + \frac{2bP}{RT} + \frac{b^2P^2}{R^2T^2} - \frac{4Pa}{R^2T^2}} \right).$$

A questo punto è possibile applicare lo sviluppo di McLaurin  $(1+x)^k \approx 1+kx$ , ottenendo

$$V_{\pm} \approx \frac{n}{2P} \left( bP + RT \pm RT \left( 1 + \frac{bP}{RT} + \frac{b^2P^2}{2R^2T^2} - \frac{2Pa}{R^2T^2} \right) \right),$$

in cui possiamo eliminare il termine in  $b^2$  per ipotesi. Dopo queste approssimazioni, le soluzioni diventano

$$V_+ \approx n \left( b + \frac{RT}{P} - \frac{a}{RT} \right), \quad V_- \approx \frac{an}{RT}.$$

Di queste, però, solo una è fisicamente sensata. Facendo un rapido controllo nel limite di gas perfetto (cioè  $a, b \rightarrow 0$ ),  $V_+$  tende al valore dato dalla legge di stato dei gas perfetti, mentre  $V_-$  tende a zero. Quindi

$$V \approx n \left( \frac{RT}{P} + b - \frac{a}{RT} \right).$$

## 11.2 Domanda 2

Visto che il contenitore è termicamente isolato con l'esterno, il calore scambiato è nullo ed il primo principio della termodinamica si scrive  $\Delta U = -W$ , dove  $W$  è il lavoro compiuto durante la trasformazione. Chiamando  $V_1$  il volume iniziale dello scompartimento di sinistra e  $V_2$  il volume finale dello scompartimento di destra, il lavoro vale

$$W = \int_{V_1}^0 P_1 dV + \int_0^{V_2} P_2 dV = P_2 V_2 - P_1 V_1.$$

Il secondo principio della termodinamica diventa

$$U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2.$$

Ciò significa che l'entalpia finale è pari a quella iniziale. Sostituendo le espressioni per energia interna e volume, imponendo che le temperature iniziale e finale siano uguali ed espandendo le frazioni con la stessa tecnica del punto 1, si ottiene

$$\left( b - \frac{2a}{RT} \right) (P_2 - P_1) = 0.$$

Essendo  $P_2 - P_1 \neq 0$ , l'equazione è soddisfatta solo se  $T = \frac{2a}{bR}$ .

## 12 Immagina due fili... [120 pt.]

### 12.1 Domanda 1

Una banale applicazione del Teorema di Gauss consente di trovare l'espressione del campo elettrico generato da un filo infinito di densità di carica uniforme  $\lambda$ . In particolare, indicando con  $\vec{r}$  la distanza dal filo, si ha che

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

Consideriamo un punto generico  $P(x, y, z)$ . Le distanze dai due fili sono

$$\vec{r}_+ = (x - a)\hat{x} + y\hat{y} \quad \vec{r}_- = (x + a)\hat{x} + y\hat{y}.$$

Il campo elettrico nel punto  $P$  è dato dalla sovrapposizione dei campi generati da due fili

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda \vec{r}_+}{2\pi\epsilon_0 r_+^2} + \frac{-\lambda \vec{r}_-}{2\pi\epsilon_0 r_-^2} = \frac{\lambda((x - a)\hat{x} + y\hat{y})}{2\pi\epsilon_0((x - a)^2 + y^2)} + \frac{-\lambda((x + a)\hat{x} + y\hat{y})}{2\pi\epsilon_0((x + a)^2 + y^2)} = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{x - a}{(x - a)^2 + y^2} - \frac{x + a}{(x + a)^2 + y^2} \right) \hat{x} + \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(x - a)^2 + y^2} - \frac{1}{(x + a)^2 + y^2} \right) \hat{y}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{x - a}{(x - a)^2 + y^2} - \frac{x + a}{(x + a)^2 + y^2} \right) \\ E_y &= \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(x - a)^2 + y^2} - \frac{1}{(x + a)^2 + y^2} \right) \\ E_z &= 0. \end{aligned}$$

### 12.2 Domanda 2

Integrando il campo elettrico è possibile trovare un'espressione del potenziale. Scegliendo l'origine come zero del potenziale si ottiene

$$V = V - 0 = - \int_a^{r_+} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr - \int_a^{r_-} \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \quad (70)$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_+}{a} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_-}{a} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_+}{r_-}. \quad (71)$$

Notiamo che il potenziale è costante quando lo è il rapporto  $r_+/r_-$ . Da un simpatico fatto di geometria euclidea si sa che il luogo dei punti tali che il rapporto delle loro distanze da due punti fissati è costante è una circonferenza, chiamata "cerchio di Apollonio". In questa configurazione di cariche, quindi, le superfici equipotenziali sono dei cilindri con asse parallelo ai fili carichi.

### 12.3 Domanda 3

Di seguito utilizzeremo la tecnica delle cariche immagine per determinare campo e potenziale all'esterno dei cilindri conduttori carichi. Si può dimostrare che il campo è equivalente a quello generato da due fili immagine infiniti di carica opposta posizionati sull'asse delle  $x$ . Per quanto detto prima è, infatti, possibile posizionare i due fili in modo che le superfici dei due cilindri siano equipotenziali, che è condizione necessaria per un conduttore. Per la simmetria del sistema, anche le posizioni dei due fili saranno simmetriche rispetto all'asse  $y$ . Indichiamo, quindi, con  $k$  e  $-k$  le loro posizioni, e con  $\lambda$  e  $-\lambda$  rispettivamente le loro densità di carica. Un altro simpatico fatto di geometria euclidea ci assicura che l'inversione circolare (ma che mostro è?) rispetto alla circonferenza di Apollonio manda uno dei due punti che la genera nell'altro, quindi si trova che

$$(a - k)(a + k) = r^2 \quad k^2 = a^2 - r^2 \quad k = \sqrt{a^2 - r^2}$$

Dall'espressione (1) possiamo calcolare la differenza di potenziale  $\Delta V = V_+ - V_-$  tra le due superfici cilindriche, dove  $V_+$  e  $V_-$  indicano i potenziali nei due punti d'intersezione più vicini all'origine tra le superfici circolari e l'asse  $x$ .

$$V_+ = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_+}{r_-} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{k+r-a}{k+a-r} \quad V_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_+}{r_-} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{k+a-r}{k+r-a}$$

$$\Delta V = V_+ - V_- = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{k+a-r}{k+r-a} \quad \lambda = \Delta V \pi \epsilon_0 \left( \ln \frac{k+a-r}{k+r-a} \right)^{-1}$$

La forza tra i due cilindri corrisponde alla forza tra i due fili immagini, quindi

$$F = -\lambda \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 2k} = -\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 k} = -\frac{\pi\epsilon_0 \Delta V^2}{4\sqrt{a^2 - r^2}} \left( \ln \frac{\sqrt{a^2 - r^2} + a - r}{\sqrt{a^2 - r^2} + r - a} \right)^{-2}$$

in cui il segno negativo indica sta a indicare che la forza è attrattiva.