

Problemi del Test di Ammissione

Lo Staff dello Stage*

21 novembre 2022

Introduzione

Ciao! I problemi che state per leggere sono la prima sfida che vi separa dalla possibilità di partecipare allo stage 2023. **Leggete attentamente questa introduzione:** potrà esservi utile per un approccio corretto al test.

Avete circa due settimane di tempo per risolvere i problemi, perciò sentitevi liberi di andare a cercare o studiare gli argomenti che non conoscete bene: il test serve anche a questo. Sconsigliamo fortemente di cercare direttamente le soluzioni, di far risolvere i problemi ad altri o di svolgerli in gruppo: non servirebbe né a voi (non vi aiuta ad approcciare argomenti nuovi in maniera autonoma; inoltre alle olimpiadi siete da soli!), né a noi per selezionarvi in modo appropriato (senza contare che c'è anche una prova orale...).

Per svolgere i problemi è ammesso l'utilizzo della calcolatrice scientifica, materiale da disegno ed il supporto necessario per produrre effettivamente l'elaborato. Non sono consentiti ulteriori strumenti di calcolo.

I problemi sono stati ordinati grossomodo in ordine crescente di difficoltà. Ovviamente, questa è una valutazione molto soggettiva, quindi vi invitiamo a non scoraggiarvi e a provare a risolverli tutti: sicuramente, per molti di voi, alcuni dei problemi più difficili risulteranno più facili, e viceversa.

Per iscrivervi dovrete inviare un unico file pdf con tutte le vostre soluzioni. Potete scriverlo come preferite: L^AT_EX, Word, fotografando manoscritti... L'importante è che sia perfettamente leggibile, ovviamente non potremmo dare alcun punto a ciò che non riusciamo a leggere! La dimensione massima del file unico da caricare sul sito è di 50 Megabyte.

Nel file consegnato, le soluzioni devono essere riportate nello stesso ordine dei corrispondenti problemi e deve essere chiaro a quale quesito si riferiscono!

È necessario spiegare tutti i passaggi svolti, anche parziali, e non riportare solo i risultati finali. Una risposta non giustificata, per quanto corretta, otterrà un punteggio parziale o nullo.

È importante che inviate anche soluzioni incomplete, nel caso non riusciate a risolvere alcuni problemi per intero: in questo caso verranno assegnati punteggi

*segreteria.stagefisica@sns.it

parziali. Inoltre, vi facciamo notare che, per alcuni problemi, è possibile risolvere i punti successivi anche senza aver svolto i precedenti.

Per eventuali domande rivolgersi solamente all'indirizzo email segreteria.stagefisica@sns.it. Eventuali correzioni sul testo possono essere annunciate sul sito ufficiale dello stage stagefisica.sns.it.

Ovviamente, sappiamo che i più giovani potrebbero avere lo svantaggio di conoscere meno argomenti: ne terremo conto. Il test è valutato su un totale di 1000 punti. Il punteggio minimo necessario (ma non sufficiente!) per fare l'orale è di soli 50 punti, al di sotto dei quali scarteremo la richiesta. Buon lavoro!

1 Vassoio su rulli rotanti [60 pt.]

Due rulli cilindrici, con assi paralleli tra loro e distanti $2d$, vengono mantenuti in rotazione alle velocità angolari costanti ω e $-\omega$, come mostrato in Figura 1. Sul sistema agisce la forza di gravità. All'istante iniziale $t = 0$, un vassoio piatto ed omogeneo (di massa m e lunghezza $L = 5d$) viene appoggiato sui rulli. Posto l'asse x perpendicolare agli assi dei rulli e la sua origine equidistante da essi, in $t = 0$ la posizione x_0 del centro del vassoio è tale che $-d \leq x_0 \leq d$, come in Figura 1.

1. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra il vassoio ed i rulli è μ , descrivere come varia la posizione $x(t)$ del centro del vassoio nel tempo, calcolando eventuali grandezze caratteristiche del suo moto.
2. Se il vassoio fosse posto inizialmente in $x_0 = 0$, quale sarebbe l'impulso massimo I_{\max} , applicabile in direzione orizzontale, per il quale il centro del vassoio rimane compreso tra i due rulli? (Si assuma che l'impulso venga applicato in un istante di tempo infinitesimo)

Nota: si può assumere che ω sia sufficientemente elevata da far sì che i rulli scivolino sempre sul vassoio.

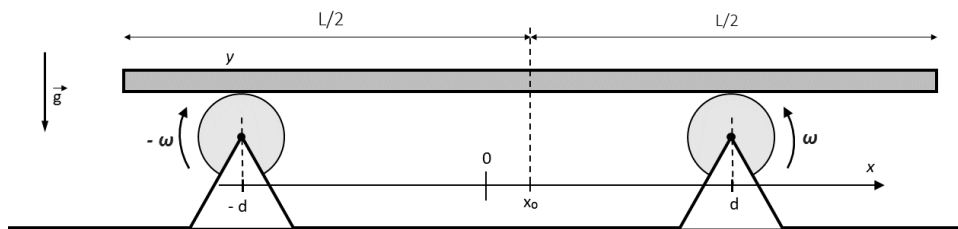


Figura 1: Schematizzazione del sistema del Problema 1.

2 Pallina contro asta non omogenea [60 pt.]

Un'asta (non necessariamente omogenea) di massa M e lunghezza L , è incardinata ad un piano orizzontale in uno dei due estremi ed è libera di ruotare attorno ad esso, come in Figura 2. Una pallina di massa M è lanciata perpendicolarmente all'asta contro l'altro estremo, con velocità v_0 , mentre l'asta è inizialmente ferma. Calcolare il massimo ed il minimo valore possibili della velocità finale della pallina dopo l'urto elastico con l'asta, se il centro di massa dell'asta è ad una distanza $d = 0.4 L$ dal cardine.

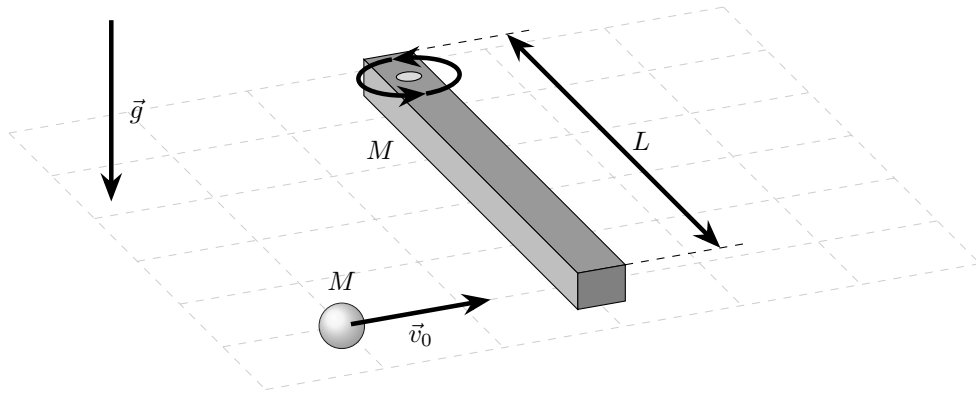


Figura 2: pallina contro asta non omogenea.

3 Motore e bagno termico [70 pt.]

Una macchina termica opera reversibilmente tra due corpi con temperature T_1 e T_2 rispettivamente, con $T_1 > T_2$. Si supponga inizialmente che i due corpi siano bagni termici ideali, cioè che abbiano capacità termica infinita.

1. Trovare il rendimento η della macchina.

Si assuma adesso che il corpo a temperatura più alta abbia capacità termica finita C (mentre quello a temperatura più bassa continua ad avere capacità termica infinita). Si assuma inoltre che la quantità di calore scambiata in un ciclo tra il corpo a temperatura maggiore ed il motore valga $k\Delta T$, dove k è una costante positiva e ΔT è il modulo della differenza di temperatura tra i due corpi durante il ciclo in questione.

2. Supponendo che, in ogni ciclo, valga $k\Delta T \ll CT_2$, si determini N tale che l' N -esimo ciclo abbia un rendimento pari alla metà del rendimento del primo ciclo.

4 Sfera di cristallo [70 pt.]

Una sfera di cristallo, di raggio R ed indice di rifrazione n , è circondata da aria (indice di rifrazione pari a 1) e viene colpita da un raggio luminoso, con parametro d'impatto r dal centro.

1. Qual è l'angolo con cui il raggio viene rifratto all'interno della sfera?
2. Per quali valori di r non si ha mai riflessione totale interna?

All'interno della sfera di cristallo viene creata una cavità sferica di raggio ρ e concentrica alla sfera grande. La cavità sferica viene riempita di un materiale omogeneo, caratterizzato da un indice di rifrazione $n' > n$.

3. Per quale valore di r il raggio tange la cavità sferica? Si denoti questo valore con r' .
4. Per quali valori di $r \leq r'$ non si ha mai riflessione totale interna nella sfera piccola?

Le due sfere vengono tagliate lungo un piano passante per il centro ed ortogonale al raggio di luce, in modo che esso colpisca le due semisfere perpendicolarmente alla superficie piatta. Una schematizzazione del sistema è riportata in Figura 3.

5. Per quali valori di $r < \rho$ non si ha riflessione totale interna né sulla prima, né sulla seconda superficie di separazione?
6. Per i valori di $r < \rho$ trovati al punto 5, trovare l'angolo, rispetto alla direzione iniziale del raggio, con cui la luce esce dalla semisfera grande.

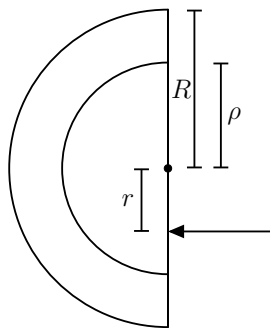


Figura 3: Schematizzazione del sistema degli ultimi due punti del Problema 4. Il raggio di luce proviene da destra ed esce a sinistra.

5 E pur si muove... [80 pt.]

La quantità di moto p di un fotone dipende unicamente dalla sua frequenza ν , dalla velocità della luce c e dalla costante di Planck h .

1. Si determini $p = f(\nu, h, c)$ tramite l'analisi dimensionale, sapendo che il fattore adimensionale ha valore 1.

Quando un corpo viene esposto alla radiazione elettromagnetica, esso riceve un impulso dovuto alla variazione della quantità di moto dei fotoni incidenti. Tale fenomeno prende il nome di “pressione di radiazione”. Si consideri, ad esempio, un fascio di luce di potenza P che illumina interamente un disco perfettamente riflettente.

2. Trattando l'urto tra la luce ed il disco in modo classico, si determini la forza F agente sul disco.

Viene realizzato un satellite di massa m , dotato di una vela solare perfettamente riflettente (di superficie A) e vincolata a rimanere in posizione radiale rispetto al Sole, in modo che i raggi la colpiscano perpendicolarmente in ogni istante. Si indichi con P la potenza totale emessa isotropicamente dal Sole, la cui massa è M_S . Si assuma che le dimensioni del satellite e la massa della vela siano trascurabili rispetto a tutte le altre grandezze in gioco.

3. Il satellite viene messo su un'orbita circolare di raggio R_0 . Si trovi il periodo T_0 del moto.
4. Senza l'effetto della pressione di radiazione, quale dovrebbe essere la massa del Sole affinché l'orbita circolare abbia gli stessi valori R_0 e T_0 del punto precedente?

Ad un certo punto, un asteroide colpisce il satellite, fornendogli un piccolo impulso in direzione radiale.

5. Supponendo che la vela continui ad essere colpita perpendicolarmente dalla luce del Sole, come viene modificata l'orbita del satellite? In particolare, si trovi il periodo T delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio R_0 .

6 Termodinamica strana [70 pt.]

Un contenitore termicamente isolato è diviso in due scompartimenti, contenenti lo stesso numero di molecole monoatomiche. Inizialmente ogni scompartimento ha stessa temperatura $T = 300$ K, stesso volume e stessa pressione P_0 , pari a quella atmosferica. Come mostrato dalla Figura 4, due pistoni sono collegati alle pareti 1 e 3 (che non conducono calore), mentre la parete 2 è fissa ed è un conduttore di calore perfetto. La distanza iniziale tra le pareti 1 e 2 è 1 m, e lo stesso vale per le pareti 2 e 3. Ad un certo punto vengono azionati i pistoni, in modo da spostare entrambe le pareti 1 e 3 di 30 cm verso destra (il processo è abbastanza lento da permettere ai due scompartimenti di termalizzare). Quanto vale la temperatura finale del gas dopo che il processo si è svolto?

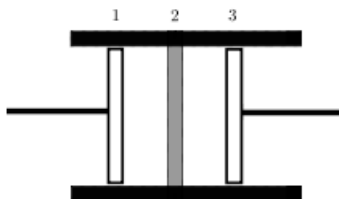


Figura 4: Schematizzazione del sistema del Problema 6.

7 Palla in un fossato semicilindrico [70 pt.]

Una pallina di dimensioni trascurabili è lanciata orizzontalmente (con velocità V) dal bordo di un fossato semicilindrico di raggio R , come mostrato in Figura 5. La pallina rimbalza elasticamente sul fondo del fossato e si osserva che, dopo l'urto, essa si muove con velocità perfettamente rivolta verso l'alto. Calcolare il valore numerico del rapporto tra l'altezza massima h_{max} raggiunta dalla pallina (rispetto al punto di partenza) ed il raggio del fossato.

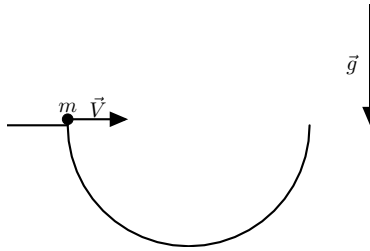


Figura 5: Schematizzazione del sistema del Problema 7.

8 Carica e scarica del condensatore [90 pt.]

Si consideri il circuito in Figura 6, in cui le resistenze valgono R e la capacità del condensatore è C . Il diodo presente nel circuito è un diodo ideale, quindi si comporta come un circuito aperto quando la differenza di potenziale ai suoi capi, considerando come polo negativo quello puntato dalla freccia, è minore di un certo valore $V_0 > 0$, altrimenti si comporta come una semplice caduta di potenziale pari a V_0 , che non assorbe corrente. Si tenga presente che per un diodo la corrente può scorrere solo nel verso puntato dalla freccia.

Si supponga inizialmente che il generatore abbia una differenza di potenziale per la quale il diodo risulti sempre come circuito aperto.

1. Trovare la relazione tra la corrente i che scorre nella resistenza e la carica q sul condensatore, specificando il verso della corrente e la disposizione della carica sul condensatore.

Si supponga adesso che la differenza di potenziale ai capi del generatore sia descrivibile da un'onda quadra tra i valori V_1 e 0 (con $V_1 > V_0$). Sia $2T$ il periodo di quest'onda quadra. Il sistema viene portato in una condizione per la quale anche la carica sul condensatore è periodica e di periodo $2T$.

2. Trovare la legge $q(t)$ che descrive la carica presente sul condensatore in funzione del tempo e tracciarne un grafico.

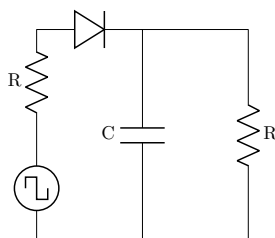


Figura 6: Circuito del Problema 8.

9 Girando attorno al cilindro [100 pt.]

Su un piano orizzontale è fissato un cilindro retto di raggio R ed asse verticale. Ad un punto della circonferenza di base del cilindro è fissato un estremo di una fune inestensibile e lunga L , mentre un corpo puntiforme di massa m è attaccato all'altro estremo. Inizialmente la fune è stesa sul piano, in modo che sia tangente al cilindro. Al corpo puntiforme viene impressa una velocità iniziale orizzontale v_0 , perpendicolare al filo, in modo che la fune inizi ad avvolgersi attorno al cilindro. Sul sistema agisce la forza di gravità ed il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo ed piano orizzontale è μ . Per un certo valore di μ , la velocità della massa si annulla nell'istante in cui essa urta il cilindro.

1. Esprimere tale valore di μ in funzione degli altri parametri.
2. Per il valore di μ trovato al punto precedente, dire dopo quanto tempo dall'inizio del moto la massa urta il cilindro.

10 Molla in campo elettrico [100 pt.]

Agli estremi di una molla sono fissate una particella A , neutra e di massa m , ed una particella B , di massa m e dotata di una carica $q > 0$. La molla ha lunghezza a riposo L e costante elastica k , ed è disposta con l'asse parallelo all'asse x . Nel semipiano $x > 0$ è presente un campo elettrico costante, antiparallelo all'asse x e di modulo E . Inizialmente, il sistema costituito dalla molla e dalle masse si muove a velocità costante $v > 0$ e parallela all'asse x , nella regione di piano $x < 0$. All'istante $t_0 = 0$, la particella B entra nella regione di piano $x > 0$ e, dopo un determinato lasso di tempo, il sistema si trova nuovamente nella zona $x < 0$ con entrambe le masse che si muovono con velocità costante $-v$, ancora parallela all'asse x .

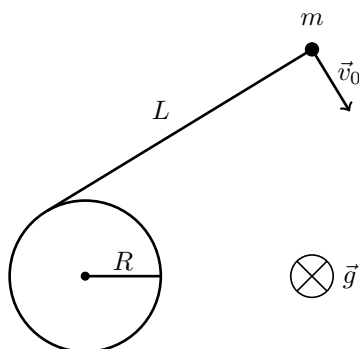


Figura 7: Schematizzazione del sistema del Problema 9 visto dall'alto.

In tutto il problema si consideri l'ascissa della particella A minore di quella della particella B . In altre parole, se l'asse x è rivolto verso destra, la particella B è sempre a destra della particella A .

1. Trovare l'istante di tempo t_1 in cui la particella B esce dal semipiano $x > 0$.
2. Quale condizione deve essere soddisfatta affinché la molla raggiunga la sua lunghezza minima solamente una volta?
3. Quale disuguaglianza deve essere soddisfatta affinché la particella A non entri mai nella regione di piano $x > 0$?
4. Scrivere le leggi orarie delle due particelle e disegnare un grafico qualitativo di $x_A(t)$ e $x_B(t)$.

11 Trasformazione di un gas reale [110 pt.]

Il gas di Van der Waals è un gas che soddisfa l'equazione di stato:

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT,$$

dove P è la pressione del gas, V il suo volume, n il numero di moli, T la temperatura, R la costante universale dei gas e a e b sono due costanti positive. L'energia interna del gas vale:

$$U = cnRT - \frac{an^2}{V},$$

dove c è una costante positiva ed adimensionale. Tipicamente, a e b hanno valori piccoli rispetto alle altre grandezze in gioco (ad esempio, rispettivamente, a $\frac{PV^2}{n^2}$ e $\frac{V}{n}$), così da rendere trascurabili tutti i termini quadratici del tipo a^2 , b^2 o ab .

1. In quest'approssimazione, si esprima V in funzione di n , T , P , a e b .

n moli di questo gas sono poste in un contenitore formato da due scompartimenti, separati da una membrana permeabile al gas. Due pistoni mantengono le pressioni nei due scompartimenti costanti ed uguali a P_1 e P_2 , con $0 < P_2 - P_1 \ll P_1$. Inizialmente, il gas è contenuto interamente nella parte a pressione maggiore ed ha temperatura T . In seguito, per via della piccola differenza di pressione, esso fluisce in modo quasistatico nell'altra parte. La membrana è tale che le due parti di gas da un lato e dall'altro non si scambiano calore attraverso di essa, e che il flusso di molecole sia diretto in un solo verso. Il contenitore è termicamente isolato dall'ambiente esterno.

2. Per quale valore di T la temperatura finale del gas è uguale a quella iniziale?

Nota: per $|kx| \ll 1$ vale l'approssimazione $(1 + x)^k \approx 1 + kx$.

12 Immagina due fili... [120 pt.]

Nel vuoto, lontano da ogni altra carica elettrica, sono presenti due fili paralleli, rettilinei ed infinitamente lunghi, rispettivamente carichi con densità di carica lineari λ e $-\lambda$. Fissato un opportuno sistema di assi cartesiani $Oxyz$, i due fili sono paralleli all'asse z e passano rispettivamente per i punti $(a, 0, 0)$ e $(-a, 0, 0)$, con $a > 0$.

1. Si scrivano le componenti E_x , E_y ed E_z del campo elettrico generato dai due fili nello spazio, in funzione delle coordinate x , y e z .
2. Si determini la forma delle superfici equipotenziali.

I due fili vengono rimossi ed al loro posto sono posti due cilindri identici e perfettamente conduttori. Essi sono infinitamente lunghi, il loro raggio è $r < a$ ed i loro assi di simmetria coincidono con le posizioni dei due fili iniziali.

3. Se tra i due cilindri è stabilita una differenza di potenziale ΔV , caricando il primo positivamente ed il secondo negativamente, in modo che il sistema da essi costituito sia globalmente neutro, si determini la forza elettrostatica per unità di lunghezza che ciascun cilindro esercita sull'altro, specificandone modulo e segno (cioè se si tratta di una forza attrattiva o repulsiva).