

Soluzioni dei problemi del test di ammissione

Lo staff dello stage*

10 dicembre 2021

1 Strappo [60 pt.]

1. L'accelerazione è definita come la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Il valore della derivata di una funzione in un punto rappresenta la pendenza del grafico di una funzione in quel punto: avendo il grafico di una funzione è quindi possibile disegnare il grafico di una sua derivata seguendo queste regole:

- nei punti di massimo e minimo di una funzione, la sua derivata è nulla;
- negli intervalli in cui la funzione è crescente, la sua derivata è positiva; negli intervalli in cui la funzione è decrescente, la sua derivata è negativa;
- nei punti di flesso della funzione, la sua derivata ha un minimo o un massimo

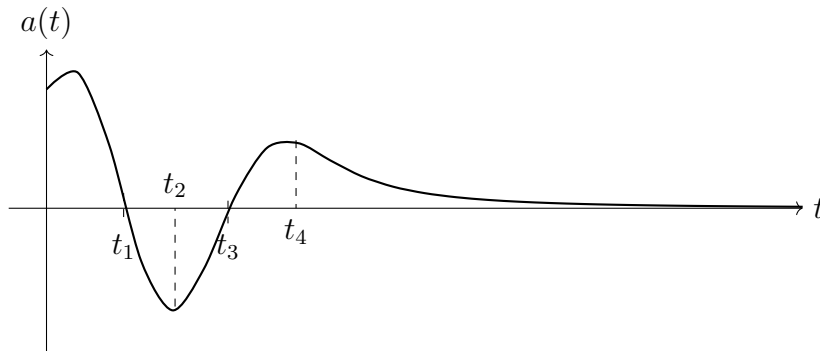
Di conseguenza, il grafico di $a(t)$ deve avere le seguenti caratteristiche:

- tra $t = 0$ e $t = t_1$ $v(t)$ è crescente, quindi $a(t) > 0$;
- tra t_1 e t_3 $v(t)$ è decrescente, quindi $a(t) < 0$;
- per $t > t_3$, $v(t)$ è crescente, quindi $a(t) > 0$;
- in t_1 e in t_3 $v(t)$ ha, rispettivamente, un massimo e un minimo, quindi $a(t_1) = a(t_3) = 0$;

*segreteria.stagefisica@sns.it

- i punti t_2 e t_4 sono punti di flesso del grafico di $v(t)$, per cui $a(t)$ deve avere, rispettivamente, un minimo e un massimo in t_2 e in t_4 ;
- per $t > t_4$ il grafico di $v(t)$ tende a un valore finito e ha pendenza sempre minore, per cui l'accelerazione tende a 0 restando positiva.

Il grafico atteso come soluzione è dunque riportato di seguito:



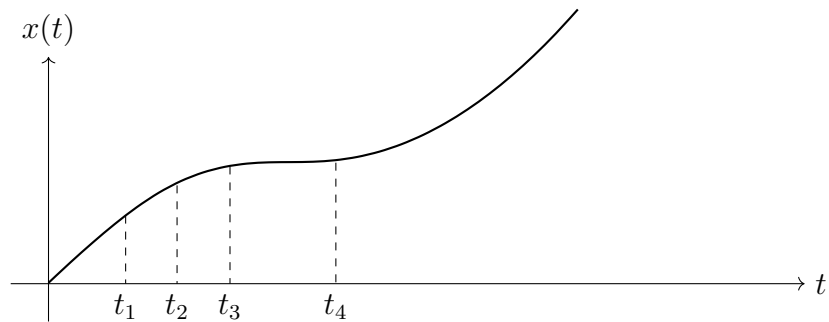
2. La velocità è definita come la derivata dello spazio rispetto al tempo e lo spazio percorso in un tempo t può essere quindi calcolato come:

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt'$$

Sapendo che $x(0) = 0$, è possibile disegnare il grafico di $x(t)$ a partire da quello della sua derivata $v(t)$, seguendo le regole spiegate nella soluzione del punto (1):

- il grafico di $x(t)$ passa per l'origine perché $x(0) = 0$;
- $v(t)$ è sempre positiva, quindi $x(t)$ deve essere sempre crescente;
- gli intervalli dove $v(t)$ è maggiore sono gli intervalli dove $x(t)$ ha pendenza maggiore: in t_2 e per $t > t_4$, quindi, $x(t)$ avrà pendenza maggiore che in t_3 ;
- i punti t_1 e t_3 sono punti, rispettivamente, di massimo e di minimo per $v(t)$ e sono quindi punti di flesso per la funzione $x(t)$;
- per $t > t_4$ la velocità tende a un valore finito, per cui il moto tende a un moto uniforme e il grafico di $x(t)$ si avvicina sempre di più a quello di una retta.

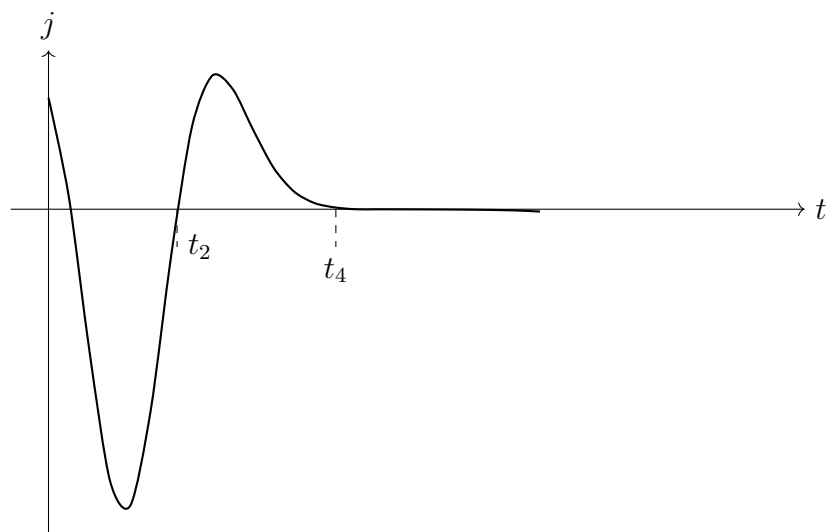
Di seguito il grafico atteso come soluzione:



3. Per disegnare il grafico dello strappo a partire da quello dell'accelerazione seguiamo lo stesso procedimento seguito per disegnare il grafico dell'accelerazione a partire da quello della velocità, perché in entrambi i casi abbiamo il grafico di una funzione e stiamo cercando quello della sua derivata. Abbiamo quindi che:

- in un intervallo precedente a t_2 la $a(t)$ è decrescente, quindi $j(t) < 0$;
- per $t_2 < t < t_4$, $a(t)$ è crescente, quindi $j(t) > 0$;
- per $t > t_4$ la funzione $a(t)$ è decrescente, anche se con pendenza molto bassa, per cui per $t > t_4$ $j(t)$ è negativa, ma molto vicina allo zero;
- t_2 e t_4 sono punti di minimo o massimo di $a(t)$ e punti di flesso di $v(t)$, per cui $j(t_2) = j(t_4) = 0$.

Il grafico dello strappo atteso come soluzione è questo:



2 Palloncino nello spazio [75 pt.]

Domanda 1

Denotiamo con \bar{p} la pressione esterna al palloncino e con p quella interna. Notiamo inoltre che esse non sono uguali poichè esiste una pressione elastica esercitata dal palloncino, denotiamo tale pressione p_e . Si noti anche che

$$p_e = p - \bar{p} \quad (1)$$

Imponiamo la conservazione dell'energia e il primo principio della termodinamica ricordando che il palloncino è perfettamente isolante. Notiamo inoltre che del lavoro svolto dal palloncino si trasforma in energia elastica e parte in energia esterna del gas dell'atmosfera. Da ciò ricaviamo che

$$dU = -dL = -dU_e - dU_{\text{est}} \quad (2)$$

Riscriviamo volume e superficie del palloncino in funzione del raggio. Inoltre ricordiamo che $dL = p \cdot dV$. Dunque usando la (1) otteniamo

$$p_e = \frac{dU_e}{dV} = \frac{dU_e}{dr} \cdot \frac{dr}{dV} \quad (3)$$

Inserendo l'espressione dell'energia elastica otteniamo

$$p_e = (64\pi^2 kr^3) \cdot \left(\frac{1}{4\pi r^2} \right) = 16\pi kr \quad (4)$$

Essendo che il palloncino è termicamente isolato, sempre sferico e chiuso, qualunque trasformazione che avverrà al suo interno sarà adiabatica. L'ipotesi di quasistaticità è soddisfatta poiché viene portato lentamente nello spazio. Dato che la trasformazione sarà adiabatica sappiamo che pV^γ è costante da cui

$$p = p_0 \cdot \frac{r_0^{3\gamma}}{r^{3\gamma}} = \frac{3nRT_0}{4\pi r_0^3} \cdot \frac{r_0^{3\gamma}}{r^{3\gamma}} \quad (5)$$

Abbiamo dunque trovato un'equazione che lega la pressione esterna al raggio

$$\bar{p} = \frac{3nRT_0}{4\pi r_0^3} \cdot \frac{r_0^{3\gamma}}{r^{3\gamma}} - 16\pi kr \quad (6)$$

Domanda 2

Imponiamo dunque ora che la pressione esterna sia nulla cioè che $p = p_e$. Da cui ricaviamo che

$$\frac{3nRT_0}{4\pi r_0^3} \cdot \frac{r_0^{3\gamma}}{r^{3\gamma}} = 16\pi kr \quad (7)$$

$$r = \left(\frac{3nRT_0 r_0^{3\gamma-3}}{64\pi^2 k} \right)^{\frac{1}{3\gamma+1}} \quad (8)$$

Domanda 3

Ottenuto r lo inseriamo all'interno dell'equazione di p , che ricordiamo essere uguale a p_e e considerata la relazione dei gas perfetti ricaviamo

$$p = p_e = 16\pi k \left(\frac{3nRT_0 r_0^{3\gamma-3}}{64\pi^2 k} \right)^{\frac{1}{3\gamma+1}} = \left(\frac{3nRT_0 r_0^{3\gamma-3}}{4\pi (16\pi k)^{-3\gamma}} \right)^{\frac{1}{3\gamma+1}} \quad (9)$$

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{64\pi^2 k r^4}{3nR} = \left(\frac{(3nR)^{\frac{3-3\gamma}{4}} T_0 r_0^{3\gamma-3}}{(64\pi^2 k)^{\frac{3-3\gamma}{4}}} \right)^{\frac{4}{3\gamma+1}} \quad (10)$$

Domanda 4

Troviamo ora per quale raggio la pressione elastica è p_{lim} .

$$r = \frac{p_{\text{lim}}}{16\pi k} \quad (11)$$

Otteniamo quindi dal raggio la pressione interna e ricaviamo quella esterna.

$$p = \frac{3nRT_0}{4\pi} \cdot \frac{r_0^{3\gamma-3}}{\frac{p_{\text{lim}}}{16\pi k}^{3\gamma}} = \frac{(4k)^{3\gamma} 3nRT_0}{(4\pi)^{1-3\gamma}} \cdot \frac{r_0^{3\gamma-3}}{p_{\text{lim}}^{3\gamma}} \quad (12)$$

$$\bar{p} = \frac{(4k)^{3\gamma} 3nRT_0}{(4\pi)^{1-3\gamma}} \cdot \frac{r_0^{3\gamma-3}}{p_{\text{lim}}^{3\gamma}} - p_{\text{lim}} \quad (13)$$

Data ora la pressione esterna calcoliamo a quale altezza si otterrà tale pressione da cui

$$z = -\lambda \ln \left(\frac{\frac{(4k)^{3\gamma} 3nRT_0}{(4\pi)^{1-3\gamma}} \cdot \frac{r_0^{3\gamma-3}}{p_{\text{lim}}^{3\gamma}} - p_{\text{lim}}}{p_{\text{atm}}} \right) \quad (14)$$

3 Piramidi [75 pt.]

Domande 1 e 2

Affinché il sistema si mantenga in equilibrio è necessario che su ogni asta siano nulle la risultante delle forze e quella dei momenti.

Si consideri un'asta: nel centro di massa, che si trova esattamente a metà della lunghezza (avendo supposto le aste uniformi), agisce la forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$; nel punto di contatto con il pavimento, agisce la forza normale al piano di appoggio \vec{N} , e la forza di attrito statico \vec{F}_{att} ; infine, nel punto di contatto con le altre aste, agisce una forza di reazione vincolare \vec{R} . Si noti che il problema è simmetrico rispetto al piano verticale passante per l'asta che divide in due la piramide, dunque le due forze \vec{F}_{att} e \vec{R} devono necessariamente giacere su tale piano. Inoltre, dato che le aste interagiscono solo in un punto, si può pensare di sostituire le altre due aste con un muro verticale; a questo punto, la reazione \vec{R} dovrà essere diretta nella direzione orizzontale. Se non si è convinti della sostituzione con il muro, si può pensare che se \vec{R} avesse una componente verticale, allora per simmetria anche le sue corrispondenti sulle altre aste l'avrebbero (con lo stesso verso e lo stesso modulo), ma ciò significherebbe che il punto di contatto tra le aste starebbe applicando una forza netta verticale e dunque non saremmo in una situazione di equilibrio. Fatte queste considerazioni, le tre condizioni di equilibrio diventano ¹:

$$\hat{x} : F_{att} - R = 0 \Rightarrow F_{att} = R \quad (15)$$

$$\hat{y} : N - P = 0 \Rightarrow N = mg \quad (16)$$

$$\vec{M} : \frac{L}{2}P \sin \alpha - LR \cos \alpha = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{2}mg \tan \alpha \quad (17)$$

Ora basta imporre che la forza di attrito statico sia minore o uguale alla forza di attrito statico massima $F_{att} = \mu N$; combinando le tre equazioni si ottiene:

$$F_{att} = R = \frac{1}{2}mg \tan \alpha \leq F_{att} = \mu N = \mu mg$$

da cui:

$$\mu \geq \frac{1}{2} \tan \alpha$$

che, ponendo $\alpha = 30^\circ$, risulta essere $\mu \geq \frac{\sqrt{3}}{6}$

Domanda 3

Si noti come nel punto precedente non si sia mai usato il fatto che le aste fossero 3. In effetti, anche nel caso in cui si abbiano N aste rigide, ognuna di queste interagisce con le altre $N - 1$ come se queste fossero un muro verticale. Di conseguenza, la condizione imposta sul coefficiente di attrito statico non cambia al variare di N .

¹il momento è stato calcolato rispetto al punto di contatto con il terreno

Domanda 4

Quando i lati di base vengono collegati con delle molle, la forza elastica svolge il ruolo che prima svolgeva la forza d'attrito. Sempre per simmetria, si può dire che la risultante delle forze elastiche esercitate da due molle adiacenti ad un'asta giace interamente nel piano di simmetria. Tale forza è uguale a $2F_{el} \cos \theta$, dove con θ si indica la metà dell'angolo tra due lati di base consecutivi, che per ragioni geometriche vale:

$$\theta = \frac{\pi(N-2)}{2N} \quad (18)$$

Ora, considerando che le molle hanno lunghezza a riposo trascurabile, la forza di Hooke vale in questo caso:

$$|\vec{F}_{el}| = kl(\alpha) \quad (19)$$

Per calcolare $l(\alpha)$ si possono proiettare i lati obliqui prima sul piano della base, poi sui lati di base, e moltiplicando infine il risultato per 2, ovvero:

$$l(\alpha) = 2L \sin \alpha \cos \frac{\pi(N-2)}{2N} = 2L \sin \alpha \sin \frac{\pi}{N} \quad (20)$$

A questo punto si riscrivono le condizioni di equilibrio:

$$\hat{x} : 2F_{el} \cos \theta - R = 0 \Rightarrow 4kL \sin \alpha \sin^2 \frac{\pi}{N} \quad (21)$$

$$\hat{y} : N - P = 0 \Rightarrow N = mg \quad (22)$$

$$\vec{M} : \frac{L}{2}P \sin \alpha - LR \cos \alpha = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{2}mg \tan \alpha \quad (23)$$

Combinando le equazioni precedenti, si riesce ad esplicitare una condizione sull'angolo affinché il sistema sia in equilibrio:

$$4kL \sin \alpha \sin^2 \frac{\pi}{N} = \frac{1}{2}mg \tan \alpha$$
$$\cos \alpha = \frac{mg}{8kL \sin^2 \frac{\pi}{N}} \vee \sin \alpha = 0$$

Ponendo dei limiti sull'angolo, ovvero $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, si ottiene la soluzione banale $\alpha = 0$; per l'altra soluzione, è necessario porre delle condizioni di esistenza; per prima cosa notiamo che, se α è costretto nel primo quadrante, $0 \leq \cos \alpha \leq 1$, ovvero:

$$0 \leq \frac{mg}{8kL \sin^2 \frac{\pi}{N}} \leq 1$$

si noti come la disuguaglianza di sinistra sia sempre verificata; dalla disuguaglianza di destra invece, risulta:

$$\sin^2 \frac{\pi}{N} \geq \frac{mg}{8kL} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{N} \geq \sqrt{\frac{mg}{8kL}}$$

dove si è sfruttato il fatto che π/N è sempre positivo, dunque il seno non può essere negativo. Più precisamente, dato che si vuole $N \geq 3$, si avrà:

$$0 < \frac{\pi}{N} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq \sin \frac{\pi}{N} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ma allora, si dovrà anche avere:

$$0 < \sqrt{\frac{mg}{8kL}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{mg}{kL} \leq 6$$

Dato che il seno è costretto nel primo quadrante ed è crescente, si ottiene la seguente condizione su N :

$$\frac{\pi}{N} \geq \arcsin \sqrt{\frac{mg}{8kL}} \Rightarrow 3 \leq N \leq \left\lceil \frac{\pi}{\arcsin \sqrt{\frac{mg}{8kL}}} \right\rceil$$

Se sono verificate queste condizioni, esiste un punto non banale di equilibrio, ovvero:

$$\alpha_0 = \arccos \frac{mg}{8kL \sin^2 \frac{\pi}{N}} \quad (24)$$

Domanda 5

Per studiare se i punti di equilibrio trovati siano di massimo o di minimo si può studiare l'energia potenziale del sistema $U(\alpha)$. Quest'ultima sarà dovuta a due contributi; il primo è l'energia potenziale gravitazionale delle aste, il cui centro di massa si trova ad un'altezza $h = \frac{L}{2} \cos \alpha$, perciò l'energia vale:

$$U_g = Nmg \frac{L}{2} \cos \alpha \quad (25)$$

Il secondo è invece dovuto all'energia potenziale elastica delle molle, e si può scrivere come:

$$U_e = \frac{1}{2} Nkl(\alpha)^2 = 2kNL^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\pi}{N} \quad (26)$$

A questo punto basterà derivare $U = U_g + U_e$, per poi calcolare i punti in cui si annulla:

$$\frac{dU}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \sin \alpha \left(4kL \cos \alpha \sin^2 \frac{\pi}{N} - \frac{1}{2}mg \right) = 0 \quad (27)$$

Da cui si ottengono nuovamente i valori di α ottenuti al punto precedente. A questo punto, si deriva una seconda volta e si studia il segno della derivata seconda:

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} \geq 0 \Rightarrow 4kL \sin^2 \frac{\pi}{N} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}mg \geq 0 \quad (28)$$

non rimane quindi che invertire il coseno, ricordando che è decrescente, per ottenere:

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \arccos \frac{mg}{8kL \sin^2 \frac{\pi}{N}} = \frac{1}{2} \alpha_0 \quad (29)$$

per cui è evidente che la derivata seconda è negativa per $\alpha = \alpha_0$. Concludiamo che, se esiste, l'angolo α_0 non banale trovato al punto precedente è un punto di equilibrio instabile.

4 Un potenziale spigoloso [75 pt.]

Domanda 1

A deve avere le dimensioni di un potenziale elettrico. I suoi costituenti hanno le seguenti dimensioni:

$$\begin{aligned} [\epsilon_0] &= \frac{C}{mV} \\ [l] &= m \\ [\rho] &= \frac{C}{m^3} \end{aligned}$$

dove la notazione $[X]$ indica l'unità di misura della grandezza fisica corrispondente ad X in funzione delle unità del sistema internazionale; con m si indicano i metri, con V i volt e con C i Coulomb. Per ottenere un A opportunamente dimensionato si deve imporre il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -3\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \gamma = -1 \end{cases} \quad (30)$$

Il sistema ammette la seguente soluzione:

$$\alpha = 1 \quad (31)$$

$$\gamma = -1 \quad (32)$$

$$\beta = 2 \quad (33)$$

da cui si ottiene la seguente espressione per A :

$$A = \frac{\rho l^2}{\epsilon_0} \quad (34)$$

Domanda 2

Al fine di calcolare il potenziale su uno qualsiasi dei vertici del cubo si sfrutta il principio di sovrapposizione. Un cubo può essere sezionato in 8 cubetti identici aventi in comune un vertice corrispondente al centro del cubo. Si prenda quindi un cubo di lato $2l$ e densità di carica ρ . Il suo potenziale al centro, sfruttando la relazione trovata al punto precedente, è:

$$V_{\text{centro}2l} = C \cdot \frac{4\rho l^2}{\epsilon_0} \quad (35)$$

ma per principio di sovrapposizione questo potenziale coincide con 8 volte il potenziale ai vertici di un cubo di lato l con la stessa densità di carica, da cui:

$$V_{\text{vertice}} = \frac{V_{\text{centro}2l}}{8} = C \cdot \frac{\rho l^2}{2\epsilon_0} \quad (36)$$

Domanda 3

Per determinare il potenziale al vertice di una piramide retta con densità di carica uniforme ρ a base quadrata di lato di base l e di altezza $\frac{l}{2}$ si procede in maniera analoga al punto precedente. Un cubo di lato l può essere sezionato in 6 piramidi rette con le caratteristiche cercate che hanno come base una base del cubo e come vertice il centro del cubo. Di conseguenza si ha:

$$V_{\text{piramide}} = \frac{V_{\text{centro}l}}{6} = C \cdot \frac{\rho l^2}{6\epsilon_0} \quad (37)$$

Domanda 4

Per determinare il potenziale generato da un quadrato di lato l con densità superficiale di carica uniforme σ in un punto distante $\frac{l}{2}$ dal suo centro e

appartenente all'asse di simmetria non giacente sul piano del quadrato si può procedere sfruttando il principio di sovrapposizione nella maniera seguente.

Nel punto precedente si è determinato il potenziale al vertice di una piramide quadrata di lato l , altezza pari a $\frac{l}{2}$ e densità di carica uniforme ρ . Nel limite in cui la variazione dl tende a zero, si può immaginare una piramide con le stesse caratteristiche di altezza $\frac{l+dl}{2}$ come una piramide di lato l , altezza $\frac{l}{2}$ e densità di carica ρ a cui sia stato aggiunto sotto la base un quadrato di densità superficiale $\sigma = \rho \frac{dl}{2}$. Per principio di sovrapposizione si ha dunque la seguente relazione:

$$V_{\text{piramide}}(l + dl, \rho) = V_{\text{piramide}}(l, \rho) + V_{\text{quadrato}}(l + dl, \rho dl) \quad (38)$$

$$V_{\text{quadrato}}(l + dl, \rho dl) = C \left(\frac{\rho(l + dl)^2}{6\epsilon_0} - \frac{\rho l^2}{6\epsilon_0} \right) \quad (39)$$

$$V_{\text{quadrato}}(l + dl, \rho dl) = C \left(\frac{\rho(2ldl + (dl)^2)}{6\epsilon_0} \right) \quad (40)$$

$$V_{\text{quadrato}}(l, \sigma) = C \left(\frac{2l\sigma}{3\epsilon_0} \right) \quad (41)$$

in cui nell'ultimo passaggio si è effettuato il limite per dl che tende a zero e ρ che tende a $+\infty$ mantenendo finita la quantità $\sigma = \frac{dl\rho}{2}$.

5 Circuito... R_MC [65 pt.]

1. Se la distanza tra le piastre è x , ogni molla si è allungata di $(x_0 - x)/2$. Detta C_0 la capacità del condensatore all'istante iniziale, ho che:

$$C = C_0 \frac{x_0}{x}$$

L'energia interna del condensatore è:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2C_0 x_0}$$

L'energia potenziale del sistema è:

$$V = \frac{Q^2 x}{2C_0 x_0} + 2 \cdot \frac{k}{2} \left(\frac{x_0 - x}{2} \right)^2$$

Per trovare la posizione di equilibrio, voglio minimizzare l'energia potenziale, dunque impongo:

$$\frac{dV}{dx} = 0 = \frac{Q^2}{2C_0 x_0} - \frac{k(x_0 - x)}{2}$$

Da cui la posizione di equilibrio è:

$$x_e = x_0 - \frac{Q^2}{C_0 k x_0}$$

La capacità è dunque:

$$C(x_e) = \frac{C_0^2 k x_0^2}{k x_0^2 C_0 - Q^2}$$

2. Applicando la legge di Kirchoff al circuito ho

$$IR + Q/C = 0$$

Da cui:

$$I = -\frac{Q}{CR}$$

Nell'ipotesi che il sistema sia in equilibrio istante per istante, la capacità è quella trovata nel punto precedente, sostituendo nella formula per I trovo:

$$I = \frac{Q(Q^2 - kx_0^2 C_0)}{RC_0^2 kx_0^2}$$

6 Caricaaa!!! [75 pt.]

1. Sia r la distanza della carica libera dalla carica fissa. Le forze agenti sulla prima sono la forza elastica e la forza elettrostatica. La forza risultante vale quindi

$$F(r) = -kr + k_e \frac{Q^2}{r^2},$$

dove il verso è preso positivo verso l'esterno e k_e è la costante elettrostatica. Ponendo la risultante uguale a 0 si ottiene

$$r = \sqrt[3]{\frac{k_e Q^2}{k}},$$

perciò il luogo cercato è la circonferenza centrata nella carica fissa con questo raggio.

2. Poniamoci in un sistema non inerziale rotante con velocità angolare ω , con origine sempre nella carica fissa. Se la carica libera si muove di moto circolare uniforme, in questo sistema compare la forza apparente centrifuga, diretta verso l'esterno e con modulo $m r \omega^2$. Perciò la risultante vale

$$F(r) = m\omega^2 r - kr + k_e \frac{Q^2}{r^2},$$

e dato che nel sistema rotante la carica appare ferma, possiamo porre la forza uguale a 0 e ricavare

$$r = \sqrt[3]{\frac{k_e Q^2}{k - m\omega^2}}.$$

3. Sia r_0 il raggio calcolato al punto precedente, e scriviamo la forza $F(r_0 + dr)$ al primo ordine di approssimazione. Bisogna fare però attenzione al fatto che se r varia, poiché il momento angolare si conserva, anche ω varia. In particolare si ha che $m r^2 \omega$ è costante, perciò differenziando:

$$2r \, dr \, \omega + r^2 \, d\omega = 0$$

e quindi si ottiene che le variazioni sono legate dalla formula:

$$d\omega = -2 \frac{\omega}{r} \, dr.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} F(r_0 + dr) &= m(\omega + d\omega)^2 (r_0 + dr) - k(r_0 + dr) + k_e \frac{Q^2}{(r_0 + dr)^2} \\ &= m\omega^2 r_0 + m\omega^2 \, dr + 2\omega \, d\omega \, r_0 - k r_0 - k \, dr + \\ &\quad + k_e \frac{Q^2}{r_0^2} \left(1 + \frac{dr}{r_0}\right)^{-2} \\ &= F(r_0) + m\omega^2 \, dr - 4m\omega^2 \, dr - k \, dr - 2k_e \frac{Q^2}{r_0^3} \, dr, \end{aligned}$$

dove i termini di ordine superiore al primo sono stati trascurati e abbiamo usato l'approssimazione $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ valida per $x \ll 1$. Sapendo che $F(r_0) = 0$ e sostituendo il valore di r_0 si ottiene:

$$F(r_0 + dr) = -m \left(\omega^2 + 3 \frac{k}{m} \right) \, dr,$$

equazione analoga a quella dell'oscillatore armonico. Si ricava perciò che il periodo di oscillazione vale:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-\frac{a}{dr}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{-\frac{F}{m \, dr}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 + 3 \frac{k}{m}}}.$$

7 Molla in caduta [80 pt.]

Domanda 1

Chiamiamo m_1 la massa superiore e m_2 la massa inferiore. Poiché durante la caduta le due masse non risentono della presenza dell'altra o della molla, si può affermare che l'energia dissipata durante l'urto di m_2 con il terreno coincide con la sua energia potenziale iniziale:

$$U_2 = mg \left(h - \frac{l_0}{2} \right) \quad (42)$$

La restante energia (L'energia potenziale di m_1) si conserva. All'istante di massima compressione l'energia cinetica è nulla e quindi tutta l'energia è immagazzinata in energia potenziale ed elastica. Imponendo la conservazione dell'energia:

$$mg \left(h + \frac{l_0}{2} \right) = mg(l_0 - \Delta l) + \frac{1}{2}k\Delta l^2 \quad (43)$$

da cui si ottiene che la compressione massima vale:

$$\Delta l = \frac{mg}{k} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{(l_0 - 2h)k}{mg}} \right) \quad (44)$$

Poiché $l_0 < 2h$ (altrimenti nella configurazione iniziale la massa m_2 sarebbe già a terra o sotto al livello del terreno) il termine sotto radice risulta essere maggiore di uno e quindi la soluzione con il segno negativo va scartata poiché porterebbe a $\Delta l < 0$, che nella convenzione dei segni attuale rappresenterebbe un allungamento della molla anziché una compressione.

Domanda 2

Dal momento in cui la massa m_1 si ferma si distinguono due tipi di moto:

- Se l'energia non fosse sufficiente far staccare nuovamente m_2 del terreno il moto si ridurrebbe ad un moto armonico di oscillazione di m_1 attorno al punto di equilibrio ad altezza $h_1 = l_0 - \frac{mg}{k}$ e con frequenza di oscillazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- Se l'energia fosse sufficiente a causare il distacco, si avrebbe un moto descrivibile come la composizione di due moti; un moto uniformemente accelerato del baricentro, con accelerazione \vec{g} , e un moto di oscillazione armonica nel sistema di riferimento solidale al centro di massa.

Domanda 3

Per fare in modo che il sistema si stacchi da terra la forza esercitata dalla molla nel momento di massima estensione deve essere maggiore della forza peso che mantiene m_2 a terra, perciò:

$$mg < k\Delta_{\text{dist}} \quad (45)$$

Dove la lunghezza Δ_{dist} può essere calcolata per conservazione dell'energia, ponendo che m_1 abbia esaurito nuovamente la sua energia cinetica e quindi:

$$\begin{aligned} mg \left(h + \frac{l_0}{2} \right) &= mg(l_0 + \Delta_{\text{dist}}) + \frac{1}{2}k\Delta_{\text{dist}}^2 \\ h - \frac{l_0}{2} &= \Delta_{\text{dist}} + \frac{k}{2mg}\Delta_{\text{dist}}^2 \\ \Delta_{\text{dist}}^2 + 2\frac{mg}{k}\Delta_{\text{dist}} - \frac{mg}{k}(2h - l_0) &= 0 \\ \Delta_{\text{dist}} &= -\frac{mg}{k} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{k(2h - l_0)}{mg}} \right) \end{aligned}$$

da cui si ottiene² la condizione richiesta:

$$\frac{mg}{k} < -\frac{mg}{k} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{k(2h - l_0)}{mg}} \right) \quad (46)$$

ovvero:

$$3mg < k(2h - l_0) \quad (47)$$

Domanda 4

Come spiegato nella risposta al punto 2 è possibile vedere l'intero moto come una sovrapposizione di due moti. Il moto del centro di massa, posto $y(0) = 0$ nell'istante in cui m_2 si stacca dal terreno:

$$y_{CM}(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (48)$$

Il moto nel sistema di riferimento del centro di massa è una semplice oscillazione in assenza del campo gravitazionale terrestre (poiché nel sistema di riferimento non inerziale del centro di massa è presente una forza apparente di ugual modulo e verso opposto alla forza peso).

²Scartando come prima la soluzione negativa per le stesse ragioni citate nel Domanda 1

Per conservazione dell'energia è possibile calcolare la distensione massima della molla, poiché all'istante di distensione massima l'energia cinetica è nulla e l'unica energia potenziale presente è quella elastica.

$$\Delta_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{2m\bar{v}^2}{k}} \quad (49)$$

con $\bar{v} = v_0$, poiché nel sistema del centro di massa entrambe le masse hanno necessariamente velocità uguali in modulo e verso opposto, e la velocità relativa tra m_2 e il centro di massa è v_0 .

L'ampiezza delle oscillazioni è quindi la metà di Δ_{MAX} e le oscillazioni sono di frequenza angolare $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

Il moto nel sistema del centro di massa è quindi:

$$\bar{y}(t) = \frac{l_0}{2} + \sqrt{\frac{mv_0^2}{2k}} \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \phi\right) \quad (50)$$

La fase ϕ si ricava dalle condizioni iniziali, ovvero $\bar{y}(0) = \frac{l_0}{2} + \frac{mg}{2k}$.

La velocità v_0 all'istante iniziale si ricava ancora una volta grazie alla conservazione dell'energia. In particolare la velocità del centro di massa sarà la metà di v_1 , velocità della massa m_1 .

$$mg\left(h + \frac{1}{2}l_0\right) = mg\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (51)$$

Per cui è possibile ottenere:

$$\begin{aligned} g\left(h + \frac{1}{2}l_0\right) &= g\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) + \frac{1}{2}v_1^2 \\ \frac{1}{2}v_1^2 &= g\left(h + \frac{1}{2}l_0\right) - g\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) \\ v_1 &= \sqrt{2g\left(h - \frac{1}{2}l_0 - \frac{mg}{k}\right)} \end{aligned}$$

da cui³:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2}\left(h - \frac{1}{2}l_0 - \frac{mg}{k}\right)} \quad (52)$$

La sostituzione di tutti i parametri trovati non era richiesta per ottenere punteggio pieno in questo ultimo punto, ma si riporta comunque la formula

³Grazie alla condizione ricavata nella Domanda 3, e alla condizione su h e l_0 , già usata nella Domanda 1, l'argomento della radice è sempre positivo

completa per $y(t)$ della massa m_1 in funzione dei parametri iniziali, a partire dall'istante in cui m_2 si stacca dal suolo fino al momento in cui lo tocca nuovamente:

$$y(t) = \left(\sqrt{\frac{g}{2} \left(h - \frac{1}{2}l_0 - \frac{mg}{k} \right)} \right) t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{l_0}{2} + \sqrt{\frac{mg \left(h - \frac{1}{2}l_0 - \frac{mg}{k} \right)}{4k}} \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \arccos \left(\sqrt{\frac{mg}{k \left(h - \frac{l_0}{2} - \frac{mg}{k} \right)}} \right) \right)$$

8 Parabola con fascio fotonico [85 pt.]

Domanda 1

Il motivo per cui il granello di polvere sente una forza è la pressione di radiazione. Se il granello è di forma sferica, il fatto che il granello assorba o rifletta, anche parzialmente, la luce che lo colpisce, è irrilevante purché il comportamento sia uniforme sulla sua superficie sferica. In ogni caso, il testo dice che la quantità di moto viene assorbita, per cui il problema non si pone. La quantità di moto trasportata da un singolo fotone è $|\vec{p}| = E/c$, dove E è la sua energia e c la velocità della luce nel vuoto. Di conseguenza, se il granello assorbe un numero ΔN di fotoni uguali e allineati in un un intervallo di tempo Δt , la forza netta agente sul granello di polvere è:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta N E}{c \Delta t} \hat{p} = \frac{P}{c} \hat{p}, \quad (53)$$

dove P è la potenza del fascio considerato. La formula precedente va moltiplicata per un fattore $(1 + \alpha)$ nel caso in cui ci sia una riflessione parziale di coefficiente $\alpha \in [0, 1]$, ma come annunciato precedentemente, questo dettaglio è irrilevante ai fini del problema.

In questo caso, i fotoni non sono allineati. È chiaro dal disegno in Figura 1 che la componente che conta della forza è quella lungo l'asse y , in quanto quelle sull'altro asse si bilanciano automaticamente per simmetria. Le varie parti del fascio laser contribuiscono in modo diverso a questa forza, in quanto vengono riflesse dallo specchio con angoli diversi. Consideriamo quindi una sezione molto piccola di laser, spessa dx , in modo che l'angolo di riflessione di questa parte sia quasi costante. Il contributo alla forza totale di questa parte di laser sarà:

$$dF_y = \frac{P}{c} \frac{dx}{2a} \cos \theta \quad (54)$$

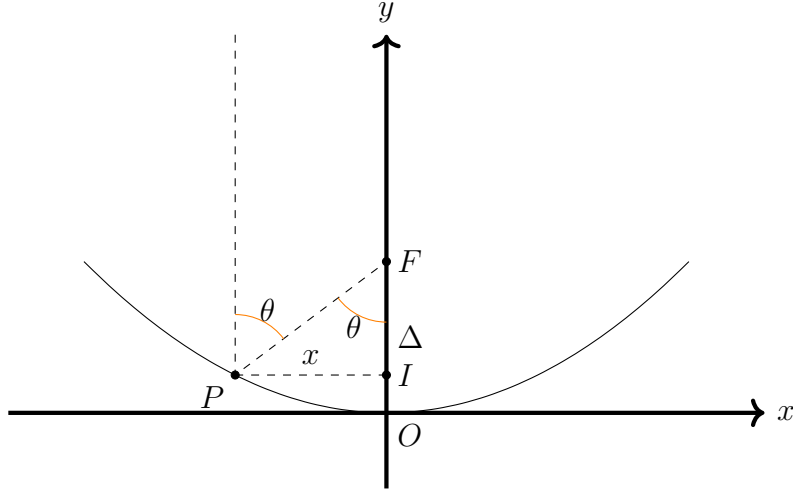


Figura 1: problema dello specchio parabolico.

Usando sempre Figura 1, possiamo andare a scrivere $\cos \theta$ in funzione di x ed andare ad effettuare l'integrale. Chiamando $\Delta = \overline{OF}$ e osservando che $\overline{IO} = kx^2$, notiamo che vale:

$$\cos \theta = \frac{\overline{IF}}{\overline{PF}} = \frac{\Delta - kx^2}{\sqrt{(\Delta - kx^2)^2 + x^2}}. \quad (55)$$

Nel nostro caso, essendo la curva una parabola, abbiamo $\Delta = 1/4k$, per cui la formula precedente si semplifica a:

$$\cos \theta = \frac{1 - 4k^2x^2}{1 + 4k^2x^2} \quad (56)$$

che possiamo inserire nell'integrale, ottenendo:

$$F_y = \int_{-a}^a \frac{P}{2ac} \cos \theta dx = 2 \int_0^a \frac{P}{2ac} \cos \theta dx \quad (57)$$

$$= \frac{P}{c} \int_0^a \frac{1 - 4k^2x^2}{1 + 4k^2x^2} dx = \frac{P}{c} \int_0^1 \frac{1 - 4(ka)^2w^2}{1 + 4(ka)^2w^2} dw \quad (58)$$

I vari passaggi fatti fino ad ora sono serviti a rendere l'integrale in forma adimensionale, che è molto comodo anche per considerazioni qualitative. Per esempio, notiamo che l'integrale dipende da prefattori e dalla quantità $z = ka$, che è la quantità adimensionale del problema, effettivamente l'unica cosa rilevante. Dato che vogliamo trovare i casi in cui la forza è uguale a zero, cioè $F_y = 0$, possiamo già dimenticarci del prefattore e andare solo a cercare quando l'integrale fa zero.

$$0 = \int_0^1 \frac{1 - 4z^2 w^2}{1 + 4z^2 w^2} dw = \frac{\arctan 2z}{z} - 1 \quad (59)$$

$$\Rightarrow \arctan 2z = z \quad (60)$$

Questa è una equazione trascendente, che non si risolve analiticamente. Trovare questa equazione non era sufficiente per ottenere tutti i punti del problema, è possibile dire una cosa in più, cioè quante soluzioni ha questa equazione. Ne ha una banale, $z = 0$, che è sostanzialmente equivalente a dire che non c'è il laser. Sapendo che questa equazione ha senso solo per $z > 0$, perché $a > 0$, rimane una sola soluzione. Questa può essere trovata per esempio con il metodo di bisezione, che porta ad una soluzione approssimata $z \approx 1.16$. Questo metodo si può applicare tranquillamente in poche iterazioni su una calcolatrice tascabile, ma proponiamo una soluzione in python per i più interessati alla programmazione. Chiaramente, nessun tipo di competenze in programmazione erano richieste per svolgere questo problema, ma offriamo questo codice come esempio che può essere utile per imparare qualcosa.

```
#!/usr/bin/env python3
from math import atan, log, sqrt

def domanda_1(x: float):
    if x == 0:
        return 1
    return atan(2*x)/x - 1

def domanda_2(x: float):
    if x == 0:
        return .5
    return log(1 + x)/x - .5
```

```

def bisection(start: float, end: float, prec: float, func):
    if func(start)*func(end) > 0:
        raise ValueError(
            "Il prodotto della funzione agli estremi deve essere negativo."
        )
    ffunc = func if func(start) > 0 else lambda x: -func(x)
    while True:
        mid = (start + end) / 2
        val = ffunc(mid)
        if abs(val) < prec:
            break
        if val > 0:
            start = mid
        else:
            end = mid
    return mid, func(mid)

if __name__ == "__main__":
    x, prec = bisection(0, 10, 1e-3, domanda_1)
    print(f"{x = }, {prec =}")
    qz2, prec = bisection(0, 10, 1e-3, domanda_2)
    x = sqrt(qz2/4)
    print(f"{qz2 = } {x = }, {prec =}")

```

Domanda 2

I ragionamenti fisici di prima sono inalterati, ciò che cambia è la forma dell'espressione della forza agente sul granello di sabbia. Data la simmetria cilindrica, se usiamo la variabile $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, possiamo scrivere la componente della forza lungo z :

$$F_z = \int_0^a \frac{P}{c\pi a^2} \cos \theta 2\pi r dr \quad (61)$$

dove $2\pi r dr$ è l'area di una corona circolare di raggio r e spessore dr , mentre πa^2 è l'area del fascio. Evidentemente, qualsiasi sezione verticale del nostro problema tridimensionale è esattamente Figura 1, per cui l'espressione di $\cos \theta$ rimane invariata, a patto di sostituire $x \rightarrow r$. L'integrale diventa quindi:

$$F_z = \int_0^a \frac{P}{c\pi a^2} 2\pi r \frac{1 - 4k^2 r^2}{1 + 4k^2 r^2} dr = \quad (62)$$

$$= \frac{2P}{c} \int_0^1 w \frac{1 - 4z^2 w^2}{1 + 4z^2 w^2} dw = \quad (63)$$

$$= \frac{2P}{c} \left(\frac{\ln(1 + 4z^2)}{4z^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (64)$$

Stavolta l'equazione per l'equilibrio diventa quindi:

$$2 \ln(1 + 4z^2) = 4z^2 \quad (65)$$

che si risolve con lo stesso metodo di prima, portando a $4z^2 \approx 2.52$, $z \approx 0.79$.

9 Sbarra e molle [85 pt.]

Domanda 1

Supponiamo senza perdita di generalità che $k_1 > k_2$; sia Oxy un sistema di coordinate con asse orizzontale coincidente con il soffitto (con $x > 0$ verso la molla di costante elastica k_1), asse verticale diretto verso il basso e passante per il centro della sbarra. Sia \tilde{x} l'ascissa della massa m e \tilde{y} l'ordinata della sbarra all'equilibrio.

Le forze che agiscono sulla massa m sono:

- la forza peso $\vec{P}_m = mg\hat{y}$
- la reazione normale $\vec{N}_{12} = -N\hat{y}$ (diretta verso l'alto)

Le forze che agiscono sulla sbarra sono:

- la forza peso $\vec{P}_M = Mg\hat{y}$
- la reazione normale $\vec{N}_{21} = -\vec{N}_{12} = N\hat{y}$
- la forza elastica $\vec{F}_1 = -k_1(\tilde{y} - l)\hat{y}$
- la forza elastica $\vec{F}_2 = -k_2(\tilde{y} - l)\hat{y}$

Detto z l'asse che forma una terna destrorsa insieme ad x e y , i momenti delle forze che agiscono sulla sbarra rispetto al centro di massa sono:

- $\vec{\tau}_M = \vec{0}$ (la forza peso agisce nel centro di massa)
- $\vec{\tau}_N = (\tilde{x}\hat{x}) \wedge (N\hat{y}) = N\tilde{x}\hat{z}$
- $\vec{\tau}_1 = \left(\frac{L}{2}\hat{x}\right) \wedge (-k_1(\tilde{y}-l)\hat{y}) = -\frac{L}{2}k_1(\tilde{y}-l)\hat{z}$
- $\vec{\tau}_2 = \left(-\frac{L}{2}\hat{x}\right) \wedge (-k_2(\tilde{y}-l)\hat{y}) = \frac{L}{2}k_2(\tilde{y}-l)\hat{z}$

Affinché la sbarra sia in equilibrio, la risultante delle forze e dei momenti delle forze (verso positivo in senso antiorario) attorno al centro di massa si devono annullare. Allo stesso modo, la risultante delle forze sulla massa m deve essere nulla:

$$\begin{cases} \vec{P}_m + \vec{N}_{12} = \vec{0} \\ \vec{P}_m + \vec{N}_{21} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \\ \vec{\tau}_M + \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{0} \end{cases} \implies \begin{cases} mg - N = 0 \\ Mg + N - k_1(\tilde{y}-l) - k_2(\tilde{y}-l) = 0 \\ N\tilde{x} - k_1(\tilde{y}-l)\frac{L}{2} + k_2(\tilde{y}-l)\frac{L}{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} N = mg \\ \tilde{y} = l + \frac{M+m}{k_1+k_2}g \\ \tilde{x} = \frac{M+m}{m} \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \frac{L}{2} \end{cases}$$

Quindi la posizione di equilibrio della pallina è $\tilde{x} = \frac{M+m}{m} \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \frac{L}{2}$. Dato che la pallina si trova sulla sbarra, essa deve distare al massimo $\frac{L}{2}$ dal centro, per cui imponiamo:

$$-\frac{L}{2} < \tilde{x} < \frac{L}{2} \implies -1 < \left(1 + \frac{M}{m}\right) \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} < 1 \implies m > M \frac{k_1 - k_2}{2k_2}$$

Domanda 2

Siano a_y l'accelerazione della sbarra (e della pallina) nell'istante successivo al rilascio e τ = momento delle forze sulla sbarra rispetto al centro della stessa. Le equazioni del moto sono uguali al punto precedente, con la differenza che non imponiamo le risultanti delle forze e dei momenti delle forze pari a zero:

$$\begin{cases}
ma_y = mg - N \\
Ma_y = Mg + N - (k_1 + k_2)(y + \tilde{y} - l) \\
\tau = N\tilde{x} - (k_1 - k_2)(y + \tilde{y} - l)\frac{L}{2}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
N = mg - ma_y \\
(M + m)a_y = (M + m)g - (k_1 + k_2)(\tilde{y} - l) - (k_1 + k_2)y \\
\tau = N\tilde{x} - (k_1 - k_2)(\tilde{y} - l)\frac{L}{2} - (k_1 - k_2)\frac{L}{2}y
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
(M + m)g - (k_1 + k_2)(\tilde{y} - l) = 0 \implies a_y = -\frac{k_1 + k_2}{M + m}y \\
\tau = N\tilde{x} - (k_1 - k_2)(\tilde{y} - l)\frac{L}{2} - (k_1 - k_2)\frac{L}{2}y
\end{cases}$$

$$mg\tilde{x} = (k_1 - k_2)(\tilde{y} - l)\frac{L}{2} \implies \tau = (N - mg)\tilde{x} - (k_1 - k_2)\frac{L}{2}y = -ma_y\tilde{x} - (k_1 - k_2)\frac{L}{2}y$$

$$\tau = -m \left(-\frac{k_1 + k_2}{M + m}y \right) \left(\frac{M + m}{m} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \frac{L}{2} \right) - (k_1 - k_2)\frac{L}{2}y = 0$$

Subito dopo il rilascio, il momento delle forze che agiscono sulla sbarra (rispetto al suo cdm) è nullo, per cui non si origina alcun moto di rotazione e l'accelerazione è esclusivamente verticale. Nello specifico, il suo valore è $\vec{a} = -\frac{k_1 + k_2}{M + m}y\hat{y}$.

Domanda 3

Ordinando le molle in verso orario, scegliamo il sistema di coordinate avente origine nel centro della lastra, asse x parallelo a AD e BC , positivo verso le molle C e D, asse y rivolto verso il basso, come in precedenza e asse z parallelo a AB e CD , positivo verso le molle B e C.

Sia y la posizione di equilibrio della lastra e (α, β) la posizione di equilibrio della massa m rispetto al centro della lastra, con $\alpha > 0$ in direzione delle molle C, D e $\beta > 0$ in direzione delle molle B e C.

$$\begin{cases}
0 = mg - N \\
0 = -(k_A + k_B + k_C + k_D)(y - l) + N + Mg
\end{cases} \implies \begin{cases}
N = mg \\
y = l + \frac{M + m}{k_A + k_B + k_C + k_D}g
\end{cases}$$

Siano $\vec{\tau}_i$ i momenti delle forze elastiche F_i , con $i = A, B, C, D$, e sia $\vec{\tau}_m$ il momento della forza peso della pallina:

$$\begin{cases} \vec{\tau}_A = k_A(y-l)\frac{L}{2}(-\hat{x} + \hat{z}) \\ \vec{\tau}_B = k_B(y-l)\frac{L}{2}(\hat{x} + \hat{z}) \\ \vec{\tau}_C = k_C(y-l)\frac{L}{2}(\hat{x} - \hat{z}) \\ \vec{\tau}_D = k_D(y-l)\frac{L}{2}(-\hat{x} - \hat{z}) \\ \vec{\tau}_m = (\alpha\hat{x} + \beta\hat{z}) \wedge (mg\hat{y}) = mg\alpha\hat{z} - mg\beta\hat{x} \end{cases}$$

$$\vec{\tau}_A + \vec{\tau}_B + \vec{\tau}_C + \vec{\tau}_D + \vec{\tau}_m = \vec{0}$$

$$\begin{cases} (-k_A + k_B + k_C - k_D)(y-l)\frac{L}{2} - mg\beta = 0 \\ (k_A + k_B - k_C - k_D)(y-l)\frac{L}{2} + mg\alpha = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = \frac{M+m}{m} \frac{L}{2} \frac{-k_A+k_B+k_C-k_D}{k_A+k_B+k_C+k_D} \\ \alpha = \frac{M+m}{m} \frac{L}{2} \frac{-k_A-k_B+k_C+k_D}{k_A+k_B+k_C+k_D} \end{cases}$$

Imponiamo che la posizione di equilibrio della massa m sia effettivamente sulla lastra, supponendo senza perdita di generalità che $k_B + k_C > k_A + k_D$ e $k_C + k_D > k_A + k_B$ (cioè la massa m si troverà nel quadrante avente come vertice la molla C):

$$\begin{cases} -\frac{L}{2} < \alpha < \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} < \beta < \frac{L}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{M}{m} < 2 \frac{k_A+k_B}{-k_A-k_B+k_C+k_D} \\ \frac{M}{m} < 2 \frac{k_A+k_D}{-k_A+k_B+k_C-k_D} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{M}{m} < 2 \frac{k_A+k_B}{-k_A-k_B+k_C+k_D} \\ \frac{M}{m} < 2 \frac{k_A+k_D}{-k_A+k_B+k_C-k_D} \end{cases}$$

$$m > \max \left\{ \frac{M}{2} \frac{-k_A - k_B + k_C + k_D}{k_A + k_B}, \frac{M}{2} \frac{-k_A + k_B + k_C - k_D}{k_A + k_D} \right\}$$

10 Pierryno ha due mele. Stima la massa del Sole [110 pt.]

Domanda 1

Si consideri la situazione mostrata nella Figura 3, con i raggi di α -bonacci rappresentati dalle rette $A'K$ e AQ .

L'orario ci dà indicazioni sull'inclinazione dei raggi. Infatti, se alle ore 40:00 α -bonacci è allo zenit e un giorno dura 80 ore, in 10 ore esso percorre un angolo di $\frac{10}{80} \cdot 360^\circ = 45^\circ$, e i raggi risulteranno inclinati di 45° .

Il segmento PK costituisce dunque la diagonale del quadrato costruito su KO , e ha lunghezza $\sqrt{2}h$.

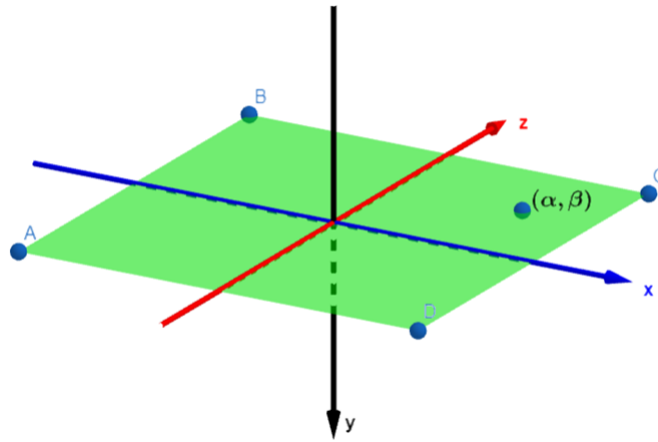


Figura 2: Sistema di riferimento utilizzato nel punto 3

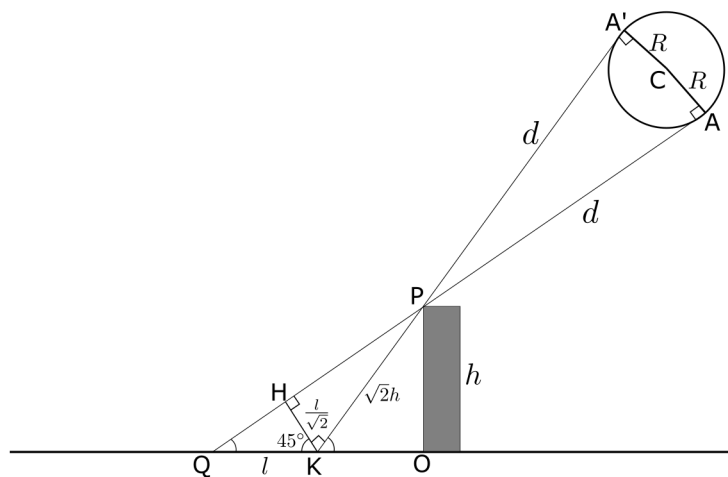


Figura 3: Disegno approssimativo della soluzione al punto 1. Dato che $d \gg h$ e $d \gg R$, l'angolo $\angle ACA'$ è approssimativamente piatto, e nel calcolo delle relazioni tra lati i raggi si possono considerare pressoché paralleli. Possiamo alla fine dire che con una certa approssimazione $\overline{PK} \approx \sqrt{2}h$ e $\overline{HK} \approx \frac{l}{\sqrt{2}}$. Nota: **il grafico è soltanto indicativo.**

Dato che ci troviamo in un pianeta in orbita attorno a una stella, possiamo considerare $R \ll d$ e $\triangle A'AP$ un triangolo isoscele di base $2R$ e lato d .

Le rette AP e $A'P$ possono essere considerate quasi parallele. Tracciamo il segmento KH , con H proiezione di K su PH . Esso è perpendicolare a PK , in quanto quest'ultimo è approssimativamente parallelo a PH .

I triangoli $\triangle PHK$ e $\triangle AA'P$ sono simili, e vale la relazione:

$$\frac{\frac{l}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}h} = \frac{2R}{d}$$

ovvero:

$$R = \frac{dl}{4h} \quad (66)$$

Domanda 2

Per trovare la relazione tra d , M , e T , possiamo sfruttare il fatto che Pisonia sia in orbita circolare attorno ad α -bonacci.

Assumiamo che la massa m del pianeta sia molto minore di quella della stella, e che quest'ultima quindi non si muova in maniera apprezzabile. Affinché Pisonia percorra un'orbita circolare di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, la forza gravitazionale esercitata dalla stella dovrà essere uguale alla forza centripeta, e dunque:

$$G \frac{mM}{d^2} = m\omega^2 d$$

In questo caso, dato che $R \ll d$, non fa differenza considerare d come la distanza tra i centri di massa di Pisonia e α -bonacci o come la distanza tra le rispettive superfici. Svolgendo i calcoli e sostituendo per ω otteniamo:

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{d^3}{T^2} \quad (67)$$

Domanda 3

Pisonia e la stella possono essere considerati con buona approssimazione dei corpi neri, e obbediscono dunque alla legge di Stefan-Boltzmann:

$$j = \sigma T^4$$

Ovvero l'energia emessa per unità di tempo per unità di superficie di un corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura, la costante σ è una costante universale, chiamata costante di Stefan-Boltzmann.

In un tempo Δt , la stella emette un'energia pari a:

$$E_s = 4\pi R^2 \sigma T_s^4 \Delta t$$

Questa energia viene emessa sotto forma di radiazione in maniera isotropa. Dato che essa si conserva, l'energia che passa attraverso una piccola porzione di superficie dA , a distanza r dal corpo nero e perpendicolare alla congiungente

con quest'ultimo, è data dal rapporto tra la sua area e quella della sfera di raggio r centrata nel corpo.

Detto R_p il raggio di Pisonia, il pianeta occupa una porzione area πR_p^2 , considerando la sfera con centro la stella e raggio d . L'energia assorbita E_a allora è data da:

$$E_a = \frac{\pi R_p^2}{4\pi d^2} E_s = \pi \frac{R_p^2 R^2}{d^2} \sigma T_s^4 \Delta t$$

Supponendo che la conducibilità termica di Pisonia sia sufficientemente alta da rendere trascurabili differenze di temperatura tra punti diversi della superficie, si ha equilibrio quando l'energia assorbita proveniente dalla stella (che si suppone sia tutta quella incidente) è uguale a quella emessa da Pisonia per radiazione di corpo nero:

$$\begin{aligned} E_a &= E_e \\ \pi \frac{R_p^2 R^2}{d^2} \sigma T_s^4 \Delta t &= 4\pi R_p^2 \sigma T_0^4 \Delta t \\ \frac{R^2}{d^2} T_s^4 &= 4T_0^2 \end{aligned}$$

ovvero:

$$T_s = T_0 \sqrt{\frac{2d}{R}} \quad (68)$$

Domanda 4

L'energia totale di un fotone a distanza r dalla stella è data da:

$$E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} + U = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - G \frac{ME}{c^2 r}$$

Con \hbar la costante di Planck ridotta (è stata usata per non confondersi con l'altezza h). Riarrangiando i termini si ottiene che:

$$E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda \left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right)}$$

Indicando con il pedice s una grandezza misurata sulla superficie della stella, mentre con il pedice ∞ una grandezza misurata a grande distanza (si consideri il limite per la distanza che tende all'infinito), dalla conservazione dell'energia

si ottiene che:

$$\begin{aligned}
 E_\infty &= E_s \\
 \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_\infty \left(1 + \frac{GM}{c^2 R_\infty}\right)} &= \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_s \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right)} \\
 \frac{1}{\lambda_\infty} &= \frac{1}{\lambda_s \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right)} \\
 \lambda_\infty &= \lambda_s \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right)
 \end{aligned}$$

Avremo dunque che:

$$z = \frac{\lambda_\infty - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{GM}{c^2 R} \quad (69)$$

Domanda 5

Per stimare la massa di α -bonacci occorre mettere insieme le equazioni trovate finora, ma prima bisogna trovare un'equazione che leghi λ_{\max} alle altre variabili.

Per poterla trovare, occorre sapere che la luce con lunghezza d'onda a cui corrisponde il picco di intensità luminosa λ_{\max} , durante il suo tragitto di α -bonacci verso Pisonia, subisce gli effetti del redshift gravitazionale, ed è quindi diversa dalla luce appena rilasciata dalla superficie, con lunghezza d'onda λ_s .

Dalla legge dello spostamento di Wien abbiamo che:

$$\lambda_s = \frac{b}{T_s}$$

Con b la costante dello spostamento di Wien. Se nella relazione di prima, usando il fatto che $R \ll d$, poniamo $\lambda_{\max} \approx \lambda_\infty$, otteniamo che:

$$\lambda_{\max} = \lambda_s \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right)$$

Unendo le ultime due equazioni:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T_s} \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right)$$

Adesso siamo dunque in grado di stimare la massa di α -bonacci unendo i nostri “ingredienti” nel seguente sistema:

$$\begin{cases} R = \frac{dl}{4h} \\ T_s = T_0 \sqrt{\frac{2d}{R}} \\ M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{d^3}{T^2} \\ \lambda_{\max} = \frac{b}{T_s} \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right) \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di quattro equazioni in quattro incognite, e per prima cosa possiamo sostituire R nelle altre equazioni, e successivamente T_s nell'ultima:

$$\begin{cases} R = \frac{dl}{4h} \\ T_s = T_0 \sqrt{\frac{8h}{l}} \\ M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{d^3}{T^2} \\ \lambda_{\max} = \frac{b}{T_0} \sqrt{\frac{l}{8h}} \left(1 + \frac{4GM}{c^2 dl}\right) \end{cases}$$

E risolvendo le ultime due equazioni alla fine si ottiene:

$$M = \frac{c^3 T}{16\pi G} \left[\frac{l}{h} \left(\frac{T_0 \lambda_{\max}}{b} \sqrt{\frac{8h}{l}} - 1 \right) \right]^{\frac{3}{2}} \quad (70)$$

11 Ruota! Monetina [95 pt.]

Domanda 1

La monetina si muove di moto rototraslatorio. Il moto rotatorio avviene attorno ad un asse passante per il centro della monetina e normale alla superficie della monetina stessa (asse Ω). Dato che la monetina rotola ad un angolo con la verticale che resta costante nel tempo l'angolo fra l'asse Ω ed il piano orizzontale resta anch'esso costante. Si ricava da valutazioni geometriche che la distanza r fra la monetina ed il suolo lungo l'asse Ω è dato dalla seguente:

$$r = \frac{R}{\tan(\theta)} \quad (71)$$

Si deduce quindi che questa è una quantità che resta costante nel tempo. Per quanto concerne la traiettoria, è immediato che la monetina non si può muovere lungo una retta. Se così fosse infatti non vi sarebbe alcuna forza a controbilanciare il momento torcente dovuto alla forza peso. La velocità,

dunque, deve variare non in modulo (poiché la sua velocità angolare è costante), ma in direzione. Se esiste una variazione della velocità che permette alla monetina di restare in equilibrio, è evidente che questa variazione deve restare costante nel tempo in quanto a seguito di un piccolo spostamento la monetina si trova in una condizione equivalente a quella iniziale. La monetina si deve muovere dunque su una circonferenza (unica curva che permetterebbe tale simmetria).

Bisogna ancora determinare qual è il centro di rotazione, informazione essenziale per la seconda richiesta del quesito. È abbastanza intuitivo che debba essere proprio il punto di contatto fra l'asse Ω e il piano (che d'ora in poi sarà il punto P). Per giustificare questa ipotesi riconosciamo che, se avessimo una seconda monetina, di raggio in generale diverso da R , che ruota con la stessa velocità angolare e che è inclinata dello stesso angolo alla verticale della prima moneta, allora questa seconda dovrebbe muoversi in modo analogo alla prima, ossia sempre lungo una circonferenza. In più notiamo che si può fare in modo che gli assi di rotazione delle due monetine coincidano, ritrovandosi in una situazione analoga a quella descritta nella Figura 4.

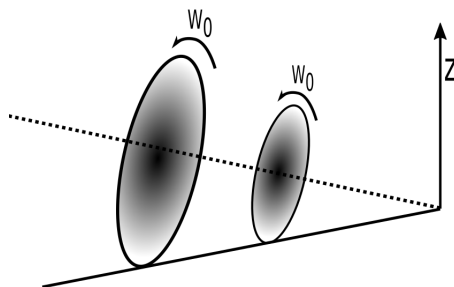


Figura 4: Disegno dei versori degli assi di rotazione

Per ciascuna monetina si avrà che la distanza percorsa in un lasso di tempo Δt è pari a $\Delta s = \bar{R}\omega\Delta t$, con \bar{R} il raggio della moneta considerata. Notiamo infine che anche nel punto P stesso è come se vi fosse una “monetina degenera” con raggio nullo. Questa dunque, indipendentemente dal lasso di tempo scelto non si sposterà. Così dunque abbiamo ottenuto che il punto P non si sposta nel tempo, è necessario che esso stesso sia il centro della circonferenza su cui ruota la monetina.

Per ricavare il valore della velocità tangenziale del centro di massa bisogna ricavare il modulo della velocità angolare orientata lungo l'asse \hat{z} . Bisogna tuttavia prestare attenzione alle componenti delle velocità angolari. In totale sono necessarie due velocità angolari per descrivere il sistema. La velocità

angolare data nel testo è la componente di velocità angolare in un sistema ortogonale destrorso solidale alla moneta. Gli assi di questo sistema sono quello normale alla superficie e i due ortogonali che giacciono sulla superficie stessa. Nella condizione di equilibrio il primo asse di rotazione è quello normale alla superficie, il secondo è un asse che giace sulla superficie della moneta stessa (vedere la figura). Per semplificare i calcoli conviene trasportare le velocità angolari su altri due assi: uno sempre normale alla superficie della moneta ed un secondo diretto lungo la verticale del piano su cui rotola la moneta. Bisogna tuttavia fare attenzione in quanto non è detto che le due velocità angolari lungo l'asse normale alla superficie abbiano lo stesso modulo.

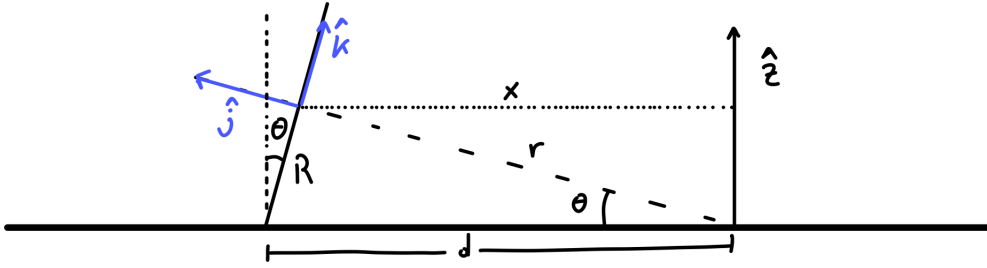


Figura 5: Disegno dei versori degli assi di rotazione

Dette ω e $\tilde{\omega}$ rispettivamente le velocità angolari nel primo sistema di assi e ω_0, Ω le velocità angolari nel secondo sistema, si deve avere:

$$\begin{aligned}\omega \hat{j} + \tilde{\omega} \hat{k} &= \omega_0 \hat{j} + \Omega \hat{z} \\ \hat{j} &= \cos(\theta) \hat{y} + \sin(\theta) \hat{z} \\ \hat{k} &= -\sin(\theta) \hat{y} + \cos(\theta) \hat{z}\end{aligned}\quad (72)$$

Da cui si ricava il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \hat{y} : \omega \cos(\theta) - \tilde{\omega} \sin(\theta) = \omega_0 \cos(\theta) \\ \hat{z} : \omega \sin(\theta) + \tilde{\omega} \cos(\theta) = \omega_0 \sin(\theta) + \Omega \end{cases}\quad (73)$$

Si può ricavare una terza relazione (per rendere il sistema risolvibile) dalla condizione di rotolamento senza strisciamento, che riferita alle due velocità angolari diventa:

$$\begin{aligned}\vec{R} \times \vec{\omega}_0 + \vec{d} \times \vec{\Omega} &= 0 \\ \left(\frac{R}{\sin(\theta)} \right) \Omega &= -R\omega_0 \\ \implies \Omega &= -\omega_0 \sin(\theta)\end{aligned}\quad (74)$$

Risolvendo il sistema in Ω e ω_0 si ottengono le seguenti:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{\omega}{\cos^2(\theta)} \\ \Omega &= \frac{\omega \sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \\ \implies v_t &= \Omega x \\ v_t &= \omega R\end{aligned}\tag{75}$$

In quanto vale $x = \frac{R \cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}$, con x la distanza così chiamata in Figura 5.

Domande 2 e 3

La monetina, se lanciata sufficientemente veloce riesce a permanere in uno stato di equilibrio, in cui, sebbene il suo asse non sia perfettamente orizzontale non porta alla caduta della moneta. Accade infatti che quando la monetina si inclina, non si muove più su una retta, ma come nel caso precedente, si muoverà lungo una curva. Fintanto che la moneta si muove su una traiettoria curvilinea, proprio come nel caso precedente subirà una forza centrifuga. Se la velocità ω è sufficientemente alta, allora il momento torcente esercitato da questa forza sulla monetina può essere superiore a quello esercitato dalla forza di gravità. Ciò porta la monetina a riavvicinarsi nuovamente alla verticale ed eventualmente a sporgere, per via della sua inerzia, dal lato opposto. Dunque, se la velocità è sufficientemente elevata, la monetina, mentre rotola, oscillerà attorno alla verticale. Qualora forze dissipative entrino in gioco, tuttavia, l'energia della monetina nel tempo diminuisce. Pertanto sebbene, per un certo periodo iniziale il comportamento descritto sopra si manifesterà, poiché la velocità diminuisce, allora dopo un certo lasso di tempo non sarà sufficientemente elevata da permettere al momento dovuto alla forza centripeta di vincere il momento legato alla forza peso. La moneta dunque, quando è più lenta di una certa velocità limite, si discosterà definitivamente dalla sua traiettoria iniziale, ruotando ancora per poco prima di cadere.

Per avanzare una stima del valore limite della velocità angolare consideriamo quali sono le grandezze caratteristiche del sistema:

- g accelerazione gravitazionale
- r raggio della monetina

Possiamo escludere la dipendenza da grandezze quali la massa in quanto stiamo analizzando una delle caratteristiche cinematiche del sistema. Si

conclude dunque che:

$$\begin{aligned} [\omega_{\text{lim}}] &\propto [g]^\alpha \cdot [r]^\beta \\ \implies \omega_{\text{min}} &\propto \sqrt{\frac{g}{r}} \end{aligned} \quad (76)$$

Domanda 4

La ruota, essendo un poligono con N lati, urta ripetutamente col suolo. Ciò porta una parte dell'energia ad essere dissipata. Per ottenere la soluzione è sufficiente studiare come varia la velocità angolare prima e dopo l'urto. La velocità di rotazione del centro di massa è data da $r\omega$, questa è sempre perpendicolare al vettore \vec{r} che collega il polo di rotazione (il vertice su cui poggia la monetina) con il centro di massa. Al momento di impatto la velocità dunque non sarà rivolta lungo l'orizzontale ma sarà inclinata di un angolo sotto l'orizzontale. Chiamato $\phi = \frac{2\pi}{N}$ l'angolo al vertice di un triangolo con vertici: i vertici del lato che tocca terra ed il centro di massa. Per via geometrica si ottiene che questo è anche l'angolo compreso fra la direzione in cui punta la velocità del centro di massa ed il vettore in Figura 6 designato come v_{eff} . Quest'ultimo è la componente della velocità v_T perpendicolare al lato del triangolo considerato che collega il nuovo polo di rotazione con il centro di massa. Rappresenta dunque la componente della velocità tangenziale che contribuirà al momento angolare attorno al nuovo polo. Bisogna procedere conservando il momento angolare prima e dopo l'urto. Il momento di inerzia di un triangolo isoscele, calcolato rispetto all'asse passante per il vertice opposto alla base e ortogonale alla superficie del triangolo, è dato dalla formula:

$$I_z = \frac{ml^2}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2(\beta) \right) = \frac{mR^2(\cos(2\beta) + 2)}{6} \quad (77)$$

Dove m è la massa del triangolo considerato l il suo lato e β è il semiangolo al vertice. Questa formula nel nostro caso può essere applicata riconoscendo che un poligono regolare può essere visto come una serie di triangoli isosceli uguali accostati l'uno all'altro. Quindi varrà $m = M/N$ dove M è la massa del disco e $l = R$ dove R è la distanza fra centro di massa e vertici ed infine $\phi = 2\beta$. Per il teorema degli assi paralleli varrà dunque su ciascun triangolo:

$$L_{\text{tot}} = \omega I_z + mR^2\omega \cos(\phi) = \omega'(I_z + mR^2) \quad (78)$$

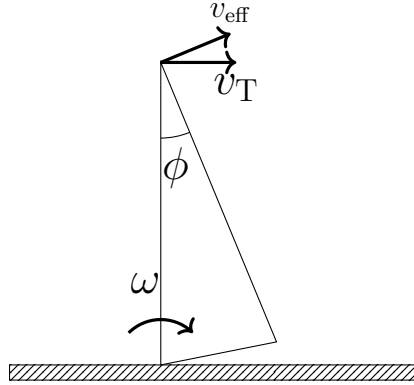


Figura 6: Schema raffigurante una sezione della moneta quando sta per completare una rotazione. v_{eff} indica la componente della velocità che a seguito dell'urto permetterà alla moneta di iniziare a ruotare attorno al secondo vertice.

Da cui moltiplicando per il numero di lati si ha:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{tot}} &= \omega N I_z + M R^2 \omega \cos(\phi) \\
 L_{\text{tot}} &= \omega' (N I_z + M R^2) \\
 \implies \omega' &= \omega \frac{N I_z + M R^2 \cos(\phi)}{(N I_z + M R^2)}
 \end{aligned} \tag{79}$$

Che una volta risolto porta a:

$$\begin{aligned}
 \omega' &= \omega \frac{7 \cos(\phi) + 2}{\cos \phi + 8} \\
 \implies \omega_n &= \omega_0 K^n \\
 \text{con } K &= \frac{7 \cos(\phi) + 2}{\cos \phi + 8}
 \end{aligned} \tag{80}$$

Dove ω' è la velocità angolare dopo l'urto, mentre ω_0 è la velocità angolare iniziale con cui la moneta inizia a rotolare. Da questa relazione si può ricavare il numero di urti successivi che portano $\omega_n < \omega_0$, ossia quando la moneta passa dal primo al secondo regime. Ogni urto avviene a seguito di una rotazione di angolo ϕ . Dunque il tempo necessario per ogni singola rotazione e il tempo totale impiegato sono:

$$\begin{aligned}
 t_n &= \frac{\phi}{\omega_n} \\
 T &= \sum_{k=0}^{\tilde{N}} t_k
 \end{aligned} \tag{81}$$

Dove \tilde{N} è la rotazione che porta la moneta a passare nel secondo regime. Si può risolvere ed ottenere il tempo totale per la rotazione in quanto T è espresso da una serie geometrica. Si ha dunque che:

$$T = \frac{\phi}{\omega_0} \frac{K^{\tilde{N}+1} - 1}{K^{\tilde{N}}(K - 1)} \quad (82)$$

$$\tilde{N} = \left\lceil \frac{\ln(\omega_{\text{lim}}) - \ln(\omega_0)}{\ln(K)} \right\rceil$$

12 Pompa a vuoto [120 pt.]

Domanda 1

Fintanto che il ciclo procede si alternano le seguenti 4 fasi:

1. il pistone ha appena finito di comprimere. Nel cilindro la pressione è P_a , la temperatura T_a e il volume è V_0 ;
2. il pistone ha iniziato la decompressione, che è adiabatica perché finché le valvole sono chiuse, non c'è scambio di calore con l'ambiente. La pressione diminuisce, quindi la decompressione prosegue finché non si apre la valvola di iniezione. Tale condizione può essere trovata imponendo eguali le pressioni nella camera e nel cilindro. Indicando con γ il coefficiente adiabatico si ha

$$P_a V_0^\gamma = P(n) (V_0 + \delta V)^\gamma$$

$$\therefore \delta V = \left[\left(\frac{P_a}{P(n)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] V_0$$

3. la valvola si apre, il pistone arriva a "fine corsa" e il gas ha tempo di termalizzare. Il numero di moli nel cilindro, prima che la valvola si aprisse, erano, per la legge dei gas perfetti, $n_{\text{cil}} = \frac{P_a V_0}{RT_a}$, mentre le moli nella camera $n_{\text{ch}} = \frac{P(n)V}{RT_a}$. L'istante precedente alla chiusura della valvola, per le condizioni di equilibrio, la pressione e la temperatura nel cilindro e nella camera sono uguali rispettivamente a $P(n+1)$ ⁴ e T_a . Il numero di moli nel sistema cilindro+camera rimane invariato durante questa fase. Dunque possiamo scrivere:

$$P(n+1) = \frac{n_{\text{cil}} + n_{\text{ch}}}{V + \Delta V + V_0} RT_a = \frac{V}{V + \Delta V + V_0} P(n) + \frac{V_0}{V + \Delta V + V_0} P_a$$

⁴la pressione nella camera non varia fino al ciclo successivo.

4. la valvola di iniezione si è chiusa. Il pistone inizia a comprimere il gas. Finché la pressione del gas non è sufficiente a far aprire la valvola di uscita, il gas nel cilindro compie una compressione adiabatica. La compressione termina prima che il pistone arrivi fino a fine corsa se

$$P(n) \left(\frac{\Delta V + V_0}{V_0} \right)^\gamma \geq P_a$$

5. la valvola di uscita è aperta e il pistone è arrivato a fine corsa. Per la condizione sull'equilibrio si ha che, nel cilindro, la pressione è P_a e la temperatura T_a . Il ciclo quindi ricomincia.

L'equazione che ci dà la pressione in funzione del numero di cicli effettuati è quindi:

$$P(n+1) = \frac{1}{1 + \frac{V_0 + \Delta V}{V}} \left[P(n) + \frac{V_0}{V} P_a \right]$$

che può essere resa esplicitamente come:

$$P(n) = \left[\left(1 + \frac{\Delta V + V_0}{V} \right)^{-n} \frac{\Delta V}{V_0 + \Delta V} + \frac{V_0}{V_0 + \Delta V} \right] P_a$$

Tenendo conto delle approssimazioni introdotte, si può approssimare a:

$$P(n) \simeq \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^{-n} P_a \simeq P_a \exp \left(-\frac{\Delta V}{V} n \right)$$

Domanda 2

La valvola si apre a seguito di una compressione adiabatica. Quando l'adiabatica inizia, il gas è a pressione $P(n+1) \simeq P(n)$ e temperatura T_a . Quando termina il gas è a pressione P_a . Quindi:

$$T_e(n) = T_a \left(\frac{P(n)}{P_a} \right)^{\frac{1}{\gamma} - 1}$$

Domanda 3

Sono 3 le condizioni che possono far smettere di funzionare il motore:

1. Non si apre la valvola di uscita.
2. Non si apre la valvola di aspirazione.

3. Il ciclo si completa ma tende asintoticamente a un valore limite.

Le prime due condizioni si verificano imponendo che alla fine delle adiabatiche (2) e (4) il pistone sia arrivato a fine corsa e non abbia fatto aprire le valvole. La terza condizione si può ricavare dalla forma non approssimata di $P(n)$ oppure come limite della successione di $P(n)$, imponendo $P(n) = P(n + 1)$. Le prime due condizioni portano a:

$$P_{\text{lim1}} = \left[1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right]^{-\gamma} P_a \simeq \left(\frac{V_0}{\Delta V}\right)^\gamma P_a$$

mentre la terza a

$$P_{\text{lim2}} = \left[1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right]^{-1} P_a \simeq \frac{V_0}{\Delta V} P_a$$

La pressione limite si trova con la condizione più stringente. Dunque le valvole continuano ad aprirsi, ma non comportano aspirazione netta di gas nella camera.

$$P_{\text{lim}} = \left[1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right]^{-1} P_a \simeq \frac{V_0}{\Delta V} P_a$$

Domanda 4

1. Ragionando in maniera equivalente e cercando l'espressione ricorsiva per la pressione si trova:

$$P(n + 1) = \frac{1}{1 + \frac{V_0 + \Delta V}{V}} \left[P(n) + \frac{V_0}{fV} P_a \right]$$

che è la stessa espressione che si avrebbe dividendo la pressione atmosferica P_a per un fattore f . Dunque pure la pressione minima viene divisa per un fattore f .

2. Applicando la formula trovata al punto 3 si ottiene che la pressione minima viene moltiplicata di un fattore f .

3. Applicando la formula trovata al punto 3 si ottiene che la pressione minima viene moltiplicata di un fattore f .