

Problemi del Test di Ammissione

Lo Staff dello Stage*

22 novembre 2021

Introduzione

Ciao! I problemi che state per leggere sono la prima sfida che vi separa dalla possibilità di partecipare allo stage 2022. Leggete attentamente questa introduzione: potrà esservi utile per approcciarvi al test correttamente.

Avete circa due settimane di tempo per risolvere i problemi, perciò sentitevi liberi di andare a cercare o studiare gli argomenti che non conoscete bene: il test serve anche a questo. Sconsigliamo fortemente di cercare direttamente le soluzioni, di far risolvere i problemi ad altri o di svolgerli in gruppo: non servirebbe né a voi (non vi aiuta ad approcciare argomenti nuovi in maniera autonoma; inoltre alle olimpiadi siete da soli!), né a noi per selezionarvi in modo appropriato (senza contare che c'è anche una prova orale...).

Per svolgere i problemi è ammesso l'utilizzo della calcolatrice scientifica, materiale da disegno e il supporto necessario per produrre effettivamente l'elaborato. Non sono consentiti ulteriori strumenti di calcolo.

I problemi sono stati ordinati grossomodo in ordine crescente di difficoltà. Ovviamente, questa è una valutazione molto soggettiva, quindi vi invitiamo a non scoraggiarvi e a provare a risolverli tutti: sicuramente, per molti di voi, alcuni dei problemi più difficili risulteranno più facili, e viceversa.

Per iscrivervi dovrete inviare un unico file pdf con tutte le vostre soluzioni. Potete scriverlo come preferite: \LaTeX , Word, fotografando manoscritti... L'importante è che sia perfettamente leggibile, ovviamente non potremmo dare alcun punto a ciò che non riusciamo a leggere!

È importante che inviate anche soluzioni incomplete, nel caso non riusciate a risolvere alcuni problemi per intero: in questo caso verranno assegnati punteggi parziali. Inoltre, vi facciamo notare che, per alcuni problemi, è possibile risolvere i punti successivi anche senza aver svolto i precedenti.

Ovviamente, sappiamo che i più giovani potrebbero avere lo svantaggio di conoscere meno argomenti: ne terremo conto. Il test è valutato su un totale di 1000 punti. Il punteggio minimo necessario (ma non sufficiente!) per fare l'orale è di soli 50 punti, al di sotto dei quali scarteremo la richiesta. Buon lavoro!

*segreteria.stagefisica@sns.it

1 Strappo [60 pt.]

Un corpo inizia a muoversi lungo l'asse x , partendo da fermo, con una velocità v che varia nel tempo. Il grafico della funzione $v(t)$ è riportato in Figura 1.

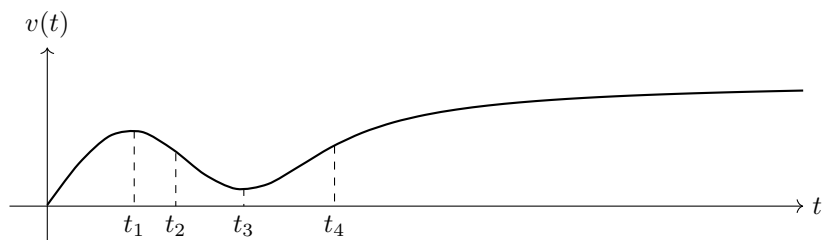


Figura 1: Grafico della funzione $v(t)$.

1. Disegna un grafico approssimativo della funzione $a(t)$, ovvero l'accelerazione del corpo in funzione del tempo. Sull'asse t indica i punti t_1 , t_2 , t_3 e t_4 .
2. Sapendo che all'istante $t = 0$ il corpo si trova in posizione $x = 0$, disegna un grafico approssimativo che mostri l'andamento della funzione $x(t)$, ovvero la posizione del corpo in funzione del tempo. Anche questa volta, sull'asse t indica i punti t_1 , t_2 , t_3 e t_4 .
3. Definiamo ora lo *strappo* j come la derivata dell'accelerazione rispetto al tempo: $j = \frac{da}{dt}$. Disegna un grafico approssimativo della funzione $j(t)$, indicando i punti t_2 e t_4 sull'asse del tempo.

2 Palloncino nello spazio [75 pt.]

Si consideri un palloncino di materiale elastico riempito con un gas ideale. Sulla superficie della Terra, a temperatura T_0 , il palloncino ha raggio r_0 quando contiene n moli di un gas con indice adiabatico γ . Il palloncino, dopo essere stato gonfiato con tale gas, viene chiuso ermeticamente e portato lentamente nello spazio, in una regione con pressione esterna praticamente nulla.

Si lavori nelle seguenti approssimazioni:

- la forma del palloncino è sempre sferica;
- il palloncino è un perfetto isolante termico;
- l'energia elastica del palloncino¹ è

$$U_E = kS^2,$$

¹Nota: questo non è il comportamento di un palloncino ideale, ma in questo problema assumiamo che lo sia.

dove S è l'area del palloncino e k è una costante che caratterizza il materiale del palloncino e non dipende dalla temperatura.

1. Si trovi un'equazione che lega il raggio del palloncino alla pressione esterna.
2. Si trovi il raggio che il palloncino dovrebbe avere quando la pressione esterna è nulla.
3. In queste condizioni, si ricavino temperatura e pressione del gas.
4. Il palloncino raggiunge il carico di rottura quando la pressione elastica da esso esercitata è p_{lim} , minore di p_{atm} . Supponendo che l'andamento della pressione atmosferica in funzione dell'altitudine abbia la seguente forma

$$p(z) = p_{\text{atm}} \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right),$$

dove \exp è la funzione esponenziale e λ è una costante con le dimensioni di una lunghezza, si calcoli a quale altezza il palloncino si rompe.

3 Piramidi [75 pt.]

Definiamo *asta rigida* un oggetto di lunghezza L , massa m (distribuita uniformemente) e di spessore trascurabile. Supponiamo di trovarci su un piano orizzontale scabro. Sia μ il coefficiente di attrito statico tra l'asta rigida ed il piano in questione.

1. Poniamo tre aste rigide poggiate l'una contro l'altra su un piano, in modo che formino gli spigoli di una piramide retta (i tre spigoli che non giacciono sul piano) che ha come base un triangolo equilatero. Supponiamo che ogni asta formi con la verticale un angolo $\alpha = 30^\circ$. Determinare il minimo coefficiente di attrito statico μ tale che il sistema possa rimanere in equilibrio.
2. Determinare la formula esplicita per il minimo coefficiente μ in funzione dell'angolo α generico.
3. Estendiamo ora il problema a N aste rigide che formano con la verticale un angolo α . Le aste poggiano sul piano negli N vertici di un N -agono regolare. Determinare il minimo coefficiente d'attrito μ tale che il sistema possa rimanere in equilibrio.
4. Supponiamo adesso di trovarci su un piano senza attrito, sempre nella configurazione con N aste rigide. Ora tra i vertici di base di due aste consecutive, cioè lungo i lati dell' N -agono regolare alla base, è posta una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sono dunque le N molle a tenere in equilibrio il sistema. Determinare l'angolo α (non banale, cioè diverso da 0 e $\frac{\pi}{2}$) che le aste formano con la verticale nella configurazione d'equilibrio; inoltre, determinare quali condizioni devono essere soddisfatte dai parametri del problema affinché tale posizione esista.

5. Si studi la posizione d'equilibrio trovata al punto precedente: è una posizione d'equilibrio stabile o instabile?

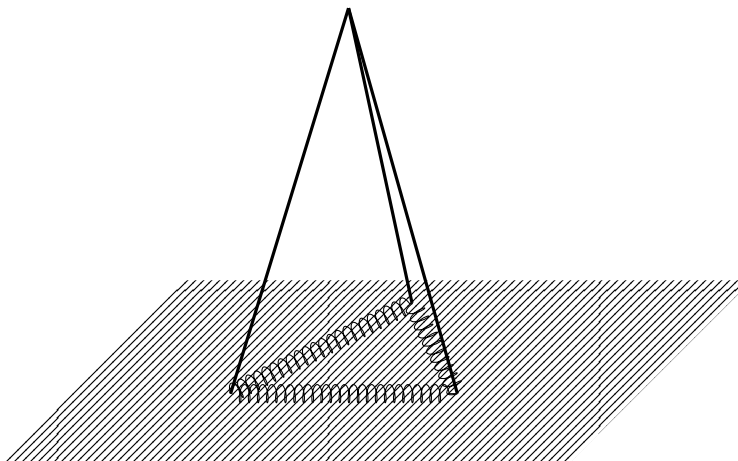


Figura 2: Rappresentazione del sistema descritto al punto 4 del Problema 3, con $N = 3$ (nei punti precedenti le molle non sono presenti).

4 Un potenziale spigoloso [75 pt.]

Il potenziale elettrico nel centro di un cubo di lato l , carico uniformemente con densità volumica di carica ρ , è

$$V = C \cdot A, \quad (1)$$

dove il parametro A è del tipo $A = \rho^\alpha \cdot l^\beta \cdot \epsilon_0^\gamma$ e C è una costante adimensionale. Per tutti i punti del problema, si consideri il potenziale elettrico pari a zero all'infinito (o comunque molto lontano dal centro del cubo).

1. Determina i valori di α , β e γ .
2. Determina il potenziale elettrico su un vertice dello stesso cubo, in funzione di l , ρ , C e opportune costanti.
3. Determina il potenziale elettrico (in funzione di l , ρ , C e opportune costanti) sul vertice principale di una piramide a base quadrata di lato l e altezza $\frac{l}{2}$, uniformemente carica con densità volumica di carica ρ .
4. Determina il potenziale elettrico (in funzione di l , σ , C e opportune costanti) generato da un quadrato di lato l e densità di carica superficiale uniforme σ in un punto a distanza $\frac{l}{2}$ e appartenente all'asse di simmetria che non giace sul suo piano.

5 Circuito... R_MC [65 pt.]

Si consideri un condensatore a facce piane parallele, le cui armature sono attaccate alle estremità di due molle con costante elastica k mentre l'altro estremo è fissato al muro, come in Figura 3. Quando il condensatore è scarico, le armature sono a distanza x_0 ed il condensatore ha capacità C_0 . Le armature hanno massa m . Si trascuri qualsiasi effetto dovuto all'irraggiamento elettromagnetico.

1. Sapendo che la carica del condensatore è Q , si trovi la capacità dello stesso in condizioni di equilibrio, in funzione dei parametri del problema.
2. Il condensatore viene successivamente collegato a una resistenza R e il circuito viene chiuso. Assumendo che il processo di scarica avvenga lentamente (ovvero che il sistema si possa considerare in equilibrio in ogni istante), si trovi la corrente I che scorre nel circuito in funzione dei parametri del problema e della carica presente sulle armature in un generico istante di tempo.

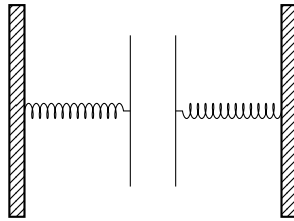


Figura 3: Rappresentazione schematica del condensatore descritto in Problema 5.

6 Caricaaa!!! [75 pt.]

Una particella puntiforme di carica Q è fissata in un punto, che consideriamo origine del nostro sistema di riferimento. Una seconda particella puntiforme, anch'essa di carica Q e di massa m , è libera di muoversi su un piano, ma è legata alla prima tramite una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k . Si trascuri l'interazione gravitazionale tra le due particelle.

1. Si trovi il luogo dei punti in cui bisogna posizionare la particella libera affinché essa rimanga immobile.
2. Si consideri adesso il caso in cui la particella libera si muova di moto circolare uniforme, con velocità angolare ω . Si determini il raggio di tale orbita.
3. Alla particella libera, in orbita circolare, viene istantaneamente impresso un piccolo impulso in direzione radiale. Essa comincia dunque ad oscillare

attorno a tale orbita. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni (cioè quelle oscillazioni caratterizzate da ampiezze massime molto minori del raggio dell'orbita).

Hint: potrebbe essere utile ricordare che, per $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e $x \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo in modulo, vale la seguente approssimazione:

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x.$$

7 Molla in caduta [80 pt.]

Si considerino due masse m uguali, collegate da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 . I parametri del sistema sono tali che le due masse non si tocchino mai durante il moto.

Inizialmente il centro di massa del sistema è posto ad una altezza h e la molla è a riposo. Ad un certo punto vengono rimossi i vincoli e le masse iniziano a cadere verticalmente (si supponga che, durante tutto il moto, la molla e le masse si mantengano allineate verticalmente), fino a quando la massa inferiore urta in maniera completamente anelastica il terreno e l'altra inizia a comprimere la molla.

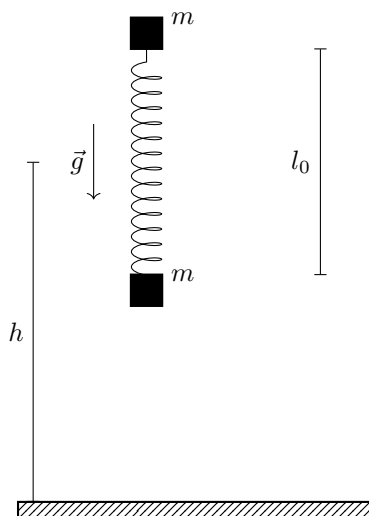


Figura 4: Schematizzazione del sistema descritto in Problema 7.

1. Si determini la compressione massima Δl della molla.

Dopo la fase di compressione inizia una fase di allungamento.

2. Si descriva qualitativamente come evolve il sistema.

3. Si determini la condizione sui parametri del problema che permette al sistema *masse+molla* di staccarsi da terra.
4. Sotto l'ipotesi del punto 3, si determini come evolve nel tempo la quota $y(t)$ della massa che non urta il suolo, dall'istante in cui il sistema si stacca da terra all'istante in cui tocca nuovamente il suolo.

8 Parabola con fascio fotonico [85 pt.]

Supponiamo di trovarci su un piano orizzontale su cui è presente uno specchio di forma parabolica. Nel nostro sistema di coordinate, la curva che descrive il profilo dello specchio ha equazione $y = kx^2$, dove k è una costante positiva con le dimensioni del reciproco di una lunghezza. Lo specchio è colpito da un fascio di luce uniforme compreso tra le rette di equazione $x = -a$ e $x = a$ diretto verso il basso. Un granello di polvere di dimensioni trascurabili viene posto sul piano in corrispondenza del fuoco della parabola. Tutti i raggi colpiranno direttamente il granello, data la forma parabolica dello specchio (come in Figura 5). Supponiamo inoltre che il granello assorba *tutta* la quantità di moto dei fotoni.

1. Si calcolino i possibili valori di a per i quali la risultante delle forze agenti sul granello è nulla. Nel caso in cui l'equazione per trovare la risposta non sia risolvibile analiticamente, si fornisca una risposta approssimata con due cifre significative.
2. Supponiamo ora di estendere il problema a 3 dimensioni, in assenza di gravità, cioè a uno specchio di equazione $z = k(x^2 + y^2)$, colpito da un fascio cilindrico uniforme di raggio a , centrato nell'asse del parabolico. Si trovino i possibili valori di a per i quali la risultante delle forze agenti sul granello è nulla (vale la stessa richiesta di prima sulle risposte non esprimibili analiticamente).

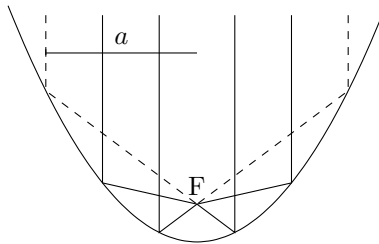


Figura 5: Rappresentazione della riflessione dei raggi da parte di uno specchio parabolico.

9 Sbarra e molle [85 pt.]

Una sbarretta uniforme di massa M e lunghezza L è appesa al soffitto tramite due molle, attaccate agli estremi A e B della stessa in modo tale da risultare verticali. Supporremo che le molle rimangano verticali durante tutto lo svolgimento del problema, anche nel punto 3. Le due molle hanno la stessa lunghezza a riposo l , ma due diverse costanti elastiche, che chiamiamo k_1 e k_2 .

1. Dove si deve porre una pallina (puntiforme e di massa m) sulla sbarretta in modo tale che il sistema sia in equilibrio e la sbarretta sia parallela al soffitto? Qual è la condizione su m affinché sia possibile fare quanto richiesto?
2. Consideriamo la situazione di equilibrio realizzata nel punto precedente e supponiamo che la pallina sia fissata nel punto dove l'avevamo posta. La sbarretta viene abbassata di un'altezza y , parallelamente al soffitto, e successivamente rilasciata. Come evolve il sistema nell'istante immediatamente successivo al rilascio? In particolare, determinare l'accelerazione del sistema in tale istante e stabilire l'eventuale originarsi di un moto di rotazione.

Consideriamo ora una lastra uniforme quadrata di lato L e massa M , e denotiamo con A, B, C, D i suoi vertici. Essa è appesa al soffitto attraverso quattro molle attaccate ai vertici, tutte con lunghezza a riposo l , ma di costanti elastiche rispettivamente k_A, k_B, k_C, k_D .

3. Dove si deve porre una pallina (puntiforme e di massa m) sulla lastra in modo tale che il sistema sia in equilibrio e la lastra sia parallela al soffitto? Qual è la condizione su m affinché sia possibile fare quanto richiesto?

10 Pierryno ha due mele. Stima la massa del Sole [110 pt.]

Ci troviamo all'equatore di un pianeta chiamato *Pisonia*, in rivoluzione attorno alla stella α -bonacci (l'asse di rotazione del pianeta è parallelo a quello di rivoluzione). Il giorno su questo pianeta dura 80 ore.

Su questo pianeta la mezzanotte, cioè le ore 00:00, è scelta in modo che si trovi a metà delle ore di buio. In questo momento sono le ore 50:00. Ci troviamo in una piazza con pavimento orizzontale, al cui centro c'è un monumento a forma di parallelepipedo, in onore del famoso fisico Albert Approxistein, alto h . Il monumento proietta un'ombra e una penombra sulla piazza. Misuriamo con un righello che lo spessore della penombra che parte dal bordo superiore è l (come in Figura 6).

1. Trova R , il raggio di α -bonacci, in funzione di h, l , e la distanza pianeta-stella d . Considera $R \ll d$.

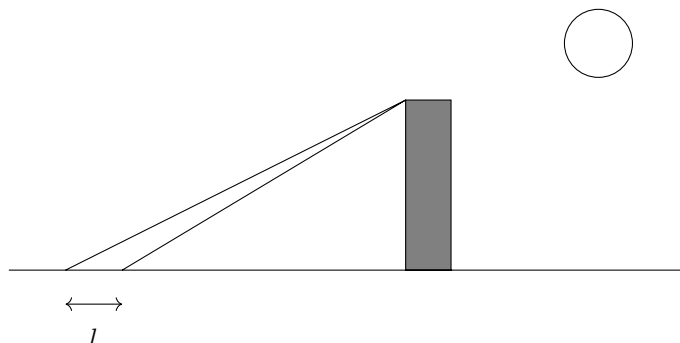


Figura 6: Schematizzazione dell'ombra proiettata sulla piazza del Problema 10. La zona in ombra è quella tra il monumento e il segmento obliquo più vicino, mentre la zona in penombra è quella tra i due segmenti obliqui.

Su Pisonia un anno dura $T = 314$ giorni pisoniani.

2. Trova M , la massa di α -bonacci, in funzione di d , T ed eventuali costanti universali.

Pisonia è un pianeta senza atmosfera, senza alcuna attività geotermica, con elevata conducibilità termica e con una temperatura media T_0 .

3. Trova T_s , la temperatura superficiale di α -bonacci, in funzione di T_0 , R , d , ed eventuali costanti universali.
4. A causa di effetti relativistici, i fotoni che partono da α -bonacci e raggiungono Pisonia subiscono uno spostamento verso il rosso (*redshift gravitazionale*).

Si assuma che valga la conservazione dell'energia e che l'energia gravitazionale di una particella sia

$$U(\vec{r}) = \frac{E}{c^2} \phi(\vec{r})$$

dove E è l'energia complessiva della particella, c la velocità della luce nel vuoto e

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}$$

è il potenziale newtoniano generato da un corpo di massa M e calcolato nel punto in cui si trova la particella. Ricavare

$$z \equiv \frac{\lambda_\infty - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_s},$$

dove λ_s è la lunghezza d'onda di un fotone emesso sulla superficie di α -bonacci e $\lambda_\infty = \lambda_s + \Delta\lambda$ è la lunghezza d'onda dello stesso fotone quando si allontana molto dalla stella.

Hint: potrebbe esserti utile nello svolgimento di questo punto sapere che per $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e per $x \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo in modulo, vale la seguente approssimazione:

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x.$$

Sia λ_{\max} la lunghezza d'onda per cui si ha il picco di radiazione che arriva su Pisonia.

5. Usando le relazioni precedenti, determinare M in funzione dei parametri noti.

11 Ruota! Monetina [95 pt.]

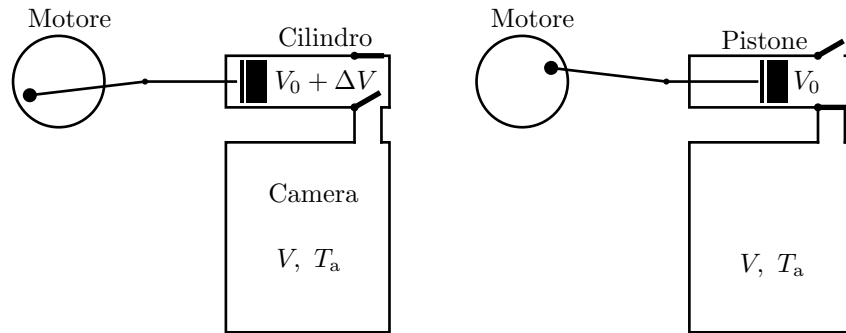
Una monetina di massa m , raggio R e spessore trascurabile viene fatta rotolare senza strisciamento su una superficie piana ed orizzontale, con una velocità angolare ω attorno all'asse normale alla superficie della moneta stessa e passante per il suo centro di massa.

1. In una situazione di equilibrio instabile (non è richiesto trovare le condizioni per cui ciò si verifica per la risoluzione dell'esercizio) la monetina si muove mantenendo un angolo costante rispetto alla verticale. Che traiettoria segue la monetina? Qual è la velocità del suo centro di massa?
2. Si supponga di lanciare la moneta in modo che il proprio asse sia pressoché orizzontale. Nella prima fase del moto, la moneta si muove seguendo una certa traiettoria; successivamente, a causa di alcuni fenomeni dissipativi, la monetina rallenta e cambia traiettoria. Descrivere qualitativamente il moto della moneta da quando viene lanciata con velocità angolare iniziale ω_0 a quando si ferma e spiegare perché si verifica il cambio di regime.
3. Trovare, tramite analisi dimensionale, la ω_{\min} per cui la moneta cambia regime di moto.
4. Sapendo che, a causa della zigrinatura, la moneta è approssimabile ad un poligono pieno e regolare di N lati, trovare il tempo impiegato e la distanza percorsa dalla monetina per passare al secondo regime di moto, in funzione della velocità angolare iniziale ω_0 .

12 Pompa a vuoto [120 pt.]

Una pompa a vuoto è composta da un cilindro contenente un pistone ermetico che si muove avanti e indietro, azionato da un motore. Tale pompa è connessa ad una camera di volume V tramite una valvola di ingresso. Durante ogni ciclo, il volume all'interno del cilindro passa da V_0 a $V_0 + \Delta V$ a causa dell'azione del pistone. Assumiamo che $V_0 \ll \Delta V \ll V$. Il cilindro, inoltre, ha una valvola

d'uscita collegata all'ambiente esterno, il quale si trova a pressione atmosferica P_a e a temperatura T_a . La valvola d'ingresso si apre quando la pressione nella camera è maggiore di quella nel cilindro e si chiude appena il pistone nel cilindro inizia a comprimere il gas. La valvola d'uscita, tra il cilindro e l'esterno, si apre appena la pressione nel cilindro è maggiore di quella atmosferica e si chiude appena il pistone nel cilindro inizia a decomprimere il gas. Un ciclo completo del pistone dura un tempo Δt . Le trasformazioni avvengono velocemente, ma in maniera abbastanza lenta da poterle assumere quasi-statiche: in particolare, nell'attimo precedente alla chiusura di una valvola, il gas è in equilibrio in ogni punto. Il gas nella camera è biatomico e rimane costantemente alla temperatura T_a dell'ambiente circostante. Le pareti del cilindro non conducono calore.



1. Inizialmente, la pressione nella camera è uguale a P_a ed il pistone è totalmente compresso. Trova la successione $P(n)$ che descrive la pressione nella camera all' n -esima apertura della valvola di uscita.
2. Trova la successione $T_e(n)$ che descrive la temperatura del gas quando esso passa attraverso la valvola d'uscita nell'istante successivo all' n -esima apertura della stessa.
3. Trova la minima pressione che la pompa può creare all'interno della camera.
4. Introduciamo ora un parametro f dato, tale che $0 \leq f \leq 1$. Determina come ognuna di queste azioni influenzerebbe il valore della pressione minima raggiungibile nella camera:
 - (a) Immergere la camera in una sorgente calda, in modo che la temperatura si mantenga costante nel tempo e pari a $\frac{T_a}{f}$, lasciando inalterata la temperatura dell'ambiente.
 - (b) Aumentare la capienza del cilindro a $\frac{V_0 + \Delta V}{f}$, mantenendo fisso il residuo V_0 .
 - (c) Diminuire il residuo del cilindro V_0 , portandolo a fV_0 .

Hint: nel corso del problema potrebbero esserti utili le seguenti approssimazioni, valide per $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e $x \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo in modulo:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx e \quad (\text{numero di Nepero})$$