

# Soluzioni ai problemi del test di ammissione

Lo staff dello stage\*

12 dicembre 2020

## 1 In piscina [40 pt.]

Come suggerito dal testo del problema, lo scambio di calore tra il corpo umano e un mezzo  $i$  è regolato dalla legge:

$$\dot{Q}_{Ci} = k_i A_i (T_C - T_i)$$

Dove  $k$  è la costante di proporzionalità descritta nel testo, il pedice  $C$  si riferisce alle quantità relative al corpo umano e  $A_i$  indica la superficie di contatto. Il calore è preso con segno positivo se va dal corpo al mezzo  $i$ .

Nel nostro caso quindi:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{TOT}^{(1)} &= Q_{CA}^{(1)} = k_A A_A^{(1)} (T_C - T_A^{(1)}) \\ \dot{Q}_{TOT}^{(2)} &= Q_{CA}^{(2)} + Q_{CP}^{(2)} = k_A A_A^{(2)} (T_C - T_A^{(2)}) + k_P A_P^{(2)} (T_C - T_P)\end{aligned}$$

Dove gli apici (1, 2), quando necessari, indicano se ci troviamo nella prima o nella seconda situazione descritta nel testo e i pedici  $P, A$  si riferiscono alle quantità relative rispettivamente alla piscina o all'aria.

Poiché in entrambi i casi il corpo si trova ad una (stessa) temperatura costante nel tempo, allora le due quantità indicate sopra saranno uguali  $\dot{Q}_{TOT}^{(1)} = \dot{Q}_{TOT}^{(2)}$  (in particolare saranno entrambe uguali al calore prodotto per unità di tempo dai processi biologici necessari alla vita). Osservando poi che la superficie totale del corpo è la stessa ( $A_A^{(2)} + A_P^{(2)} = A_{TOT} = A_A^{(1)}$ ), si ottiene:

$$k_A (A_A^{(2)} + A_P^{(2)}) (T_C - T_A^{(1)}) = k_A A_A^{(2)} (T_C - T_A^{(2)}) + k_P A_P^{(2)} (T_C - T_P)$$

Da cui con semplici passaggi algebrici:

$$\frac{A_A^{(2)}}{A_P^{(2)}} = \frac{k_A (T_C - T_A^{(1)}) - k_P (T_C - T_P)}{k_A (T_A^{(1)} - T_A^{(2)})} = 0.151$$

---

\*segreteria.stagefisica@gmail.com

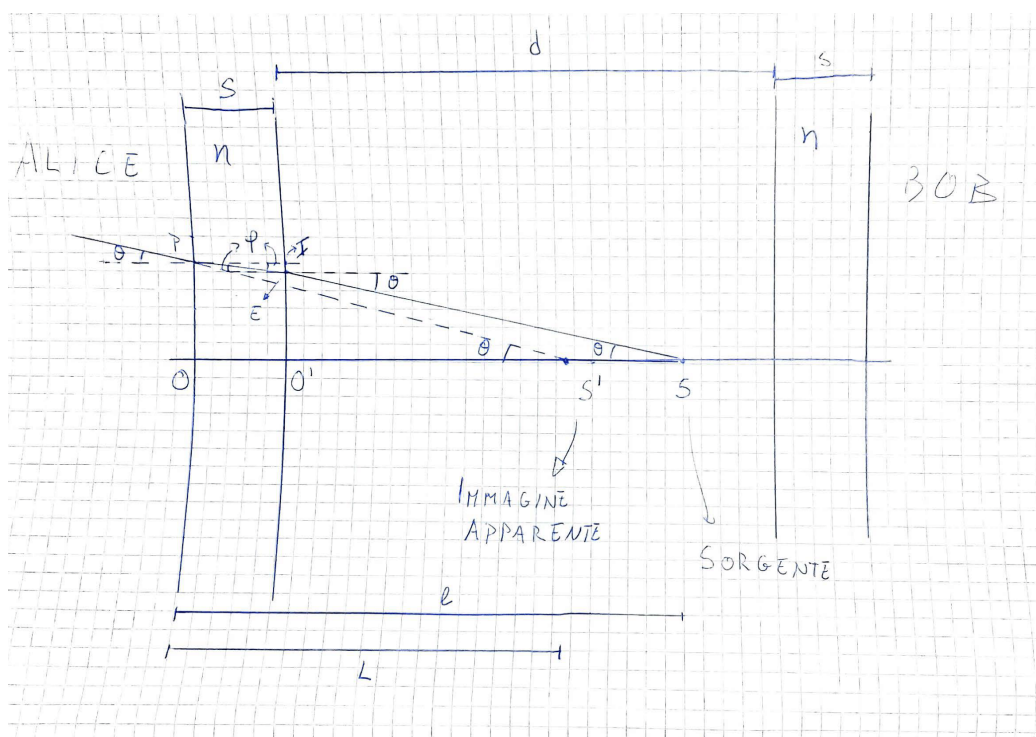
## 2 Profondità apparente [50 pt.]

Osserviamo preliminarmente che il problema presenta simmetria cilindrica, dunque è sufficiente analizzare la situazione su un piano perpendicolare alle pareti e contenente l'asse ottico del sistema. L'unica fonte possibile di asimmetria nel problema è proprio la posizione della sorgente luminosa.

Se chiamiamo  $l$  la distanza reale della sorgente dalla parete esterna di Alice allora la distanza dalla parete esterna di Bob è  $l' = d + 2s - l$ .

Nell'approssimazione dell'ottica geometrica, detta  $L(l, a)$  la formula che fornisce la posizione fittizia vista da Alice in funzione della distanza reale e della sua distanza  $a$  dall'asse, questa deve fornire anche la posizione fittizia vista da Bob secondo la legge  $L' = L(d + 2s - l, a)$ .

Dunque, visto che ad  $l$  fissato la formula deve rendere conto di due andamenti molto diversi rispetto le variazioni di  $a$ , possiamo immaginare che la distanza della sorgente da Alice le permetta di fare delle approssimazioni, semplificando dunque la formula, che Bob non può fare. Il contesto rende chiaro che l'approssimazione in questione è quella di angoli sotto cui Alice vede la sorgente piccoli, cosa che invece Bob non può affermare. Più avanti vedremo come quantificare queste condizioni.



La distanza  $L$  è identificata da Alice (o meglio, incoscientemente per lei

dal suo cervello) intersecando il prolungamento del raggio che giunge al suo occhio con l'asse ottico. Applicando due volte la legge di Snell si deduce che questo raggio è parallelo al raggio iniziale non rifratto (si noti che il raggio per arrivare all'occhio di Alice deve riuscire dal vetro della finestra). Possiamo mettere in relazione  $L$  ed  $l$  calcolando in due modi diversi la distanza  $h$  del punto di uscita dalla finestra del raggio in questione dall'asse. Si applica della trigonometria al triangolo POS per il primo membro ed ai triangoli PEI e SEO' per il secondo:

$$L \tan \theta = (l - s) \tan \theta + s \tan \phi$$

da cui, risolvendo per  $l$ :

$$l = L + s \left( 1 - \frac{\tan \phi}{\tan \theta} \right).$$

Applicando la legge di Snell per eliminare l'angolo  $\phi$ :

$$\sin \phi = \frac{\sin \theta}{n}$$

$$l = L + s \left( 1 - \frac{1}{n} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}}} \right)$$

Questa espressione dipende chiaramente da  $\theta$ , ma se quest'angolo è piccolo, cioè  $\theta = \frac{r}{L} \ll 1$  al primo ordine nella variabile la formula diventa identicamente uguale ad una costante:

$$l = L + s \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

è la situazione in cui si trova Alice. Viceversa, sapendo che Bob non può affermare altrettanto, deve non essere valida la scrittura  $\frac{r}{L} \ll 1$ .

### 3 Lente solare [60 pt.]

1. Poiché la distanza Terra-Sole è molto maggiore delle altre dimensioni del problema, possiamo considerare il Sole a distanza infinita dalla lente. Dall'equazione per le lenti sottili si ottiene immediatamente che l'immagine si formerà allora sul fuoco della lente e dalle equazioni che determinano l'ingrandimento di una lente si ottiene che l'angolo sotteso dal sole  $\alpha$  sarà lo stesso angolo che l'immagine vista dalla lente sottende. Usando l'approssimazione per piccoli angoli ed esplicitando  $\alpha$  in radianti si ottiene che il diametro  $\phi$  dell'immagine del Sole è:

$$\phi \approx \alpha f = 0.14 \text{ cm}$$

2. Poiché la conduzione viene supposta trascurabile la situazione può essere schematizzata come segue.

- Una potenza  $P_s = \pi R^2 I$  viene trasferita attraverso la lente all'immagine del Sole sul muro.
- L'immagine del Sole irradia verso l'ambiente circostante una potenza complessiva pari a, usando la legge di Stefan-Boltzman,  $P_i = \sigma \pi \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 T^4$ , dove  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzman e  $T$  è la temperatura dell'immagine del Sole.

L'equilibrio viene raggiunto quando  $P_s = P_i$ , quando ciò avviene:

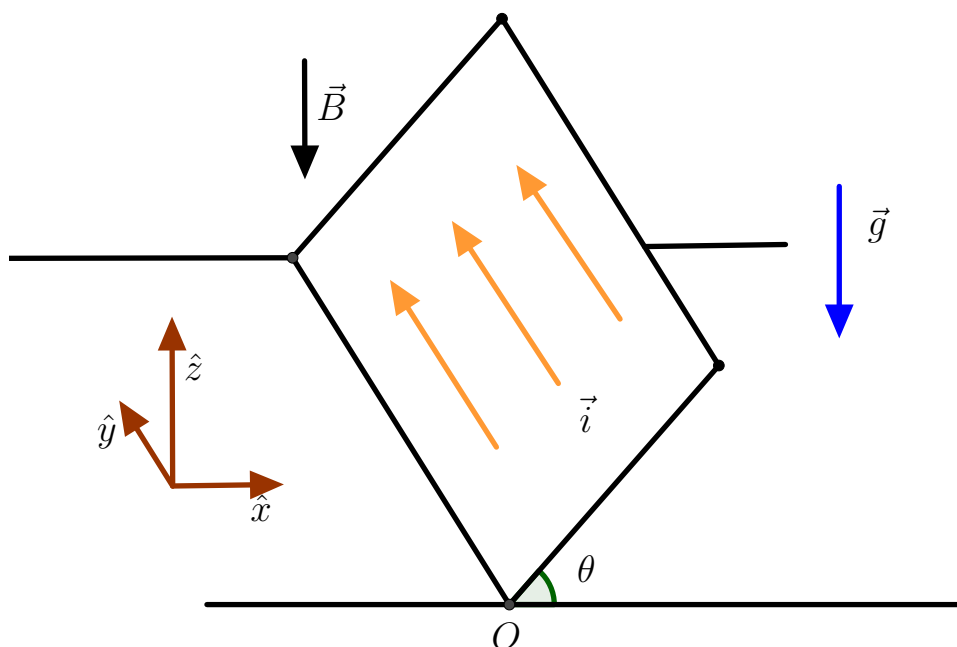
$$T = \sqrt[4]{\frac{4IR^2}{\sigma\phi^2}} = 3.1 \times 10^3 \text{ K}$$

3. Detto  $\alpha'$  il diametro angolare apparente del Sole a distanza  $D$ , quando  $\alpha'$  raggiunge il limite di Rayleigh per quella lente, vuol dire che gli effetti della diffrazione sull'immagine del Sole diventano predominanti e non è possibile neanche distinguere due punti che si trovano diametralmente opposti sulla superficie del sole. Tale limite è raggiunto quando  $\alpha' = 1.22 \frac{\lambda}{2R}$ , da cui:

$$D \approx \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot 1 \text{ au} = \frac{2R\alpha}{1.22\lambda} \cdot 1 \text{ au} = 1.5 \times 10^3 \text{ au}$$

dove au indica la distanza Terra-Sole.

#### 4 Lastra in campo magnetico [80 pt.]



1. Si faccia riferimento al sistema di assi cartesiani in figura. L'origine degli assi coincide con il punto  $O$  e gli assi  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  sono paralleli al piano di appoggio della lastra.

Si fa notare che i versi del campo magnetico e della corrente non sono volutamente specificati nel testo del problema: appunto viene richiesto di studiare i casi. Infatti nella figura i versi di  $\vec{B}$  e di  $\vec{i}$  non sono necessariamente quelli.

Intanto, dato che la lastra è vincolata a non muoversi dalla cerniera, non c'è da studiare l'equilibrio delle forze. Tuttavia bisogna studiare le condizioni per le quali esista un equilibrio rotazionale rispetto alla cerniera: ovvero la somma dei momenti torcenti applicati alla piastra rispetto all'asse della cerniera deve essere nulla.

In questo caso abbiamo due forze che danno contributo ai momenti torcenti: la forza peso e la forza di Lorentz.

Dato che la piastra ha densità uniforme, in questo caso la forza peso avrebbe un contributo equivalente se fosse applicata al baricentro della piastra, che corrisponde con il suo centro.

La forza peso quindi nel nostro sistema è:

$$\vec{F}_p = -mg\hat{z}$$

Per cui il momento torcente dovuto ad essa (il cui modulo si calcolerà dopo) rispetto all'asse della cerniera è:

$$\vec{M}_p = M_p\hat{y}$$

Ora, come descritto dalla seconda formulazione della forza di Lorentz, la piastra, essendo percorsa da corrente e immersa in un campo magnetico, è soggetta a una forza elettromagnetica. Chiamando  $\vec{i}$  la corrente della piastra, questa ha direzione soltanto lungo  $\hat{y}$ . Da ciò consegue che, avendo il campo magnetico solo direzione lungo  $\hat{z}$ , la forza elettromagnetica applicata alla piastra è:

$$\vec{F}_m = \pm F_m\hat{x}$$

Affinché possa esistere un equilibrio rotazionale,  $\vec{F}_m$  deve avere verso negativo, altrimenti il momento torcente di questa avrebbe lo stesso verso di quello della forza peso, e quindi il momento risultante non potrebbe mai essere nullo.

Dunque, affinché  $\vec{F}_m = -F_m\hat{x}$ , secondo la regola della mano destra abbiamo due possibilità:

- se  $\vec{i} = i\hat{y}$ , allora  $\vec{B} = -B_0\hat{z}$
- se  $\vec{i} = -i\hat{y}$ , allora  $\vec{B} = B_0\hat{z}$

2. Dopo la discussione precedente, i versi del campo e della corrente non ci interessano. Quindi si assume che il verso della forza magnetica sia tale che esista un angolo di equilibrio.

L'angolo di equilibrio è tale che il momento risultante sia nullo. Il momento della forza peso è il seguente:

$$\vec{M}_p = \frac{l}{2}mg \cos\theta\hat{y}$$

Per la seconda legge di Ohm, la resistenza della piastra è:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{\rho \cdot l}{s \cdot l} = \frac{\rho}{s}$$

Per la prima legge di Ohm, il modulo della corrente è:

$$i = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0 s}{\rho}$$

Dato che la corrente è uniforme in ogni punto della piastra, se la forza di Lorentz fosse tutta applicata al centro di essa, il momento torcente non cambierebbe. Per cui si può considerare applicata al centro ed è:

$$\vec{F}_m = \vec{l}i \times \vec{B} = -ilB_0\hat{x} = -\frac{V_0lsB_0}{\rho}\hat{x}$$

Quindi il momento torcente della forza magnetica è:

$$\vec{M}_m = -\frac{l}{2} \frac{V_0lsB_0}{\rho} \sin\theta \hat{y}$$

Poiché il momento risultante deve avere modulo nullo:

$$\begin{aligned} \vec{M}_p + \vec{M}_m &= 0 \\ \frac{l}{2}mg \cos\theta - \frac{l}{2} \frac{V_0lsB_0}{\rho} \sin\theta &= 0 \\ \tan\theta &= \frac{\rho mg}{V_0lsB_0} \\ \Rightarrow \theta &= 36^\circ \end{aligned}$$

3. L'equilibrio è instabile, infatti si mostrerà che l'energia potenziale del sistema ha un massimo in  $\theta = \theta_0$ .

Tale energia è la somma dell'energia potenziale gravitazionale e l'energia potenziale della forza magnetica. Nel nostro caso, quest'ultima risulta essere una forza conservativa, ed essendo costante e uniforme, il suo potenziale risulta essere:

$$U_m = \frac{l}{2} \frac{V_0lsB_0}{\rho} \cos\theta$$

Lo zero è posto all'angolo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Per cui l'energia potenziale totale è :

$$U(\theta) = U_g + U_m = mg\frac{l}{2} \sin\theta + \frac{l}{2} \frac{V_0lsB_0}{\rho} \cos\theta$$

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = mg\frac{l}{2} \cos\theta - \frac{l}{2} \frac{V_0lsB_0}{\rho} \sin\theta$$

Studiando il segno di  $\frac{dU(\theta)}{d\theta}$  si conclude che  $U(\theta)$  ha un massimo in  $\theta = \theta_0$ , per cui l'equilibrio è instabile.

4. Si noti che il campo magnetico può essere ruotato di  $90^\circ$  in qualsiasi direzione, purché questa sia parallela al piano di appoggio. Inoltre il modulo rimane sempre  $B_0$ , quindi:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_x + \vec{B}_y \\ B_x^2 + B_y^2 &= B_0^2\end{aligned}$$

Dove  $\vec{B}_x$  è diretto lungo  $\hat{x}$  e  $\vec{B}_y$  è diretto lungo  $\hat{y}$ . La forza elettromagnetica agente sulla piastra sarà sempre:

$$\vec{F}_m = l\vec{i} \times \vec{B} = l\vec{i} \times (\vec{B}_x + \vec{B}_y) = \pm \frac{V_0 l s B_x}{\rho} \hat{z}$$

Dato che per ogni angolo  $\theta$  tale la forza elettromagnetica deve opporsi alla forza peso  $\vec{F}_p = -mg\hat{z}$ , allora:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_m = 0$$

Quindi:

$$\begin{cases} \vec{F}_m = \frac{V_0 l s B_x}{\rho} \hat{z} \\ \frac{V_0 l s B_x}{\rho} = mg \end{cases}$$

Da cui:

$$B_x = \frac{\rho m g}{V_0 l s} = 0.15 \text{ T}$$

$$B_y = \sqrt{B_0^2 - B_x^2} = 0.14 \text{ T}$$

Considerando i due versi che possono assumere  $\vec{i}$  e  $\vec{B}_y$ , allora abbiamo i seguenti casi:

- se  $\vec{i} = i\hat{y}$ , allora  $\vec{B} = -B_x\hat{x} \pm B_y\hat{y}$
- se  $\vec{i} = -i\hat{y}$ , allora  $\vec{B} = B_x\hat{x} \pm B_y\hat{y}$

## 5 Gomma [70 pt.]

Innanzitutto, si osservi che l'espansione del tubo di gomma, interessando esclusivamente la sua circonferenza, è analoga all'allungamento del parallelepipedo che possiede lunghezza pari a quella di suddetta circonferenza. Possiamo dunque assumere  $k$  come costante elastica del tubo. Si studia ora il

sistema in condizione di rottura, per ricavare la pressione del gas necessaria a strappare la gomma del tubo. In figura 1, viene rappresentato il tubo sezionato lungo un qualsiasi piano longitudinale e contenente il suo asse di simmetria.

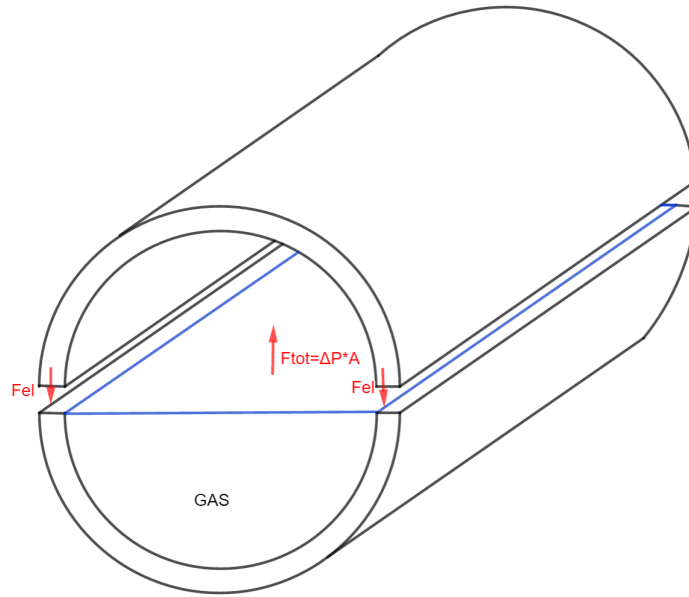


Figura 1: Si evidenzia la forza che il semicilindro in basso esercita su quello in alto

Affinché il tubo si rompa, oltre a quella determinata dalla pressione atmosferica, la forza esercitata dal gas deve superare quella che ciascun semicilindro esercita sull'altro. Quest'ultima è nota e, come visibile in figura, è pari a:

$$F_{max} = 2 \cdot F_{el} = 2 \cdot k(\nu - 1) \cdot 2\pi R = 1.3 \times 10^5 \text{ N} \quad (1)$$

E' possibile legare tale valore all'aumento di pressione osservando che il gas contenuto in un semicilindro cavo esercita tale forza sull'altro semicilindro, e che quest'ultima è in ogni punto perpendicolare al piano di sezione. Si ha pertanto:

$$F_{max} = \Delta P \cdot A \Rightarrow \Delta P = \frac{F_{max}}{A} = \frac{F_{max}}{2\nu R \cdot L} = 1.1 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (2)$$

Si avrà inoltre che la pressione totale è:

$$P_{max} = P_{atm} + \Delta P = 2.1 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (3)$$

Ottenuta la pressione di rottura, e sfruttando il fatto che la trasformazione è quasistatica, è possibile calcolare la variazione di energia interna del gas. Tenendo conto che quest'ultimo è biatomico:

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot (T_f - T_i) = \frac{5}{2} \cdot (P_{max} V_{max} - P_{atm} V_{in}) = 3.9 \times 10^5 \text{ J} \quad (4)$$

Infine, per il primo principio della termodinamica vale:

$$\Delta U = Q - L \Rightarrow Q = \Delta U + L \quad (5)$$

Osservando che, istante per istante,  $P_{tot} = P_{el} + P_{atm}$ , dove con  $P_{el}$  si indica la pressione necessaria a bilanciare la forza elastica, è possibile calcolare il lavoro sommando quello a pressione costante, compiuto sull'atmosfera, alla variazione di energia potenziale elastica immagazzinata nel tubo.

$$L = p_{atm} \cdot (V_{max} - V_{in}) + \frac{1}{2} k (2\pi(\nu - 1)R)^2 = 5.5 \times 10^4 \text{ J} \quad (6)$$

In ultimo:

$$Q = \Delta U + L = 4.4 \times 10^5 \text{ J} \quad (7)$$

## 6 Oscillatore con massa variabile [110 pt.]

1. L'equazione della dinamica si scrive:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (8)$$

con  $\omega^2 = \frac{k}{m_0}$  (indicando d'ora in avanti con  $m_0 = n\mu$  la massa totale del contenitore prima che si effettui il foro).

Si verifica che funzioni del tipo  $x = A \cos(\omega t + \phi)$  sono tutte e sole le soluzioni. Imponendo che la velocità iniziale sia nulla e lo spostamento iniziale dalla posizione di equilibrio sia  $\Delta l$  si ricavano le costanti  $A$  e  $\phi$  ottenendo la legge oraria richiesta:

$$x = \Delta l \cos \omega t \quad (9)$$

2. Dalla Eq. (9), ricordando che la velocità è data dalla derivata dello spostamento, l'energia cinetica  $K(t)$  si può scrivere:

$$K(t) = \frac{m_0 \omega^2 \Delta l^2}{2} \sin^2 \omega t \quad (10)$$

L'energia cinetica media  $\langle K(t) \rangle$  su un periodo  $\tau$  è:

$$\langle K(t) \rangle = \frac{m_0 \omega^2 \Delta l^2}{2} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sin^2 \omega t \, dt = \frac{m_0 \omega^2 \Delta l^2}{4} \quad (11)$$

Ricordando che il valor medio su un periodo di  $\sin^2 \omega t$  è  $\frac{1}{2}$ . Essendo l'energia meccanica totale  $E_0$  dell'oscillatore prima che si effettui il foro costante, calcolandola per esempio nell'istante iniziale del moto si ha

$$E_0 = \frac{m_0 \omega^2 \Delta l^2}{2} \quad (12)$$

si ricava che

$$\langle K(t) \rangle = \frac{E_0}{2} \quad (13)$$

Alternativamente, allo stesso risultato si sarebbe potuto immediatamente arrivare applicando il teorema del viriale, trattandosi di un moto periodico con potenziale omogeneo di secondo grado nella coordinata  $x$ .

3. Applicando il teorema di Bernoulli sotto l'ipotesi che le dimensioni del foro siano molto minori di quelle del contenitore (in modo simile a quanto si fa per ricavare la legge di Torricelli), essendo  $P$  la pressione del gas nel contenitore e  $v$  la velocità delle molecole quando queste escono dal contenitore si ottiene:

$$P = \frac{m(t)}{2V} v^2 \quad (14)$$

Ora per la legge dei gas perfetti  $P = \frac{m(t)RT}{\mu V}$  e, dall'equazione di continuità  $\frac{dm(t)}{dt} = -vA \frac{m(t)}{V}$ .

Si ricava dunque, combinando questi risultati:

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\frac{A}{V} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} m(t) \quad (15)$$

Integrando e ponendo  $m(0) = m_0$  come convenuto prima, si ha l'equazione richiesta:

$$m(t) = m_0 \exp \left( -\frac{A}{V} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} t \right) \quad (16)$$

Alternativamente questo punto si sarebbe potuto risolvere con considerazioni di teoria cinetica, per esempio integrando la distribuzione di Maxwell per trovare il numero di atomi che lasciano il contenitore per unità di tempo, ottenendo comunque equazioni differenti dalla Eq. (16) al massimo per qualche fattore numerico all'esponente.

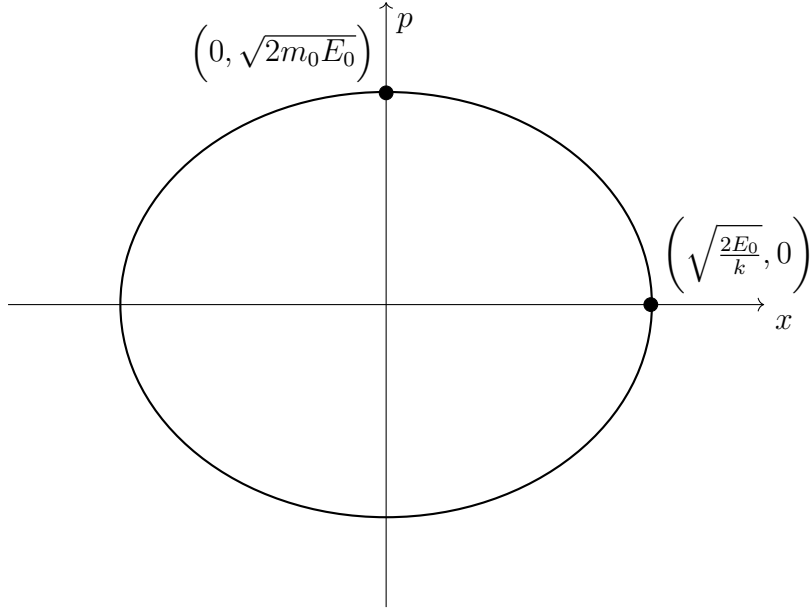


Figura 2: La traiettoria dell'oscillatore nello spazio delle fasi prima che venga effettuato il foro. Il verso di percorrenza non è specificabile dai dati del problema, ma sarebbe orario nel caso in cui  $\Delta l$  fosse positivo

4. L'energia meccanica  $E_0$  dell'oscillatore è data da

$$E_0 = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{kx^2}{2} \quad (17)$$

dove  $p$  è la quantità di moto del contenitore lungo l'asse del moto. Da cui la traiettoria del moto sul piano  $x-p$  (spazio delle fasi) prima che venga effettuato il foro è l'ellisse in Fig. 2.

5. Detta  $\Delta E$  la variazione di energia meccanica in un periodo  $\tau(t)$  dovuta alla fuoriuscita di una quantità  $\Delta m$  di gas, si può stimare che sia:

$$\Delta E = \frac{\Delta m \langle \dot{x}^2 \rangle}{2} \quad (18)$$

E dunque, approssimando  $\Delta E \approx \frac{dE(t)}{dt} \tau(t)$  e  $\Delta m \approx \frac{dm(t)}{dt} \tau(t)$ , e scrivendo inoltre  $\langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{2\langle K \rangle}{m(t)}$  si trova:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{dm(t)}{dt} \frac{\langle K(t) \rangle}{m(t)} \quad (19)$$

Ora se la variazione della massa è abbastanza lenta, ad ogni istante con buona approssimazione il moto del contenitore può considerarsi

armonico, per cui vale in particolare il risultato del punto 2. Sostituendo dunque  $2E(t) = \langle K(t) \rangle$  in Eq. (19) si ottiene

$$\frac{dE}{E(t)} = \frac{1}{2} \frac{dm}{m(t)} \quad (20)$$

Integrando si trova che la quantità  $\frac{E(t)}{\sqrt{m(t)}}$  può considerarsi costante nella approssimazione fatta. Dunque in particolare il rapporto richiesto tra l'energia meccanica quando la massa sarà dimezzata e l'energia meccanica iniziale vale  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  e ricordando che l'energia meccanica è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di oscillazione, il rapporto tra le ampiezze corrispondenti sarà  $2^{-\frac{1}{4}}$ .

Per chi fosse interessato, un modo (ovviamente non richiesto, più complicato ma abbastanza indiscutibile) per verificare il risultato è integrare la nuova equazione del moto:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m(t)}x = 0 \quad (21)$$

tenendo dunque in considerazione la massa variabile. Con la  $m(t)$  data da Eq. (16) la Eq. (21) non è però affatto banale da risolvere, e anzi è necessario ricorrere a funzioni particolari non elementari. Si può però provare per esempio a risolverla con programmi di computer algebra e verificare che nel limite in cui l'esponente della Eq. (16) tende a zero (variazione lenta della massa) il rapporto tra le due energie meccaniche coincide con quello trovato sopra.

6. Per le considerazioni del punto precedente, possiamo con buona approssimazione considerare che il moto del contenitore continui ad essere descritto da un'ellisse nello spazio delle fasi. Tuttavia, considerare costante la quantità trovata al punto precedente  $\frac{E(t)}{\sqrt{m(t)}}$  implica che l'ellisse subirà una dilatazione al variare della massa. In particolare quando la massa sarà dimezzata, dalla analogia dell'Eq. (17) valida in questo istante e considerando il valore dei rapporti trovati al punto precedente, si trova che il nuovo semiasse lungo l'asse  $x$  varrà  $\sqrt{\frac{\sqrt{2}E_0}{k}}$ , mentre quello lungo l'asse  $p$  varrà  $\sqrt{\frac{m_0E_0}{\sqrt{2}}}$ .

## 7 Blocco traghettato [100 pt.]

Definisco  $\alpha = \frac{m}{M}$ . In tutte le condizioni non era richiesto di analizzare i casi di uguaglianza in quanto non sono troppo sensati nell'approssimazione di blocco puntiforme.

1. Per prima cosa troviamo la relazione tra tutti i dati del problema (incluso  $v_0$ ) che garantisce che il blocchetto non cada dalla slitta prima dell'urto. Quando il blocchetto è sulla slitta e la velocità relativa è non nulla, la forza d'attrito ha modulo costante  $\mu mg$ . La velocità del blocchetto in funzione del tempo sarà dunque:

$$v(t) = v_0 - \mu gt \quad (22)$$

Per quanto riguarda la slitta, la velocità in funzione del tempo è:

$$V(t) = \mu \alpha gt \quad (23)$$

La velocità relativa sarà quindi:

$$v_r(t) = v(t) - V(t) = v_0 - \mu gt(1 + \alpha) \quad (24)$$

Il tempo necessario perché essa si annulli è:

$$t_0 = \frac{v_0}{\mu g(1 + \alpha)} \quad (25)$$

Affinché il blocchetto si fermi sulla slitta, basta imporre che lo spazio percorso dal blocchetto sulla slitta prima che  $v_r = 0$  sia minore di  $b$ :

$$b > v_0 t_0 - \mu g(1 + \alpha) \frac{t_0^2}{2} = \frac{v_0^2}{\mu g(1 + \alpha)} - \frac{v_0^2}{2\mu g(1 + \alpha)} = \frac{v_0^2}{2\mu g(1 + \alpha)} \quad (26)$$

Che riscritta diventa:

$$v_0^2 < 2\mu gb(1 + \alpha) \quad (27)$$

Questa condizione garantisce solo che il blocchetto non cada dalla slitta e non è valida dopo l'urto.

Troviamo ora la condizione affinché il blocchetto si fermi effettivamente prima dell'urto imponendo che lo spazio percorso dalla slitta (trovato dall'equazione di  $V(t)$ ) sia minore di  $L - b$ :

$$L - b > \mu \alpha g \frac{t_0^2}{2} = \frac{\alpha v_0^2}{2\mu g(1 + \alpha)^2} \quad (28)$$

Si è posto il tempo pari a  $t_0$  in quanto si è visto prima che è il tempo necessario a fermarsi. Per comodità sommo le equazioni (26) e (28):

$$L > \frac{\alpha v_0^2}{2\mu g(1 + \alpha)^2} + \frac{v_0^2}{2\mu g(1 + \alpha)} = \frac{v_0^2(1 + 2\alpha)}{2\mu g(1 + \alpha)^2} \quad (29)$$

Che riscrivo esplicitando la velocità:

$$v_0^2 < \frac{2\mu g L(1 + \alpha)^2}{1 + 2\alpha} \quad (30)$$

Le equazioni (27) e (30) danno un limite superiore alla velocità affinché il blocchetto rispettivamente non cada e si fermi sulla slitta. La richiesta del punto è una condizione sulle caratteristiche del sistema che impedisca al blocchetto di attraversare la scanalatura arrivando ad avere una velocità diversa da quella della slitta appena prima dell'urto. Insomma si vuole che venga violata prima la condizione sulla non caduta (l'equazione (27)) di quella sulla fermata (equazione (30)). Ciò si traduce nella seguente disuguaglianza:

$$2\mu g b(1 + \alpha) < \frac{2\mu g L(1 + \alpha)^2}{1 + 2\alpha} \quad (31)$$

Che equivale a:

$$\frac{b}{L} < \frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha} \quad (32)$$

- Il punto è praticamente già stato risolto in quello precedente: se la condizione del punto 1 è rispettata allora il blocchetto cade se la velocità è sufficientemente alta (la condizione è che venga violata l'equazione (27)):

$$v_0 > \sqrt{2\mu g b(1 + \alpha)} \quad (33)$$

- Ci sono due condizioni: se  $v_0$  è troppo bassa l'attrito impedisce che il blocco arrivi alla fine della slitta, mentre se è troppo alta il blocco cade. La condizione sulla velocità troppo alta è la complementare della (33). Mentre quella sulla velocità troppo bassa si ottiene dalla conservazione dell'energia. Quando la velocità relativa si annulla l'energia cinetica del sistema è:

$$\frac{(M + m)v_f^2}{2} = \frac{M + m}{2} \left( \frac{v_0 \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 \quad (34)$$

Durante l'urto si perde l'energia cinetica della slitta e rimane solo quella del blocchetto. Questa energia deve essere sufficiente a giungere dall'altra parte, cioè deve essere maggiore del lavoro dell'attrito necessario per giungere dall'altra parte:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{v_0 \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 > \mu m g \left( b - \left( v_0 t_0 - \mu g (1 + \alpha) \frac{t_0^2}{2} \right) \right) = \mu m g b - m \frac{2v_0^2 - v_0^2}{2(1 + \alpha)} \quad (35)$$

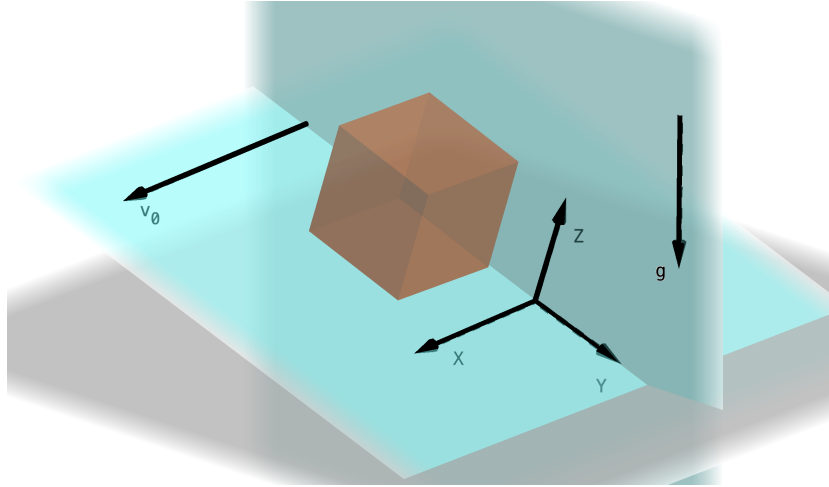


Figura 3: disegno tridimensionale del problema.

Che può essere riscritta come:

$$v_0^2 > \frac{2bg\mu(1+\alpha)^2}{1+\alpha+\alpha^2} \quad (36)$$

La risposta al punto 3 è che valgano contemporaneamente sia l'equazione (36) che la complementare della (33).

## 8 Vassoi della mensa [100 pt.]

Con riferimento alla Fig. 3, introduciamo un sistema di assi cartesiani  $(X, Y, Z)$ , con  $\hat{Z}$  ortogonale al piano inclinato, in modo che

$$\vec{v}_0 = v_0 \hat{X}, \quad \vec{g} = g \sin \alpha \hat{Y} - g \cos \alpha \hat{Z}$$

Definiamo:

- $v_1$ , la componente della velocità del parallelepipedo lungo  $\hat{Y}$ , in modo che la sua velocità totale sia

$$\vec{v} = v_0 \hat{X} + v_1 \hat{Y},$$

il cui modulo è  $v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2}$ ;

- $\vec{N}_1 = N_1 \hat{Z}$ , la reazione vincolare del piano inclinato sul parallelepipedo;

- $\vec{F}_1$ , la forza di attrito esercitata dal piano inclinato sul parallelepipedo, che deve soddisfare

$$\vec{F}_1 = -F_1 \frac{\vec{v}}{v}, \quad \text{con} \quad F_1 = N_1 \mu_1;$$

si noti che queste condizioni tengono conto del fatto che il moto relativo tra parallelepipedo e piano inclinato non è mai nullo, quindi l'attrito è sempre dinamico e dunque diretto in verso opposto alla velocità.

- $\vec{N}_2 = N_2 \hat{X}$ , la reazione vincolare del muro verticale sul parallelepipedo;
- $\vec{F}_2$ , la forza di attrito esercitata dal muro verticale sul parallelepipedo, che deve soddisfare

$$\vec{F}_2 = -F_2 \hat{Y}, \quad \text{con} \quad |F_2| \leq N_2 \mu_2;$$

si noti che in questo caso l'attrito può essere anche statico.

L'equilibrio delle forze lungo  $\hat{Z}$  richiede

$$N_1 = mg \cos \alpha,$$

mentre l'equilibrio delle forze lungo  $\hat{X}$  richiede

$$-F_1 \frac{v_0}{v} + N_2 = 0 \implies N_2 = N_1 \mu_1 \frac{v_0}{v} = \mu_1 \frac{v_0}{v} mg \cos \alpha.$$

L'unica direzione lungo la quale può non esserci, in principio, equilibrio è  $\hat{Y}$ .

1. Se il parallelepipedo è inizialmente fermo rispetto al muro (il che, con le notazioni introdotte, vuol dire  $v_1 = 0$  e quindi  $v = v_0$ ), allora l'equilibrio lungo  $\hat{Y}$  è mantenuto se

$$-F_2 + mg \sin \alpha = 0.$$

Ricordando che  $|F_2| \leq N_2 \mu_2 = \mu_1 \mu_2 mg \cos \alpha$ , troviamo che l'equilibrio è possibile se e solo se

$$\boxed{\tan \alpha \leq \mu_1 \mu_2.}$$

2. Se il parallelepipedo è in moto lungo  $\hat{Y}$ , allora l'attrito col muro è dinamico e la componente lungo  $\hat{Y}$  della risultante delle forze vale

$$\begin{aligned} -F_1 \frac{v_1}{v} - F_2 + mg \sin \alpha &= \\ &= -\mu_1 \frac{v_1}{\sqrt{v_0^2 + v_1^2}} mg \cos \alpha - \mu_1 \mu_2 \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + v_1^2}} mg \cos \alpha + mg \sin \alpha, \end{aligned}$$

il cui limite per  $v_1 \rightarrow +\infty$  è

$$-\mu_1 mg \cos \alpha + mg \sin \alpha.$$

Il parallelepipedo può continuare ad accelerare indefinitamente solo se questo limite è positivo<sup>1</sup>, quindi solo se

$$\boxed{\tan \alpha > \mu_1.}$$

3. Il raggiungimento di una velocità limite costante  $v_1^* \neq 0$  è possibile solo se esiste un valore  $v_1^* \neq 0$  tale che l'espressione

$$f(v_1) = -\mu_1 \frac{v_1}{\sqrt{v_0^2 + v_1^2}} mg \cos \alpha - \mu_1 \mu_2 \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + v_1^2}} mg \cos \alpha + mg \sin \alpha$$

si annulli per  $v_1 = v_1^*$  (in modo da garantire che  $v_1^*$  rimanga effettivamente costante) e che, per  $\Delta v_1$  sufficientemente piccoli, si abbia  $f(v_1^* - \Delta v_1) > 0$  e  $f(v_1^* + \Delta v_1) < 0$  (in modo da garantire la stabilità). Questa seconda richiesta può essere sintetizzata come

$$\left. \frac{df}{dv_1} \right|_{v_1=v_1^*} < 0,$$

o, equivalentemente: “ $f$  è decrescente in  $v_1 = v_1^*$ ”. Calcoliamo quindi la derivata:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dv_1} &= -\mu_1 mg \cos \alpha \frac{\sqrt{v_0^2 + v_1^2} - v_1 \frac{v_1}{\sqrt{v_0^2 + v_1^2}}}{v_0^2 + v_1^2} + \mu_1 \mu_2 mg \cos \alpha \frac{v_0 v_1}{(v_0^2 + v_1^2)^{3/2}} \\ &= \mu_1 mg \cos \alpha \frac{-v_0^2 + \mu_2 v_0 v_1}{(v_0^2 + v_1^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque che:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{df}{dv_1} < 0 & (f \text{ è decrescente}) \quad \text{per } 0 \leq v_1 < v_0/\mu_2; \\ \frac{df}{dv_1} = 0 & (f \text{ è in un minimo}) \quad \text{per } v_1 = v_0/\mu_2; \\ \frac{df}{dv_1} > 0 & (f \text{ è crescente}) \quad \text{per } v_1 > v_0/\mu_2. \end{array} \right. \quad (37)$$

<sup>1</sup>Se il limite è nullo, bisogna guardare l'ordine successivo dello sviluppo in  $v_0/v_1$ , che vale  $-\mu_1 \mu_2 \frac{v_0}{v_1} mg \sin \alpha$ , che è sempre negativo. Questo vuol dire che se la forza tende ad annullarsi all'aumentare di  $v_1$ , non può farlo restando positiva, perciò questo caso va escluso dalla soluzione cercata.

Per garantire l'esistenza di  $v_1^* \neq 0$  che annulli  $f$  nella zona in cui è decrescente, è necessario e sufficiente imporre che:

$$f(0) = -\mu_1\mu_2 mg \cos \alpha + mg \sin \alpha > 0 \implies \tan \alpha > \mu_1\mu_2$$

e

$$f\left(\frac{v_0}{\mu_2}\right) = -\mu_1\sqrt{1+\mu_2^2} mg \cos \alpha + mg \sin \alpha < 0 \implies \tan \alpha < \mu_1\sqrt{1+\mu_2^2}.$$

Quindi, in conclusione,

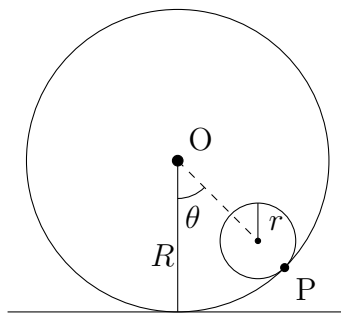
$$\boxed{\mu_1\mu_2 < \tan \alpha < \mu_1\sqrt{1+\mu_2^2}.}$$

NOTA. Si può risolvere il problema anche senza il calcolo della derivata, nel seguente modo: riscrivendo  $f$  come

$$f(v_1) = -\mu_1 mg \cos \alpha \frac{v_1 + \mu_2 v_0}{\sqrt{v_0^2 + v_1^2}} + mg \sin \alpha,$$

grazie alla disuguaglianza tra la media aritmetica e quadratica di  $v_1$  (con peso 1) e  $v_0/\mu_2$  (con peso  $\mu_2^2$ ), sappiamo che l'unico punto stazionario di  $f$  è  $f(v_0/\mu_2)$ , e che è un minimo, ottenendo quindi i tre casi in Eq. (37). La conclusione del problema è poi identica.

## 9 Oscillazioni dentro un tubo [100 pt.]



1. La condizione sul punto di contatto tra cilindro e tubo e sul parallelismo tra i loro assi implica che in ogni istante l'asse del tubo cilindrico è l'asse di rotazione del cilindro che vi è contenuto. Il sistema descritto è dunque un pendolo fisico; si prenda per semplicità come polo la proiezione del baricentro del cilindro sull'asse del tubo  $O$ . Rispetto al polo scelto, non

essendoci attrito tra la superficie del tubo e quella del cilindro, l'unica forza applicata al sistema oscillante che compie momento rispetto al polo è la forza peso del cilindro. Sia  $\theta$  l'angolo che il vettore  $\underline{OG}$ , dove con  $G$  si indica il baricentro del cilindro, considerato per convenzione antiorario positivo, forma con la verticale. Si può quindi scrivere la seconda equazione cardinale della meccanica per il sistema rispetto al polo  $O$ , ovvero che l'accelerazione angolare lungo l'asse del tubo per il momento d'inerzia del sistema rispetto a quell'asse è pari alla somma dei momenti delle forze rispetto all'asse

$$I_o \ddot{\theta} = \sum \tau_i = -mg(R - r) \sin \theta$$

con  $I_o$  momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse del tubo e  $m$  massa del cilindro. Il teorema degli assi paralleli enuncia che il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse non passante per il suo baricentro è pari a quello rispetto ad un asse parallelo passante per il baricentro sommato al momento d'inerzia rispetto all'asse che avrebbe il corpo se la sua massa fosse interamente concentrata nel baricentro. In formule

$$I_o = I_G + m(R - r)^2$$

Essendo il corpo un cilindro omogeneo pieno, il suo momento d'inerzia rispetto al suo asse di simmetria è  $I_G = \frac{1}{2}mr^2$ , da cui si ottiene

$$I_o = m \left( \frac{r^2}{2} + (R - r)^2 \right)$$

sostituendolo nella seconda equazione cardinale della meccanica, la massa si semplifica e si ottiene

$$\left( \frac{r^2}{2} + (R - r)^2 \right) \ddot{\theta} = -g(R - r) \sin \theta$$

Per piccole oscillazioni si può approssimare il seno al primo ordine, come si fa per ottenere la soluzione approssimata del pendolo semplice:  $\sin(\theta) \sim \theta$ . Sostituendo si ottiene

$$\left( \frac{r^2}{2} + (R - r)^2 \right) \ddot{\theta} = -g(R - r)\theta$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico (come un sistema massa molla) che oscilla con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{g(R-r)}{\left(\frac{r^2}{2} + (R-r)^2\right)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{r^2}{2} + (R-r)^2\right)}{g(R-r)}}$$

2. Il problema è analogo a quello del punto precedente, con la differenza che al posto del vincolo sull'asse di rotazione sul cilindro adesso c'è attrito che vincola il cilindro a rotolare senza strisciare sulla superficie interna del tubo. Per semplicità si scelga come polo per i momenti un polo mobile, in particolare il punto  $P$  di contatto tra il cilindro ed il tubo. La seconda equazione cardinale della meccanica rispetto a questo polo si scrive nella forma usuale

$$I_P \ddot{\phi} = \sum \tau_i$$

con  $\dot{\phi}$  velocità angolare istantanea del cilindro e  $I_P$  momento d'inerzia del cilindro rispetto al punto di contatto. Questa equazione non necessita dei termini correttivi dovuti alla mobilità del polo in quanto la velocità del polo è in ogni istante parallela a quella del baricentro del cilindro (in particolare sono tutte tangenziali rispetto alla guida). Rispetto al polo scelto, essendo le uniche forze esterne applicate al cilindro il suo peso, la normale alla superficie e la forza di attrito ed essendo queste ultime applicate nel polo, si ha che l'unica forza che compie momento è la forza peso del cilindro, da cui, mantenendo la convenzione antiorario positivo, si ha

$$I_P \ddot{\phi} = mgr \sin \theta$$

Imponiamo ora la condizione di puro rotolamento, ovvero che il punto del cilindro che in un istante è a contatto con il tubo sia istantaneamente fermo. Tale condizione si traduce nell'imporre che sia nulla la somma vettoriale della velocità del baricentro del cilindro con quella del suo punto di contatto con il tubo rispetto al baricentro. In formule

$$(R-r)\dot{\theta} + r\dot{\phi} = 0$$

$$(R-r)\ddot{\theta} = -r\ddot{\phi}$$

$$(R-r)\ddot{\theta} = -r\ddot{\phi}$$

dove l'ultima equazione si è ottenuta derivando la prima. Sostituendo si ottiene quindi

$$I_P \frac{R-r}{r} \ddot{\theta} = -mgr \sin \theta$$

Applicando come nel punto precedente il teorema degli assi paralleli si ha  $I_P = m(\frac{r^2}{2} + r^2) = \frac{3}{2}mr^2$  Sostituendo si ottiene:

$$\ddot{\theta} = -g \frac{2}{3(R-r)} \sin \theta$$

da cui con lo stesso sviluppo al primo ordine effettuato prima si ottiene che la pulsazione delle piccole oscillazioni è

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

## 10 Tungsteno vs LED [100 pt.]

1. Si tratta di uno standard circuito elettrico in corrente continua. Possiamo ottenere l'intensità di corrente usando le leggi di Ohm.

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220 \text{ V}}{500 \Omega} = 0.44 \text{ A}$$

2. La potenza emessa come luce seguirà la legge di Stefan-Boltzmann

$$P = A\epsilon\sigma T^4$$

dove  $\epsilon = 1$  in quanto stiamo assumendo che il filamento si comporti da corpo nero perfetto. Nello stato stazionario, potremo uguagliare la potenza irradiata alla potenza dissipata sotto forma di luce, ovvero

$$P_{\text{luce}} = 80\% \frac{V^2}{R} = A\sigma T^4$$

che, risolta per  $T$ , porta facilmente a

$$T = \sqrt[4]{80\% \frac{V^2}{\sigma AR}} = 2.42 \times 10^3 \text{ K.}$$

È utile osservare che, con questi dati numerici, è irrilevante considerare o meno il fatto che il tungsteno si trovi in una stanza a temperatura ambiente  $T = 293 \text{ K}$ , in quanto la potenza irradiata dalla stanza, che andrebbe ad aggiungersi a quella fornita per effetto joule, è di un fattore  $10^4$  inferiore rispetto all'altro contributo, proprio perché nella legge di Stefan-Boltzmann la temperatura compare con una quarta potenza.

3. Si tratta di una semplice applicazione della legge di Wien. Lo spettro di corpo nero ha un massimo nel punto

$$\lambda_{\text{picco}} = \frac{b}{T} \quad b = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m K.}$$

Alternativamente, è possibile prendere la legge di corpo nero e trovarne il massimo, imponendo che la derivata sia uguale a zero, ritrovando questo risultato. Se vogliamo che la lunghezza d'onda del picco sia quella richiesta, è necessario utilizzare la temperatura

$$T = \frac{b}{\lambda} = 5.27 \times 10^3 \text{ K}$$

4. Il fotone avrà una energia pari al salto di energia potenziale fatto dal portatore di carica. In formule,

$$h\nu = e\Delta V_{\text{jun}}$$

dove  $h$  è la costante di Planck. Possiamo scrivere la stessa equazione utilizzando la lunghezza d'onda al posto della frequenza  $\nu$ , ricordando che  $\lambda\nu = c$ .

$$\lambda = \frac{hc}{e\Delta V_{\text{jun}}} = \frac{2\pi \cdot 197 \text{ eV} \times \text{nm}}{e\Delta V_{\text{jun}}} = 564 \text{ nm}$$

5. Supponiamo innanzitutto che il nostro parallelepipedo sia un cubo. Mostriamo fra poco che il risultato non dipende dalle proporzioni tra i lati. Quando la luce incontra una interfaccia, possono accadere le seguenti cose:

- La luce viene completamente riflessa all'indietro. Questo accade se l'angolo di incidenza è maggiore dell'angolo limite  $\theta_{\text{crit}} = \sin^{-1}(\frac{1}{n})$ .
- La luce viene parzialmente trasmessa e parzialmente riflessa seguendo le formule di Fresnel. Tuttavia, possiamo ignorare l'effetto di parziale riflessione, in quanto i raggi di luce che vengono parzialmente riflessi, continueranno ad essere nel regime di parziale riflessione (la giustificazione è in Fig. 5, la stessa che mostra perché il ragionamento vale anche per parallelepipedi rettangoli generici), subendo ad ogni riflessione una attenuazione esponenziale.

Guardiamo il caso della riflessione totale interna. Finchè siamo su un piano, è molto semplice immaginare quello che succede, riportato in Fig. 4. I raggi che partono dal centro e riescono ad oltrepassare la superficie, sono quelli che viaggiano nella zona azzurra. L'angolo critico che denota la transizione da trasmissione a riflessione totale è l'angolo  $\theta_{\text{crit}}$  che rispetta

$$n \sin \theta_{\text{crit}} = 1. \quad (38)$$

Sappiamo ora che possiamo dimenticarci dei raggi che avevano direzione nella zona azzurra, in quanto vengono trasmessi fuori dal materiale. È lecito chiedersi se i raggi che subiscono la prima riflessione totale interna verranno riflessi all'infinito oppure se, continuando a rimbalzare, ad un certo punto l'angolo di incidenza sarà tale da permettere di essere trasmessi. Essendo il nostro oggetto un parallelepipedo, l'angolo con cui il raggio incontra la faccia dell'oggetto è sempre  $\theta$  o  $\pi/2 - \theta$ . Questo, almeno nel caso del cubo, ci permette di dire (guardando i dati numerici), che gli unici raggi che escono dal nostro cubo sono effettivamente quelli individuati dai 6 coni uscenti dal centro, di cui 4 sono evidenziati in Fig. 4.

Vediamo intanto come calcolare qual è la frazione di luce uscente, fra poco giustifichiamo il perché questa risposta funzioni anche per il caso in cui abbiamo un parallelepipedo generico e non un cubo. Per andare a calcolare la frazione, possiamo chiarirci le idee andando a intersecare i 6 coni con una sfera con lo stesso centro, evidenziata in rosso sempre in Fig. 4. Dovremo quindi andare a calcolare la superficie di una calotta sferica con apertura angolare  $\theta_{\text{crit}}$ . Supponendo di chiamare  $A(\theta)$  quest'area, la risposta alla domanda del problema sarà

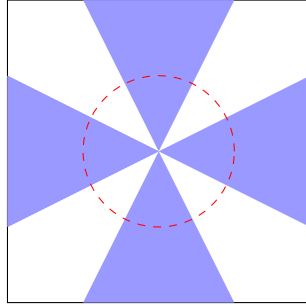


Figura 4: sezione del cubo e riflessione totale interna.

$$r = \frac{6A(\theta)}{4\pi}$$

dove stiamo ovviamente supponendo  $8\theta_{\text{crit}} < 2\pi$ , ovvero che i coni non si sovrappongano. I dati numerici forniti per l'indice di rifrazione rispettano questa disuguaglianza. La superficie di questo oggetto può essere calcolata con il seguente integrale oppure trovata su un formulario:

$$\begin{aligned} A(\theta_{\text{crit}}) &= \int_A d\Omega = \int_A \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{\theta_{\text{crit}}} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi \int_0^{\theta_{\text{crit}}} \sin \theta \, d\theta \\ &= 2\pi [-\cos \theta]_0^{\theta_{\text{crit}}} = 2\pi(1 - \cos \theta_{\text{crit}}) = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$r = 3 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) = 0.097 \approx 10\%.$$

Vorrei far notare una serie di casi limite. Se  $n \rightarrow \infty$ , possiamo immaginare i vari coni come sottilissimi, che portano ad un'area che tende a zero, e in effetti  $r \rightarrow 0$ . Un altro limite che potremmo essere tentati di fare è quello per  $n \rightarrow 1$ , che corrisponderebbe al caso in cui tutta la luce va verso l'esterno. In questo caso,  $r = 3$ , che è evidentemente un problema in quanto lo abbiamo definito come rapporto minore di 1.

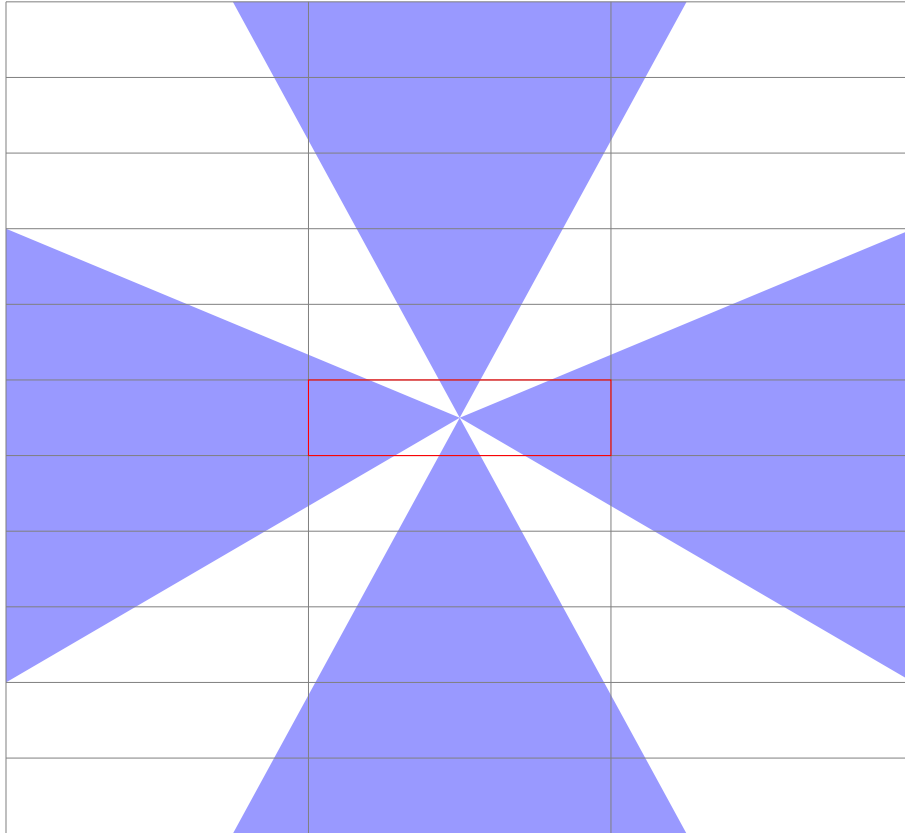


Figura 5: sezione del parallelepipedo generico con le riflessioni.

Il punto è che non possiamo applicare questa formula quando  $n = 1$ , perché i coni si intersecano. Il caso limite di applicabilità è quando  $\theta_{\text{crit}} = \pi/4$ . In tal caso,  $n^2 = 2$  e quindi  $r = 3(1 - 1/\sqrt{2})$ . Questo numero è minore di 1, ma non è un problema, perché immaginando la figura, i vari coni non riescono a coprire la superficie della sfera.

Vediamo ora con un disegno come si può mostrare che il nostro ragionamento funziona anche con parallelepipedi generici, come mostrato in Fig. 5. Il nostro parallelepipedo è rappresentato in rosso. Ogni riflessione si può pensare specchiando la figura originale, ed è per questo che abbiamo come risultato una griglia. Credo che la figura sia più esplicativa di mille parole.

6. I raggi che vanno verso l'alto saranno ortogonali alla superficie, e quindi usciranno indipendentemente dall'indice di rifrazione<sup>2</sup>. I raggi che partono verso il basso invece, saranno riflessi o trasmessi in funzione

---

<sup>2</sup>Anche in questo caso, utilizzare le formule di Fresnel non era necessario, si tratta di

dell'angolo di incidenza. Quelli che vengono riflessi, vengono specchiati una singola volta ed usciranno poi dalla parte emisferica, mentre quelli che vengono subito trasmessi, vengono per l'appunto subito trasmessi. In totale, non ci sono quindi raggi che rimangono nella semisfera all'infinito. Possiamo calcolare la frazione di raggi che vanno verso l'alto usando sostanzialmente le stesse formule del punto precedente, considerando che dobbiamo sempre calcolare l'area di un cono.

$$r = 1 - \frac{A(\theta_{\text{crit}})}{4\pi} = 1 - \frac{2\pi}{4\pi} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = 0.98.$$

7. La luce che viene prodotta nel led a parallelepipedo e non viene trasmessa, contribuisce a scaldare il parallelepipedo. Nello stato stazionario, questa luce verrà emessa per irraggiamento. Sappiamo che la potenza data al LED a forma di parallelepipedo verrà distribuita in due contributi, un pezzo di potenza *utile*, che chiameremo  $fP_{\text{LED}}$ , e un pezzo di potenza *inutile*, di luce emessa per irraggiamento,  $(1-f)P_{\text{LED}}$ , dove  $f$  è stato calcolato sopra e vale circa 0.097. Potremo scrivere quindi i seguenti bilanci

$$\begin{aligned} P_{\text{LED}}^{\text{utile}} &= P_{\text{W}}^{\text{utile}} \\ \Rightarrow fP_{\text{LED}} &= P_{\text{W}}^{\text{utile}} \\ \Rightarrow \frac{f}{1-f}(1-f)P_{\text{LED}} &= P_{\text{W}}^{\text{utile}} \\ \Rightarrow \frac{f}{1-f}\sigma\epsilon AT_{\text{LED}}^4 &= \sigma\epsilon AT_{\text{W}}^4 \\ \Rightarrow T_{\text{LED}} &= \sqrt[4]{\frac{1-f}{f}}T_{\text{W}} > T_{\text{W}}, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è vera perché  $f < 1/2$ . Notare che questo risultato è privo di senso fisico. Se la temperatura del LED è maggiore, il LED emetterà più luce del tungsteno per irraggiamento, e emetterà più luce per irraggiamento che con il metodo per cui è pensato. Questo piccolo calcolo doveva suggerire quanto sia importante la forma del LED per un funzionamento efficace.

---

una modellizzazione migliore, ma che in questo caso portava ad una stima diversa del risultato che rientra nelle cifre significative dettate dall'indice di rifrazione.

8. In questo circuito, data la schematizzazione del LED che abbiamo fatto, possiamo considerare un LED come un componente che ha ai suoi capi una caduta di potenziale  $\Delta V_{\text{LED}}$  fissa e indipendente dalla corrente che ci passa attraverso<sup>3</sup>. Con i dati del testo, sappiamo che  $\Delta V_{\text{LED}}$  è il 20% in più rispetto alla caduta di potenziale della giunzione, cioè  $\Delta V_{\text{LED}} = 6/5 \Delta V_{\text{jun}}$ . Inoltre, possiamo di nuovo andare a calcolare la caduta di tensione della giunzione legandola alla lunghezza d'onda del fotone

$$\Delta V_{\text{LED}} = \frac{6}{5} \Delta V_{\text{jun}} = \frac{6}{5} \frac{hc}{e\lambda} = 2.4 \text{ V}.$$

Di conseguenza, la caduta di potenziale ai capi della resistenza varrà  $\Delta V_R = V_0 - \Delta V_{\text{LED}}$ . Usando la legge di Ohm,

$$R = \frac{V_0 - \Delta V_{\text{LED}}}{I} = 330 \Omega.$$

9. La potenza luminosa erogata dal led sarà pari a  $P_{\text{LED}} = I \cdot \Delta V_{\text{jun}}$ . La potenza totale erogata dal generatore di tensione, sarà invece  $P_{\text{gen}} = V_0 I$ . La potenza dissipata dal circuito sarà la differenza fra potenza “utile” e potenza totale, per conservazione dell’energia, quindi  $P_{\text{diss}} = P_{\text{gen}} - P_{\text{LED}}$ . Il rapporto fra questi due è semplicemente

$$\eta = \frac{P_{\text{LED}}}{P_{\text{gen}} - P_{\text{LED}}} = \frac{\Delta V_{\text{jun}}}{V_0 - \Delta V_{\text{jun}}} = \frac{1}{\frac{eV_0\lambda}{hc} - 1} = 0.285.$$

Abbiamo dato quasi la totalità del punteggio a chi ha utilizzato la definizione di efficienza  $\eta = \frac{P_{\text{LED}}}{P_{\text{gen}}}$ , in quanto è una interpretazione non corretta del testo ma comunque estremamente ragionevole e vicina all’intuito, e non si tratta di un errore di fisica ma di una semplice incomprensione del testo.

---

<sup>3</sup>Questa assunzione è ragionevole nelle condizioni indicate dal testo del problema. Il LED è un componente asimmetrico, con una curva caratteristica tensione-corrente descritta dall’equazione di Shockley. Se il diodo è polarizzato direttamente, piccole variazioni di tensione ai suoi capi corrispondono a grandi variazioni di corrente che ci passano attraverso. Per questo, possiamo considerare quasi-costante la caduta di tensione ai suoi capi.

## 11 Due proiettili [100 pt.]

Notiamo che, date le condizioni iniziali e finali del problema, gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  sono compresi nell'intervallo  $[0, 90^\circ]$ . Infatti, se fossero stati maggiori di  $90^\circ$ , avremmo avuto almeno una delle due coordinate dei punti  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$  negativa, mentre i punti assegnati hanno tutti coordinate positive.

Richiamando la teoria sul moto parabolico, possiamo scrivere le equazioni del moto al tempo  $t$  per i due corpi  $A$  e  $B$  quando raggiungono le rispettive posizioni  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$ :

$$x_A = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad (39)$$

$$y_A = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (40)$$

$$x_B = v_0 \cos \beta \cdot t \quad (41)$$

$$y_B = v_0 \sin \beta t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (42)$$

Rimaneggiamo le equazioni 39 e 40 del corpo  $A$  come segue:

$$\cos \alpha = \frac{x_A}{v_0 t} \quad (43)$$

$$\sin \alpha = \frac{y_A - \frac{1}{2}gt^2}{v_0 t} \quad (44)$$

Ricordando che  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  possiamo scrivere, mettendo insieme le uguaglianze 43 e 44,

$$\left(\frac{x_A}{v_0 t}\right)^2 + \left(\frac{y_A - \frac{1}{2}gt^2}{v_0 t}\right)^2 = 1 \quad (45)$$

da cui, riscrivendo l'equazione 45 in maniera più significativa

$$x_A^2 + \left(y_A - \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = v_0^2 t^2 \quad (46)$$

Rifacciamo ora le stesse manipolazioni appena mostrate dall'equazione 43 all'equazione 45 sul corpo  $B$ , quest'azione si traduce al livello pratico a scambiare la lettera  $A$  con la lettera  $B$  al pedice, ed  $\alpha$  con  $\beta$ . Otteniamo così

$$x_B^2 + \left(y_B - \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = v_0^2 t^2 \quad (47)$$

Pertanto, poiché al secondo membro sono uguali, eguagliamo i primi membri delle equazioni 46 e 47 per ottenere:

$$x_B^2 + \left(y_B - \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = x_A^2 + \left(y_A - \frac{1}{2}gt^2\right)^2 \quad (48)$$

Sviluppando i quadrati di binomi da ambo le parti e riarrangiandole possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 &= (y_B - y_A)gt^2 \\ \Downarrow \\ t^2 &= \frac{x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2}{g(y_B - y_A)} \end{aligned}$$

quindi otteniamo il tempo  $t$  richiesto dal testo:

$$t = \sqrt{\frac{x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2}{g(y_B - y_A)}} = \sqrt{\frac{5 \text{ m}}{g}} \cong 0.714 \text{ s} \quad (49)$$

Unendo il risultato in 49 e in 46 otteniamo

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{t^2} \left( x_B^2 + \left( y_B - \frac{1}{2}gt^2 \right)^2 \right)} \cong 7.83 \text{ m/s} \quad (50)$$

Da questo, usando l'equazione 43 e la corrispettiva per il corpo  $B$ , e ricordando che  $\alpha$  e  $\beta$  sono compresi nell'intervallo  $[0, 90^\circ]$ , si ha

$$\cos \alpha = \frac{x_A}{v_0 t} \cong 0.894 \Rightarrow \alpha = \arccos \left( \frac{x_A}{v_0 t} \right) \cong 26.6^\circ \quad (51)$$

$$\cos \beta = \frac{x_B}{v_0 t} \cong 0.537 \Rightarrow \beta = \arccos \left( \frac{x_B}{v_0 t} \right) \cong 57.5^\circ \quad (52)$$

Queste ultime equazioni risolvono infine il problema, consentendoci di ottenere le quantità fisiche richieste  $t$  (in 49),  $v_0$  (in 50),  $\alpha$  (in 51) e  $\beta$  (in 52).

## 12 Sfera con cavità [90 pt.]

1. Sia  $g(r)$  il modulo campo gravitazionale generato dalla sfera. Il campo dipende solo da  $r$  per motivi di simmetria sferica.

- Ad una distanza  $r < R$  dal centro della sfera, per il Teorema di Gauss per il Campo Gravitazionale è necessario considerare solo la massa  $m(r)$  della porzione di sfera interna alla sfera (concentrica) di raggio  $r$ , ottenendo così che

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}.$$

Conoscendo  $\rho_{\text{Cu}}$  possiamo ricavare  $m(r) = V(r) \cdot \rho_{\text{Cu}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Cu}}$  e sostituirlo nell'equazione precedente, ottenendo

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Cu}}r$$

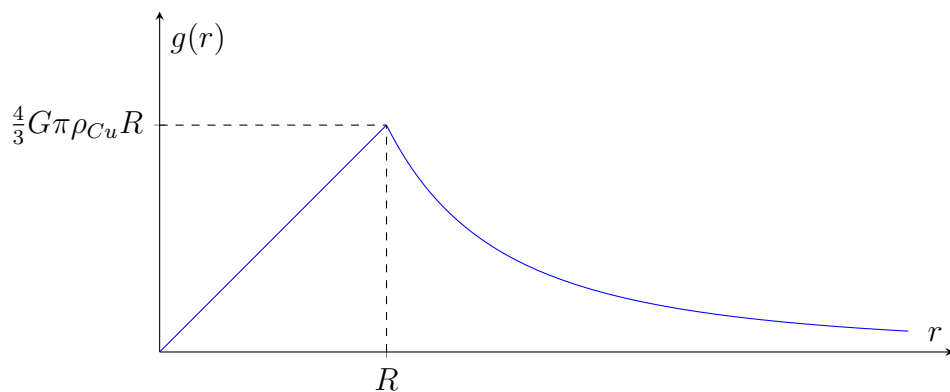
Notiamo che all'interno della sfera il campo cresce linearmente con la distanza dal centro.

- Ad una distanza  $r \geq R$  (sempre per il teorema di Gauss) il campo è lo stesso che si avrebbe nel caso in cui tutta la massa  $M$  della sfera fosse concentrata nel centro di essa, e quindi

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} = \frac{G\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{Cu}}}{r^2} = \frac{4G\pi R^3 \rho_{\text{Cu}}}{3r^2}$$

Dunque, il campo gravitazionale generato dalla sfera assume questa forma:

$$g(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Cu}}r & r < R \\ \frac{4G\pi R^3 \rho_{\text{Cu}}}{3r^2} & r \geq R \end{cases} \quad (53)$$



In  $[0, R]$   $g(r)$  è strettamente crescente, mentre in  $[R, +\infty)$  è strettamente decrescente, quindi  $g(r)$  ha un massimo per  $r = R$ . Tutti e soli i punti

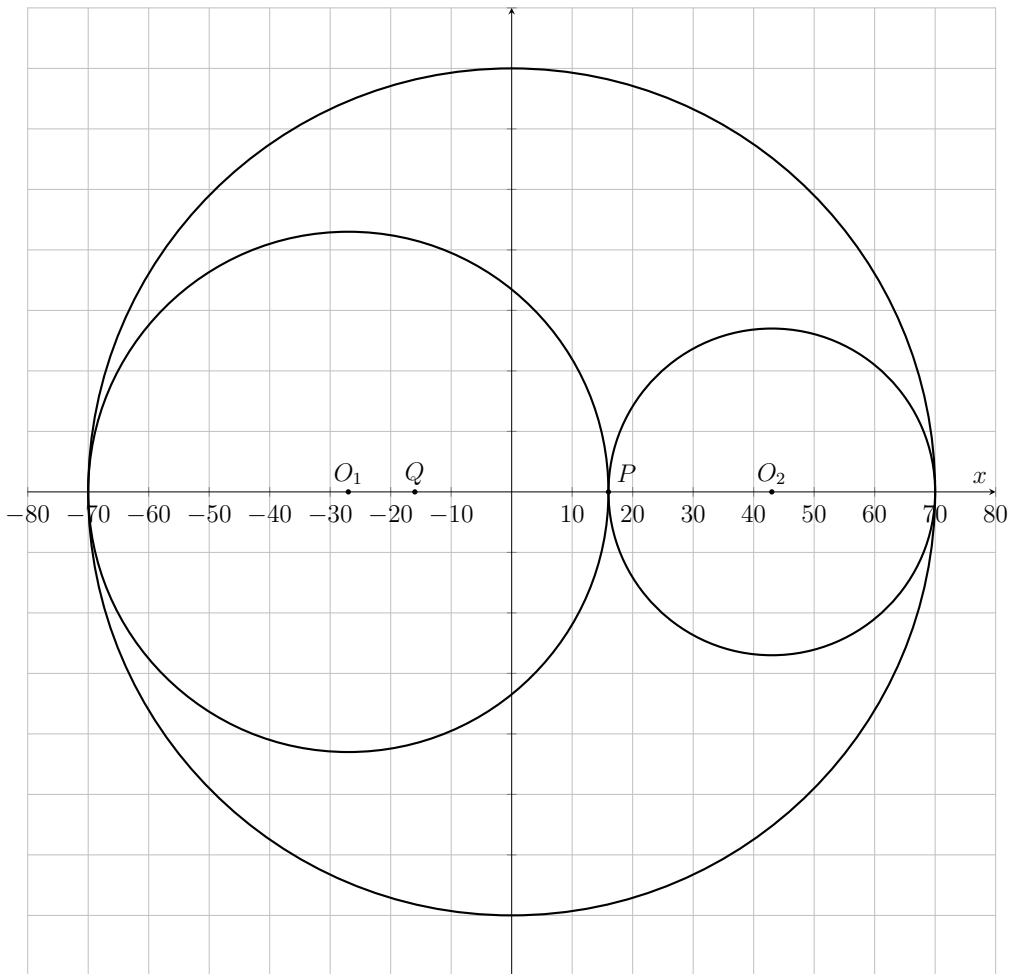


Figura 6

dello spazio in cui il campo gravitazionale è massimo sono i punti sulla superficie della sfera, e il modulo del campo in tali punti vale

$$g(R) = \frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Cu}}R = 1.75 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2 \quad (54)$$

2. Per risolvere i due punti successivi poniamo il sistema di riferimento come in Figura 6, con l'asse  $x$  passante per il diametro della sfera contenente i centri delle due cavità, l'origine al centro della sfera, e verso positivo uscente dal lato in cui si trova la cavità più piccola.

Dimostriamo innanzitutto il seguente “Lemma”:

**Lemma 12.1.** *Nello studio di un problema di gravitazione, è possibile porre in un punto  $A$  vuoto (ossia in cui non è posta nessuna massa) dello spazio due masse fittizie  $dm$  e  $-dm$ .*

*Dimostrazione.* Chiaramente il campo gravitazionale generato da una massa nulla è nullo in ogni punto dello spazio: quindi ciò che dobbiamo dimostrare è che ponendo  $dm$  e  $-dm$  nello stesso punto, il campo rimane uniformemente nullo. Chiamando  $\hat{x}$  il versore che indica la direzione da  $A$  al punto dello spazio nel quale calcoliamo il campo, il campo generato da  $dm$  a una distanza  $x$  da  $A$  vale  $\vec{g}_+^{\rightarrow}(\vec{x}) = -\frac{G \cdot dm}{x^2} \hat{x}$ , e analogamente il campo generato da  $-dm$  vale  $\vec{g}_-^{\rightarrow}(\vec{x}) = -\frac{G \cdot (-dm)}{x^2} \hat{x}$ . È immediato notare che  $\vec{g}_+^{\rightarrow}(\vec{x}) + \vec{g}_-^{\rightarrow}(\vec{x}) = 0 \forall \vec{x}$ .  $\square$

Per il Lemma (12.1) possiamo sostituire le due cavità con due coppie di sfere, in cui in ogni coppia una sfera ha densità  $+\rho_{Cu}$  e l'altra  $-\rho_{Cu}$ . Le due nuove sfere con massa positiva unite alla sfera data formano una sfera piena di raggio  $R$ , identica a quella studiata nel punto 1. Dunque il sistema che studiamo è formato da questa sfera e da due sfere di densità  $-\rho_{Cu}$ , di raggi rispettivamente  $r_1$  e  $r_2$ .

La sfera con raggio  $r_1$  ha centro in  $O_1$  di coordinata  $o_1 = -R + r_1$ , ma notando che  $r_1 + r_2 = R$  si ricava  $o_1 = -r_2$ , e analogamente  $o_2 = r_1$ .

Chiamiamo  $\vec{g}_+^{\rightarrow}(x)$  il campo generato dalla sfera di raggio  $R$ ,  $\vec{g}_{1,-}^{\rightarrow}(x)$  quello generato dalla sfera di raggio  $r_1$  e  $\vec{g}_{2,-}^{\rightarrow}(x)$  quello generato dalla sfera di raggio  $r_2$ .

Ora osserviamo che chiamando  $P'$  il punto di tangenza delle due sfere di massa negativa, il campo gravitazionale in  $P'$  è nullo. Questo avviene perché:

- Il punto  $P'$  ha coordinata  $x_{P'} = r_1 - r_2$ , quindi

$$\vec{g}_+^{\rightarrow}(x_{P'}) = -\frac{4}{3}G\pi\rho_{Cu}(r_1 - r_2)\hat{x}$$

- Il punto  $P'$  si trova sulla superficie della sfera di raggio  $r_1$ , quindi

$$\vec{g}_{1,-}^{\rightarrow}(x_{P'}) = -\frac{4}{3}G\pi(-\rho_{Cu})r_1\hat{x} = \frac{4}{3}G\pi\rho_{Cu}r_1\hat{x}$$

- Analogamente

$$\overrightarrow{g_{2,-}}(x_{P'}) = -\frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Cu}}r_2\hat{x},$$

dove il segno - deriva dal fatto che, al contrario dei casi precedenti, il centro della sfera è situato a destra del punto  $P'$  in cui calcolo il campo.

Notando che  $\overrightarrow{g_+}(x_{P'}) + \overrightarrow{g_{1,-}}(x_{P'}) + \overrightarrow{g_{2,-}}(x_{P'}) = 0$ , si ottiene che  $P'$  è il punto cercato (il modulo del campo è sempre non negativo, quindi se si annulla abbiamo un punto di minimo). La distanza richiesta è perciò

$$|x_{P'}| = r_1 - r_2 = 16 \text{ cm.}$$

3. Dal punto 2 sappiamo che  $P \equiv P'$ , quindi essendo l'origine dell'asse  $x$  coincidente con il centro della sfera più grande, abbiamo che  $x_Q = r_2 - r_1$ , e vogliamo calcolare  $g(x_Q)$ .

Per farlo sfruttiamo il principio di sovrapposizione di campi, considerando le stesse tre sfere del punto 2 e utilizzando ogni volta l'opportuna espressione della (53), ponendo attenzione ai segni:

$$\overrightarrow{g_+}(x_{Q'}) = -\frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Cu}}(r_2 - r_1)\hat{x} = \frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Cu}}(r_1 - r_2)\hat{x}$$

Notiamo che  $x_{Q'} = -16 \text{ cm} > o_1$ , quindi  $Q$  si trova a destra di  $O'$ , e perciò

$$\overrightarrow{g_{1,-}}(x_{Q'}) = -\frac{4}{3}G\pi(-\rho_{\text{Cu}})\overline{O_1Q}\hat{x} = \frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Cu}}(2r_2 - r_1)\hat{x}$$

per l'ultima componente è necessario notare che  $\overline{QO_2} > r_2$  e che  $O_2$  si trova alla destra di  $Q$ , quindi

$$\overrightarrow{g_{2,-}}(x_{Q'}) = \frac{4G\pi r_2^3(-\rho_{\text{Cu}})}{3\overline{QO_2}^2}\hat{x} = -\frac{4G\pi r_2^3\rho_{\text{Cu}}}{3(r_1 - r_2 + r_1)^2}\hat{x} = \frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Cu}}r_2^3 \cdot \frac{-1}{(2r_1 - r_2)^2}\hat{x}$$

Perciò possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
\vec{g}(x_{Q'}) &= \vec{g}_+^{\rightarrow}(x_{Q'}) + \vec{g}_{1,-}^{\rightarrow}(x_{Q'}) + \vec{g}_{2,-}^{\rightarrow}(x_{Q'}) = \\
&= \frac{4}{3}G\pi\rho_{Cu} \left[ r_1 - r_2 + 2r_2 - r_1 - \frac{r_2^3}{(2r_1 - r_2)^2} \right] \hat{x} = \\
&= \frac{4}{3}G\pi\rho_{Cu}r_2 \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{2r_1 - r_2} \right)^2 \right] \hat{x}
\end{aligned}$$

Dunque

$$g(x_Q) = \frac{4}{3}G\pi\rho_{Cu}r_2 \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{2r_1 - r_2} \right)^2 \right] = 5.35 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$$

Per completezza riportiamo il risultato che si ottiene calcolando il campo gravitazionale in ogni punto di coordinata  $x$ , con  $|x| \leq R$ . Il procedimento per ricavarlo è assolutamente identico a quanto fatto nel punto 3, dove però bisogna porre attenzione alla posizione del punto rispetto alle sfere di centri  $O_1$  e  $O_2$  e distinguere due casi.

$$\vec{g}(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}G\pi\rho_{Cu}r_2 \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{x - r_1} \right)^2 \right] \hat{x} & -R \leq x \leq r_1 - r_2 \\ \frac{4}{3}G\pi\rho_{Cu}r_1 \left[ \left( \frac{r_1}{x + r_2} \right)^2 - 1 \right] \hat{x} & r_1 - r_2 \leq x \leq R \end{cases} \quad (55)$$

Imponendo  $\vec{g}(x) = 0$  nella (55) si trova la soluzione del punto 2, dimostrando anche l'unicità del punto cercato, che nel testo del problema era stata supposta. Invece ponendo  $x = r_2 - r_1$  si ottiene il risultato del punto 3.

In particolare, se non venisse l'idea di assumere logico il fatto che il campo gravitazionale si annulli nel punto di tangenza tra le due cavità (il motivo "morale" per cui avviene ciò è che in quel punto tutti e 3 i campi dipendono linearmente dalla distanza dai centri delle sfere, e il contributo  $r_1 - r_2$  dato dalla porzione di sfera con massa positiva compensa perfettamente i contributi  $r_1$  e  $r_2$  (con opportuno segno dato dalla disposizione spaziale) delle due sfere con massa negativa), trovare l'equazione (55) è il modo ottimale per risolvere contemporaneamente i punti 2 e 3.